



Universidad Autónoma de San Luis Potosí  
Facultad de Ingeniería  
Centro de Investigación y Estudios de Posgrado

# Validación de trayectorias del sistema neuromotor de personas sanas bajo el enfoque de Control Óptimo.

## T E S I S

Que para obtener el grado de:  
Maestro en Ingeniería Eléctrica  
Opción: Control Automático

Presenta:

**Ing. Diana Elisa Alvarado Sosa**

Asesor:

**Dr. Emilio Jorge González Galván**

Coasesor:

**Dr. Alejandro González de Alba**





---

## Agradecimientos

---

A mis padres Elisa y Pedro y a mis hermanos Raúl y Cristóbal por darme su apoyo incondicional y por sus palabras de motivación en todo momento.

Al Dr. Emilio Jorge González Galván y al Dr. Alejandro González de Alba, por compartirme sus conocimientos, por el apoyo brindado y darme la oportunidad de ser parte de su grupo de investigación y haber confiado en mí para el desarrollo de mis estudios de posgrado.

A los profesores del CIEP por las asesorías brindadas, dentro y fuera del salón de clase.

A Juan Carlos que estuvo conmigo a lo largo de esta etapa, por su apoyo, su comprensión y su ayuda.

A mis compañeros de laboratorio, Ubaldo, Jorge, Alejandro, Miguel, Ángel, Daniel y a mis compañeros del laboratorio CEECM por los momentos compartidos y por hacer una estancia más amena en el posgrado.

Un agradecimiento especial a Ubaldo, Jorge, Miguel, Juan Carlos, Rosa, Ángel, Claudia, Dora, Diana, Yuniel, Agustín, Fernando y Juan por el apoyo brindado durante la realización de las pruebas experimentales.

Al coordinador del posgrado Dr. Jorge Alberto Morales Saldaña por la ayuda brindada en todo momento.



---

# Índice General

---

Capítulos	Página
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Esquema de activación muscular</b>	<b>7</b>
1.1. Bases del control motor . . . . .	7
1.1.1. Problemas de control motor . . . . .	8
1.1.2. Teorías de control motor . . . . .	9
1.1.3. Niveles de construcción de movimientos . . . . .	12
1.2. Sinergias musculares . . . . .	14
1.2.1. Modelo de sinergias musculares . . . . .	16
1.3. Fuerza muscular . . . . .	18
1.4. Conclusiones del Capítulo 1 . . . . .	20
<b>2. Fundamentos de la Teoría de Control Óptimo</b>	<b>21</b>
2.1. Optimización . . . . .	21

2.2.	Solución del problema de esfuerzo mínimo . . . . .	23
2.2.1.	Funcionales de primer orden . . . . .	24
2.2.2.	Funcionales de segundo orden . . . . .	27
2.2.3.	Problema de análisis . . . . .	28
2.3.	Solución del problema de tiempo mínimo . . . . .	30
2.3.1.	Restricciones de la ley de control . . . . .	31
2.3.2.	Problema de análisis . . . . .	34
2.4.	Conclusiones del Capítulo 2 . . . . .	39
<b>3.</b>	<b>Estimación de Fuerzas por medio de Electromiografía</b>	<b>41</b>
3.1.	Relación EMG-Fuerza . . . . .	41
3.2.	Adquisición de datos EMG . . . . .	42
3.2.1.	Sensores para la adquisición de datos EMG . . . . .	42
3.2.2.	Señales EMG superficiales . . . . .	44
3.3.	Modelo EMG-Fuerza . . . . .	46
3.4.	Conclusiones del Capítulo 3 . . . . .	48
<b>4.</b>	<b>Validación experimental</b>	<b>49</b>
4.1.	Plataforma experimental . . . . .	49
4.1.1.	Controlador de impedancia cinemático. . . . .	49
4.1.2.	Sensor MYO Gesture Control Armband . . . . .	51
4.2.	Resultados experimentales . . . . .	53
4.2.1.	Solución al problema de esfuerzo mínimo. . . . .	54
4.2.2.	Solución al problema de tiempo mínimo. . . . .	66
4.2.3.	Resultados experimentales de estimación de fuerza por medio de Electromiografía. . . . .	101

4.3. Conclusiones del Capítulo 4 . . . . .	114
<b>Conclusiones</b>	<b>117</b>
<b>Referencias</b>	<b>121</b>



---

## Lista de Figuras

---

1.1. Procedimiento para la identificación de sinergias musculares [4] . . . . .	15
1.2. Modelo de sinergia muscular . . . . .	17
1.3. Modelos de sinergias musculares . . . . .	19
2.1. Grafica del perfil de fuerza esperado. . . . .	30
2.2. Políticas de control admisibles . . . . .	32
2.3. Política de control óptima $U^*$ . . . . .	33
2.4. Sistema masa - resorte - amortiguador . . . . .	34
2.5. Relación $\omega_n T$ contra $\bar{K}x_f$ para varios valores de $\zeta$ . . . . .	38
2.6. Relación $\tau/T$ contra $\bar{K}x_f$ para varios valores de $\zeta$ . . . . .	38
3.1. Señal sEMG del músculo flexor del antebrazo durante pruebas de contracción.	44
3.2. Adquisición de datos sEMG a partir de electrodos. . . . .	45
3.3. Señal sEMG y $EMG_{RMS}$ del músculo flexor del antebrazo durante pruebas de contracción. . . . .	46

3.4. Señal sEMG y $EMG_{RMS}$ del músculo flexor del antebrazo durante pruebas de contracción. . . . .	47
4.1. Sistema masa-resorte-amortiguador ideal que define el comportamiento del control de impedancia en el manipulador . . . . .	50
4.2. Diagrama de bloques del control de impedancia implementado en el robot FANUC LR Mate 200iC. . . . .	50
4.3. Ubicación de los sensores del brazalete MYO Gesture Control Armband. . . . .	52
4.4. Posicionamiento del sensor MYO Gesture Control Armband en uno de los sujetos. . . . .	53
4.5. Restricciones de movimiento para los sujetos de estudio. . . . .	54
4.6. Perfil de fuerza medida de dos pruebas realizadas por el sujeto de control 1. . . . .	56
4.7. Perfil de fuerza medida de dos pruebas realizadas por el sujeto de control 2. . . . .	57
4.8. Perfil de fuerza medida de dos pruebas realizadas por el sujeto de control 3. . . . .	58
4.9. Perfil de fuerza medida de dos pruebas realizadas por el sujeto de control 4. . . . .	59
4.10. Perfil de fuerza medida de dos pruebas realizadas por el sujeto de control 5. . . . .	60
4.11. Perfil de fuerza medida de dos pruebas realizadas por el sujeto de control 6. . . . .	61
4.12. Perfil de fuerza medida de dos pruebas realizadas por el sujeto de control 7. . . . .	62
4.13. Perfil de fuerza medida de dos pruebas realizadas por el sujeto de control 8. . . . .	63
4.14. Perfil de fuerza medida de dos pruebas realizadas por el sujeto de control 9. . . . .	64
4.15. Perfil de fuerza medida de dos pruebas realizadas por el sujeto de control 10. . . . .	65
4.16. Porcentaje de error en la fuerza positiva para la solución del problema de esfuerzo mínimo. . . . .	66
4.17. Porcentaje de error en la fuerza negativa para la solución del problema de esfuerzo mínimo. . . . .	66
4.18. Porcentaje de error $\%e_{\tau/T}$ para la solución del problema de esfuerzo mínimo. . . . .	67
4.19. Relación $\tau/T$ contra $\bar{K}x_f$ para varios valores de $\xi$ . . . . .	68

4.20. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 1. . . . .	69
4.21. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 1. . . . .	69
4.22. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 2. . . . .	70
4.23. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 2. . . . .	70
4.24. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 3. . . . .	71
4.25. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 3. . . . .	71
4.26. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 4. . . . .	72
4.27. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 4. . . . .	72
4.28. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 5. . . . .	73
4.29. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 5. . . . .	73
4.30. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 6. . . . .	74
4.31. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 6. . . . .	74
4.32. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 7. . . . .	75
4.33. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 7. . . . .	75
4.34. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 8. . . . .	76
4.35. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 8. . . . .	76
4.36. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 9. . . . .	77
4.37. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 9. . . . .	77
4.38. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 10. . . . .	78
4.39. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 10. . . . .	78
4.40. Porcentaje de error $\%e_{\tau/T}$ para la solución del problema de tiempo mínimo considerando $\xi = 0.53$ . . . . .	79
4.41. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 1. . . . .	80
4.42. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 1. . . . .	80
4.43. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 2. . . . .	81

4.44. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 2. . . . .	81
4.45. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 3. . . . .	82
4.46. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 3. . . . .	82
4.47. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 4. . . . .	83
4.48. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 4. . . . .	83
4.49. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 5. . . . .	84
4.50. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 5. . . . .	84
4.51. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 6. . . . .	85
4.52. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 6. . . . .	85
4.53. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 7. . . . .	86
4.54. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 7. . . . .	86
4.55. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 8. . . . .	87
4.56. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 8. . . . .	87
4.57. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 9. . . . .	88
4.58. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 9. . . . .	88
4.59. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 10. . . . .	89
4.60. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 10. . . . .	89
4.61. Porcentaje de error $\%e_{\tau/T}$ para la solución del problema de tiempo mínimo considerando $\xi = 0.375$ . . . . .	90
4.62. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 1. . . . .	91
4.63. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 1. . . . .	91
4.64. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 2. . . . .	92
4.65. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 2. . . . .	92
4.66. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 3. . . . .	93
4.67. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 3. . . . .	93

4.68. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 4. . . . .	94
4.69. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 4. . . . .	94
4.70. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 5. . . . .	95
4.71. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 5. . . . .	95
4.72. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 6. . . . .	96
4.73. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 6. . . . .	96
4.74. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 7. . . . .	97
4.75. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 7. . . . .	97
4.76. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 8. . . . .	98
4.77. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 8. . . . .	98
4.78. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 9. . . . .	99
4.79. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 9. . . . .	99
4.80. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 10. . . . .	100
4.81. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 10. . . . .	100
4.82. Porcentaje de error $\%e_{\tau/T}$ para la solución del problema de tiempo mínimo considerando $\xi = 0.707$ . . . . .	101
4.83. Estimación del perfil de fuerza a partir de la $\hat{X}_{20}$ considerando todo el perfil de fuerza aplicado por el sujeto de control 1. . . . .	103
4.84. Estimación del perfil de fuerza a partir de la $\hat{X}_{20+}$ considerando el perfil de fuerza positiva aplicado por el sujeto de control 1. . . . .	104
4.85. Estimación del perfil de fuerza a partir de la $\hat{X}_{20-}$ considerando el perfil de fuerza negativa aplicado por el sujeto de control 1. . . . .	105
4.86. Estimación del perfil de fuerza a partir de la $\hat{X}_{10+}$ considerando el perfil de fuerza positiva aplicado por el sujeto de control 1. . . . .	106
4.87. Estimación del perfil de fuerza a partir de la $\hat{X}_{10-}$ considerando el perfil de fuerza negativa aplicado por el sujeto de control 1. . . . .	107

4.88. Estimación del perfil de fuerza a partir de la $\hat{X}_{30+}$ considerando el perfil de fuerza positiva aplicado por el sujeto de control 1. . . . .	108
4.91. Estimación del perfil de fuerza a partir de la $\hat{X}_{20+}$ considerando el perfil de fuerza positivo aplicado por el sujeto de control 2. . . . .	108
4.89. Estimación del perfil de fuerza a partir de la $\hat{X}_{30-}$ considerando el perfil de fuerza negativa aplicado por el sujeto de control 1. . . . .	109
4.90. Error en la fuerza estimada con respecto a la fuerza aplicada por el sujeto de control 1. La línea roja representa el error en la estimación de la fuerza negativa y la línea azul representa el error en la estimación de la fuerza positiva. . . . .	110
4.92. Estimación del perfil de fuerza a partir de la $\hat{X}_{20-}$ considerando el perfil de fuerza negativo aplicado por el sujeto de control 2. . . . .	110
4.93. Estimación del perfil de fuerza a partir de la $\hat{X}_{20+}$ considerando el perfil de fuerza positivo aplicado por el sujeto de control 3. . . . .	111
4.94. Estimación del perfil de fuerza a partir de la $\hat{X}_{20-}$ considerando el perfil de fuerza negativo aplicado por el sujeto de control 3. . . . .	111
4.95. Estimación del perfil de fuerza a partir de la $\hat{X}_{20+}$ considerando el perfil de fuerza positivo aplicado por el sujeto de control 8. . . . .	112
4.96. Estimación del perfil de fuerza a partir de la $\hat{X}_{20-}$ considerando el perfil de fuerza negativo aplicado por el sujeto de control 8. . . . .	112
4.97. Estimación del perfil de fuerza a partir de la $\hat{X}_{20+}$ considerando el perfil de fuerza positivo aplicado por el sujeto de control 9. . . . .	113
4.98. Estimación del perfil de fuerza a partir de la $\hat{X}_{20-}$ considerando el perfil de fuerza negativo aplicado por el sujeto de control 9. . . . .	113
4.99. Error RMS de la estimación de fuerza positivo y negativo. . . . .	114

---

## Lista de Tablas

---

2.1. Condiciones de frontera para el problema de esfuerzo mínimo . . . . .	29
2.2. Condiciones de frontera para el problema de tiempo mínimo . . . . .	32
4.1. Nomenclatura, símbolos y unidades de los componentes del control de impedancia para movimiento traslacional. . . . .	51
4.2. Especificaciones de Hardware del brazalete MYO . . . . .	52
4.3. Condiciones de frontera para la solución del problema de esfuerzo mínimo . .	55
4.4. Resultados de fuerza medidos y porcentaje de error de la máxima fuerza ejercida por el sujeto 1 contra la fuerza calculada bajo el enfoque de control óptimo. . . . .	55
4.5. Porcentaje de error del tiempo $\tau$ del sujeto 1. . . . .	56
4.6. Resultados de fuerza medidos y porcentaje de error de la máxima fuerza ejercida por el sujeto 2 contra la fuerza calculada bajo el enfoque de control óptimo. . . . .	56
4.7. Porcentaje de error del tiempo $\tau$ del sujeto 2. . . . .	57

4.8. Resultados de fuerza medidos y porcentaje de error de la máxima fuerza ejercida por el sujeto 3 contra la fuerza calculada bajo el enfoque de control óptimo. . . . .	57
4.9. Porcentaje de error del tiempo $\tau$ del sujeto 3. . . . .	58
4.10. Resultados de fuerza medidos y porcentaje de error de la máxima fuerza ejercida por el sujeto 4 contra la fuerza calculada bajo el enfoque de control óptimo. . . . .	58
4.11. Porcentaje de error del tiempo $\tau$ del sujeto 4. . . . .	59
4.12. Resultados de fuerza medidos y porcentaje de error de la máxima fuerza ejercida por el sujeto 5 contra la fuerza calculada bajo el enfoque de control óptimo. . . . .	60
4.13. Porcentaje de error del tiempo $\tau$ del sujeto 5. . . . .	60
4.14. Resultados de fuerza medidos y porcentaje de error de la máxima fuerza ejercida por el sujeto 6 contra la fuerza calculada bajo el enfoque de control óptimo. . . . .	61
4.15. Porcentaje de error del tiempo $\tau$ del sujeto 6. . . . .	61
4.16. Resultados de fuerza medidos y porcentaje de error de la máxima fuerza ejercida por el sujeto 7 contra la fuerza calculada bajo el enfoque de control óptimo. . . . .	62
4.17. Porcentaje de error del tiempo $\tau$ del sujeto 7. . . . .	62
4.18. Resultados de fuerza medidos y porcentaje de error de la máxima fuerza ejercida por el sujeto 8 contra la fuerza calculada bajo el enfoque de control óptimo. . . . .	63
4.19. Porcentaje de error del tiempo $\tau$ del sujeto 8. . . . .	63
4.20. Resultados de fuerza medidos y porcentaje de error de la máxima fuerza ejercida por el sujeto 9 contra la fuerza calculada bajo el enfoque de control óptimo. . . . .	64
4.21. Porcentaje de error del tiempo $\tau$ del sujeto 9. . . . .	64

4.22. Resultados de fuerza medidos y porcentaje de error de la máxima fuerza ejercida por el sujeto 10 contra la fuerza calculada bajo el enfoque de control óptimo. . . . .	65
4.23. Porcentaje de error del tiempo $\tau$ del sujeto 10. . . . .	65
4.24. Condiciones de frontera para la solución del problema de tiempo mínimo . .	67
4.25. Parámetros utilizados en las pruebas experimentales para la razón de amortiguamiento $\xi$ y la frecuencia natural del sistema $\omega_n$ . . . . .	67
4.26. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 1. . . .	69
4.27. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 2. . . .	70
4.28. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 3. . . .	71
4.29. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 4. . . .	72
4.30. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 5. . . .	73
4.31. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 6. . . .	74
4.32. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 7. . . .	75
4.33. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 8. . . .	76
4.34. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 9. . . .	77
4.35. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 10. . . .	78
4.36. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 1. . . .	80
4.37. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 2. . . .	81
4.38. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 3. . . .	82
4.39. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 4. . . .	83
4.40. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 5. . . .	84
4.41. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 6. . . .	85
4.42. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 7. . . .	86
4.43. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 8. . . .	87
4.44. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 9. . . .	88

4.45. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 10. . . .	89
4.46. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 1. . . .	91
4.47. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 2. . . .	92
4.48. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 3. . . .	93
4.49. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 4. . . .	94
4.50. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 5. . . .	95
4.51. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 6. . . .	96
4.52. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 7. . . .	97
4.53. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 8. . . .	98
4.54. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 9. . . .	99
4.55. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 10. . . .	100

---

# Introducción

---

El cuerpo humano es un sistema articulado bastante complejo capaz de realizar una amplia gama de movimientos y tareas complejas de manipulación a diferentes velocidades y sobre una variedad de superficies, además de combinar de forma flexible múltiples tareas y capaz de adaptarse a perturbaciones desconocidas. A lo largo de su proceso evolutivo el hombre ha logrado tener control de sus músculos de manera que le permita realizar movimiento con un notable grado de precisión, rapidez y pericia. El estudio del cuerpo humano y sus movimientos han sido durante mucho tiempo de gran interés para investigadores de diversas ramas como la fisiología, anatomía, biomédica, neurociencia, ingeniería en control, al igual de servir como inspiración para el diseño de robots humanoides [1].

En la literatura se presentan estudios enfocados en solucionar diversos problemas considerando estas diversas ramas. Para los problemas de movimientos rápidos y complejos, la optimización matemática es una herramienta útil para su solución, en el caso de tener sistemas mecánicos antropomórficos, de tal forma que los movimientos esperados se realicen de manera eficiente, y sean capaces de reproducir estas trayectorias. Existen otros estudios que ayudan a personas que tienen alguna lesión en el sistema neuromotor o en la médula espinal, dando una pauta para la realización de una serie de ejercicios de rehabilitación, o como ayuda para el aprendizaje óptimo de una maniobra. Muchos de los estudios que se realizan para el conocimiento del comportamiento humano ante el ambiente es el estudio del equilibrio humano, o relacionados con deportistas donde se busca encontrar la dinámica del

movimiento de la extremidad y cuantificar la actividad muscular.

## Planteamiento del problema

El presente trabajo de tesis se concentra en validar que el movimiento descrito por una extremidad humana puede ser modelado utilizando un esquema de control óptimo, a partir de condiciones controladas. Se considera que este esquema optimiza algún aspecto de la tarea sin considerar las trayectorias seguidas por las extremidades de las personas. Durante la realización de este movimiento se graban las señales de activación muscular con la finalidad de encontrar una relación de estas señales y la fuerza aplicada por la persona. Un estudio como el que se propone en este trabajo, que considera personas sanas, podría servir como apoyo al diagnóstico de personas con problemas neuromotores. Como posibles aplicaciones se considera el desarrollo de aparatos de rehabilitación o prótesis.

Algunos investigadores como Oussama Khatib, han considerado que el cuerpo humano realiza siempre sus movimientos de manera óptima [2]. Considerando el gran número de grados de libertad con las que cuenta una persona, es factible que para cualquier tarea, especialmente aquellas que son altamente redundantes, la afirmación de Oussama Khatib no sea válida. Por lo que la premisa de este trabajo de tesis es que, con el entrenamiento adecuado, se optimiza un criterio de la maniobra, sin considerar las trayectorias seguidas por las extremidades del ser humano.

## Objetivos de la Tesis

### Objetivo general

Validar que el sistema neuromotor de una persona sana sea capaz de realizar una maniobra en forma tal que se cumplan uno o más criterios de la teoría de control óptimo.

### Objetivos particulares

1. Aplicar la teoría de control óptimo para el planteamiento y solución del problema bajo el enfoque de esfuerzo y tiempo mínimo.
-

2. Diseñar el experimento que permita la ejecución de las maniobras planteadas, por parte de una persona sin problemas neurológicos.
3. Validar experimentalmente la solución obtenida bajo el enfoque de control óptimo con sujetos de control.
4. Corroborar que las trayectorias seguidas por los sujetos que participan en el experimento, cumplen con una condición de optimización.
5. Usar un sensor electromiográfico que permita el estudio preliminar de la activación muscular y la relación al control del movimiento.
6. Redactar la tesis y artículo.

## Metodología

En este trabajo de tesis se consideraron dos enfoques; a) teoría de control óptimo, para la solución de los problemas de esfuerzo y, tiempo mínimo, donde, a partir de una plataforma experimental, los sujetos de control realizan pruebas que permitan validar la optimización de criterios específicos de la maniobra; b) enfoque de activación muscular, que tiene como objetivo la estimación de la fuerza aplicada por los sujetos de control, a partir de señales electromiográficas. Para la validación de estos problemas se realizan pruebas con 10 sujetos de control con características, como peso, edad y estatura, diferentes.

Para la solución del problema de esfuerzo mínimo se plantea estudiar un sistema conformado por una masa, la cual deberá llevarse de un punto inicial  $A$  a un punto final  $B$  aplicando la mínima fuerza; a través del desarrollo de control óptimo y considerando estas condiciones se encuentra el perfil de fuerza para realizar la maniobra. Para la validación de esta teoría se realizan pruebas experimentales con los sujetos de control, sin historial de enfermedades en el sistema neuromotor, a quienes se les instruyó realizar la maniobra, para después analizar la fuerza aplicada y compararla con el perfil de fuerza obtenido en la teoría.

Considerando la solución del problema de tiempo mínimo se plantea estudiar un sistema masa resorte amortiguador, donde busca llevar la masa de un punto inicial  $A$  a un punto final  $B$  en el menor tiempo posible. La teoría de control óptimo plantea que para realizar esta maniobra es necesario que exista un cambio de fuerza positivo a negativo, y el tiempo en

---

el que se debe realizar este cambio está dado por el valor del resorte y el amortiguador. Para validar esta teoría se realizan pruebas a los sujetos de control, a quienes se les entrenó para realizar la maniobra, con la finalidad de estudiar el tiempo en el que se realiza el cambio en el sentido de la fuerza y compararlo con el tiempo óptimo obtenido en la teoría.

Para la solución de estos problemas se busca que los sujetos realicen la maniobra moviendo únicamente la muñeca. Durante la realización de las pruebas para la solución del problema de esfuerzo y tiempo mínimo se les colocó a los sujetos de control un sensor electromiográfico en el antebrazo, con el que se medirá la activación muscular al realizar estas maniobras, por medio de estas señales y utilizando el método de mínimos cuadrados se busca estimar la fuerza que está siendo aplicada por el movimiento de la muñeca de los sujetos de control.

## Contenido de los capítulos

A continuación se menciona un breve resumen acerca del contenido de los capítulos de la presente tesis:

- **Capítulo 1:** En este capítulo se abordan las bases del control motor, la cual es una disciplina que estudia los procesos que se llevan a cabo para la ejecución de una tarea motora, su aprendizaje y su evolución a lo largo de la vida de las personas. El sistema nervioso central es el responsable de escoger una solución adecuada para la ejecución de una tarea, por lo que existen teorías sobre el control motor, las cuales reflejan la forma en que el movimiento es controlado por el cerebro. A lo largo de la vida de las personas se lleva un desarrollo en el sistema motor y la construcción de los movimientos.
  - **Capítulo 2:** En este capítulo se abordan los fundamentos de la teoría de control óptimo, el cual busca determinar las señales de control que permiten minimizar algún índice de desempeño. Los índices o problemas que se buscan optimizar son el esfuerzo y el tiempo. Por lo que se muestra la señal de control o el perfil de fuerza, tomando en cuenta las condiciones de frontera planteadas. Para la solución del problema de esfuerzo mínimo se especifica el comportamiento del perfil de fuerza que permita llevar el sistema, conformado por una masa, de un estado inicial a un estado final. Para la solución del problema de tiempo mínimo se obtiene una solución general, la cual está en función de parámetros adimensionales que dependen de los componentes del sistema. Se busca que,
-

para mover la masa de un punto inicial a un punto final deseado, se aplique el máximo esfuerzo durante todo el periodo de duración de la maniobra. Por las características de este sistema se realiza un cambio de fuerza y el tiempo de realización de la maniobra es el índice que se busca optimizar.

- **Capítulo 3:** En este capítulo se plantea la relación que existe entre las señales electromiográficas, las cuales definen la activación muscular, y la fuerza aplicada por las articulaciones activadas durante la tarea. Existen diversos sensores EMG que permiten la obtención de las señales electromiográficas, en este caso se utiliza el sensor Myo Gesture Control Armband, el cual es un brazalete conformado por 8 sensores no invasivos, con los cuales se obtienen las señales EMG superficiales, estas señales pasan por un proceso de filtrado de tal forma que obtenemos el valor promedio de la raíz cuadrada móvil (RMS, por sus siglas en inglés), de la señal de activación muscular. A partir de esta señal  $EMG_{RMS}$  y de un modelo del filtro de respuesta finita al impulso (FIR, por sus siglas en inglés), es posible encontrar una relación que permita encontrar la fuerza a partir del movimiento de la muñeca. Para esta solución se plantea el método de mínimos cuadrados lineales, con los cuales se pueden obtener coeficientes que definen la activación de los músculos flexores y extensores de la muñeca.
  - **Capítulo 4:** En este capítulo se muestran los resultados de las pruebas experimentales realizadas para la comprobación de la teoría propuesta en el capítulo 2, para la solución del problema de esfuerzo mínimo y tiempo mínimo. Además se muestran los resultados encontrados para la estimación de fuerza planteada en el capítulo 3, donde se muestran las fuerzas estimadas a partir del planteamiento del modelo FIR de orden 10, 20 y 30.
  - **Conclusiones:** Se presentan las conclusiones del trabajo de tesis y las actividades futuras.
-



## Esquema de activación muscular

---

### 1.1. Bases del control motor

Controlar el movimiento que realizan las extremidades del cuerpo al realizar una maniobra como alcanzar un objeto, es un reto, ya que es necesario la coordinación de diversos músculos para activar las extremidades. Esta activación puede ser ejecutada por una variedad de patrones debido al gran número de músculos que actúan en cada articulación [3]. La complejidad del aparato musculo-esquelético y sus propiedades dinámicas permiten que los sistemas biológicos realicen una amplia variedad de tareas motoras y que implementen estrategias eficientes en el sistema nervioso central (SNC) [4].

Las teorías de control motor ayudan a describir la forma en que se controla un movimiento específico. Estas teorías reflejan diversas concepciones de cómo el cerebro controla el movimiento de una extremidad y la importancia de cada componente involucrado. Algunas de estas teorías toman al cerebro como una caja negra y se enfocan en estudiar como el ambiente interactúa con esta caja en la realización de las diversas tareas [5].

El control motor es la disciplina que estudia todos aquellos procesos que subyacen a la ejecución de una tarea motora, su aprendizaje y su evolución a lo largo de la vida del individuo [6]. Por lo que está relacionado con el “dónde” y “cuándo” se producen los movimientos.

El problema ahora yace en como el SNC escoge entre la infinidad de soluciones para realizar una tarea motora determinada. Existen estudios que han revelado un patrón consistente y reproducible de comportamiento motor en los sujetos de estudio [7], [8]. Considerando el amplio número de articulaciones y músculos, se tiene una amplia variedad de grados de libertad, respecto a movimientos cinemáticos y dinámicos. Existe una amplia gama de patrones de activación muscular que llevan al mismo comportamiento cinemático

deseado, la solución de este problema motor fue sugerida por Bernstein en 1967 [9].

Bernstein formuló que para solucionar el principal problema del control motor con múltiples articulaciones, es necesario la eliminación de grados de libertad redundantes. Esta formulación se refería a la cinemática redundante de la mayoría de los movimientos naturales del humano. Bernstein hizo hincapié en que el cerebro humano no puede controlar variables de rendimiento poco predecibles. Cuando una persona repite un movimiento varias veces en condiciones externas reproducibles algunas características del movimiento como, el giro de las articulaciones, la fuerza en los músculos o la activación muscular presentan una reproducibilidad relativamente alta, en el caso de que no se tomen acciones correctivas estas características presentan una variabilidad considerable entre los ensayos [10]. Esto es, cuando un sujeto busca reproducir un movimiento deseado y este no intenta corregir o aprender la maniobra todas las características del movimiento como la cinemática, la dinámica y la electromiografía cambian. Sin embargo, existen variables internas, generadas por el sistema nervioso central, que están asociadas con el proceso del movimiento, las cuales se llaman variables controladas independientemente [11].

### 1.1.1. Problemas de control motor

Existen diversos problemas que pueden ser resueltos gracias al control motor, los cuales siguen sin solución en otros enfoques [12]. Estos pueden ser:

*Problema de postura-movimiento.* La transición de una postura estable a un movimiento intencional o viceversa, son movimientos característicos de la vida cotidiana de una persona. La esencia de este problema es considerar una postura de algún segmento del cuerpo, este se estabiliza de manera instintiva por las propiedades de los músculos y los reflejos de postura y de estiramiento, los cuales dependen de la resistencia a este cambio de postura obtenidos por fuerzas externas [13]. Von Holst y Mittelstaedt formularon un principio de referencia, esto implica que los mecanismos de estabilización de la postura, incluyendo los reflejos musculares, se dirigen a una nueva postura en lugar de inhibirlos cuando se produce un movimiento de manera intencional.

*Problema de co-activación.* La co-activación de un grupo de músculos opuestos es necesaria para acelerar y estabilizar el movimiento deseado; es también un mecanismo de estabilización de postura. Como tal, es necesario establecer la co-activación desde la posición inicial hasta la posición final para evitar la resistencia al movimiento. Por ejemplo, considerando el movimiento de una sola articulación, es necesario limitar el ángulo de la articulación  $r$ ,

---

para todos los músculos que actúan en el movimiento. Una vez que se inicia la maniobra, en la posición inicial los músculos están inactivos. Una vez que la articulación se mueva en un sentido entonces los músculos agonistas se activarán, mientras que cuando el movimiento de la articulación se realice en sentido contrario los músculos antagonistas se activarán.

*Control de múltiples músculos.* El sistema nervioso no solo utiliza los factores biomecánicos locales y los reflejos que influyen en las activaciones musculares, sino que también utiliza factores globales para controlar todos los músculos de manera específica para cada tarea. Un factor importante a considerar es la configuración de referencia del cuerpo humano determinado por medio de los grupos musculares. La activación de cada músculo dependerá de la diferencia que existe entre la posición de referencia contra la posición real del cuerpo. Las interacciones biomecánicas, aferentes y centrales entre los elementos neuromusculares tienden a minimizar la diferencia entre la posición real y la posición de referencia, esto se conoce como el principio de minimización de las interacciones. Este concepto se ha utilizado para la realización de diferentes movimientos cotidianos, por ejemplo el andar del ser humano.

*Problemas de guiado de múltiples grados de libertad sin redundancia.* La idea básica es suponer que algunas neurona espinales y supra espinales, las cuales se proyectan a neuronas motoras, pueden integrar señales propioceptivas de los músculos, articulación y la piel, para recibir señales aferentes, por ejemplo, tomar las coordenadas de la punta del dedo índice que se utiliza normalmente para apuntar objetos. Si la posición final del brazo es diferente a la deseada, entonces se envía una señal que ajuste la posición actual hasta llegar a la posición final deseada. Aunque existe un conjunto de posibles configuraciones para cada posición deseada, las cuales pueden ser redundantes, el proceso de minimización inicia por el cambio en las coordenadas del punto final resultando en un patrón único. Este patrón puede variar en el caso que exista una modificación intencional en la referencia, en las restricciones de la tarea o cambio en el sistema neuromuscular.

### 1.1.2. Teorías de control motor

El estudio de la causa y la naturaleza del movimiento del ser humano ha sido de especial interés para las nuevas teorías de control motor y su aplicación, ya que ayudan a entender cómo es que se realizan los movimientos y el proceso de aprendizaje motor. Existen diversas teorías sobre el control motor y cómo es que reflejan las concepciones existentes sobre la forma en la que el movimiento es controlado por el cerebro [14]. A continuación se detallan algunas de las teorías más comunes.

---

*Teoría refleja.* El neurofisiólogo Sir Charles Sherrington sentó las bases de la teoría refleja en 1906, la cual se proponía que los reflejos eran los componentes básicos del comportamiento complejo para realizar un movimiento objetivo. Este comportamiento lo describió en función de reflejos compuestos y su combinación sucesiva. Lo que él proponía es que un estímulo produciría una respuesta, la cual se convertiría en un estímulo de la siguiente respuesta y así sucesivamente [14]. El problema es que considerar un reflejo como una unidad básica del comportamiento no explica los movimientos espontáneos ni los voluntarios como formas aceptables de conducta. Tampoco explica que un solo estímulo pueda resultar en respuestas variadas que dependen de un contexto y de los comandos descendentes o la capacidad de realizar movimientos nuevos [15].

*Teoría jerárquica.* Esta teoría expone que el SNC se organiza de manera jerárquica, en áreas de asociación superior, corteza motora y niveles espinales de función motora; cada nivel superior ejerce control sobre el nivel inferior. El desarrollo motor normal es atribuido a la creciente corticalización del SNC que produce la aparición de niveles superiores de control sobre los reflejos de nivel inferior, minimizando así la influencia de otros factores. Esto quiere decir que la maduración del SNC es el agente primario para el desarrollo motor. Esta teoría ha ido evolucionando reconociendo que, dependiendo de la actividad realizada, cada nivel puede actuar sobre los otros niveles de tal forma que los reflejos no son los únicos factores determinantes del control motor, sino uno de los diversos procesos esenciales para la generación del movimiento [16].

*Teoría de la programación motora.* Se puede obtener una respuesta motora determinada tanto por los estímulos sensoriales como por un proceso central en ausencia de un estímulo o impulso, por lo que sería mejor considerar un patrón motor central. Esta teoría se apoya principalmente en el análisis de la locomoción en gastos, lo que sugiere que es posible realizar un movimiento en ausencia de alguna acción refleja, por lo que la red espinal neural podría producir un ritmo locomotor sin estímulos sensoriales, siendo posible realizar un movimiento sin necesidad de una retroalimentación [17]. Esta teoría introduce el concepto de generadores de patrones centrales (GPC), que son circuitos neurales espinales específicos capaces de generar movimientos, como caminar y correr, por sí mismos, donde los estímulos sensoriales entrantes ejercen un importante papel modulador.

*Teoría de sistemas.* Esta teoría afirma que los movimientos no son dirigidos ni central ni periféricamente, sino que emergen de la interacción de muchos sistemas [9]. Se considera que el cuerpo es un sistema mecánico el cual está sujeto a fuerzas externas e internas. Un mismo comando central puede ocasionar movimientos muy diferentes debido a la interacción entre las fuerzas externas y las variaciones de las condiciones iniciales. Esta teoría intenta

---

explicar cómo afectan las condiciones iniciales a las características del movimiento [18]. Con esta teoría se es capaz de predecir el comportamiento de manera más real, a comparación de las anteriores, ya que no solo se consideran los aportes del sistema nervioso central sino que también se toman en cuenta las contribuciones de diferentes sistemas, así como la fuerza de gravedad y la inercia.

*Teoría de la acción dinámica.* En esta teoría se considera el principio de auto organización, esto es cuando un sistema conformado por partes individuales se une y se comportan colectivamente en forma ordenada, sin necesitar un centro superior que envíe instrucciones para realizar una acción deseada. Lo que propone es que el movimiento surge como resultado de elementos que interactúan entre sí, sin la necesidad de un programa motor. Por lo que se trata de encontrar una descripción matemática para este sistema que seguiría un movimiento no lineal, a través de las cuales sería posible predecir la forma en que el sistema actuaría en situaciones diferentes. Así que se supone que la relación que existe entre el sistema físico y ambiente determina su comportamiento [19], [20].

*Teoría del procesamiento de distribución en paralelo.* Esta teoría supone que el cerebro es un ordenador con células que interactúan entre sí en diversas formas, donde las redes neuronales son sistemas computacionales esenciales para la interpretación de la información. Su estrategia es desarrollar modelos matemáticos del sistema cerebral y estudiarlos para comprender en qué manera pueden ser resueltos problemas de cálculo por tales mecanismos. Cada elemento se distribuye en neuronas sensoriales, inter-neuronas y motoras. Este modelo puede ser utilizado para predecir cómo las lesiones en el SNC pueden afectar las funciones de las personas. Se ha indicado que en el cerebro, los sistemas son altamente redundantes y capaces de operar con pérdida de ejecución similar a la magnitud de daño del paciente [15].

*Teoría orientada a la actividad.* Este método se apoya en el reconocimiento de que el objetivo del control motor es el dominio del movimiento para poder realizar una acción en particular, no para efectuar movimientos por el solo hecho de moverse. Esta teoría no especifica cuáles son las actividades fundamentales del SNC ni de los elementos que se controlan durante el movimiento [17].

*Teoría ecológica.* Gibson exploró la forma en que el sistema motor interactúa de manera efectiva con el medio ambiente, de manera que el individuo pueda controlar sus movimientos tomando la información del entorno y adaptarse a cambios en el ambiente [21].

---

### 1.1.3. Niveles de construcción de movimientos

Bernstein, conocido como el padre del control motor contemporáneo, desarrolló una teoría de construcción del movimiento, donde sugería un sistema multinivel para la descripción de éstos. Los niveles se asocian con ciertas clases de tareas motoras como los componentes y la participación de las diferentes estructuras y visas neurofisiológicas [22]. Los principales niveles identificados por Bernstein fueron:

*Nivel pelecínético o nivel A.* También conocido como nivel rubro spinal, este normalmente desempeña un papel subordinado durante los movimientos naturales, en particular asegurando los componentes posturales adecuados. Algunos ejemplos pueden ser acciones de vibraciones muy rápidas, reacciones rápidas a estímulos inesperados y ciertas posturas. Una de las funciones principales de este nivel es proveer reflejos confiables proporcionados por la médula espinal.

Ya que este nivel proporciona soporte a todas las acciones voluntarias, proporcionando reflejos adecuados y la preparación de la columna vertebral a los comandos neuronales del cerebro, las disfunciones que lleguen a suceder en este nivel conducen a trastornos de movimientos mayores, principalmente aquellos que estén asociados con los cambios patológicos en el tono muscular.

*Nivel de sinergias y patrones o nivel B.* También conocido como el nivel talamo-pallidal, donde se producen patrones de movimiento coordinado por medio de la unión de varios grupos musculares, al utilizar propiocepción como fuente principal de información sensorial. Este nivel juega un papel muy importante en la cadena cinemática del cuerpo tomando en consideración las fuerzas que dependen del movimiento, por ejemplo en el movimiento de las extremidades. Estas fuerzas son muy diferentes para los movimientos que se realizan a lo largo de la misma trayectoria a diferentes velocidades, por lo que este nivel se encuentra involucrado en la construcción del movimiento considerando el tiempo y el correcto cambio en la activación muscular en las diferentes fases de la maniobra. Algunos ejemplos pueden ser la locomoción, la danza y algunos ejercicios de gimnasia, las acciones o movimientos controlados por este nivel tienden a tener un patrón de repetitividad.

Algunos problemas que se puedan encontrar en el nivel B llevan al desarrollo del síndrome hipocinético e hipercinético, es decir, condiciones que se caracterizan por la poca movilidad o excesivos movimientos, por ejemplo la enfermedad de Parkinson.

*Nivel del campo espacial o nivel C.* Conocido como nivel piramido-estriado. El campo espacial es una porción de espacio externo accesible para la realización de acciones específicas

---

asociado con fuerzas, obstáculos y señales sensoriales relevantes que rodean el espacio y la percepción de un objetivo, por ejemplo el tacto, la visión y el sistema vestibular. Una acción típica es la de llevar un objeto de un punto a otro en el espacio, por lo que los movimientos asociados en este nivel siempre tienen un propósito. Las acciones realizadas por el campo espacial se caracterizan de manera métrica y geométrica, esto quiere decir que una persona puede mover un objeto a lo largo de una trayectoria curva o lineal, a una corta o larga distancia. Para el control de estos movimientos es necesario tomar en consideración las fuerzas externas que interactúan con los objetos, como por ejemplo la fuerza de gravedad.

Este nivel se divide en dos subniveles C1 y C2, donde C2 busca lograr la meta deseada, mientras C1 especifica la forma en que se puede alcanzar el objetivo, por ejemplo, el nivel C2 se presenta cuando una persona desea llevar una taza de un lugar a otro, mientras que la postura de la persona, la mano que se está usando para realizar el movimiento o la forma en la que se va a transportar la taza depende del nivel C1.

Las patologías asociadas a este nivel están relacionados con trastornos de movimiento como la ataxia, que es la mala coordinación de los elementos involucrados, como pueden ser las articulaciones y la dismetría, que es el movimiento sobre distancias incorrectas.

*Nivel de acciones o nivel D.* Conocido como nivel parietal-premotor. Las acciones controladas en este nivel son exclusivamente realizadas por humanos, aunque Bernstein mencionó que era posible la participación en este nivel de algunos animales, como elefantes, perros y simios. Los movimientos realizados en este nivel son significativos, por ejemplo, no solo se toma el mover una taza de un lado a otro sino de servir una taza a un invitado, por lo que las acciones realizadas en este nivel usan cualquier sistema sensorial que aporte información relevante. Por lo que se destaca la importancia de formas y características geométricas, además de involucrar habilidades motoras y automatismos, por ejemplo, el poder utilizar un desarmador para sacar un tornillo de una tabla de madera.

Los trastornos motores se manifiestan por apraxias, este término implica problemas para lograr un resultado final significativo sin problemas con la coordinación motora.

*Nivel de acciones simbólicas altamente coordinadas o nivel E.* Este nivel está asociado con acciones de transmisión de información, por ejemplo, el ser capaz de escribir o hablar para transmitir un mensaje a otra persona. Otras acciones pueden ser las involucradas con actuaciones musicales, de pintura entre otras. En el caso del movimiento para la escritura depende de muchos factores para la caracterización del campo espacial donde se realiza el movimiento, como por ejemplo la forma en que se toma el lápiz para escribir, el cual puede depender de la fricción de la superficie de la hoja y el lápiz, la posición de la hoja con

---

respecto al cuerpo, incluso el tamaño de la letra con la que se decida escribir. Por lo que el nivel C2 se encargará de asegurarse que los caracteres estén escritos de forma correcta y legible, mientras que el nivel C1 intentará evitar posturas incorrectas o incómodas de la mano durante la escritura. La trayectoria dependerá de la rotación coordinada de las articulaciones del brazo, las cuales se producirán por la activación de los músculos y las fuerzas externas, como por ejemplo la fuerza que se ejerce sobre el lápiz en el papel y la fuerza de gravedad. Estos movimientos están organizados en el nivel B. Finalmente, el nivel A se hará cargo de los reflejos, en el caso que llegue a suceder algún evento durante la realización de la acción, también será responsable de mantener la activación muscular necesaria para asegurarse que la postura del brazo sea la adecuada para la tarea.

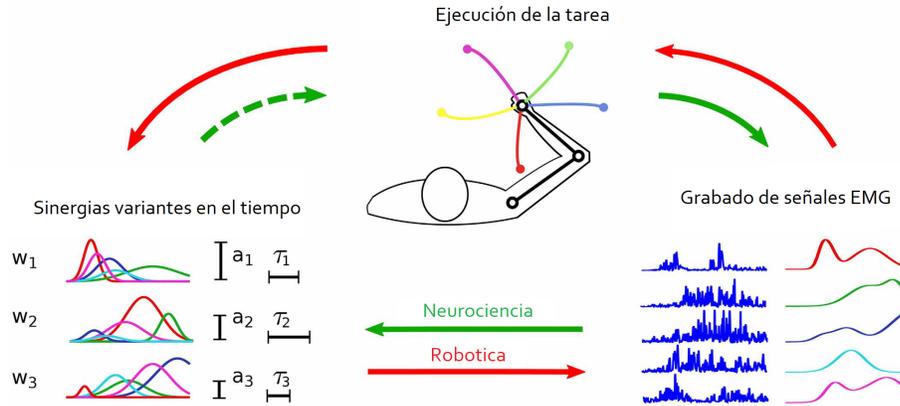
Este fue el primer esquema que ofrecía una descomposición explícita de una tarea motora significativa, en un conjunto de pasos organizados jerárquicamente que abarca todos los niveles del SNC

## 1.2. Sinergias musculares

El ser humano constituye un sistema corporal con múltiples grados de libertad, unido mediante un sistema articulado complejo capaz de realizar una amplia gama de movimientos a diferentes velocidades y sobre una variedad de superficies. La complejidad del aparato locomotor y sus propiedades dinámicas deben ser dominadas por estrategias eficientes implementadas en el SNC [4]. El cuerpo humano, por naturaleza, tiende a seguir patrones, secuencias de acciones y restricciones, para producir movimientos bastante consistentes, por medio del dominio de la coordinación motora a pesar del gran número de grados de libertad del aparato músculo-esquelético. Esto con el fin de reducir la indeterminación del sistema sin comprometer la capacidad de adaptarse a diferentes demandas motoras específicas [23], [24]. El SNC podría simplificar el control mapeando los estados iniciales y los objetivos en activaciones musculares a través de la combinación de sinergias musculares [25].

Las sinergias musculares se definen como patrones de coactivación muscular, las cuales ayudan a coordinar segmentos corporales para realizar una subtarea motora [26]. Como hipótesis, se supone que el sistema central predefine un conjunto de sinergias y las combina dependiendo de la tarea que se desea realizar, esto ayuda a generar las activaciones musculares adecuadas para producir el movimiento deseado. Un solo músculo puede formar parte de múltiples sinergias y una sola sinergia puede activar diversos músculos. Existen evidencias de esta organización muscular observadas en las actividades de Electromiografía (EMG) de

---



**Figura 1.1.** Procedimiento para la identificación de sinergias musculares [4]

varias especies [27], [28], por ejemplo en ranas, gatos y seres humanos. En estos últimos los estudios se han centrado en movimientos cotidianos como caminar, andar en bicicleta y alcanzar un objeto o un punto deseado en el espacio con los miembros superiores. En el análisis de sinergias musculares en personas sanas, ayuda a la representación de patrones de la coordinación muscular funcional que se producen en comportamientos motores naturales. Lo que sugiere que la existencia de sinergias musculares en la realización de movimientos puede reflejar un principio general del control neuronal. Por ejemplo, en el caso de un paciente que ha sufrido un accidente cerebrovascular, se ha encontrado que el número de sinergias musculares durante la realización de alguna actividad motora se ven reducidas de forma que se puede predecir el grado de afectación del paciente [3].

Hipotéticamente, las activaciones de muchos músculos se implementan mediante la modulación de las contribuciones de un pequeño conjunto de sinergias musculares predefinidas. Tal reducción en la dimensión puede simplificar el control motor y el aprendizaje y puede contribuir a la adaptabilidad observada en sistemas biológicos [29]. Esto ha motivado a la neurociencia y a la ingeniería de control a caracterizar las sinergias musculares en un enfoque diferente. En el enfoque de control de sistemas artificiales, el objetivo principal es la síntesis de un conjunto de sinergias que ejemplifican una estrategia de control eficaz. El controlador se evalúa en relación con el cumplimiento de la tarea deseada y debe poder generar un conjunto de acciones factibles que permitan al agente realizar una amplia variedad de tareas. En el contexto de la neurociencia, el objetivo principal es validar o falsificar la hipótesis de sinergia muscular. El enfoque típico consiste en analizar un conjunto de datos de las actividades musculares registradas y verificar si dicho conjunto de datos es compatible con la descomposición modular propuesta [4].

El enfoque de la neurociencia para evaluar la hipótesis de sinergias musculares (Figura

1.1 línea verde) consiste en buscar regularidades espacio temporales en un conjunto de datos, los cuales se obtienen por medio de la obtención de señales EMG. Esto quiere decir que el grupo de estudio realiza una tarea prescrita, las señales EMG que se obtienen durante la realización del experimento son analizadas y las sinergias se obtienen por medio de algoritmos de reducción de dimensión [30], análisis de componentes [26] o análisis factorial [31].

En el campo de ingeniería de control, el principal desafío es la síntesis de un pequeño conjunto de sinergias que reduce la dimensión del control y, al mismo tiempo, permite realizar una amplia variedad de tareas. En este campo las sinergias son sintetizadas tomando en cuenta los requerimientos del tipo de tarea a realizar (Figura 1.1 línea roja), las cuales son combinadas de manera apropiada para generar las señales motoras que permiten solucionar la tarea especificada.

### 1.2.1. Modelo de sinergias musculares

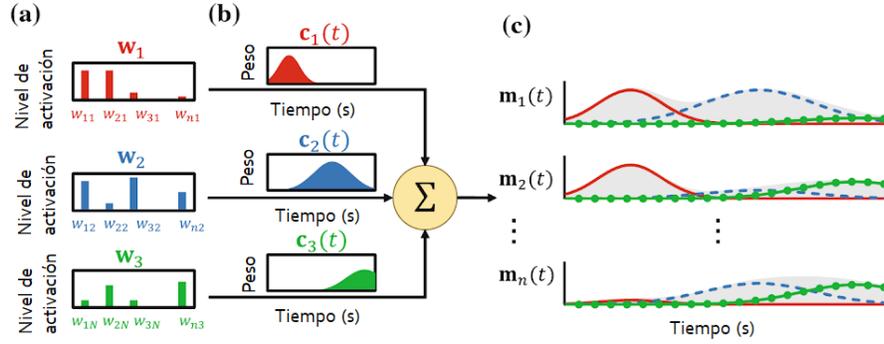
El concepto de sinergias musculares ha sido formalizado en diversos modelos matemáticos, para representar la activación muscular del movimiento humano [4]. Se supone que la activación muscular durante el movimiento humano se puede descomponer en una estructura espacial y temporal; la estructura espacial determina el nivel relativo de excitación de los músculos, por otro lado la estructura temporal se define como el coeficiente de ponderación que determina las amplitudes variables de sinergias musculares en el tiempo. Por lo que el sistema puede representarse como

$$M \cong WC \quad (1.1)$$

donde  $M \in \mathbb{R}^{n \times T_{max}}$  es la matriz de activación muscular

$$M = \begin{pmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \\ \vdots \\ m_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1(t) & \cdots & m_1(T_{max}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n(t) & \cdots & m_n(T_{max}) \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

La matriz  $M$  consiste en el vector de activación muscular  $m_i$ , con  $i = 1 \cdots n$ , para indicar la activación muscular en tiempo discreto para diferentes músculos  $n$ . Los elementos  $m_i(t)$  indican el nivel de activación del  $i$ -ésimo músculo en el tiempo  $t(1 \leq t \leq T_{max})$ .  $W \in \mathbb{R}^{n \times N}$  y  $C \in \mathbb{R}^{N \times T_{max}}$  representan las matrices de sinergia muscular y de coeficientes de peso


**Figura 1.2.** Modelo de sinergia muscular

respectivamente por

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nN} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(1) & \cdots & c_1(T_{max}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_N(1) & \cdots & c_N(T_{max}) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

La matriz de sinergia muscular  $W$  consiste en el vector de sinergia  $w_j$  para representar la  $j$ -ésima sinergia ( $j = 1 \cdots N$ ). Los elementos del vector  $w_j$  son  $w_{ij}$  para indicar el nivel de activación del  $i$ -ésimo músculo en la  $j$ -ésima sinergia. La matriz  $C$  de coeficientes de peso variable en el tiempo consiste del vector  $c_j$ , y sus componentes  $c_j(t)$  indican el coeficiente de ponderación de la  $j$ -ésima sinergia en el tiempo  $t$ . En la Figura 1.2 se muestra un diseño esquemático del modelo de sinergia muscular [32].

### 1.2.1.1. Sinergias temporales y síncronas

En este modelo se define una ley de control como una combinación lineal de los  $k$  vectores  $w \in \mathbb{R}^m$  con coeficientes  $a(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  Figura 1.3(a)

$$u(t) = \sum_{j=1}^k a_j(t) w_j \quad (1.5)$$

donde cada vector  $w_j$  especifica un balance entre las variables de entrada, por ejemplo el balance entre la activación muscular, y los coeficientes  $a_j(t)$  determinan la evolución temporal.

En el modelo de sinergia temporal, los coeficientes  $a_j(t)$  son módulos predefinidos de manera independiente a la tarea a realizar y el vector  $w_j$  se define como la nueva entrada de control, la cual depende de la tarea. Lo que resulta en un modelo que reduce el espacio de control a una dimensión  $k \times m$ , es decir, que el vector  $k$   $m$ -dimensional  $w_j$  tiene que estar apropiadamente especificado para cumplir con la tarea deseada. Por lo que las sinergias temporales son referidas en muchos casos como sinergias musculares temporalmente fijas.

Un caso especial, es el modelo de impulso premotor. Este se obtiene definiendo los coeficientes temporales como  $a_j(t) = A_j\phi(t - \tau_j)$ , donde el curso temporal de los vectores  $w_j$  son determinados por una función en comun  $\phi(t)$ , llamada impulsión premotora o impulso de ráfaga, que puede ser modulada en amplitud y cambiar en el tiempo.

En contraste, el modelo de sinergia síncrona define las sinergias de manera independiente a la tarea como los vectores  $w_j$ . La nueva entrada de control  $a_j(t)$  pertenece al espacio infinito dimensional de las funciones reales unidimensionales. Este modelo proporciona una reducción de dimensionalidad solo si el número de sinergias es menor que el número de variables de entrada, es decir  $k < m$ . Las sinergias síncronas son un grupo covariante de músculos, y son llamadas también sinergias invariantes en el tiempo, o sinergias musculares fijas en el espacio.

### 1.2.1.2. Sinergias variantes en el tiempo

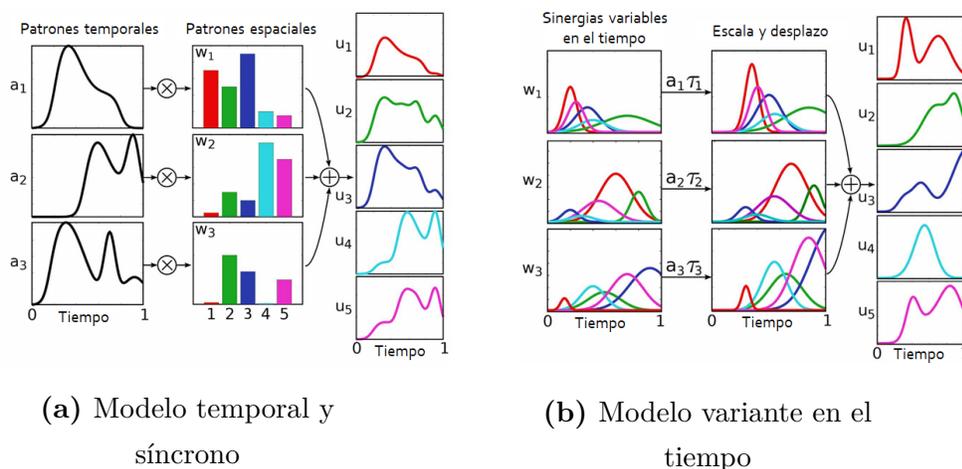
La entrada de control en este modelo se define como la superposición de las  $k$  funciones vectoriales que son independientes a la tarea  $w(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  Figura 1.3(b)

$$u(t) = \sum_{j=1}^k a_j w_j(t - \tau_j) \quad (1.6)$$

donde cada sinergia  $w_j$  puede ser escalada por  $a_j \in \mathbb{R}$  y desplazada en el tiempo por  $\tau_j \in \mathbb{R}$ . Estos coeficientes representan una nueva ley de control, la cual se escoge de tal manera que se cumpla la tarea deseada.

## 1.3. Fuerza muscular

La fuerza muscular es la capacidad que tiene un grupo muscular para desarrollar fuerza contra una resistencia en una contracción en el músculo. Esta fuerza máxima se produce cuando no se tiene movimiento o rotación en la articulación. En cuanto se realiza rotación articular la fuerza muscular disminuye [33]. La fuerza muscular genera interés en



**Figura 1.3.** Modelos de sinergias musculares

diversas ramas, en fisiología, medicina, ingeniería, biomecánicos, entre otros. Ya que se busca minimizar los riesgos de lesiones e incrementar el rendimiento de las personas, como por ejemplo en aplicaciones de rehabilitación.

La resistencia y la fuerza muscular son componentes importantes para la realización de actividades cotidianas. El primero hace referencia al origen o a la causa de la fuerza, es decir la producción de la fuerza a partir de la contracción muscular, si la resistencia es constante, la contracción muscular es isométrica, es decir no se produce movimiento visible en la articulación [34].

Por otro lado la fuerza muscular se puede ver manifestado en la movilización de una determinada carga, en este caso las contracciones son dinámicas y pueden ser concéntricas, excéntricas o isocinéticas. Las contracciones concéntricas se producen cuando la resistencia es menor a la fuerza muscular, las contracciones excéntricas se producen cuando se desarrolla una fuerza de frenado al desacelerar segmentos corporales que se encuentran en movimientos rápidos. Las contracciones concéntricas y excéntricas suelen denominarse isotónicas. En el caso de las contracciones isocinéticas, se genera una contracción máxima de un grupo muscular a una velocidad constante durante todo el movimiento articular [33].

Para la producción de la fuerza, es importante tomar en cuenta factores que influyen en las propiedades biomecánicas de los músculos [35], como:

*Temperatura:* Una elevada temperatura en los músculos causa un incremento en la producción de la fuerza.

*Fatiga:* La habilidad que posee un músculo para contraerse y relajarse depende de la

energía. Es decir, si el músculo posee mucho oxígeno, tiene la posibilidad de generar energía por periodos más largos de tiempo y resiste más al cansancio, caso contrario, a menor oxígeno y disposición de energía, entonces se presentara fatiga.

*Relación fuerza-velocidad:* La velocidad de contracción del músculo depende de la carga que se debe vencer, es decir, mientras más grande sea la carga, el músculo se contraerá con menor velocidad.

*Relación fuerza-tiempo:* La fuerza o tensión que puede ser generada por un músculo es proporcional al tiempo de contracción de este, es decir, mientras más tiempo le tome al músculo contraerse la fuerza desarrollada será mayor. Sin embargo, si el músculo genera fuerza durante un largo periodo de tiempo se podría presentar fatiga muscular.

## 1.4. Conclusiones del Capítulo 1

A partir de la teoría de control motor se puede estudiar el proceso de aprendizaje de una maniobra, y poder comprender cómo es que se realizan los movimientos de las articulaciones a partir de la activación muscular. Cuando se realiza un movimiento previamente aprendido se puede encontrar que las características como la cinemática, la dinámica y la electromiografía no cambian.

Cuando se desea realizar un movimiento en alguna de las extremidades del cuerpo humano, el cerebro genera una señal, la cual es enviada a través de la espina dorsal hasta llegar a las moto-neuronas, las cuales son las responsables de activar los músculos deseados y obtener como resultado una rotación en las articulaciones. Esta activación muscular puede ser representada por medio de electromiografía.

Ya que las señales electromiográficas están relacionadas con el movimiento de las extremidades, se puede encontrar una relación entre la activación muscular y la fuerza generada a partir del movimiento articular. Esta relación será explicada a más detalle en el Capítulo 3.

---

# Fundamentos de la Teoría de Control Óptimo

---

## 2.1. Optimización

En los problemas de control óptimo, el objetivo general es determinar las señales de control que permitan, satisfaciendo las restricciones físicas del sistema, minimizar o maximizar, según sea el caso, algún índice de desempeño. Es decir, se busca determinar una función que permita optimizar una funcional específica, tomando en cuenta las restricciones físicas del sistema [36]. Para evaluar el desempeño de un sistema de forma cuantitativa se selecciona un índice de desempeño, el cual es una expresión matemática, que define los requisitos y cualidades deseadas del sistema. En términos básicos de la teoría de control óptimo [37], los problemas típicos que se pueden resolver son:

1. **Tiempo mínimo.** Se busca transferir un sistema de un estado inicial arbitrario  $x(t_0) = x_0$  a un destino final especificado  $x(t_f) = x_f$  en un tiempo mínimo.
2. **Control terminal.** Se busca transferir el sistema a un estado final tan cerca como sea posible a un valor final deseado  $r(t_f)$ .
3. **Esfuerzo mínimo.** Se busca transferir un sistema de un estado inicial arbitrario  $x(t_0) = x_0$  a un objetivo específico, aplicando el mínimo esfuerzo.
4. **Seguimiento.** Se busca mantener el estado del sistema  $x(t)$  lo más cerca posible del estado deseado  $r(t)$  en el intervalo  $[t_0 \ t_f]$ .
5. **Consumo mínimo de energía.** Se busca transferir un sistema de un estado inicial  $x(t_0) = x_0$  a un estado final  $x(t_f) = x_f$ , con un gasto mínimo de energía.

Para la optimización de un sistema es necesario definir una función objetivo que nos permita modelar la meta del movimiento. Una rama de las matemáticas que es usada para la

solución de problemas de optimización es el cálculo de variaciones. Éste estudia los métodos que permiten encontrar los valores máximos y mínimos de las funcionales, el cual se relaciona directamente con el objetivo de la teoría de control óptimo. A través de los años el cálculo de variaciones ha sido de gran ayuda para la solución de problemas de optimización. La reina Dido de Cartago fue la primer persona en resolver un problema fácilmente utilizando el cálculo de variaciones. Donde al haber sido prometida toda la tierra que pudiera encerrar con la piel de un toro, cortó inteligentemente la piel en muchos pedazos y ató los extremos. Su problema fue encontrar una curva cerrada con perímetro fijo que encerrara el área máxima. A pesar de que en la historia ya se había utilizado el cálculo de variaciones, no fue hasta el siglo XVII en Europa occidental que se lograron avances sustanciales. Sir Isaac Newton uso cálculo variacional para determinar la forma que debe tener un cuerpo para moverse en el aire con la menor resistencia posible. Otro problema fue la braquistócrona, planteada por Johan Bernoulli en 1696. El problema es encontrar la forma del cable que permitiera que una esfera se mueva del punto A al punto B en un tiempo mínimo [38].

La teoría de control óptimo sintetiza el análisis y diseño de sistemas dinámicos complicados, determinando la mejor manera de controlar el sistema, esto es, un punto donde se produce el valor óptimo de una funcional. Donde las funcionales son magnitudes escalares variables cuyos valores se determinan mediante la elección de una o varias funciones.

Para la adecuada formulación de un problema de control óptimo se requiere tomar en cuenta una descripción matemática del proceso a controlar. El objetivo es obtener la descripción matemática más sencilla que prediga adecuadamente la respuesta del sistema físico a todas las entradas. Estos sistemas son descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias en forma de espacio de estado, de la forma

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t) \quad (2.1)$$

donde  $u(t)$  es el vector de control,  $x(t)$  es el vector de las variables de estado y  $t$  es el tiempo. Una vez que se tiene seleccionado el modelo matemático, el siguiente paso es definir cuáles son las restricciones físicas sobre los estados y las entradas de control admisibles para el sistema. Esto es importante ya que durante el análisis del problema únicamente se tomarán en cuenta las entradas de control que puedan suponer los estados. Con el fin de evaluar el rendimiento de un sistema de manera cuantitativa, es necesario seleccionar una medida de rendimiento. De esta manera, un control que minimice o maximice la medida de rendimiento es considerado óptimo. En ciertos casos el problema puede indicar claramente qué medida de rendimiento seleccionar, mientras que en otros problemas la selección de dicho rendimiento

---

puede ser una cuestión subjetiva.

El enfoque basado en los modelos de control óptimo permiten explicar el comportamiento del movimiento en sistemas mecánicos o biológicos, conocer las características dinámicas, determinar los movimientos de energía mínima bajo ciertas condiciones, conocer las trayectorias que tienen que seguir los miembros, calcular los pares de torsión y fuerzas de interacción entre otros [39], [40]. Existen diferentes técnicas de optimización como los métodos analíticos, los métodos gráficos, los métodos experimentales y los métodos numéricos [41].

## 2.2. Solución del problema de esfuerzo mínimo

En este problema se busca transferir un sistema de un estado inicial arbitrario  $x_0$  a un estado final deseado  $x_f$ , esto aplicando el mínimo esfuerzo. Para la solución de este problema se introducen los siguientes conceptos;

1. La variable  $v$  se conoce como funcional y depende de la función  $y(x)$ . Se designa como  $v = v[y(x)]$  si a cada función  $y(x)$  le corresponde un valor de  $v$ .
2. Se le llama incremento o variación  $\delta y$  del argumento  $y(x)$  de la funcional  $v[y(x)]$  a la diferencia entre dos funciones

$$\delta y = y(x) - y_0(x) \quad (2.2)$$

3. Se le llama funcional lineal a la funcional  $L[y(x)]$  que satisface

$$L[c y(x)] = c L[y(x)] \quad (2.3)$$

donde  $c$  es una constante arbitraria y

$$L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)] \quad (2.4)$$

4. Considere la diferencial de una función  $f(x)$ , la cual puede representarse como

$$df(x) = \left. \frac{\partial f(x + \alpha dx)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \quad (2.5)$$

de forma análoga puede definirse la variación de una funcional  $\delta v[y(x)]$  como

$$\delta v[y(x)] = \left. \frac{\partial v[y(x) + \alpha \delta y]}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \quad (2.6)$$

es decir, la variación juega el mismo papel que la diferencial en el estudio de funciones.

5. Si la funcional  $v[f(x)]$  alcanza su máximo o mínimo para  $y = y_0(x)$  entonces

$$\delta v[y_0(x)] = 0 \quad (2.7)$$

Para ilustrar la aplicación de estas definiciones en la solución del problema de esfuerzo mínimo es necesario considerar la formulación de las funcionales.

### 2.2.1. Funcionales de primer orden

De manera general una funcional  $J$  puede ser escrita mediante el uso de una función diferencial de primer orden como  $H(x, y, \dot{y})$  de manera que

$$J = \int_{x_1}^{x_2} H(x, y, \dot{y}) dx \quad (2.8)$$

como se había mencionado una funcional alcanza su valor máximo o mínimo cuando su estado estacionario  $\delta J$  es igual a cero

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} H(x, y, \dot{y}) dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta H(x, y, \dot{y}) dx = 0 \quad (2.9)$$

donde la variación de la función,  $\delta H$ , es

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial y} \delta y + \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} \quad (2.10)$$

por lo que  $\delta J$  se puede expresar como

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial H}{\partial y} \delta y dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} dx \quad (2.11)$$

desarrollando la expresión anterior

---

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} \right) \delta y \, dx + \left. \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} \delta y \right|_{x_1}^{x_2} \quad (2.12)$$

para poder resolver esta ecuación, es necesario considerar el siguiente lema [38].

*Lema fundamental del cálculo variacional.* Si para cada función continua  $\eta(x)$  se tiene

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) \eta(x) \, dx = 0$$

Siendo  $\Phi(x)$  una función continua en el segmento  $[x_0, x_1]$ , entonces  $\Phi(x) = 0$  en dicho segmento.

Si se aplica el lema anterior en la ecuación (2.12), se tiene que

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} = 0 \quad (2.13)$$

Esto sujeto a cumplir las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} \right|_{x_1} = 0 & \quad \text{o bien} & \quad \delta y|_{x_1} = 0 \\ \left. \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} \right|_{x_2} = 0 & \quad \text{o bien} & \quad \delta y|_{x_2} = 0 \end{aligned}$$

Si se expande la ecuación (2.13)

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \dot{y}} - \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial \dot{y}} \dot{y} - \frac{\partial^2 H}{\partial \dot{y}^2} \ddot{y} = 0 \quad (2.14)$$

Para la solución de la expresión anterior se desprenden 5 casos

1. Si  $H$  no depende de  $\dot{y}$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0$$


---

2. Si  $H$  depende de  $\dot{y}$  en forma lineal es decir  $H(x, y, \dot{y}) = M(x, y) + N(x, y)\dot{y}$ , entonces la ecuación se reduce a

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y}\dot{y} - \frac{d}{dx}N = 0$$

finalmente

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

3. Si  $H$  depende solo de  $\dot{y}$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \dot{y}^2}\ddot{y} = 0$$

lo que resulta en dos opciones

a) Si  $\frac{\partial^2 H}{\partial \dot{y}^2} = 0$

$$H = C_1\dot{y} + C_2$$

b) Si  $\ddot{y} = 0$

$$y = C_1x + C_2$$

4. Si  $H$  depende de  $x$  y  $\dot{y}$  la ecuación se reduce a

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \dot{y}} + \frac{\partial^2 H}{\partial \dot{y}^2}\dot{y} = 0$$

finalmente

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{y}} = C$$

5. Si  $H$  depende de  $y$  y  $\dot{y}$  solamente

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial \dot{y}}\dot{y} - \frac{\partial^2 H}{\partial \dot{y}^2}\ddot{y} = 0$$

considerando

---

$$\frac{d}{dx} \left[ H - \dot{y} \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} \right]$$

lo cual se reduce a

$$F - \dot{y} \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} = C$$

Esta metodología se puede extender a funcionales de orden superior

### 2.2.2. Funcionales de segundo orden

Tomando una función de segundo orden como  $H(x, y, \dot{y}, \ddot{y})$  se puede expresar la funcional  $J$  como

$$J = \int_{x_1}^{x_2} H(x, y, \dot{y}, \ddot{y}) dx \quad (2.15)$$

por lo que el valor estacionario de la funcional se representa de la siguiente manera

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \delta H(x, y, \dot{y}, \ddot{y}) dx \quad (2.16)$$

considerando la variación de la función,  $\delta H$ , la expresión anterior puede expresarse como

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial H}{\partial y} \delta y dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial H}{\partial \ddot{y}} \delta \ddot{y} dx \quad (2.17)$$

desarrollando se puede expresar la integral anterior de la forma

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial H}{\partial \ddot{y}} \right) \delta y dx + \left. \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial H}{\partial \ddot{y}} \right|_{x_1}^{x_2} \delta y \quad (2.18)$$

como se planteó anteriormente, se aplica el Lema fundamental del cálculo variacional. Para que  $\delta J$  sea cero es necesario que se cumpla

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial H}{\partial \ddot{y}} = 0 \quad (2.19)$$

esto sujeto a cumplir las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} \right|_{x_1} = 0 & \quad \text{o bien} & \quad \delta y|_{x_1} = 0 \\ \left. \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} \right|_{x_1} = 0 & \quad \text{o bien} & \quad \delta \dot{y}|_{x_1} = 0 \end{aligned}$$

de la misma manera para  $x_2$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} \right|_{x_2} = 0 & \quad \text{o bien} & \quad \delta y|_{x_2} = 0 \\ \left. \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} \right|_{x_2} = 0 & \quad \text{o bien} & \quad \delta \dot{y}|_{x_2} = 0 \end{aligned}$$

### 2.2.3. Problema de análisis

Para ilustrar la solución del problema de control óptimo, se considera el problema de determinar la fuerza mínima que deberá aplicar un sujeto para mover un objeto de masa  $m$  de un punto a otro, a lo largo de una línea horizontal sin fricción. Por lo que la ecuación de movimiento que define al sistema es:

$$F = m\ddot{x} \quad (2.20)$$

donde  $x$  representa la posición de la masa y  $F$  la fuerza a aplicar, para el caso de esfuerzo mínimo, se define la funcional  $J$  como

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F^2 dt = m^2 \int_{t_1}^{t_2} \ddot{x}^2 dt = m^2 \int_{t_1}^{t_2} G dt \quad (2.21)$$

La funcional  $J$  alcanza su valor mínimo cuando el estado estacionario,  $\delta J$  es cero. Considerando que la funcional depende de una derivada de segundo orden, es necesario que se satisfaga

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial G}{\partial \ddot{x}} = 0 \quad (2.22)$$

Aplicando la condición anterior a la ecuación (2.20), se simplifica la expresión como

$$\frac{d^4x}{dt^4} = 0 \quad (2.23)$$

de tal forma que si se integra, se tiene

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= C_1 & \dot{x} &= \frac{1}{2}C_1t^2 + C_2t + C_3 \\ \ddot{x} &= C_1t + C_2 & x &= \frac{1}{6}C_1t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C_3t + C_4 \end{aligned}$$

Las constantes  $C_i$ , con  $i = 1 \dots 4$ , se resuelven atendiendo a las condiciones de frontera, las cuales se muestran en la Tabla (2.1), donde  $t_j$ ,  $x_j$  y  $\dot{x}_j$ , representan el tiempo, la posición y la velocidad respectivamente, con  $j = 1$  como las condiciones iniciales y  $j = 2$  las condiciones finales.

**Tabla 2.1.** Condiciones de frontera para el problema de esfuerzo mínimo

$x_{t_1} = x_1$	$\dot{x}(t_1) = \dot{x}_1$	$t_1 = 0$	$x_1 = 0$	$\dot{x}_1 = 0$
$x_{t_2} = x_2$	$\dot{x}(t_2) = \dot{x}_2$	$t_2 = T$	$x_2 = x_f$	$\dot{x}_2 = 0$

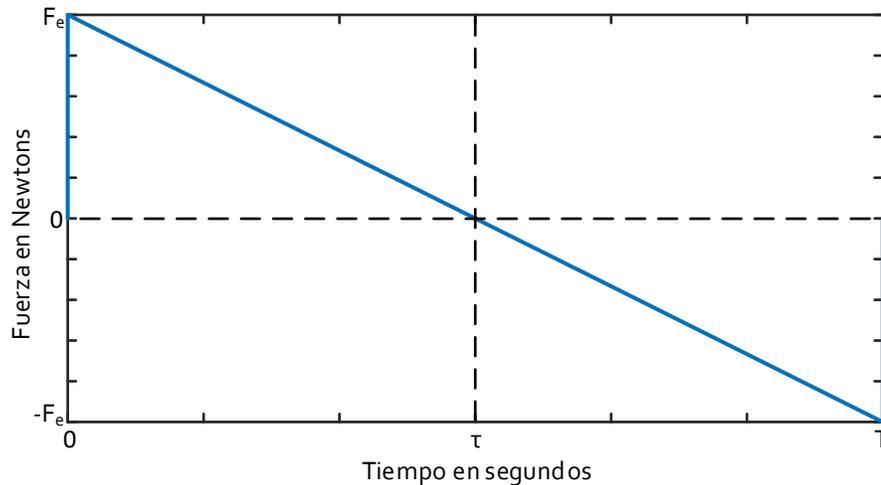
Por lo que con estos valores, se definen de manera general los valores de  $C_i$ , como

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{12 x_f}{T^3} & C_2 &= \frac{6x_f}{T^2} \\ C_3 &= 0 & C_4 &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Con estos valores, el perfil de fuerza que es necesario aplicar al sistema, se expresa de manera general considerando las restricciones prescritas

$$F_{\text{óptimo}} = m(C_1t + C_2) \quad (2.25)$$

En la Figura (2.1) se muestra la gráfica del perfil de fuerza, la cual involucra la aplicación de una fuerza instantánea  $F_e$ . Esta fuerza se reduce de manera gradual cambiando el sentido de la fuerza en el tiempo  $\tau$ , el cual por medio de este análisis se especifica que tiene que ser a la mitad del tiempo total  $T$ . Una vez finalizada la maniobra de debe de dejar de aplicar la fuerza  $-F_e$  de manera abrupta.



**Figura 2.1.** Grafica del perfil de fuerza esperado.

### 2.3. Solución del problema de tiempo mínimo

El objetivo general del problema de tiempo mínimo es el de llevar un sistema de un estado inicial arbitrario a un estado final deseado, en el menor tiempo posible. A esto se le conoce como movimiento balístico. Cuando la duración del movimiento se reduce, la necesidad de incrementar el máximo esfuerzo aumenta. El sistema motor del ser humano puede realizar este movimiento, pero es necesario que se genere una gran fuerza en un corto límite de tiempo.

Las características principales del movimiento rápido balístico voluntario del brazo humano de dos grados de libertad durante el movimiento hacia un objetivo determinado son la línea recta y una velocidad con perfil en forma de campana [42]. Existen estudios experimentales del movimiento rápido balístico en las articulaciones del brazo entre dos puntos [43], en donde se propone un modelo matemático lineal para la articulación y modela el movimiento de un punto a otro como un sistema masa-resorte-amortiguador.

Existen dos características importantes para la solución de los problemas de tiempo mínimo

1. Para ciertos valores de las condiciones iniciales el control óptimo para tiempo mínimo puede no existir.
2. El control óptimo, si existe, requiere de la aplicación de su máximo esfuerzo durante todo el periodo de operación.

### 2.3.1. Restricciones de la ley de control

Al aplicar la teoría de optimización para tiempo mínimo, es necesario restringir la ley de control a aplicar, de manera que no sea mayor a su máximo valor admisible.

$$|U(t)| = 1 \quad (2.26)$$

Si el sistema puede ser transferido de un estado inicial objetivo mediante la aplicación sucesiva de políticas de control admisibles, entonces es factible la existencia de la política de control óptima, esto quiere decir que se satisfacen las restricciones durante el intervalo de la maniobra,  $0 \leq t \leq t_f$ , donde  $t_f$  representa el tiempo final, esto quiere decir que la fuerza aplicada  $F$ , no puede ser mayor a la fuerza máxima admisible  $F_{\text{límite}}$

$$U(t) = \frac{F(t)}{F_{\text{límite}}(t)} \quad (2.27)$$

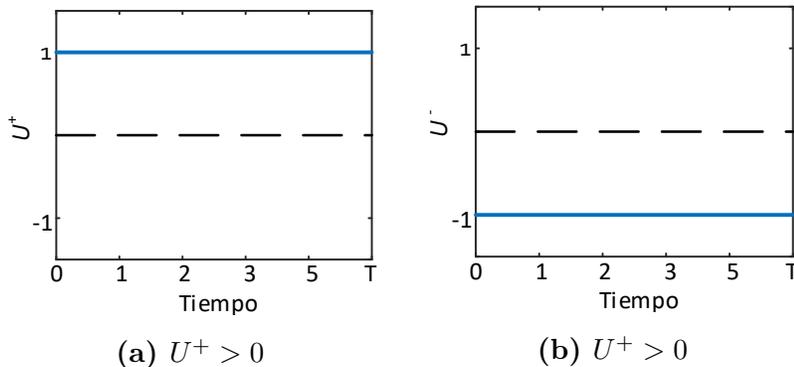
Si no hay un periodo en el cual  $U$  sea cero entonces la política de control se denomina control de tipo bang-bang [38]. En este concepto se plantea que el sistema va a tener cambios de velocidad durante la maniobra, un ejemplo son las carreras de autos, donde se está muy cerca de una política de control de tipo bang-bang, ya que los pilotos están sujetos a realizar continuos cambios de velocidad, donde en los tramos rectos se acelera lo más que se pueda y en las curvas se frena, logrando llegar a la meta en un tiempo mínimo.

Para poder evaluar el desempeño del sistema cuantitativamente, se selecciona una medida escalar, denominada índice de desempeño, la cual define los requerimientos del sistema en términos matemáticos, denotado por

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt \quad (2.28)$$

Al minimizar la relación que existe con el sistema y el índice de desempeño se considera que el comportamiento del sistema está optimizado, esto es, encontrar la política de control óptimo  $U$  que lleve al sistema a  $x_f$  en un tiempo mínimo, es decir cuando  $t_f$  es minimizado. Conociendo el orden del sistema, denominado por  $n$ , entonces el sistema puede conmutar máximo  $n - 1$  veces [44] [45].

Para ejemplificar mejor este concepto se toma en cuenta un sistema de segundo orden,  $n = 2$ , por lo que el sistema conmutará una vez. Por lo tanto la política de control va



**Figura 2.2.** Políticas de control admisibles

a cambiar de  $U^+ > 0$  y  $U^- < 0$ , Figura (2.2). Para este ejemplo se tienen las siguientes alternativas de conmutación.

1. La posición inicial,  $x_0$ , es cero y la posición final tiene un valor positivo,  $x_f > 0$ . Por lo que el movimiento iniciará con una política de control positiva,  $U^+$  a un estado final con una política de control negativa  $U^-$ .
2. La posición inicial,  $x_0$ , es cero y la posición final tiene un valor negativo,  $x_f < 0$ . Por lo que el movimiento iniciará con una política de control negativa,  $U^-$  a un estado final con una política de control positiva  $U^+$ .

Para las condiciones iniciales y finales conocidas como

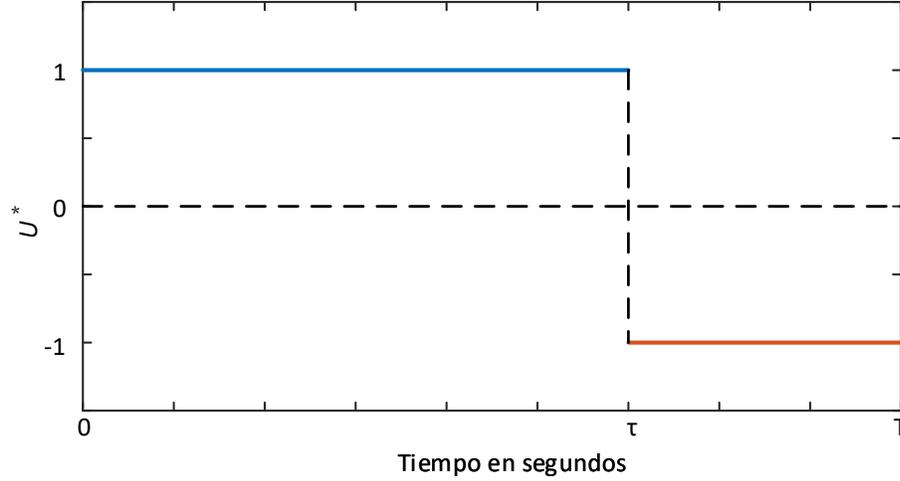
**Tabla 2.2.** Condiciones de frontera para el problema de tiempo mínimo

$x_{t_1} = x_1$	$\dot{x}(t_1) = \dot{x}_1$	$t_1 = 0$	$x_1 = 0$	$\dot{x}_1 = 0$
$x_{t_2} = x_2$	$\dot{x}(t_2) = \dot{x}_2$	$t_2 = T$	$x_2 = x_f$	$\dot{x}_2 = 0$

Para esto es necesario establecer el método de solución para tiempo mínimo del problema para una política de control positiva y negativa. El proceso inicia obteniendo una solución analítica de la ecuación diferencial o ecuaciones de estado que describen al sistema. Considerando las condiciones iniciales y la política de control  $U^+$ , la solución del sistema y su comportamiento queda completamente determinado para

$$0 \leq t < \tau \tag{2.29}$$

$$0 < U^+ \leq +1 \tag{2.30}$$



**Figura 2.3.** Política de control óptima  $U^*$

Para que la política de control pueda satisfacer una solución óptima para el tiempo final de la maniobra,  $t_f = T$ , es necesario que exista una continuidad entre las diversas trayectorias de estado admisibles [44]. Considerando ahora las condiciones finales del sistema y una política de control  $U^-$ , la solución del sistema queda completamente determinado por

$$\tau < t \leq T \quad (2.31)$$

$$-1 \leq U^- \leq 0 \quad (2.32)$$

Aplicando las restricciones para tiempo mínimo, se deduce que existe un estado común en  $t = \tau$ , donde se produce la conmutación de la política de control desde las curvas de movimiento de  $U^+$  hacia las curvas de  $U^-$

$$x(\tau)_{u^+} = x(\tau)_{u^-} \quad (2.33)$$

$$\dot{x}(\tau)_{u^+} = \dot{x}(\tau)_{u^-}$$

La política de control óptima  $U^*$ , aplicable a un sistema de segundo orden, desde un estado inicial con  $U^+$  hasta un estado final con  $U^-$ , la cual se puede ver con más claridad en la Figura (2.3).

$$\begin{cases} U^+ & 0 < t \leq \tau \\ U^- & \tau < t \leq T \end{cases} \quad (2.34)$$

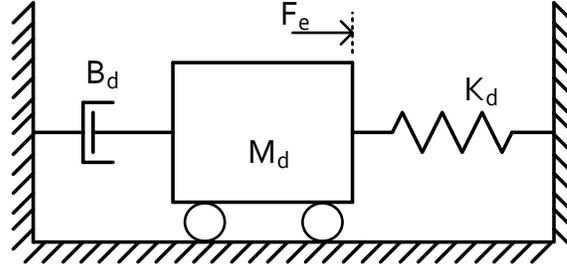


Figura 2.4. Sistema masa - resorte - amortiguador

### 2.3.2. Problema de análisis

El sistema a analizar se muestra en la Figura (2.4), el cual describe un sistema masa-resorte-amortiguador de un grado de libertad. Para iniciar con el análisis se plantea el modelo matemático como

$$F_e = M_d \ddot{x} + B_d \dot{x} + K_d x \quad (2.35)$$

donde  $x$  es la posición de la masa,  $M_d$  es la masa,  $B_d$  es el coeficiente de amortiguamiento,  $K_d$  es el coeficiente del resorte y  $F_e$  es la fuerza esperada.

Como se había mencionado es necesario restringir la ley de control aplicada, de manera que no sea mayor a su máximo admisible. Si se aplica la restricción mostrada en la ecuación (2.27), el sistema se puede expresar como

$$U(t) = \bar{M} \ddot{x} + \bar{B} \dot{x} + \bar{K} x \quad (2.36)$$

donde

$$\bar{M} = \frac{M_d}{|F_{\text{límite}}(t)|} \quad \bar{B} = \frac{B_d}{|F_{\text{límite}}(t)|} \quad \bar{K} = \frac{K_d}{|F_{\text{límite}}(t)|}$$

Para expresar de manera más sencilla el sistema mostrado en (2.36), se puede definir en función de la razón de amortiguamiento  $\zeta$  y la frecuencia natural del sistema  $\omega_n$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{U}{\bar{M}} \quad (2.37)$$

donde  $\zeta$  y  $\omega_n$  están representados a partir de los coeficientes de masa, resorte y amortiguador

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\bar{K}}{\bar{M}}} \quad \zeta = \frac{\bar{B}}{2\sqrt{\bar{K}\bar{M}}} \quad (2.38)$$

Para un sistema de segundo orden existen cuatro tipos de movimientos [46], los cuales dependen del valor de  $\zeta$

1. Cuando  $0 < \zeta < 1$  se le llama sistema subamortiguado, la respuesta transitoria es oscilatoria.
2. Cuando  $\zeta = 0$ , se le llama movimiento libre no amortiguado la respuesta transitoria no se amortigua.
3. Cuando  $\zeta = 1$  el sistema se denomina críticamente amortiguada.
4. Cuando  $\zeta > 1$  el sistema se considera sobreamortiguado

En este caso se toma en cuenta el movimiento subamortiguado. Para la solución del modelo mostrado en (2.37), se toma en cuenta la solución complementaria y la solución particular. Para el caso de la solución complementaria se tiene

$$x_c = e^{-\zeta\omega_n t} \left( A \cos \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + B \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \right) \quad (2.39)$$

Considerando el método de los coeficientes indeterminados, la solución particular del sistema es

$$x_p = \frac{U}{\bar{M}\omega_n^2} \quad (2.40)$$

Por lo tanto la solución general del sistema se expresa como

$$\begin{aligned} x &= x_c + x_p \\ x &= \frac{U}{\bar{M}\omega_n^2} + e^{-\zeta\omega_n t} \left( A \cos \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + B \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Derivando la expresión anterior se tiene

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right) \left(A\sqrt{1-\zeta^2} - B\zeta\right) \\ &\quad - \omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right) \left(A\zeta + B\sqrt{1-\zeta^2}\right)\end{aligned}\quad (2.42)$$

Para resolver las ecuaciones anteriores se hace un cambio de variable que permita encontrar una expresión general para  $x$  y  $\dot{x}$

$$x = \frac{U}{M\omega_n} + e^{-\zeta\omega_n R t'} (A \sin(t') + B \cos(t')) \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \omega_n e^{-\zeta\omega_n R t'} \left(A\sqrt{1-\zeta^2} - B\zeta\right) \cos(t') \\ &\quad - \omega_n e^{-\zeta\omega_n R t'} \left(\zeta A + B\sqrt{1-\zeta^2}\right) \sin(t')\end{aligned}\quad (2.44)$$

donde

$$t = R t' \quad R = \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.45)$$

Tomando en cuenta las condiciones iniciales mostradas en la Tabla (2.2) y utilizando la política de control  $U^+$ , se determinan los valores de  $A$  y  $B$ . Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (2.44) y (2.45) se tiene que

$$x_{u^+} = \frac{U}{M\omega_n^2} - \frac{U}{M\omega_n^2} e^{-\zeta\omega_n R t'} (\omega_n R \zeta \sin(t') + \cos(t')) \quad (2.46)$$

$$\dot{x}_{u^+} = \frac{U}{M} R e^{-\zeta\omega_n R t'} \sin(t') \quad (2.47)$$

Ahora, tomando en cuenta las condiciones finales mostradas en la Tabla (2.2) y utilizando la política de control  $U^-$ , se determinan los valores de  $A$  y  $B$ . Las ecuaciones (2.44) y (2.45) se expresan como

$$x_{u^-} = -\frac{U}{M\omega_n^2} + \left(x_f + \frac{U}{M\omega_n^2}\right) e^{-\zeta\omega_n R(T'-t')} (\cos(T'-t') - \zeta\omega_n R \sin(T'-t')) \quad (2.48)$$

$$\dot{x}_{u^-} = \omega_n^2 \left(x_f + \frac{U}{M\omega_n^2}\right) e^{-\zeta\omega_n R(T'-t')} \sin(T'-t') \quad (2.49)$$

Para los estados iniciales y finales, se tienen 2 ecuaciones que describen al sistema. Como se había mencionado antes, existe un estado en común en las ecuaciones de movimiento, donde se realiza la conmutación de la política de control,  $t = \tau$ , desde las curvas de movimiento de  $U^+$  hacia  $U^-$ . Estas políticas de control forman un conjunto,  $U^*$ , que es la política que soluciona el problema de tiempo mínimo. Tomando en cuenta las igualdades que establecen la relación funcional de la política de control se tienen expresiones para cada uno de los estados del sistema. Para  $\dot{x}$

$$\begin{aligned} \dot{x}(\tau)_{u^+} &= \dot{x}(\tau)_{u^-} \\ \frac{U}{\bar{M}} R e^{-\zeta \omega_n R t'} \sin(t') &= \omega_n^2 \left( x_f + \frac{U}{\bar{M} \omega_n^2} \right) e^{-\zeta \omega_n R (T' - t')} \sin(T' - t') \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que  $\bar{K} = \bar{M} \omega_n^2$  la expresión anterior se simplifica como

$$U R e^{-\zeta \omega_n R \tau'} \sin(\tau') = R \left( \bar{K} x_f + U \right) e^{-\zeta \omega_n R (T' - \tau')} \sin(T' - \tau') \quad (2.50)$$

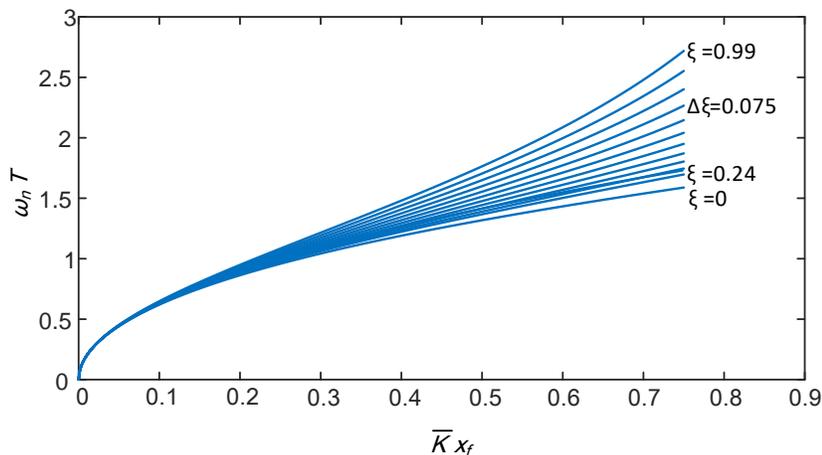
Para  $x$  se tiene que

$$\begin{aligned} x(\tau)_{u^+} &= x(\tau)_{u^-} \\ \frac{U}{\bar{M} \omega_n^2} - \frac{U}{\bar{M} \omega_n^2} e^{-\zeta \omega_n R t'} (\omega_n R \zeta \sin(t') + \cos(t')) &= \\ - \frac{U}{\bar{M} \omega_n^2} + \left( x_f + \frac{U}{\bar{M} \omega_n^2} \right) e^{-\zeta \omega_n R (T' - t')} & (\cos(T' - t') - \zeta \omega_n R \sin(T' - t')) \end{aligned}$$

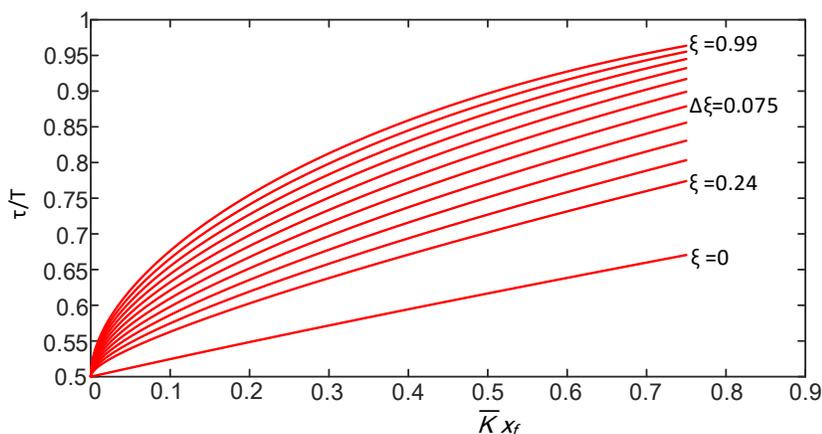
Despejando y tomando en cuenta que  $\bar{K} = \bar{M} \omega_n^2$ , se tiene que

$$\begin{aligned} U - U e^{-\zeta \omega_n R \tau'} (\omega_n R \zeta \sin(\tau') + \cos(\tau')) &= \\ U + \left( \bar{K} x_f + U \right) e^{-\zeta \omega_n R (T' - \tau')} & (\cos(T' - \tau') - \zeta \omega_n R \sin(T' - \tau')) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Las ecuaciones (2.50) y (2.51) representan las condiciones de continuidad del movimiento. Como el modelo está en función de  $\zeta$  y  $\omega_n$ , se puede encontrar una solución al sistema de ecuaciones por medio de los parámetros  $\zeta$  y  $\bar{k}$ , haciendo variar sus valores para producir una serie de soluciones.



**Figura 2.5.** Relación  $\omega_n T$  contra  $\bar{K}x_f$  para varios valores de  $\zeta$



**Figura 2.6.** Relación  $\tau/T$  contra  $\bar{K}x_f$  para varios valores de  $\zeta$

Existen diversos métodos para poder encontrar una solución al sistema de ecuaciones. El método de solución que se utilizó fue a base de iteraciones. Este método usa dos valores iniciales para la raíz, y se busca que esta converja a la respuesta correcta, la raíz deberá estar dentro del intervalo especificado. Este método utiliza iteraciones hasta que se encuentren resultados donde su diferencia es de casi  $3 \times 10^{-7}$ , la solución a las ecuaciones de continuidad de muestran en la Figura (2.5) y la Figura (2.6), las cuales dependen de los valores adimensionales  $\bar{K}x_f$ ,  $\tau/T$  y  $\omega_n T$ , para diferentes valores de amortiguamiento. Como se puede observar en la Figura (2.6), la conmutación de la fuerza se realiza cuando ya ha transcurrido la primera mitad del movimiento.

## 2.4. Conclusiones del Capítulo 2

A partir del enfoque de la teoría de control óptimo es posible explicar el comportamiento del movimiento de sistemas mecánicos o biológicos. Por lo que para la solución de los problemas de control óptimo es necesario definir cuáles son los índices de rendimiento que se buscan optimizar, en este capítulo se mostraron las soluciones a los problemas de esfuerzo y tiempo mínimo.

Para la solución del problema de esfuerzo mínimo, considerando un sistema conformado por una masa, es posible encontrar la ley de control que es necesario que los sujetos apliquen al sistema para llevarlo de un punto inicial a un punto final. Por lo que los índices de rendimiento que se buscan optimizar son el perfil de fuerza y el tiempo en que se hace el cambio en el sentido de la fuerza.

Como solución al problema de tiempo mínimo se busca llevar el sistema, conformado por una masa, un resorte y un amortiguador, de un punto inicial a un punto final en el menor tiempo posible. Para lograr este movimiento es necesario aplicar el máximo esfuerzo durante toda la duración de la maniobra, por lo que los índices que se buscan minimizar son el tiempo de duración del movimiento y la relación del tiempo donde se conmuta la fuerza.

Para la validación de estos problemas se realizan pruebas experimentales con sujetos de control, los resultados encontrados se muestran en el Capítulo 4.



# Estimación de Fuerzas por medio de Electromiografía

---

### 3.1. Relación EMG-Fuerza

El movimiento de las articulaciones del ser humano durante la realización de una tarea se produce como resultado de la acción sinérgica de múltiples músculos. Para estudiar la coordinación muscular, las contracciones musculares pueden medirse mediante electromiografía. Las señales EMG obtenidas, a menudo, se usan para representar actividades musculares [47]. Los electrodos utilizados tienen un papel importante en la percepción de las señales eléctricas producidas por el movimiento del músculo. Para un análisis más preciso es necesario la localización de los electrodos lo más cercano posible al músculo de interés.

A lo largo de los años se han realizado una gran cantidad de investigaciones dirigidas a determinar una relación entre la amplitud de las señales EMG y el par ejercido sobre la articulación [48], [49], [50]. Esto ha ayudado a encontrar herramientas no invasivas para la evaluación del sistema músculo-esquelético, además de contribuir a ciertas aplicaciones de rehabilitación [47]. Es necesario tomar en cuenta que la relación EMG-Fuerza va a ser diferente entre cada persona, y es necesario un análisis separado para cada uno, ya que debido a la utilización de sensores no invasivos para la obtención de las señales EMG, se deben tener en cuenta factores externos que pueden ocasionar ruido en la señal obtenida, como grasa corporal, el espesor de la piel, tejido adiposo, y la localización de los sensores en la extremidad a analizar. Estos factores perjudican la posibilidad de poder desarrollar un dispositivo universal que ayude en temas de rehabilitación o prótesis.

Ya que las señales EMG están ampliamente relacionadas con el movimiento de las articulaciones, se puede realizar un análisis bilateral [47], desde perspectivas directas e inversas.

*Problema inverso.* Consiste en determinar las activaciones del grupo muscular a partir de un torque deseado en el movimiento de la articulación. Este problema implica soluciones indefinidas debido a la redundancia muscular inherente con respecto a las articulaciones asociadas con un movimiento deseado. Este problema ayuda a personas que, por ejemplo, hayan sufrido lesiones en la médula espinal. Para la solución de este problema se utilizan los grupos de músculos coordinados a partir de técnicas de reducción de dimensión, estimulación eléctrica funcional (FES por sus siglas en inglés), algoritmos de factorización de matriz no negativa (NMF) para la extracción de las sinergias musculares, entre otros.

*Problema directo.* Consiste en determinar la fuerza resultante ejercida por la articulación a partir de la múltiple activación muscular. En las décadas pasadas se han encontrado diversas relaciones, lineales y no lineales, a partir de estudios experimentales analizando contracciones y extensiones isométricas, cuasi isotónicas y sin fatiga. Este estudio contribuye a ciertas aplicaciones de rehabilitación, control de robots humano-interactivo [51], extremidades protéticas [52] o exoesqueletos [53]. Se han propuesto diversos métodos que ayudan a establecer una relación directa entre las señales EMG y la fuerza ejercida por la articulación por medio de algoritmos genéticos [54], procesamiento de las señales EMG a partir de filtros o mínimos cuadrados [55].

## 3.2. Adquisición de datos EMG

### 3.2.1. Sensores para la adquisición de datos EMG

Las señales EMG se pueden obtener utilizando electrodos de superficie o intramusculares. Los más comunes son los electrodos superficiales, sin embargo, ambos electrodos detectan actividad eléctrica de los músculos seleccionados y es posible registrar también actividad de músculos cercanos [56].

#### 3.2.1.1. Electrodos de superficie

Estos electrodos son normalmente discos pequeños de aproximadamente 1 centímetro de diámetro, aunque existen electrodos que pueden ser más pequeños en el caso de realizar un estudio para músculos o partes del cuerpo más pequeñas. Estos electrodos van unidos sobre el segmento de músculo superficial que se desee estudiar. Para la ubicación de estos sensores es necesario determinar el volumen de registro o recepción del tejido, es decir, mientras más

---

cercanos estén un sensor de otro se tiene registro más selectivo del músculo de interés. Estos electrodos suelen ser de cloruro de plata-plata con pasta de cloruro (Ag – Ag - Cl) para conseguir más contacto con la piel y reducir la impedancia de los electrodos. La amplitud y anchura de banda de la señal van de  $10 \mu\text{V}$  a  $5 \text{ mV}$  y de  $10 \text{ Hz}$  a  $10\text{KHz}$ . La desventaja es que solo es posible obtener señales de músculos superficiales y no se puede utilizar fácilmente para detectar las señales de los músculos más pequeños [56] [57] [58]. La principal ventaja que tienen estos sensores es la comodidad para la localización, además son de gran utilidad cuando es necesario recolectar datos en niños, controlar prótesis externas y medidas psicofisiológicas donde la relajación de las personas es importante.

Los electrodos superficiales son susceptibles a interferencias de músculos adyacentes, por lo que se recomienda tener como mínimo  $10 \text{ mm}$  de separación entre los electrodos. En el caso de una errónea colocación de los sensores, las señales EMG detectadas tendrán errores provocado por la detección de ruido debido a la activación de otros músculos [59].

### 3.2.1.2. Electrodo intramusculares

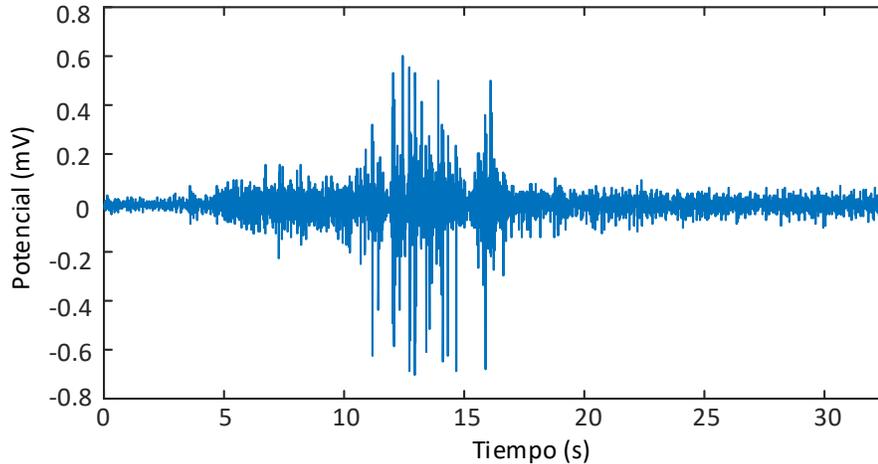
. Los electrodos intramusculares más comunes son los electrodos de aguja, los cuales consisten en dos cables de acero inoxidable aislados con teflón insertados en una fina aguja hipodérmica. Estos se utilizan cuando es necesario tener una mayor selectividad o es necesario un estudio de músculos situados a mayor profundidad por lo que se pueden obtener datos más confiables y con menor ruido [58], [60]. Existen diversos tipos de electrodos de aguja [61].

*Agujas de electrodos concéntricos.* Son los más comunes y consisten de un solo electrodo y un anillo concéntrico. El área relativamente pequeña permite la obtención individual de la acción muscular. Este electrodo puede localizarse fácilmente en el músculo deseado cancelando la actividad de los músculos cercanos.

*Agujas de electrodos monopolares.* Estos electrodos son más selectivos en términos de la adquisición de datos, es decir son más sensibles que los electrodos concéntricos. Las agujas están hechas de acero inoxidable recubierto de teflón de aproximadamente  $500 \mu\text{m}$  de diámetro.

*Electrodo de fibra única.* Estos electrodos se usan específicamente en técnicas de detección de EMG de fibra única (SFEMG). Su tamaño es de casi  $25 \mu\text{m}$  y permiten obtener datos de fibras musculares muy pequeñas. Estos sensores suelen llegar a usarse varias veces mientras que se realice una correcta esterilización. Las señales SFEMG detectadas por estos electrodos son usados principalmente para la detección de trastornos neuromusculares. Estos sensores

---



**Figura 3.1.** Señal sEMG del músculo flexor del antebrazo durante pruebas de contracción.

suelen ser bastante costosos.

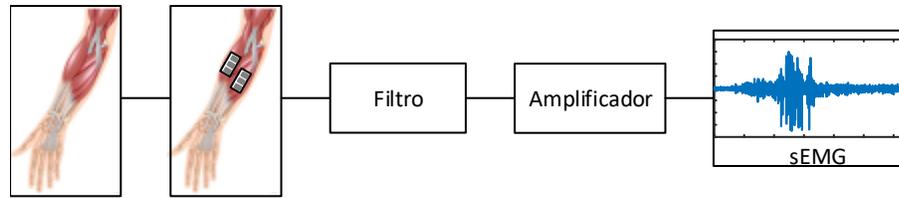
El problema que se tiene con este tipo de electrodos es la incomodidad que pueda generar a las personas al ser insertadas las agujas, además de que se debe tener mucha experiencia en la inserción de estos sensores a los músculos.

A pesar de que los sensores invasivos presentan menor ruido en la detección de la activación muscular, para el desarrollo de este trabajo de tesis se optó por utilizar electrodos no invasivos, ya que es necesario que las personas se encuentren relajadas y tranquilas cuando se realiza la maniobra.

### 3.2.2. Señales EMG superficiales

Las señales EMG superficiales, proporcionadas por sensores no invasivos colocados en la superficie de la piel, proporcionan una medida de la activación de un músculo. Esta genera un pequeño diferencial de voltaje debido a la excitación de las fibras musculares (Figura (3.1)). Dicho diferencial puede oscilar entre  $10 \mu V$  hasta los 5 mV dependiendo de los electrodos utilizados.

La acción de contraer o relajar un músculo comienza con la generación de un impulso eléctrico generado en el cerebro, el cual es transmitido por la espina dorsal hasta llegar a las moto-neuronas, las cuales son responsables de activar el músculo deseado, de forma tal que actúan sobre los nervios del músculo estimulando las fibras contrayéndolas o extendiéndolas [62], [63]. La activación muscular es detectada a través de los electrodos. Antes de ser usadas,



**Figura 3.2.** Adquisición de datos sEMG a partir de electrodos.

las señales eléctricas son filtradas y amplificadas con la finalidad de anular todo el ruido posible; este filtrado depende del sensor utilizado y su canal de información. Cabe resaltar que la actividad electromiográfica oscila entre 20 Hz hasta los 500 Hz. Las señales sEMG (señales EMG superficiales) son las que se obtienen por el electrodo, como se observa en la Figura (3.2).

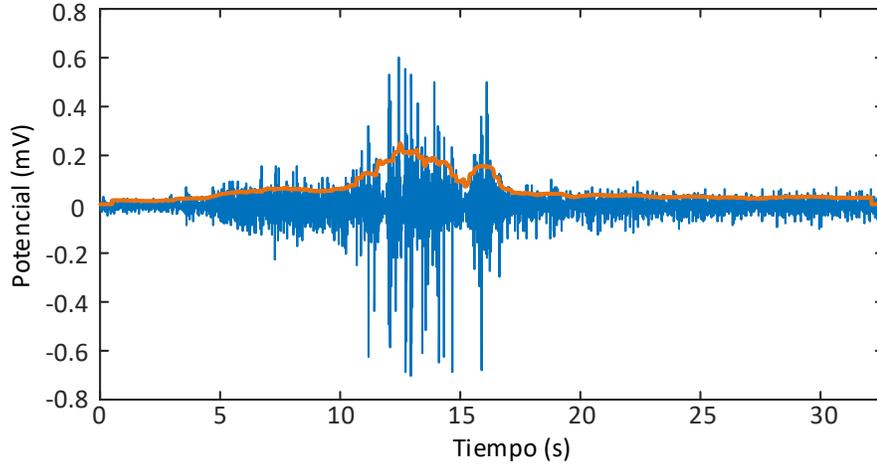
En la literatura existen diversos estudios que relacionan las señales sEMG y el torque producido por la articulación. Si se utilizan las señales sEMG se presentará gran porcentaje de error en la estimación de la fuerza, ya que son señales ruidosas y variantes en magnitud durante toda la activación muscular [55], [54]. En este contexto es necesario estimar la amplitud de la señal sEMG.

En los primeros estudios realizados para la solución de este problema, se utilizaban circuitos no lineales, como rectificadores de ondas completos o filtro pasa baja compuesto por componentes pasivos simples, resistencias y capacitores, para detectar la señal EMG. Hoy en día muchos estudios utilizan métodos para encontrar el valor absoluto promedio móvil (MAV) o el promedio de la raíz cuadrada móvil (RMS) [64]. Para la solución de este problema se optó por encontrar la señal  $EMG_{RMS}$ , como

$$EMG_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EMG_i^2} \quad (3.1)$$

donde  $n$  es el número de muestras en cada ventana de suavizado en el filtro, y la señal  $x_i$  es la señal que se desea suavizar (Figura (3.3)).

El objetivo principal es realizar la estimación de fuerzas a partir de las señales EMG detectadas por el movimiento de la articulación, al optimizar un índice de rendimiento de la maniobra, esfuerzo o tiempo mínimo. Dado que el movimiento deseado es la extensión de la muñeca, es importante colocar el electrodo de tal forma que los sensores estén en la superficie donde se ubican los músculos flexores y extensores principales del antebrazo. Los músculos del antebrazo se pueden dividir en tres grandes grupos, músculos flexores de los dedos, ubicados en la cara anterior del antebrazo, los extensores de los dedos, ubicados en la



**Figura 3.3.** Señal sEMG y  $EMG_{RMS}$  del músculo flexor del antebrazo durante pruebas de contracción.

cara posterior del antebrazo y los supinadores o rotadores externos del antebrazo, ubicados en el borde radial del brazo.

### 3.3. Modelo EMG-Fuerza

Este trabajo de tesis se enfocó en encontrar la fuerza ejercida por la articulación a partir de la activación muscular. En la literatura existen modelos lineales que relacionan la fuerza ejercida  $F_T$  y las señales EMG [55], [65] como una suma entre la fuerza ejercida por los músculos flexores  $F_f$  y la fuerza de los músculos extensores  $F_e$  como

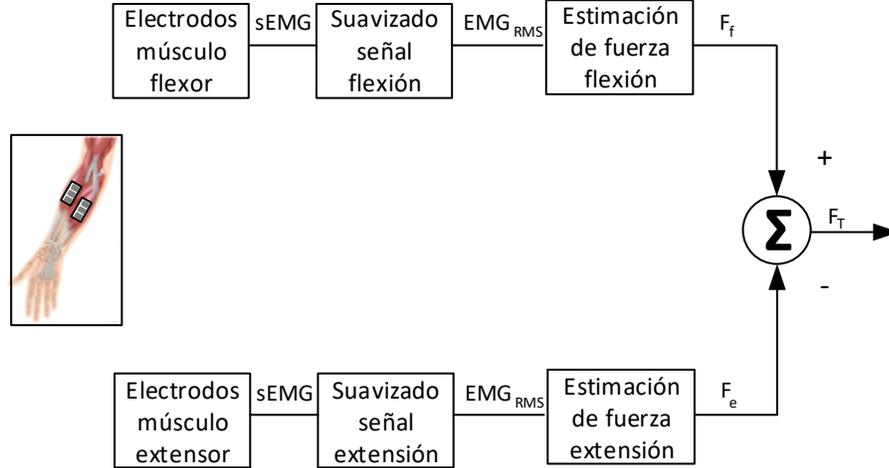
$$F_T = F_f - F_e \quad (3.2)$$

Para resolver la ecuación anterior es necesario definir la relación de las fuerzas  $F_f$  y  $F_e$  con las señales EMG obtenidas durante la maniobra (Figura (3.4)). Tomando el modelo FIR lineal [66] se pueden definir las fuerzas como:

$$F_f(k) = f_1 EMG_f(k-1) + f_2 EMG_f(k-2) + \dots + f_n EMG_f(k-n) \quad (3.3)$$

$$F_e(k) = e_1 EMG_e(k-1) + e_2 EMG_e(k-2) + \dots + e_n EMG_e(k-n) \quad (3.4)$$

donde  $f_n$  representan los coeficientes de flexión,  $e_n$  los coeficientes de extensión y  $n$  representa el orden del modelo, en el instante  $k$ . Para la solución de este problema es necesario encontrar el valor de los coeficientes del modelo, los cuales se ajustan a partir de pruebas de entrenamiento para después predecir el perfil fuerza aplicada por la persona en un ensayo de



**Figura 3.4.** Señal sEMG y  $EMG_{RMS}$  del músculo flexor del antebrazo durante pruebas de contracción.

prueba distinto. Los coeficientes son encontrados por medio de una estimación de mínimos cuadrados

$$F_T = A\hat{X} \quad (3.5)$$

donde

$$A(k) = \begin{bmatrix} -EMG_e(k-1) & \dots & -EMG_e(k-n) & EMG_f(k-1) & \dots & EMG_f(k-n) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

y

$$\hat{X}^T = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n \ f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n] \quad (3.7)$$

La expresión anterior representa la estimación de  $\hat{X}$  a partir de una muestra de  $F_T$  en el instante  $k$ . Para poder obtener una mayor precisión en la estimación de los coeficientes, es importante tomar la mayor cantidad de datos de  $F_t$  posible, lo que conlleva a extender la representación de  $A$ , esta matriz está representada por  $n$  valores de la señal  $EMG_f$  y  $EMG_e$  en el instante  $k$

$$F_{T_{nb \times 1}} = A_{nb \times 2n} \hat{X}_{2n \times 1} \quad (3.8)$$

esto quiere decir que la matriz  $A$  va a estar dada por el recorrido de la señal EMG y  $F_T$  desde  $k = 1 \dots nb$ , se busca que  $nb$  sea lo más grande posible, siempre y cuando la señal de la fuerza sea diferente de cero.

Por medio de estimación de mínimos cuadrados se puede obtener el valor de  $\hat{X}$  como

$$\hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T F_T \quad (3.9)$$

Para la estimación de  $\hat{X}$  se tomaron tres valores diferentes de orden del filtro,  $n = 10$ ,  $n = 20$  y  $n = 30$ , para ver el efecto en la reproducción de fuerzas medidas. De manera cuantitativa se puede hacer el cálculo de la variación de los datos de fuerza medidos contra los datos de fuerza estimados por medio del error cuadrático medio (RMSE) como

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (F_{T_i} - \hat{F}_i)^2}{N}} \quad (3.10)$$

donde  $F_T$  representa la fuerza medida,  $\hat{F}$  representa la fuerza calculada a partir de la estimación de  $\hat{X}$  y  $N$  representa la cantidad de datos tomados. Este cálculo de variación se realiza para cada orden del filtro.

### 3.4. Conclusiones del Capítulo 3

El movimiento que realizan las personas con sus extremidades se producen como resultado de la acción de múltiples músculos, estas activaciones pueden ser representadas a partir de señales electromiográficas. Ya que las señales EMG estas relacionadas con el movimiento de las articulaciones, es posible determinar una relación entre la activación muscular y las fuerzas ejercidas por las articulaciones.

En este capítulo se propone un modelo lineal que define la fuerza total de la articulación a partir de las señales EMG y los coeficientes de flexión y de extensión. Se propone la utilización del método de mínimos cuadrados para la estimación de los coeficientes, considerando tres valores diferentes del orden del modelo de forma que se pueda observar el comportamiento de los errores en la estimación de la fuerza. Los resultados obtenidos para la validación de este modelo se muestran en el Capítulo 4.

# Validación experimental

---

## 4.1. Plataforma experimental

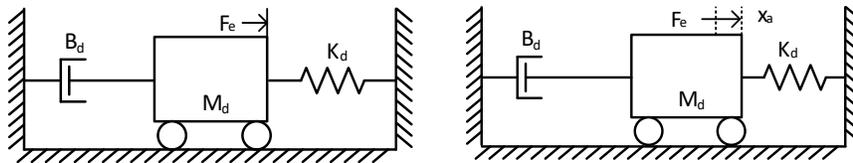
Para la validación de la teoría presentada en los capítulos anteriores la plataforma experimental consta de

- Robot industrial FANUC LR Mate 200iC.
- Controlador FANUC R-30iA Mate con terminal de enseñanza.
- Sensor de fuerza FANUC FS-10iA.
- Sensor Myo Gesture Control Armband

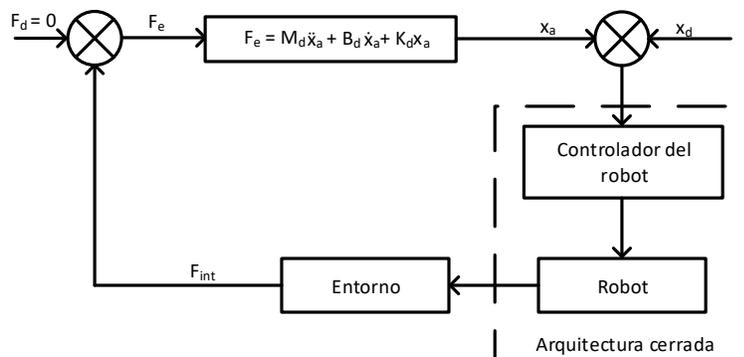
La premisa de este trabajo es que una persona pueda realizar una maniobra prescrita de forma óptima, cumpliendo con uno o más criterios de la teoría de control óptimo, sin tener conocimiento de la solución a este problema. Para probar esto, es necesario contar con una plataforma que ayude a validar experimentalmente la aplicación de esfuerzo mínimo en un sistema conformado por una masa y el problema de tiempo mínimo en un sistema masa-resorte-amortiguador. Con este objetivo se utiliza el robot FANUC LR Mate 200iC, el cual tiene implementado un control de interacción, conocido como controlador de impedancia cinemático. Una vez satisfechos los criterios de rendimiento del sistema, se realiza una estimación de las fuerzas usando señales EMG, las cuales se obtienen por medio del sensor Myo Control Armband a partir de un programa implementado en Matlab.

### 4.1.1. Controlador de impedancia cinemático.

El control de impedancia pretende caracterizar el robot con un comportamiento de una impedancia mecánica Figura (4.1), esta sencilla interpretación es la que más se ajusta a



**Figura 4.1.** Sistema masa-resorte-amortiguador ideal que define el comportamiento del control de impedancia en el manipulador



**Figura 4.2.** Diagrama de bloques del control de impedancia implementado en el robot FANUC LR Mate 200iC.

sistemas robóticos de arquitectura cerrada, ya que al no tener acceso a los pares de control, se controla por medio de la posición cartesiana o angular deseada. El control implementado en el robot se muestra en la Figura (4.2).

Para la implementación de este controlador en el robot es necesario obtener las fuerzas de interacción, las cuales se obtienen mediante el sensor de fuerza FS-10iA, el cual se encuentra montado en el efector final del robot. Las señales de fuerza detectadas son muestreadas, cada 10 ms, para después ser transformadas en el vector de posición que genera la trayectoria a seguir por el manipulador. La ecuación que define al sistema masa-resorte-amortiguador se expresa como

$$F_e = M_d \ddot{x}_a + B_d \dot{x}_a + K_d x_a \quad (4.1)$$

donde  $x_a$  está asociada con la posición. Esta relación se programa en el robot de tal forma que se genere una respuesta para cada grado de libertad, ante la interacción de la persona con el efector final. la nomenclatura y las unidades se muestran en la Tabla (4.1)

**Tabla 4.1.** Nomenclatura, símbolos y unidades de los componentes del control de impedancia para movimiento traslacional.

Nomenclatura	Símbolo	Unidades
Inercia	$M_d$	$kg$
Coefficiente de amortiguamiento	$B_d$	$Ns/m$
Coefficiente del resorte	$K_d$	$N/m$
Fuerza ejercida	$F_e$	$N$

Para la solución de  $x_a$  se emplea el método numérico iterativo de Runge-Kutta de segundo orden para la modificación de las trayectorias a partir de la detección de la fuerza de interacción  $F_e$ , por lo que se obtiene la siguiente relación

$$x_a = x_0 + \tau \left( \dot{x}_0 + \frac{\tau}{2M_d} (F_e - B_d \dot{x}_0 - K_d x_0) \right) \quad (4.2)$$

y

$$\dot{x}_a = \dot{x}_0 + \frac{\tau}{M_d} \left( F_e - B_d \left( \dot{x}_0 + \frac{\tau}{2M_d} (F_e - B_d \dot{x}_0 - K_d x_0) \right) - K_d \left( x_0 + \frac{\tau \dot{x}_0}{2} \right) \right) \quad (4.3)$$

Estas ecuaciones proporcionan el valor de la desviación de posición y velocidad para un grado de libertad en el plano cartesiano en traslación y donde  $x_0$  y  $\dot{x}_0$  representan las condiciones iniciales para cada iteración en cada grado de libertad y  $\tau$  representa el lapso de tiempo para la predicción de la posición  $x_a$  debido a la fuerza de interacción  $F_e$  detectada.

Este análisis se especifica para un movimiento de traslación, pero se puede extender a un movimiento rotacional, donde se tendrían que considerar ahora el torque de interacción, el momento de inercia, la rigidez y el amortiguamiento para un sistema rotacional. Para la solución experimental de este problema los torques no son considerados y se limitan las condiciones del efector final a movimiento traslacional.

#### 4.1.2. Sensor MYO Gesture Control Armband

Para la obtención de las señales EMG se utiliza el brazalete Myo Gesture Control Armband, el cual está conformado por ocho sensores superficiales, como se muestra en la Figura (4.3), capaces de capturar señales mioeléctricas producidas por el estiramiento o contracción de los músculos. Este sensor esta diseñado para ser utilizado en el antebrazo, brazo o incluso en el tobillo. Las características del Hardware se muestra en la Tabla (4.2)



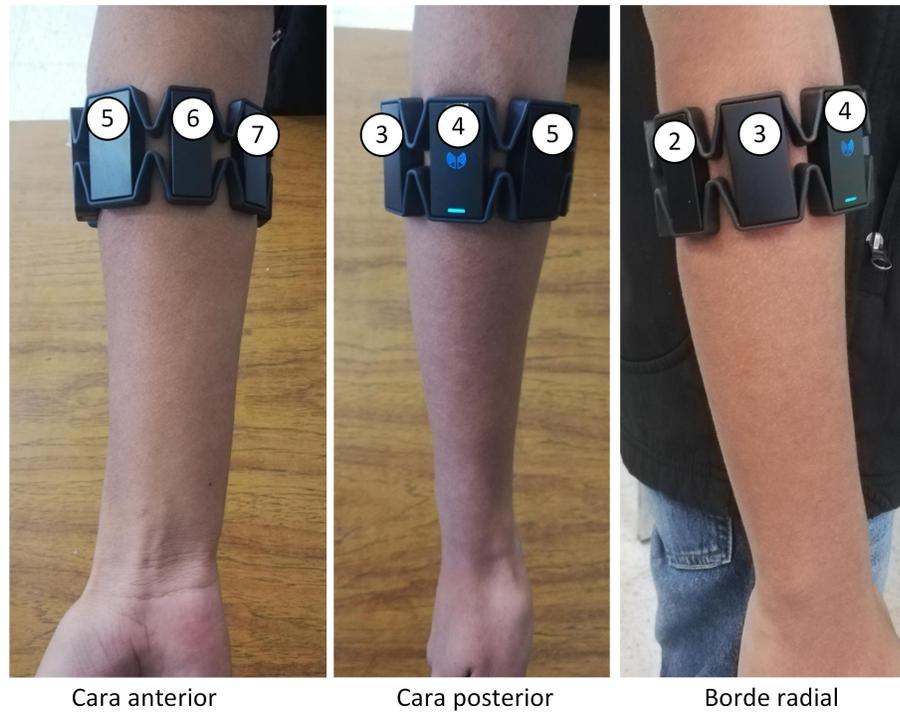
**Figura 4.3.** Ubicación de los sensores del brazalete MYO Gesture Control Armband.

**Tabla 4.2.** Especificaciones de Hardware del brazalete MYO

Material	Sensores de acero inoxidable de grado médico
Sensores	Unidad de medición inercial (IMU), contiene un giroscopio de 3 ejes, un acelerómetro de 3 ejes y un magnetómetro de 3 ejes
Procesador	ARM Cortex M4
Retroalimentación	Vibraciones cortas, medianas y largas
Comunicación	Bluetooth

El brazalete Myo se conecta a la computadora vía Bluetooth. Para el reconocimiento de los gestos de la mano es necesario sincronizarla a la computadora, por lo que se parte de una posición neutral la cual consiste de flexionar el codo a casi  $90^\circ$  y sin girar la muñeca. Esto es, con respecto al antebrazo mantener una posición de  $0^\circ$ . Una vez que se logra esa posición neutral se realiza un movimiento de extensión de la muñeca hasta que los sensores vibren; es ahí cuando se realiza la sincronización con la computadora. Para la adquisición de datos se utiliza un código de Matlab, el cual permite obtener las señales de los ocho sensores. En este código se puede modificar la cantidad de brazaletes que se desean utilizar, una vez que se ejecuta el programa y se realiza la conexión con la computadora, se muestra en pantalla las señales EMG en tiempo real de la activación muscular. Una vez terminado la adquisición de datos, se guardan las señales para un análisis posterior.

El brazalete fue colocado en el antebrazo de los sujetos, ya que cada uno de los sensores



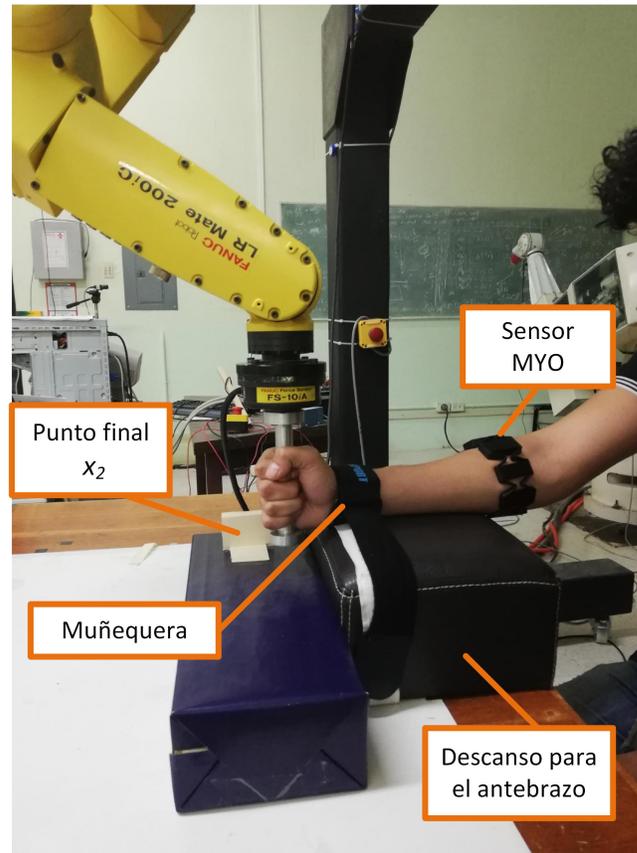
**Figura 4.4.** Posicionamiento del sensor MYO Gesture Control Armband en uno de los sujetos.

están enumerados de manera estándar, el posicionamiento de estos es el mismo para cada prueba realizada y para cada sujeto, como se puede observar en la Figura (4.4). Para el análisis de los datos éste es un factor importante ya que facilita el tratamiento de las señales y la identificación de los músculos activados durante la maniobra.

## 4.2. Resultados experimentales

Con la finalidad de corroborar que el ser humano puede realizar una maniobra si es entrenado para realizarla, de acuerdo a las condiciones establecidas en el problema de optimización, se busca encontrar el perfil de fuerza que es necesario aplicar para mover al sistema. Con este objetivo se realizan pruebas a 10 sujetos, sin historial de enfermedades en el sistema neuromotor, a quienes se les instruyó que movieran el efector final del robot FANUC LR Mate 200iC, donde se encuentra montado el sensor de Fuerza FANUC FS-10iA.

Para la realización de la maniobra el movimiento de la persona está restringido de modo que únicamente realicen la flexión de la muñeca, por lo que el sujeto será inmovilizado con una muñequera. Previamente se le coloca el brazalete MYO en el antebrazo y, una vez



**Figura 4.5.** Restricciones de movimiento para los sujetos de estudio.

inmovilizado, se le indica a la persona que tiene que mover el efector final del robot del punto inicial  $x_1$  al punto final  $x_2$  aplicando un mínimo esfuerzo. Para facilitar la maniobra se cuenta con una retroalimentación visual la cual le indica el punto  $x_2$ , además de proporcionar un descanso para el antebrazo, como se observa en la Figura (4.5).

Cada uno de los sujetos pasa por un periodo de aprendizaje, donde se hace un reconocimiento del sistema y aprende cómo es que debe ejercerse la fuerza para poder realizar la maniobra. Cabe resaltar que en ningún momento se le indica al sujeto como es que debe de ser el perfil de fuerza a aplicar. Los resultados mostrados son de las pruebas realizadas después del periodo de aprendizaje.

#### 4.2.1. Solución al problema de esfuerzo mínimo.

Como se había planteado anteriormente, se busca encontrar el perfil de fuerza que permita al sujeto mover un objeto de masa  $m$  de un punto a otro a lo largo de una línea horizontal sin fricción. Este perfil se encuentra definiendo las condiciones de frontera, las cuales se muestran

en la Tabla (4.3), donde  $x_2$  está prescrito, de forma que los sujetos no tienen límite de tiempo en terminar la maniobra. Para su implementación en el control de impedancia programado en el manipulador únicamente se le da valor a la masa,  $M_d = 1.5kg$ , y los parámetros del resorte y el amortiguador se definen en cero,  $B_d = 0$  y  $K_d = 0$ .

**Tabla 4.3.** Condiciones de frontera para la solución del problema de esfuerzo mínimo

$x_{t_1} = x_1$	$\dot{x}(t_1) = \dot{x}_1$	$t_1 = 0$	$x_1 = 0$	$\dot{x}_1 = 0$
$x_{t_2} = x_2$	$\dot{x}(t_2) = \dot{x}_2$	$t_2 = T$	$x_2 = 40mm$	$\dot{x}_2 = 0$

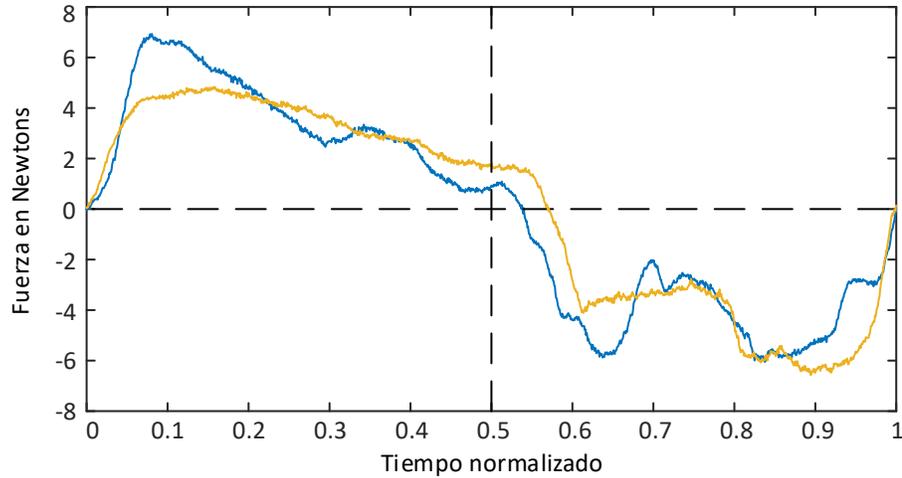
Para el análisis de los resultados del experimento se observará la fuerza aplicada, la distancia recorrida y el tiempo que le tomó a la persona terminar el experimento. En las gráficas se muestran dos pruebas, donde la línea azul representa la primera prueba realizada y la línea amarilla la última prueba, de forma que se puede ver el aprendizaje que se tuvo de la maniobra. El tiempo se encuentra normalizado en un intervalo de 0 a 1, el cual representa el tiempo total que le tomó al sujeto realizar la maniobra.

#### 4.2.1.1. Resultados Sujeto de Prueba 1

En la Figura (4.6) se muestra el perfil de fuerza de los resultados del sujeto 1, donde uno de los resultados muestra menor error en la fuerza aplicada y en la otra se muestra un mejor resultado en el tiempo  $\tau$ , que es donde se hace el cambio en el sentido de la fuerza. Los porcentajes de error se muestran en la Tabla (4.4) y la Tabla (4.5)

**Tabla 4.4.** Resultados de fuerza medidos y porcentaje de error de la máxima fuerza ejercida por el sujeto 1 contra la fuerza calculada bajo el enfoque de control óptimo.

Prueba	$F_+$	$F_-$	$F_e$	$\%e_+$	$\%e_-$
1	6.93 N	-6.0528 N	$\pm 2.0475$ N	238.73	195.61
2	4.8363	-6.5727 N	$\pm 1.7729$ N	172.79	270.73



**Figura 4.6.** Perfil de fuerza medida de dos pruebas realizadas por el sujeto de control 1.

**Tabla 4.5.** Porcentaje de error del tiempo  $\tau$  del sujeto 1.

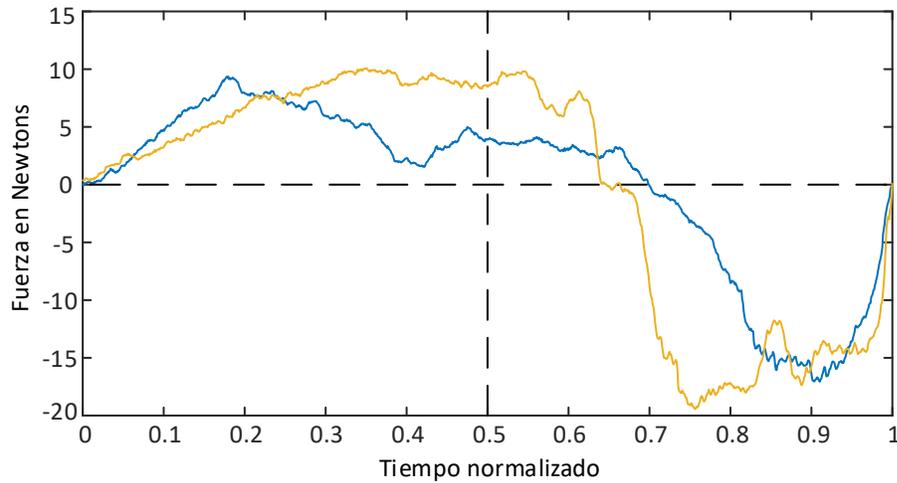
Prueba	Tiempo $T$	$\tau_m$	$\tau_e$	$\tau/T$	$\%e_{\tau/T}$
1	13.26 s	7.16 s	6.63 s	0.5399	7.98
2	14.25 s	8.12 s	7.12 s	0.5698	13.9

#### 4.2.1.2. Resultados Sujeto de Prueba 2

En la Figura (4.7) se muestra el perfil de fuerza de 2 pruebas realizadas por el sujeto 2, estos fueron los resultados que presentaron menor error en cuestión de la fuerza aplicada, en la Tabla (4.6) se muestra el porcentaje de error en la fuerza máxima de las dos pruebas y en la Tabla (4.7) se muestra el porcentaje de error en el tiempo  $\tau$

**Tabla 4.6.** Resultados de fuerza medidos y porcentaje de error de la máxima fuerza ejercida por el sujeto 2 contra la fuerza calculada bajo el enfoque de control óptimo.

Prueba	$F_+$	$F_-$	$F_e$	$\%e_+$	$\%e_-$
1	9.3686 N	-17.0596 N	$\pm 2.9537$ N	217.18	477.56
2	10.094 N	-19.4532 N	$\pm 3.5291$ N	186.03	451.22



**Figura 4.7.** Perfil de fuerza medida de dos pruebas realizadas por el sujeto de control 2.

**Tabla 4.7.** Porcentaje de error del tiempo  $\tau$  del sujeto 2.

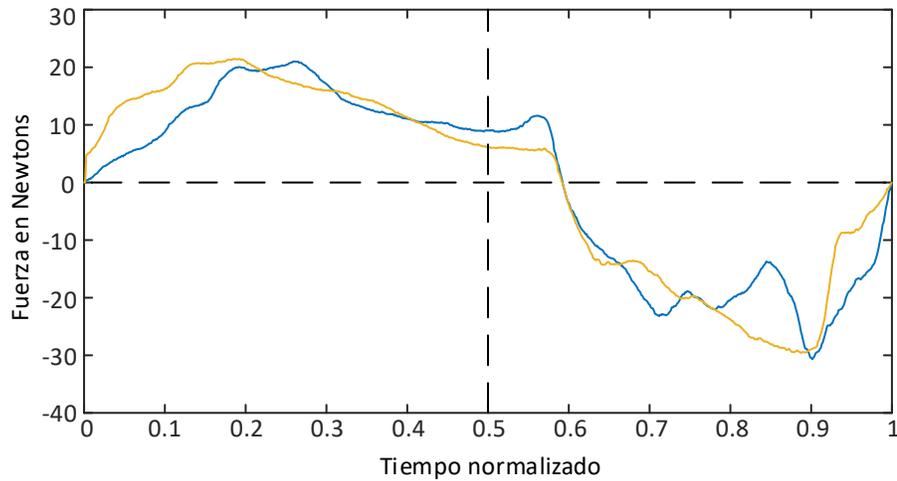
Prueba	Tiempo $T$	$\tau_m$	$\tau_e$	$\tau/T$	$\%e_{\tau/T}$
1	11.04 s	7.72 s	5.52 s	0.699	39.8
2	10.10 s	6.60 s	5.05 s	0.653	30.6

### 4.2.1.3. Resultados Sujeto de Prueba 3

La Figura (4.8) muestra el perfil de fuerza ejercido por el sujeto de control 3, estas pruebas muestran valores de tiempo  $\tau$  con mínima diferencia entre ellos, y fuerzas máximas y mínimas muy similares, los errores en la fuerza aplicada con respecto a la fuerza esperada calculada por la teoría de control óptimo se muestran en la Tabla (4.8) y los errores en el tiempo  $\tau$  se muestran en la Tabla (4.9).

**Tabla 4.8.** Resultados de fuerza medidos y porcentaje de error de la máxima fuerza ejercida por el sujeto 3 contra la fuerza calculada bajo el enfoque de control óptimo.

Prueba	$F_+$	$F_-$	$F_e$	$\%e_+$	$\%e_-$
1	21.032 N	-30.675 N	$\pm 6.0719$ N	246.39	405.21
2	21.474 N	-29.587 N	$\pm 6.4515$ N	232.85	358.60



**Figura 4.8.** Perfil de fuerza medida de dos pruebas realizadas por el sujeto de control 3.

**Tabla 4.9.** Porcentaje de error del tiempo  $\tau$  del sujeto 3.

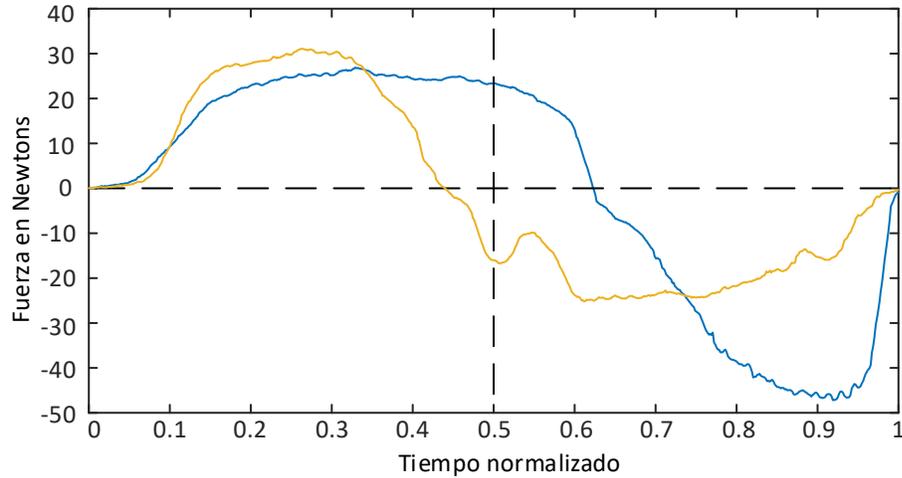
Prueba	Tiempo $T$	$\tau_m$	$\tau_e$	$\tau/T$	$\%e_{\tau/T}$
1	7.70 s	4.56 s	3.85 s	0.592	18.4
2	7.47 s	4.42 s	3.73 s	0.591	18.2

#### 4.2.1.4. Resultados Sujeto de Prueba 4

En la Figura (4.9) se muestra el perfil de fuerza aplicado por el sujeto de control 4, esta gráfica ayuda a ver que el porcentaje de error de la fuerza aplicada en la prueba 1 es menor, como se puede observar en la Tabla (4.10), en ambas pruebas presentadas se puede observar una gran diferencia entre el tiempo  $\tau$  de una prueba a otra, en este caso, en la prueba 2 es donde se observa el menor error en el tiempo  $\tau$ , como se muestra en la Tabla (4.11).

**Tabla 4.10.** Resultados de fuerza medidos y porcentaje de error de la máxima fuerza ejercida por el sujeto 4 contra la fuerza calculada bajo el enfoque de control óptimo.

Prueba	$F_+$	$F_-$	$F_e$	$\%e_+$	$\%e_-$
1	26.908 N	-47.176 N	$\pm 8.7617$ N	207.11	438.43
2	31.107 N	-25.201 N	$\pm 7.2022$ N	331.91	249.91



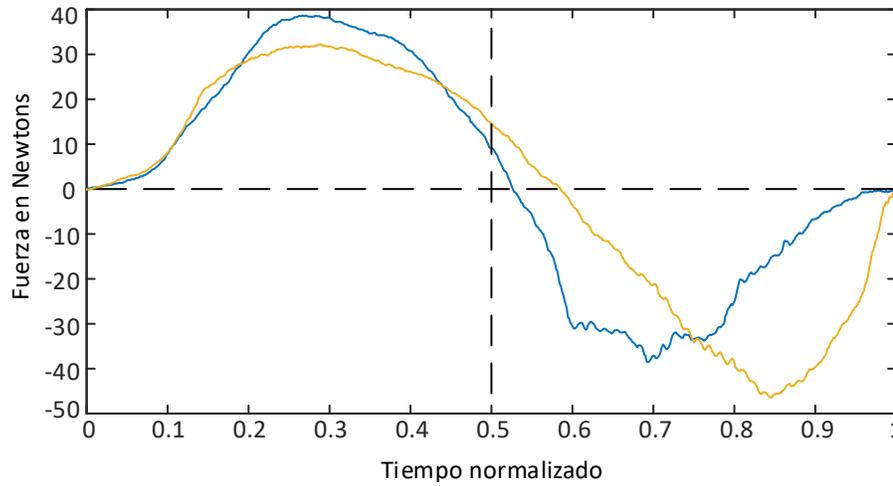
**Figura 4.9.** Perfil de fuerza medida de dos pruebas realizadas por el sujeto de control 4.

**Tabla 4.11.** Porcentaje de error del tiempo  $\tau$  del sujeto 4.

Prueba	Tiempo $T$	$\tau_m$	$\tau_e$	$\tau/T$	$\%e_{\tau/T}$
1	6.41 s	4.0 s	3.20 s	0.624	24.8
2	7.07 s	3.11 s	3.53 s	0.439	12.04

#### 4.2.1.5. Resultados Sujeto de Prueba 5

En la fuerza aplicada por el sujeto de control 5, la cual se muestra en la Figura (4.10), se puede observar que el aumento en la aplicación de la fuerza es un poco lenta en ambas pruebas, mientras que al dejar de aplicar la fuerza se puede ver en la prueba 2, que se intenta realizar de forma instantánea. El porcentaje de error presentado en la fuerza medida con respecto a la fuerza deseada se muestra en la Tabla (4.12), los errores presentados en el tiempo  $\tau$  se muestran en la Tabla (4.13) la cual en la prueba 1 es bastante pequeña, ya que casi se hace el cambio en el sentido de la fuerza a la mitad del tiempo.



**Figura 4.10.** Perfil de fuerza medida de dos pruebas realizadas por el sujeto de control 5.

**Tabla 4.12.** Resultados de fuerza medidos y porcentaje de error de la máxima fuerza ejercida por el sujeto 5 contra la fuerza calculada bajo el enfoque de control óptimo.

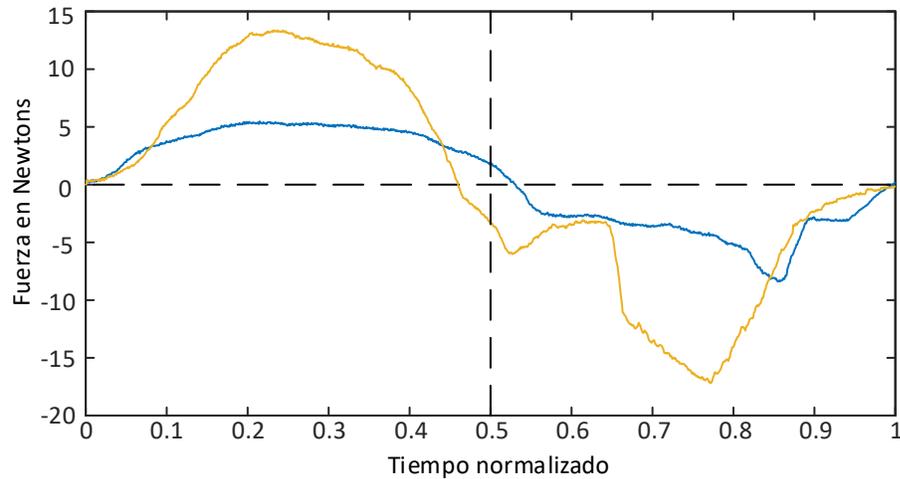
Prueba	$F_+$	$F_-$	$F_e$	$\%e_+$	$\%e_-$
1	38.641 N	-38.572 N	$\pm 7.5614$ N	411.03	410.12
2	32.240 N	-46.450 N	$\pm 7.1414$ N	351.45	550.43

**Tabla 4.13.** Porcentaje de error del tiempo  $\tau$  del sujeto 5.

Prueba	Tiempo $T$	$\tau_m$	$\tau_e$	$\tau/T$	$\%e_{\tau/T}$
1	6.90 s	3.63 s	3.45 s	0.526	5.2
2	7.10 s	4.15 s	3.55 s	0.58.4	16.8

#### 4.2.1.6. Resultados Sujeto de Prueba 6

Las fuerzas mostradas en la Figura (4.11) ilustran la reacción que tuvo el sujeto al darle la indicación que tenía que aplicar el mínimo esfuerzo, en ese caso como se puede observar en los resultados de la prueba 1, línea azul, el sujeto aplica la mínima fuerza desde el principio, y esto se puede ver el porcentaje de error en la fuerza, Tabla (4.14), como se puede observar ambas pruebas se hace el cambio en el sentido de la fuerza muy cercano al valor deseado como se puede observar numéricamente en la Tabla (4.15).



**Figura 4.11.** Perfil de fuerza medida de dos pruebas realizadas por el sujeto de control 6.

**Tabla 4.14.** Resultados de fuerza medidos y porcentaje de error de la máxima fuerza ejercida por el sujeto 6 contra la fuerza calculada bajo el enfoque de control óptimo.

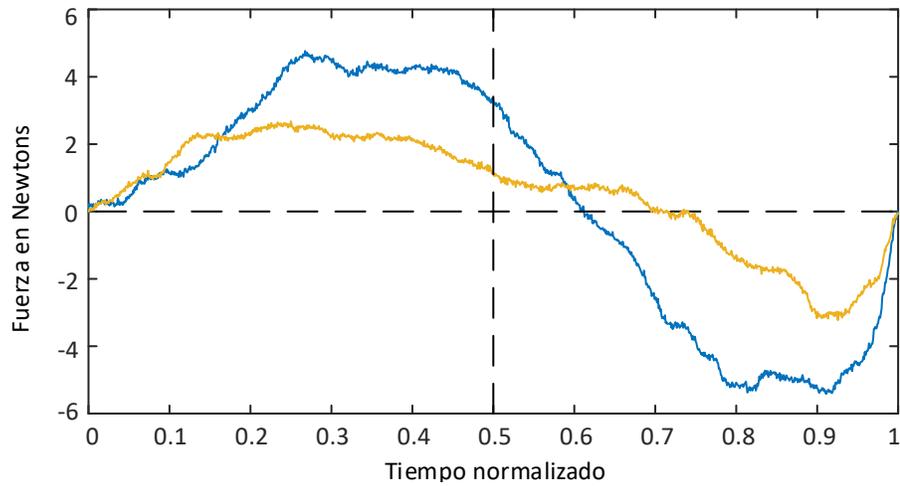
Prueba	$F_+$	$F_-$	$F_e$	$\%e_+$	$\%e_-$
1	13.361 N	-17.196 N	$\pm 2.9752$ N	349.08	478
2	5.474 N	-8.397 N	$\pm 3.4602$ N	58.19	142.68

**Tabla 4.15.** Porcentaje de error del tiempo  $\tau$  del sujeto 6.

Prueba	Tiempo $T$	$\tau_m$	$\tau_e$	$\tau/T$	$\%e_{\tau/T}$
1	11.00 s	5.12 s	5.5 s	0.4654	6.92
2	10.20 s	5.73 s	5.1 s	0.5617	12.2

#### 4.2.1.7. Resultados Sujeto de Prueba 7

En las pruebas realizadas con el sujeto de control 7 se puede observar que los errores en las fuerzas máximas y mínimas, en comparación con los otros sujetos, es pequeña, como se muestra en la Tabla (4.16), donde el porcentaje de error menor es del 74.14 % y el porcentaje de error mayor es de 109.86 % en la prueba 2. En la Tabla (4.17) se muestran los porcentajes de error en la relación del cambio en el sentido de la fuerza, teniendo, en la prueba 2, un error del 38 %.



**Figura 4.12.** Perfil de fuerza medida de dos pruebas realizadas por el sujeto de control 7.

**Tabla 4.16.** Resultados de fuerza medidos y porcentaje de error de la máxima fuerza ejercida por el sujeto 7 contra la fuerza calculada bajo el enfoque de control óptimo.

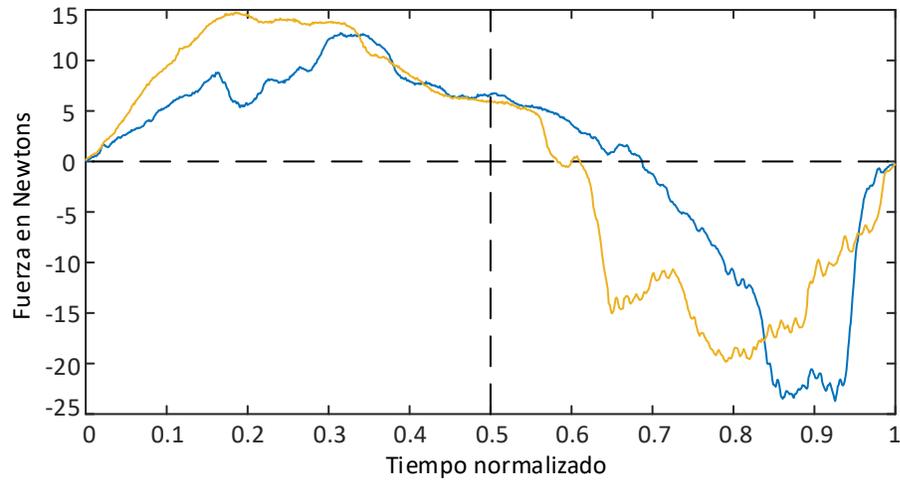
Prueba	$F_+$	$F_-$	$F_e$	$\%e_+$	$\%e_-$
1	4.7672 N	-5.4151 N	$\pm 2.68$ N	77.88	102.05
2	2.6781 N	-3.2275 N	$\pm 1.5379$ N	74.14	109.86

**Tabla 4.17.** Porcentaje de error del tiempo  $\tau$  del sujeto 7.

Prueba	Tiempo $T$	$\tau_m$	$\tau_e$	$\tau/T$	$\%e_{\tau/T}$
1	11.59 s	7.04 s	5.795 s	0.674	34.08
2	15.30 s	10.55 s	7.65 s	0.690	38.0

#### 4.2.1.8. Resultados Sujeto de Prueba 8

En la Figura (4.13) se puede observar el perfil de fuerza de dos pruebas realizadas al sujeto de control 8. En esta gráfica se puede observar cómo es que en la prueba 2, línea amarilla, le toma menos tiempo a la persona llegar al esfuerzo máximo a aplicar en comparación con la prueba 1, línea azul.



**Figura 4.13.** Perfil de fuerza medida de dos pruebas realizadas por el sujeto de control 8.

**Tabla 4.18.** Resultados de fuerza medidos y porcentaje de error de la máxima fuerza ejercida por el sujeto 8 contra la fuerza calculada bajo el enfoque de control óptimo.

Prueba	$F_+$	$F_-$	$F_e$	$\%e_+$	$\%e_-$
1	12.733 N	-23.71 N	$\pm 4.0742$ N	212.53	481.97
2	14.754 N	-19.82 N	$\pm 5.0299$ N	193.32	294.16

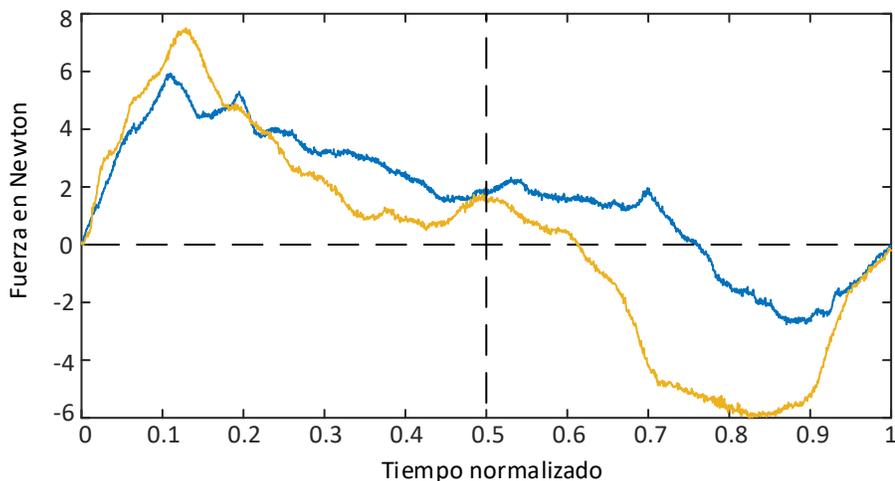
**Tabla 4.19.** Porcentaje de error del tiempo  $\tau$  del sujeto 8.

Prueba	Tiempo $T$	$\tau_m$	$\tau_e$	$\tau/T$	$\%e_{\tau/T}$
1	9.40 s	6.46 s	4.70 s	0.687	37.4
2	8.46 s	4.90 s	4.23 s	0.579	15.8

#### 4.2.1.9. Resultados Sujeto de Prueba 9

En la Figura (4.14) se muestra el perfil de fuerza aplicada en dos pruebas del sujeto de control 9. Como se puede observar en la prueba 2, línea amarilla, las fuerza máxima y mínima se encuentran simétricas; quiere decir que en magnitud no hay mucha diferencia entre ellas, esto se puede observar numéricamente en la Tabla (4.20), donde  $F_{m+} = 7.1024$  y  $F_{m-} = -6.3863$ , a pesar de que los errores con respecto a la fuerza esperada  $F_e$  son considerables, cuando se analiza el error en el tiempo  $\tau$  se puede ver que en la prueba 1, línea

azul, el porcentaje de error del tiempo llega casi al % 50, y en la prueba 2, se reduce a casi % 20, lo cual se puede ver en la Tabla (4.21), lo cual se atribuye al conocimiento del sistema y aprendizaje de la maniobra.



**Figura 4.14.** Perfil de fuerza medida de dos pruebas realizadas por el sujeto de control 9.

**Tabla 4.20.** Resultados de fuerza medidos y porcentaje de error de la máxima fuerza ejercida por el sujeto 9 contra la fuerza calculada bajo el enfoque de control óptimo.

Prueba	$F_+$	$F_-$	$F_e$	$\%e_+$	$\%e_-$
1	5.927 N	-2.763 N	$\pm 1.375$ N	331.07	100.99
2	7.102 N	-6.386 N	$\pm 1.434$ N	395.0	345.10

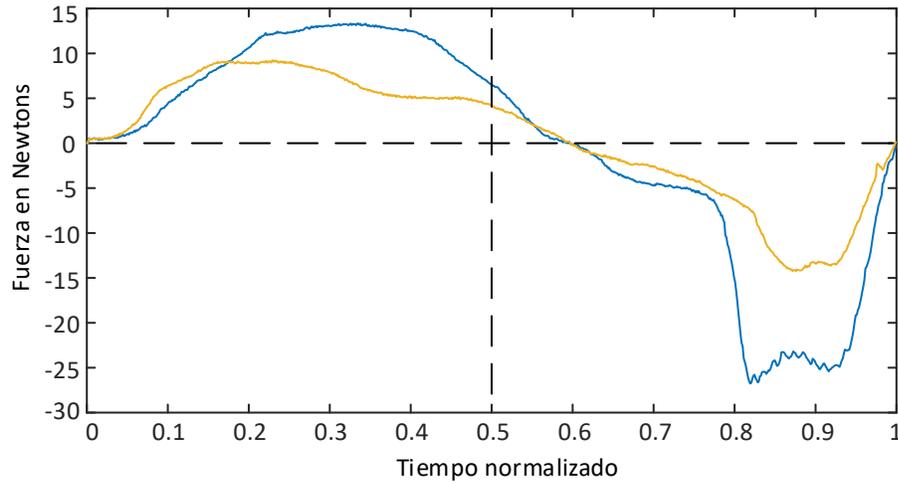
**Tabla 4.21.** Porcentaje de error del tiempo  $\tau$  del sujeto 9.

Prueba	Tiempo $T$	$\tau_m$	$\tau_e$	$\tau/T$	$\%e_{\tau/T}$
1	16.18 s	12.28 s	8.09 s	0.758	51.6
2	15.84 s	9.70 s	7.92 s	0.6123	22.46

#### 4.2.1.10. Resultados Sujeto de Prueba 10

En la Figura (4.15) se puede observar la evolución y el aprendizaje de la maniobra del sujeto de control 10, como se puede ver en la prueba 1, línea azul, las fuerzas son grandes y

no hay mucha simetría entre ellas siendo  $F_{m+} = 13N$  y  $F_{m-} = -26.76$ , mientras que en la prueba 2, línea amarilla, se puede ver un reducción en la fuerza aplicada. Estos resultados se muestran en la Tabla (4.22) y como se puede observar en las dos pruebas, se hace el cambio en el sentido de la fuerza muy cercano al valor deseado,  $\tau = 0.5$ , los errores de cada prueba se muestran en la Tabla (4.23).



**Figura 4.15.** Perfil de fuerza medida de dos pruebas realizadas por el sujeto de control 10.

**Tabla 4.22.** Resultados de fuerza medidos y porcentaje de error de la máxima fuerza ejercida por el sujeto 10 contra la fuerza calculada bajo el enfoque de control óptimo.

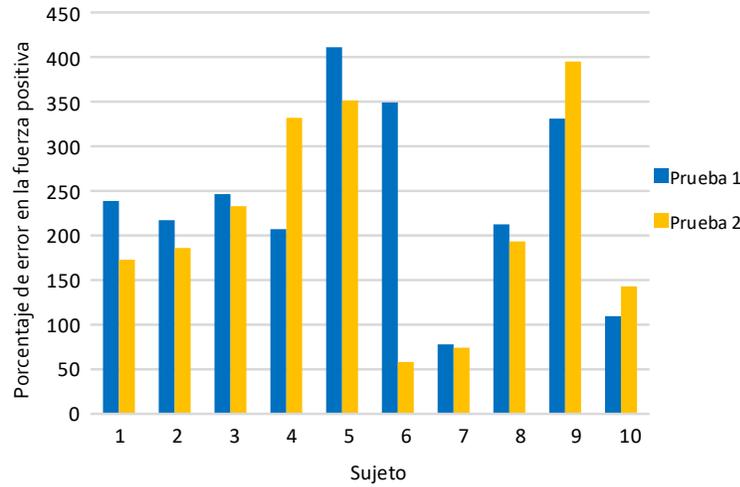
Prueba	$F_+$	$F_-$	$F_e$	$\%e_+$	$\%e_-$
1	13.341 N	-26.761 N	$\pm 6.366$ N	109.57	320.38
2	9.241 N	-14.253 N	$\pm 3.802$ N	143.01	274.84

**Tabla 4.23.** Porcentaje de error del tiempo  $\tau$  del sujeto 10.

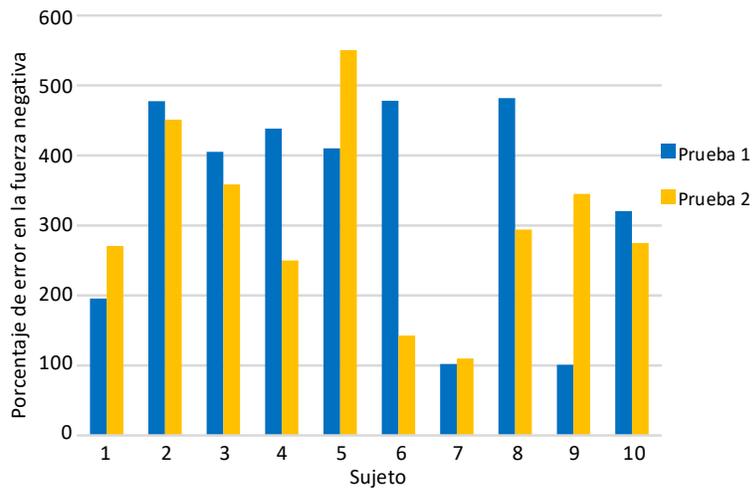
Prueba	Tiempo $T$	$\tau_m$	$\tau_e$	$\tau/T$	$\%e_{\tau/T}$
1	7.52 s	4.48 s	3.76 s	0.595	19.14
2	9.73 s	5.81 s	4.86 s	0.597	19.42

En las Figuras (4.16) y (4.17) se muestran los porcentajes de error de la fuerza positiva y negativa de los 10 sujetos de control, donde se realiza una comparación de los resultados

encontrados en la prueba 1 y la prueba 2. En la Figura (4.18) se muestra el porcentaje de error  $\%e_{\tau/T}$  de los 10 sujetos de control.



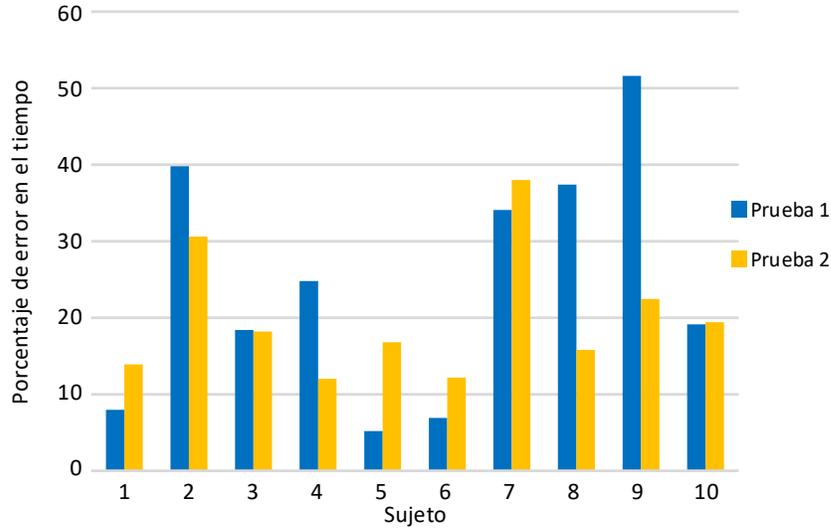
**Figura 4.16.** Porcentaje de error en la fuerza positiva para la solución del problema de esfuerzo mínimo.



**Figura 4.17.** Porcentaje de error en la fuerza negativa para la solución del problema de esfuerzo mínimo.

#### 4.2.2. Solución al problema de tiempo mínimo.

Teniendo un sistema conformado por una masa, resorte y amortiguador, el objetivo es mover la masa a lo largo de una línea horizontal en el menor tiempo posible. Donde las condiciones de frontera para la solución de este problema se muestran la Tabla (4.24).



**Figura 4.18.** Porcentaje de error  $\%e_{\tau/T}$  para la solución del problema de esfuerzo mínimo.

**Tabla 4.24.** Condiciones de frontera para la solución del problema de tiempo mínimo

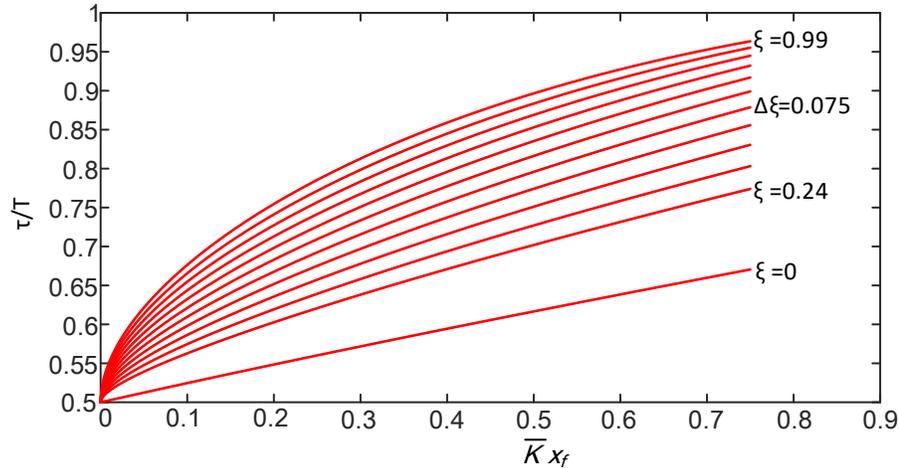
$x_{t_1} = x_1$	$\dot{x}(t_1) = \dot{x}_1$	$t_1 = 0$	$x_1 = 0$	$\dot{x}_1 = 0$
$x_{t_2} = x_2$	$\dot{x}(t_2) = \dot{x}_2$	$t_2 = T$	$x_2 = 50mm$	$\dot{x}_2 = 0$

Para el análisis de este problema se le dieron diversos valores al coeficiente del amortiguador  $B_d$  y de resorte  $K_d$ , esto con la finalidad de comparar los resultados del tiempo donde se hace el cambio en el sentido de la fuerza  $\tau$ , mientras que el valor de la masa,  $M_d$ , siempre fue el mismo. En la Tabla (4.25) se muestran los valores de la razón de amortiguamiento y la frecuencia natural del sistema.

**Tabla 4.25.** Parámetros utilizados en las pruebas experimentales para la razón de amortiguamiento  $\xi$  y la frecuencia natural del sistema  $\omega_n$

	Parámetros 1	Parámetros 2	Parámetros 3
Razón de amortiguamiento $\xi$	0.53	0.375	0.707
Frecuencia natural $\omega_n$	0.35	0.5	0.5590

Como se puede observar los valores de la razón de amortiguamiento están entre 0.375 y 0.707, dada la programación del control de impedancia en el robot FANUC, para obtener



**Figura 4.19.** Relación  $\tau/T$  contra  $\bar{K}x_f$  para varios valores de  $\xi$

valores más grandes sería necesario aumentar el valor del coeficiente del amortiguador y esto causaría que el sistema fuera más rígido, por lo que no sería posible moverlo únicamente con la muñeca y esto ocasionaría alguna lesión en los sujetos de control. Estos valores se plantearon de forma que se pudiera realizar el análisis considerando diversos resultados en la relación de  $\tau/T$ .

Para encontrar los resultados esperados de  $\tau/T$  se utiliza la gráfica mostrada en la Figura (4.19), como se puede observar es necesario conocer los valores de la razón de amortiguamiento  $\xi$  y el valor de  $\bar{K}x_f$ , este último valor varía entre las pruebas realizadas a cada persona, ya que  $\bar{K}$  se calcula como

$$\bar{K} = \frac{K_d}{|F_{\text{límite}}|} \quad (4.4)$$

donde  $F_{\text{límite}}$  es la fuerza máxima aplicada por el sujeto en cada prueba.

#### 4.2.2.1. Resultados utilizando un valor de $\xi = 0.53$ .

A continuación se muestran los resultados obtenidos de los 10 sujetos de control.

### Pruebas sujeto 1.

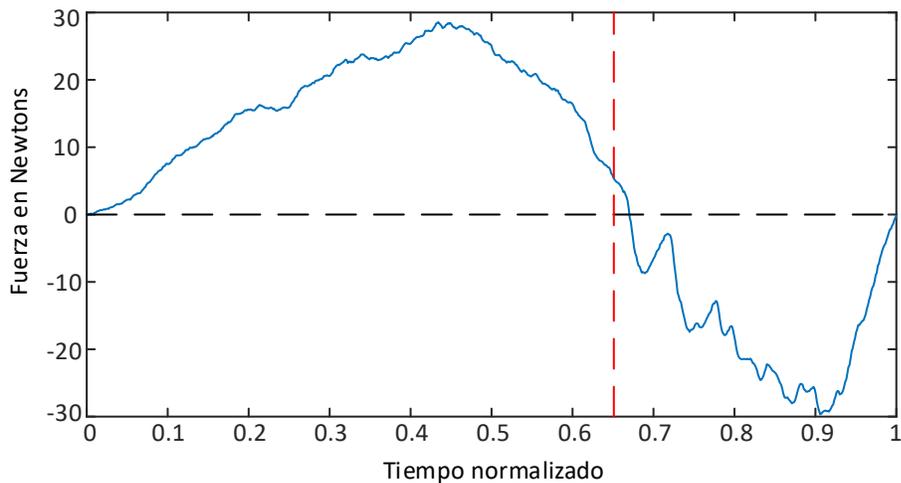


Figura 4.20. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 1.

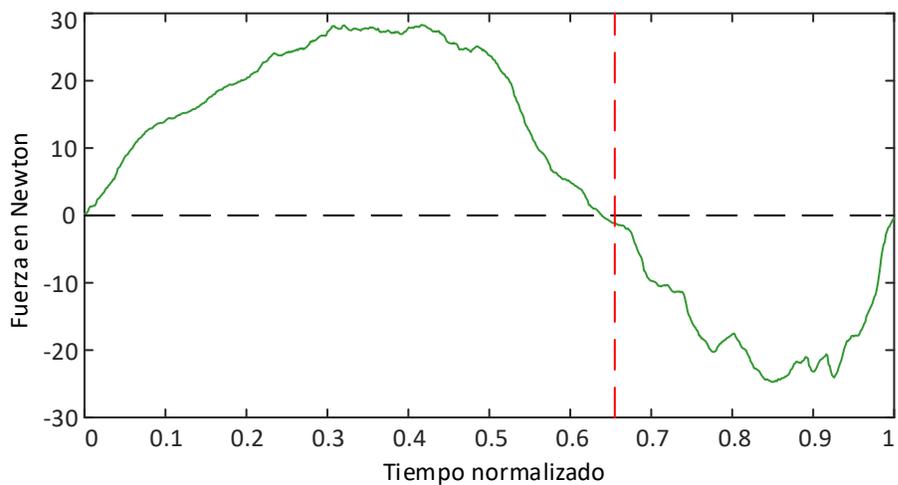
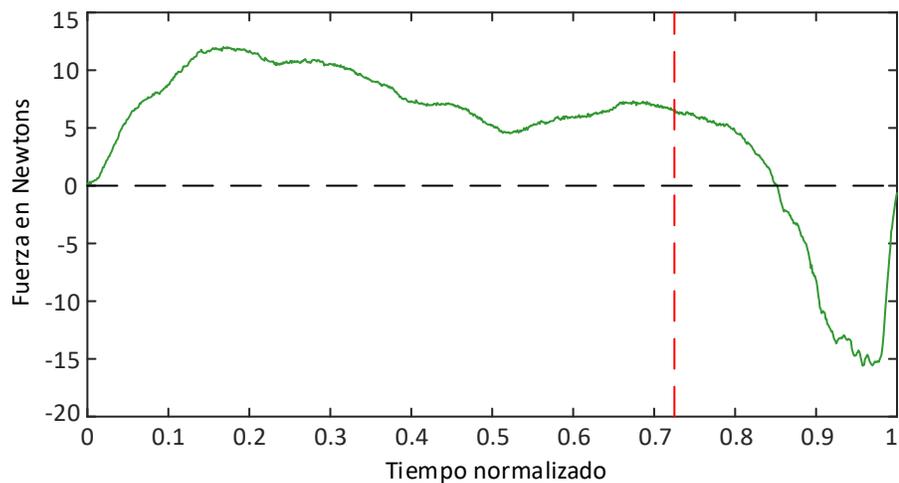


Figura 4.21. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 1.

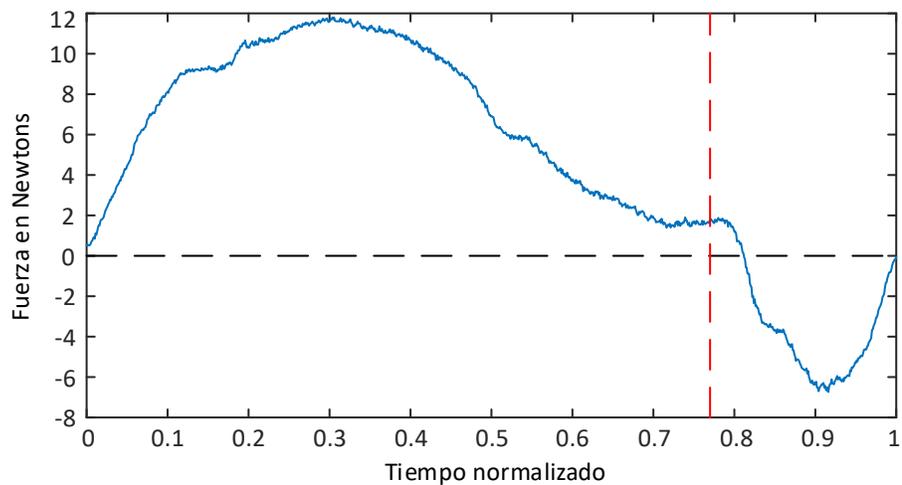
Tabla 4.26. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 1.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	28.56 N	-29.66 N	7.44 s	0.670	0.651	2.91
2	28.30 N	-24.74 N	7.06 s	0.638	0.655	2.59

## Pruebas sujeto 2.



**Figura 4.22.** Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 2.

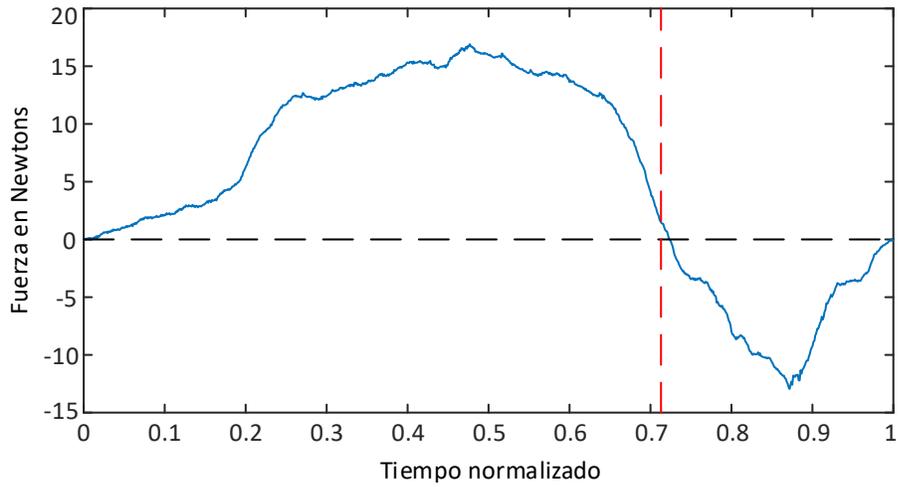


**Figura 4.23.** Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 2.

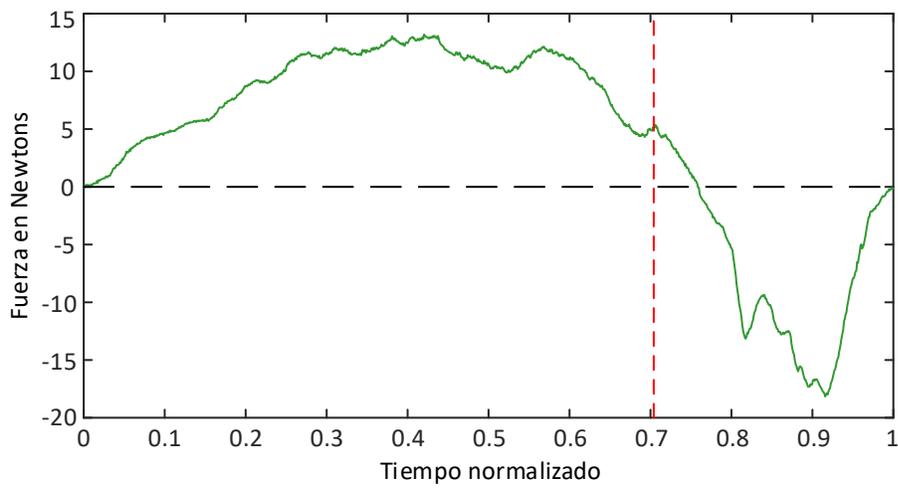
**Tabla 4.27.** Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 2.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	12.01 N	-15.58 N	9.89 s	0.85	0.725	17.24
2	11.80 N	-6.73 N	10.02 s	0.81	0.77	5.19

**Pruebas sujeto 3.**



**Figura 4.24.** Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 3.



**Figura 4.25.** Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 3.

**Tabla 4.28.** Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 3.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	16.61 N	-12.94 N	8.79 s	0.723	0.713	1.40
2	13.19 N	-18.15 N	9.88 s	0.758	0.704	7.67

## Pruebas sujeto 4.

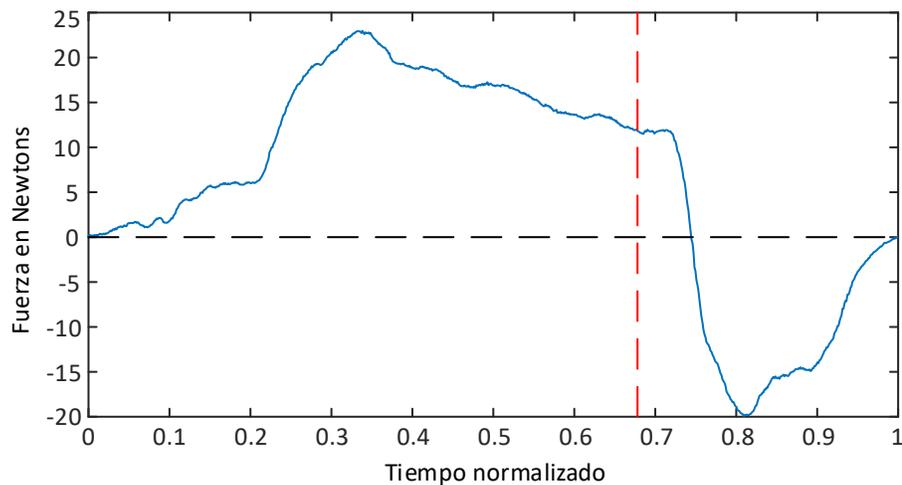


Figura 4.26. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 4.

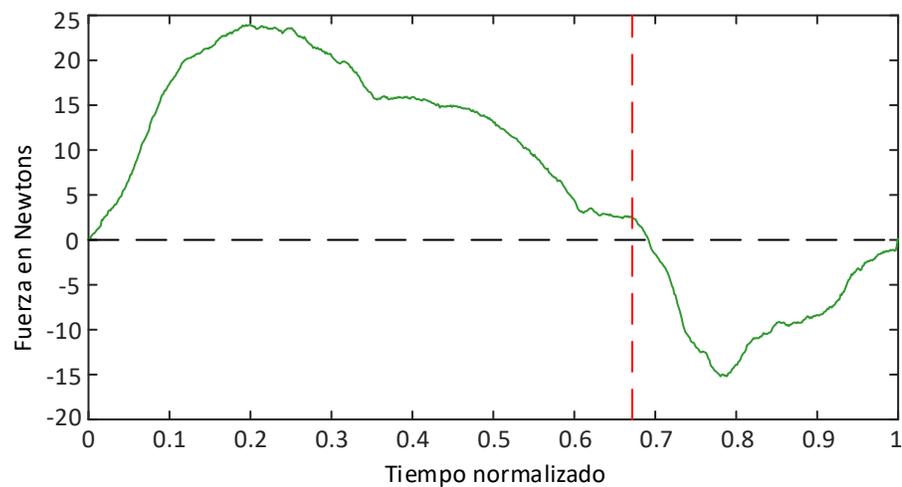


Figura 4.27. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 4.

Tabla 4.29. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 4.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	22.96 N	-19.87 N	8.10 s	0.744	0.678	10.05
2	23.94 N	-15.20 N	7.35 s	0.691	0.671	2.91

### Pruebas sujeto 5.

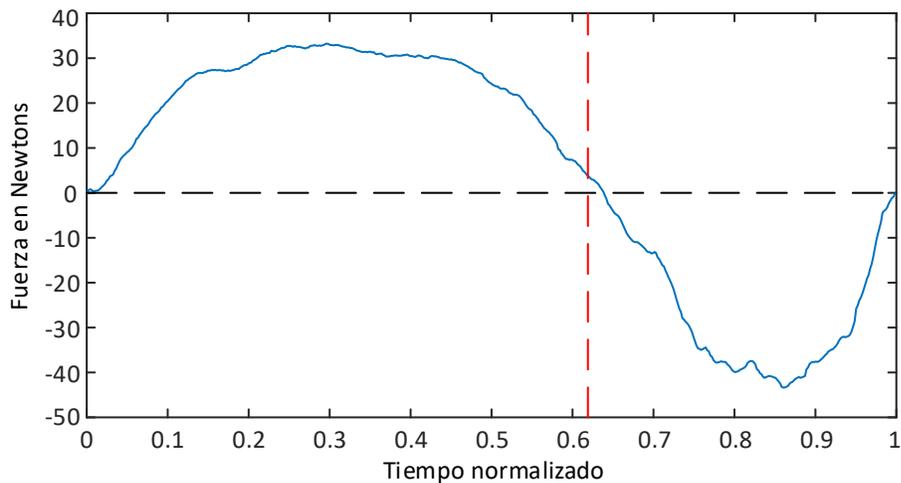


Figura 4.28. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 5.

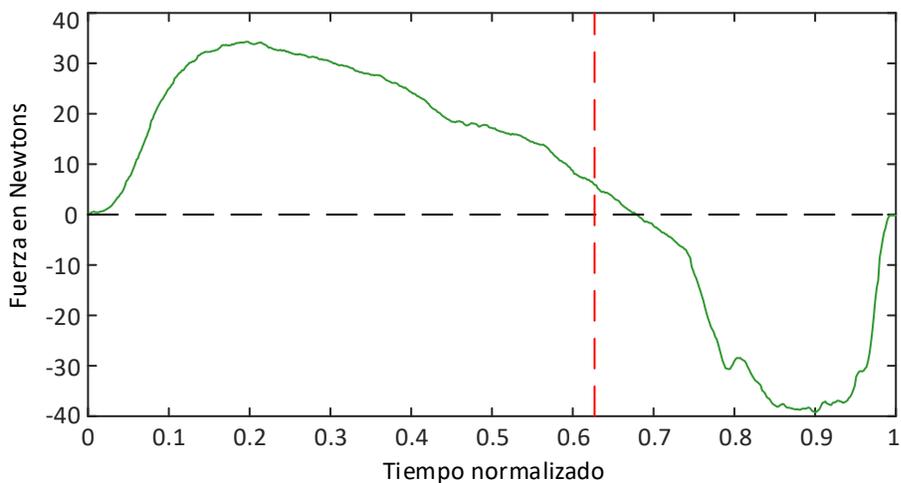
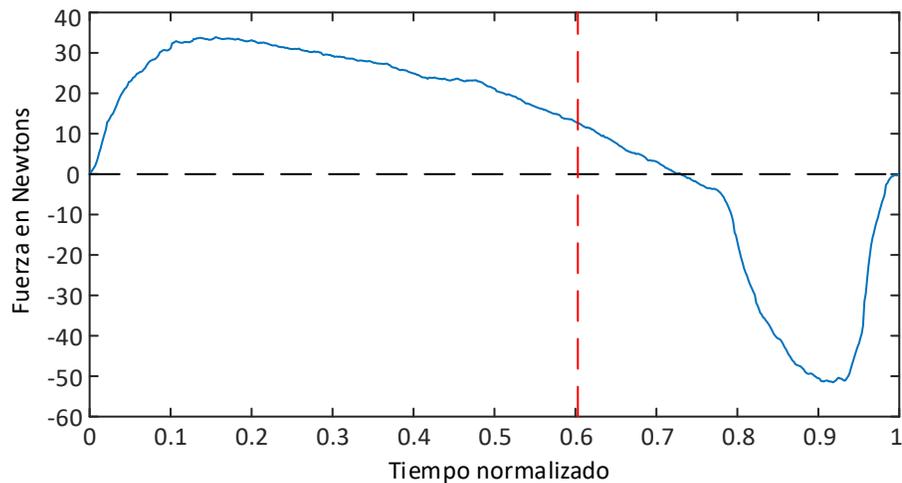


Figura 4.29. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 5.

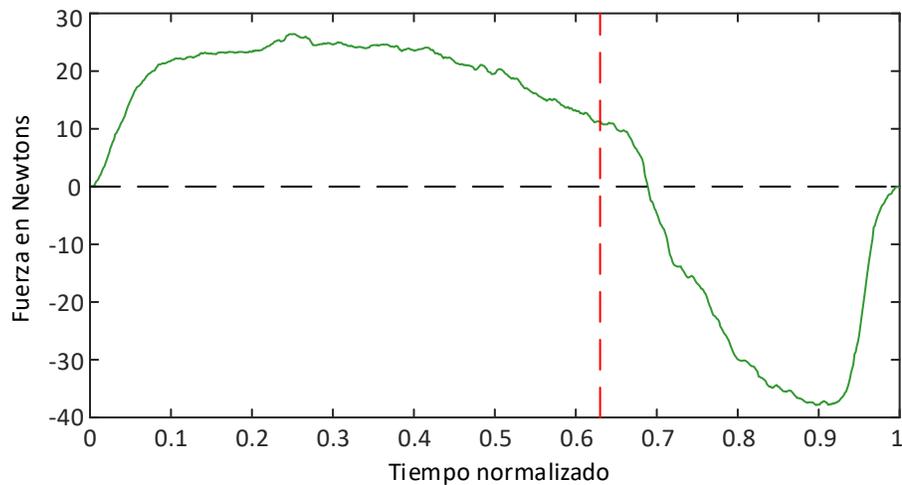
Tabla 4.30. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 5.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	34.28 N	-39.22 N	5.51 s	0.676	0.627	7.95
2	33.22 N	-43.37 N	5.22 s	0.637	0.619	2.98

### Pruebas sujeto 6.



**Figura 4.30.** Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 6.

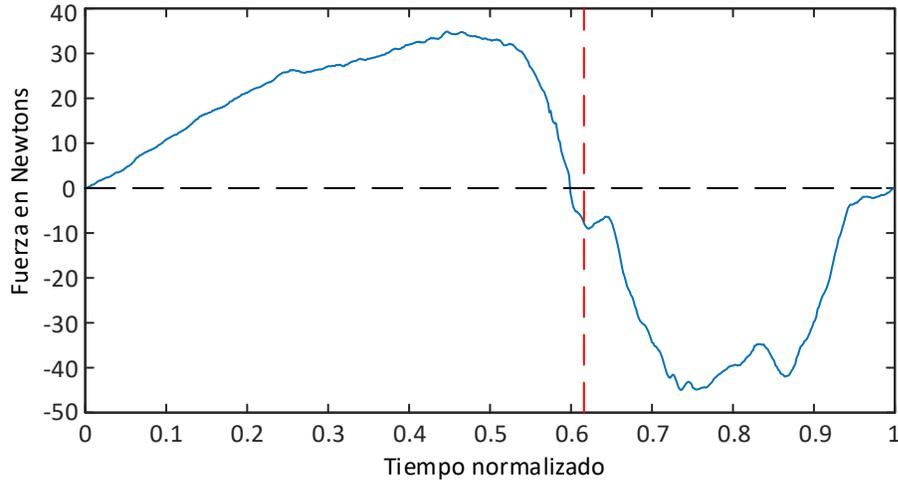


**Figura 4.31.** Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 6.

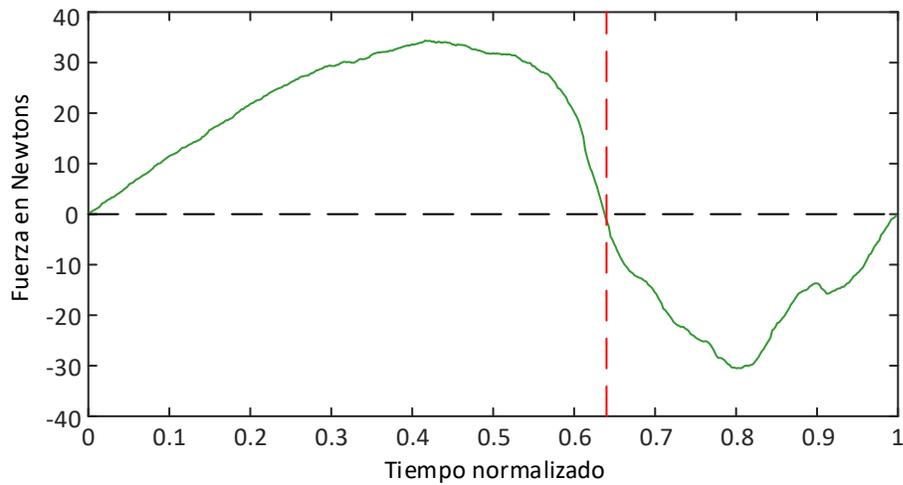
**Tabla 4.31.** Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 6.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	33.88 N	-51.52 N	5.99 s	0.729	0.603	20.97
2	26.43 N	-37.87 N	6.76 s	0.687	0.630	9.17

**Pruebas sujeto 7.**



**Figura 4.32.** Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 7.



**Figura 4.33.** Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 7.

**Tabla 4.32.** Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 7.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	34.86 N	-44.97 N	6.16 s	0.599	0.616	2.75
2	34.38 N	-30.50 N	4.76 s	0.638	0.640	0.218

## Pruebas sujeto 8.

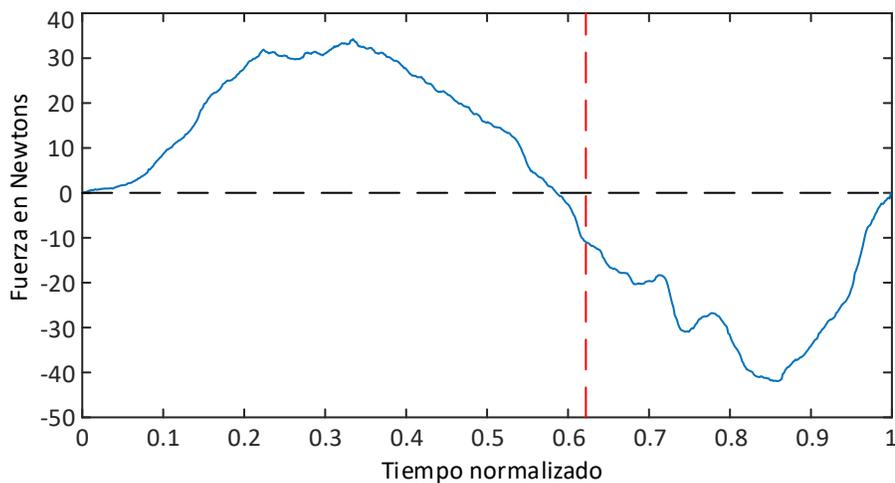


Figura 4.34. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 8.

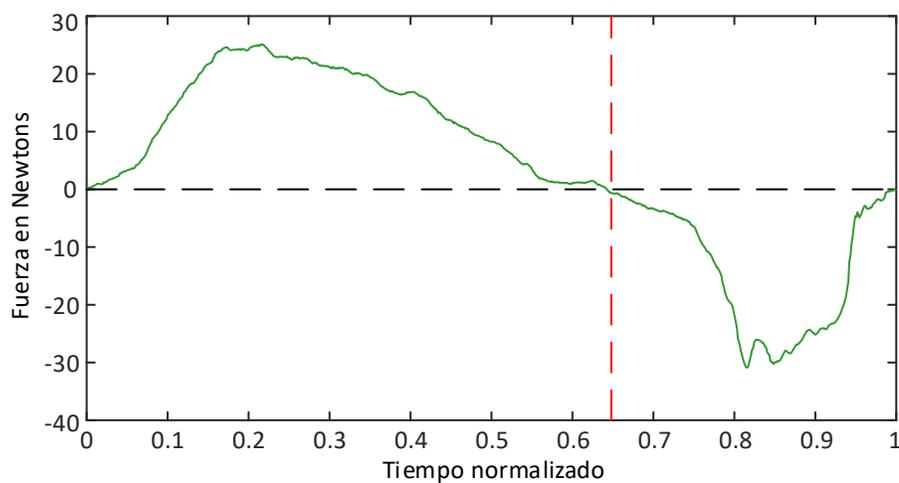


Figura 4.35. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 8.

Tabla 4.33. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 8.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	34.23 N	-41.92 N	6.97 s	0.585	0.622	5.90
2	25.13 N	-30.90 N	8.0 s	0.642	0.648	0.848

### Pruebas sujeto 9.

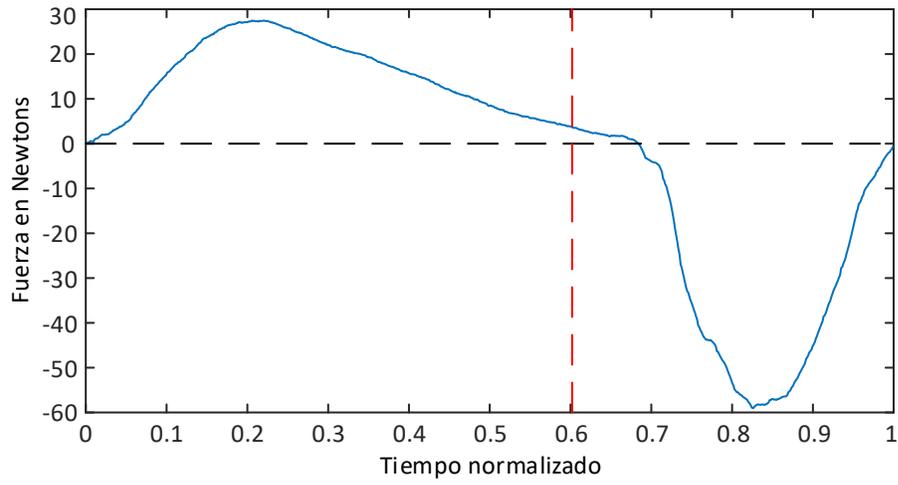


Figura 4.36. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 9.

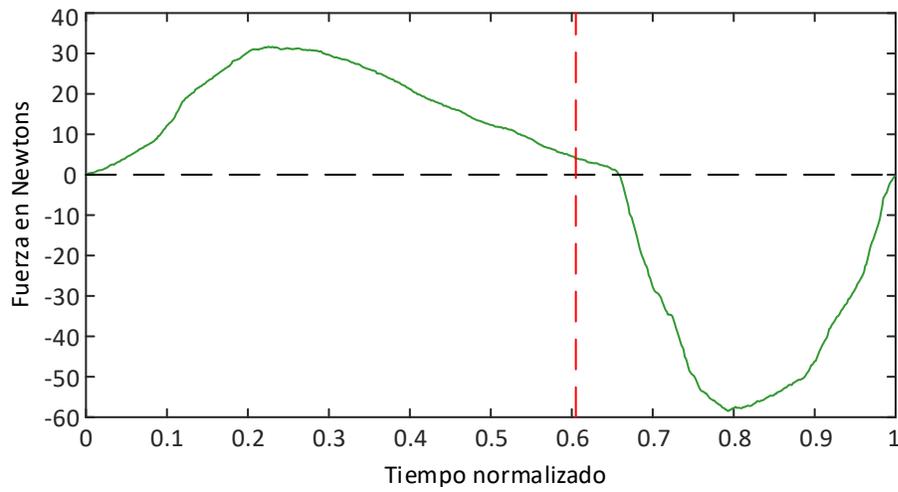


Figura 4.37. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 9.

Tabla 4.34. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 9.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	27.47 N	-59.05 N	7.35 s	0.684	0.602	13.62
2	31.68 N	-58.46 N	7.18 s	0.668	0.605	8.76

### Pruebas sujeto 10.

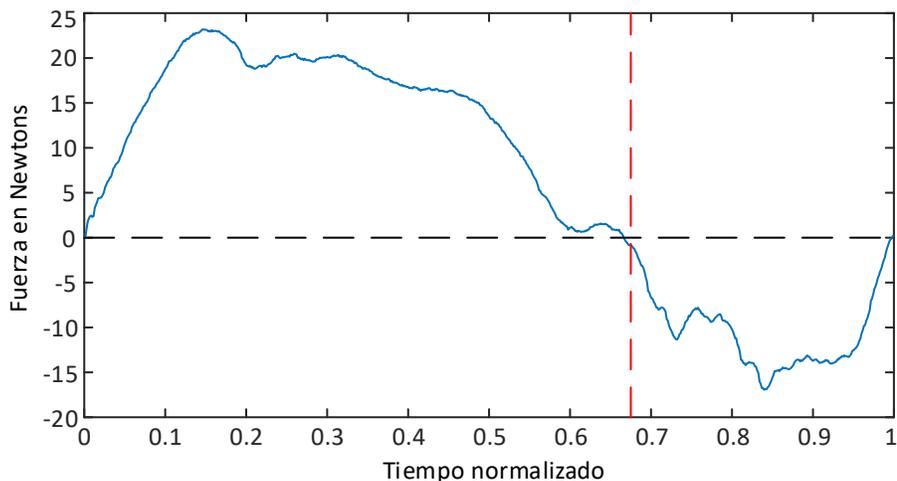


Figura 4.38. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 10.

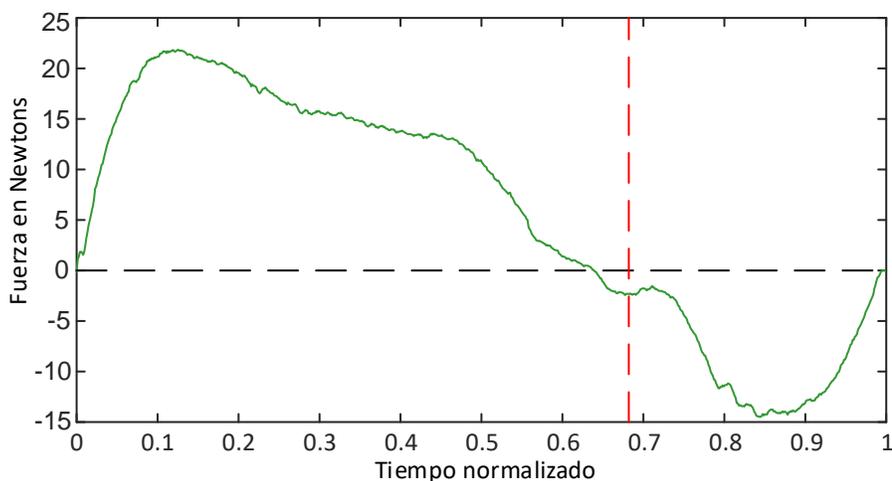


Figura 4.39. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 10.

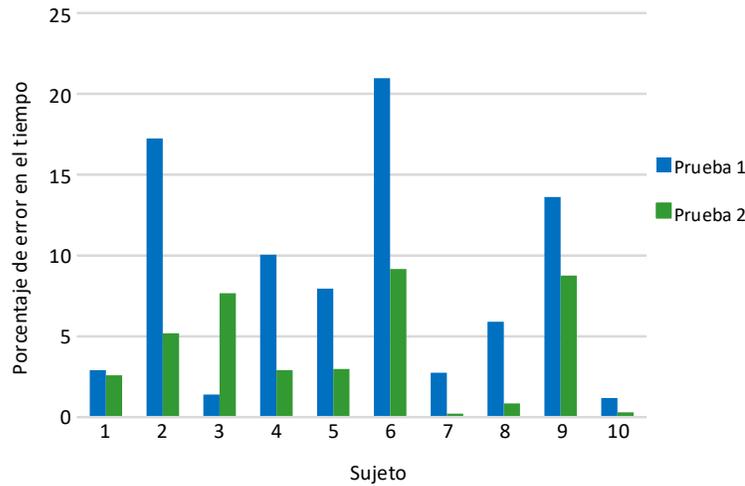
Tabla 4.35. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 10.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	23.20 N	-16.94 N	6.98 s	0.667	0.675	1.1851
2	21.85 N	-14.48 N	7.47 s	0.639	0.682	0.3049

En este análisis únicamente se tomó en cuenta la relación que había entre el tiempo total que le tomó a la persona terminar la maniobra y el tiempo donde se hace el cambio en el

sentido de la fuerza,  $\tau/T$ . En este ejercicio se pudo ver que a algunas personas les era más fácil aprender la maniobra que a otras. Como se pudo observar en los resultados mostrados previamente, el error más pequeño es de % 0.21, mientras que el error más grande presentado es de casi % 20.

A los sujetos de control se les indica que realicen la maniobra lo más rápido posible, de forma que no se prescribe el tiempo total en que se debe realizar la prueba. Esto ayuda a conocer cómo es que se va aprendiendo a hacer la maniobra, ya que al analizar los datos se puede ver que tanto aprendizaje se tiene entre una prueba y otra. Como se puede observar en los datos mostrados anteriormente, se ve como si se logra cumplir este aspecto en casi todos los sujetos, existen unas cuantas excepciones donde la diferencia de tiempo llega a ser 1 segundo, lo cual puede aún considerarse una buena diferencia. Los porcentajes de error en la relación  $\%e_{\tau/T}$  de los 10 sujetos de control se muestran en la Figura(4.40).

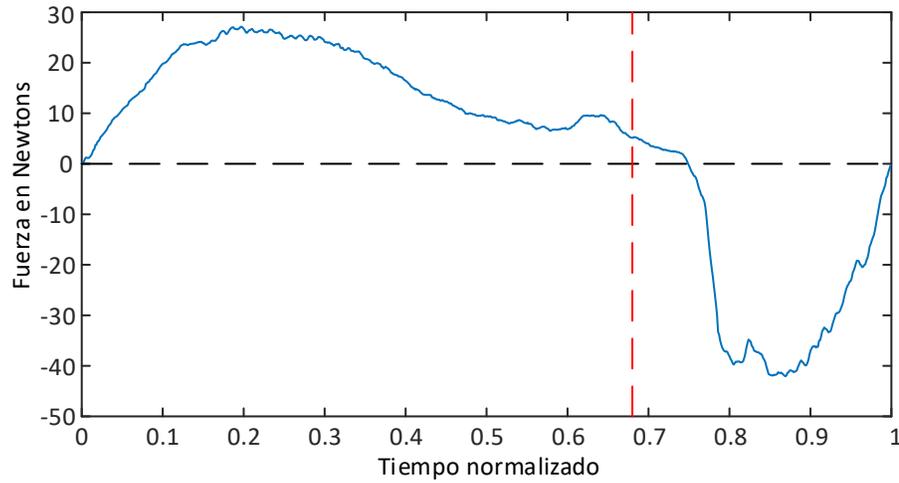


**Figura 4.40.** Porcentaje de error  $\%e_{\tau/T}$  para la solución del problema de tiempo mínimo considerando  $\xi = 0.53$ .

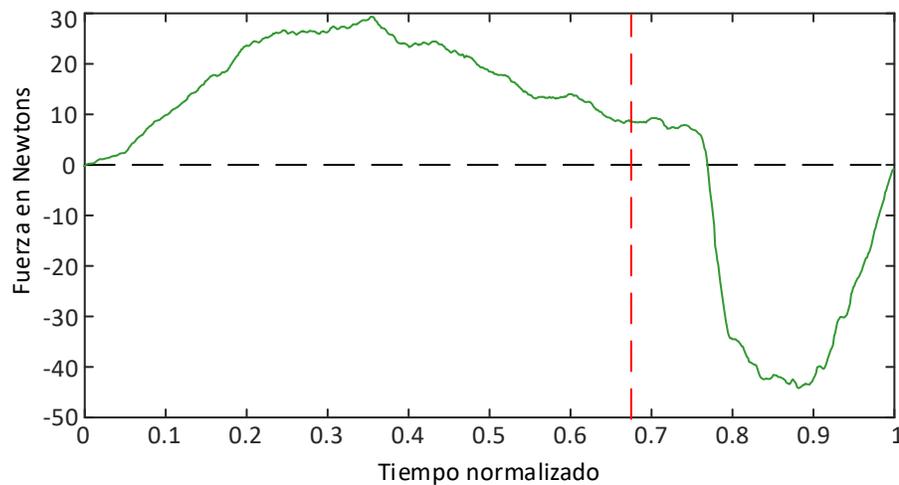
#### 4.2.2.2. Resultados utilizando un valor de $\xi = 0.375$ .

A continuación se muestran los resultados obtenidos de los 10 sujetos de control

### Pruebas sujeto 1.



**Figura 4.41.** Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 1.



**Figura 4.42.** Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 1.

**Tabla 4.36.** Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 1.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	27.13 N	-42.06 N	7.70 s	0.748	0.680	10.0
2	29.63 N	-43.88 N	7.63 s	0.769	0.675	13.9

### Pruebas sujeto 2.

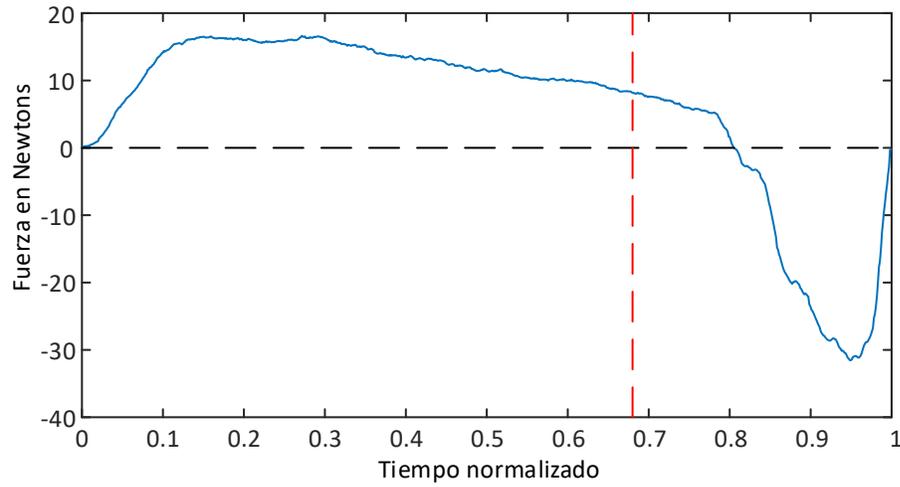


Figura 4.43. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 2.

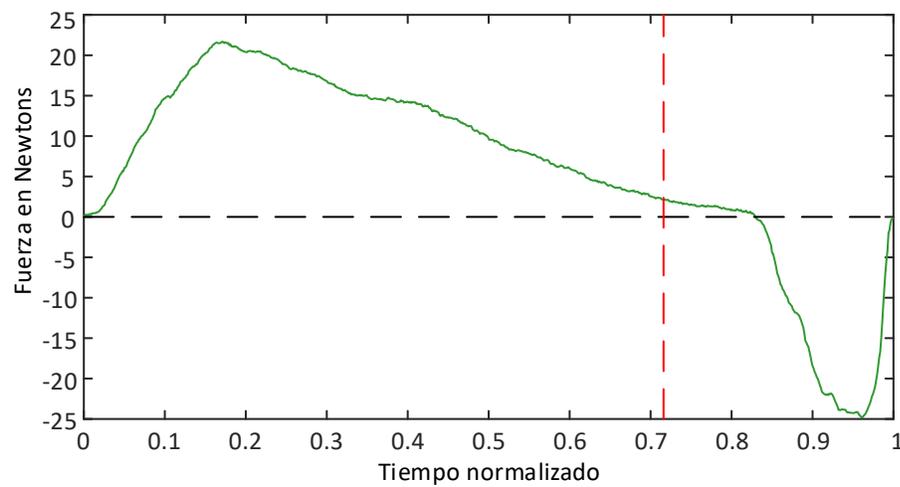


Figura 4.44. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 2.

Tabla 4.37. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 2.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	16.62 N	-31.53 N	8.03 s	0.804	0.684	17.54
2	21.68 N	-24.82 N	7.79 s	0.829	0.716	15.78

### Pruebas sujeto 3.

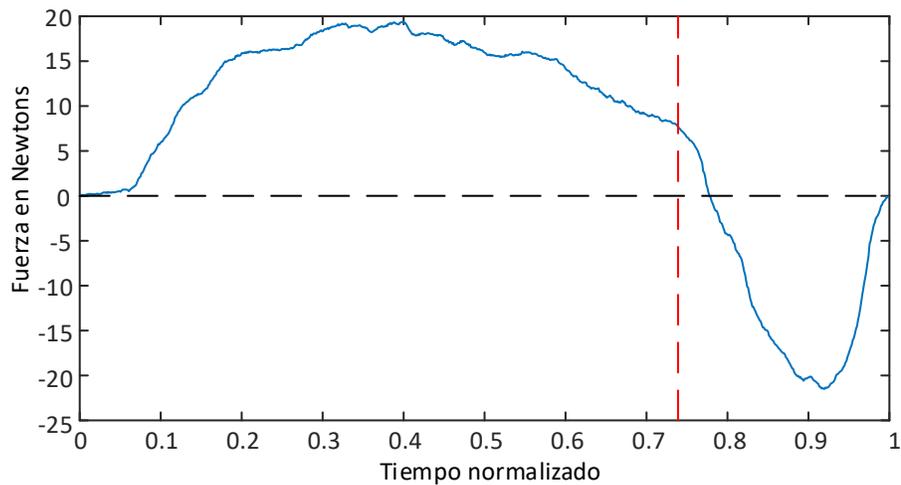


Figura 4.45. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 3.

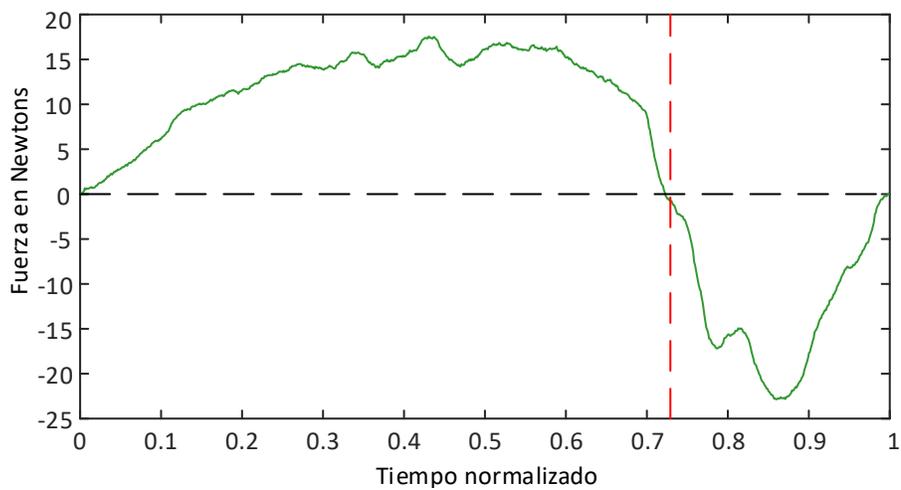
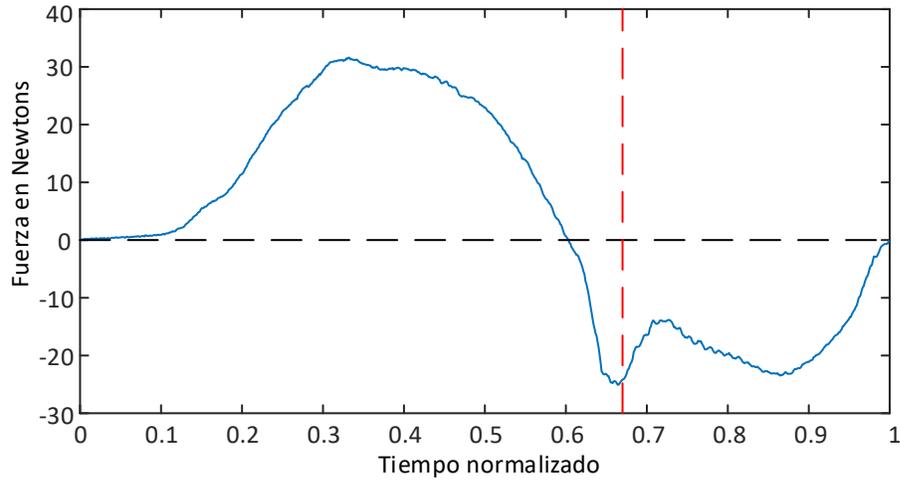


Figura 4.46. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 3.

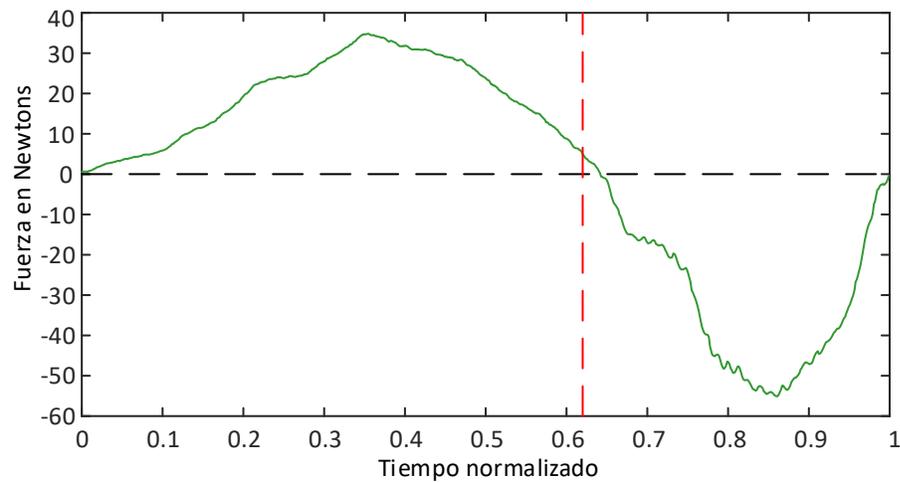
Tabla 4.38. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 3.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	19.41 N	-21.49 N	7.74 s	0.777	0.739	5.14
2	17.54 N	-22.84 N	8.60 s	0.722	0.729	0.96

**Pruebas sujeto 4.**



**Figura 4.47.** Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 4.



**Figura 4.48.** Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 4.

**Tabla 4.39.** Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 4.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	31.60 N	-25.06 N	8.06 s	0.602	0.67	10.14
2	34.84 N	-55.07 N	7.05 s	0.641	0.62	3.4

## Pruebas sujeto 5.

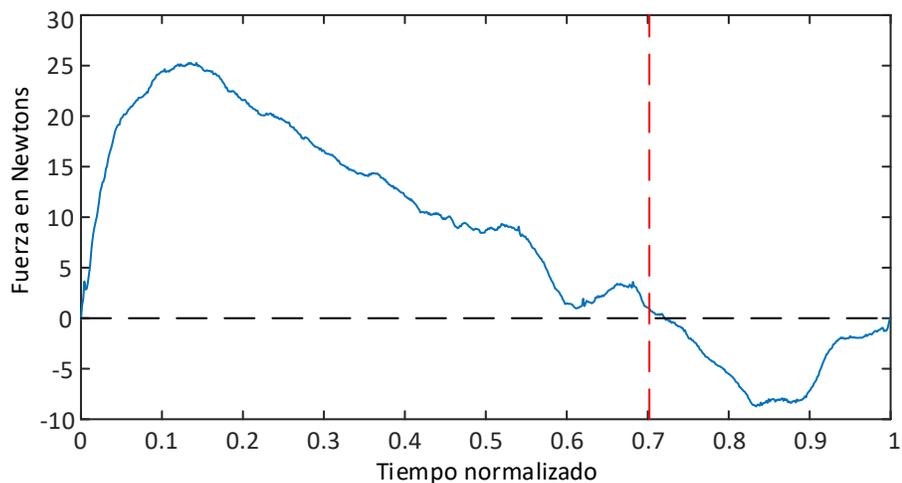


Figura 4.49. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 5.

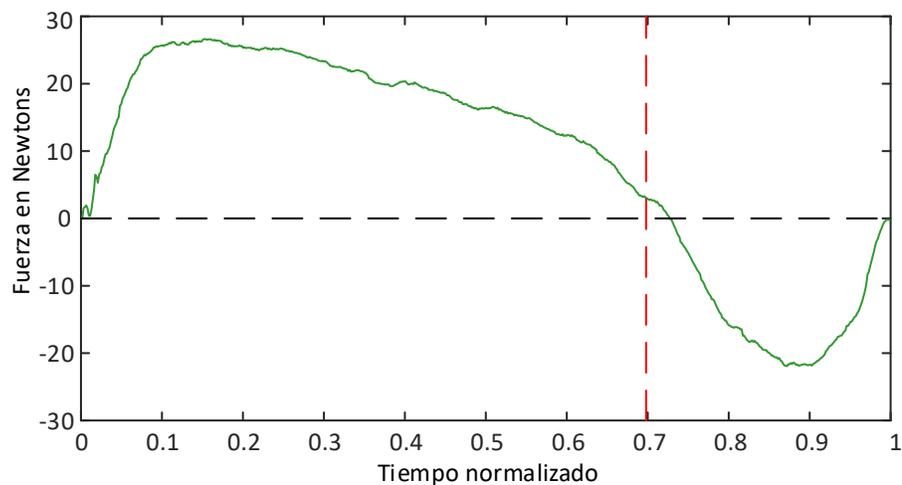
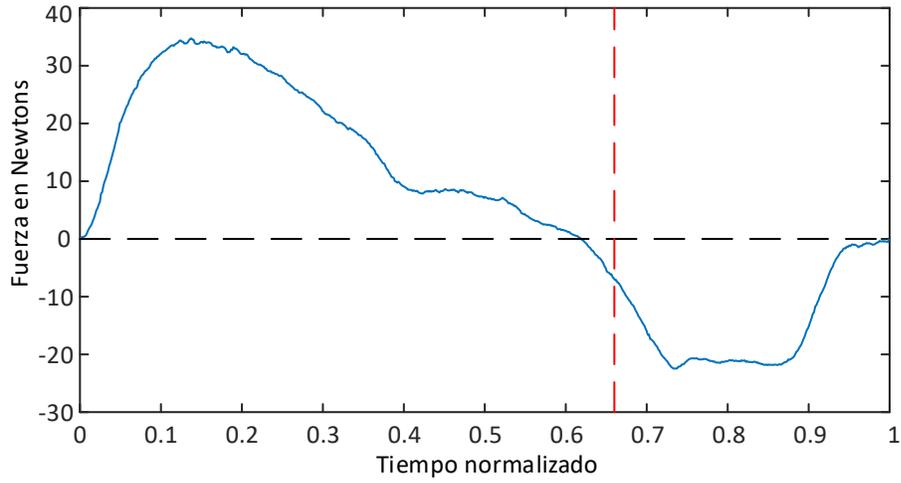


Figura 4.50. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 5.

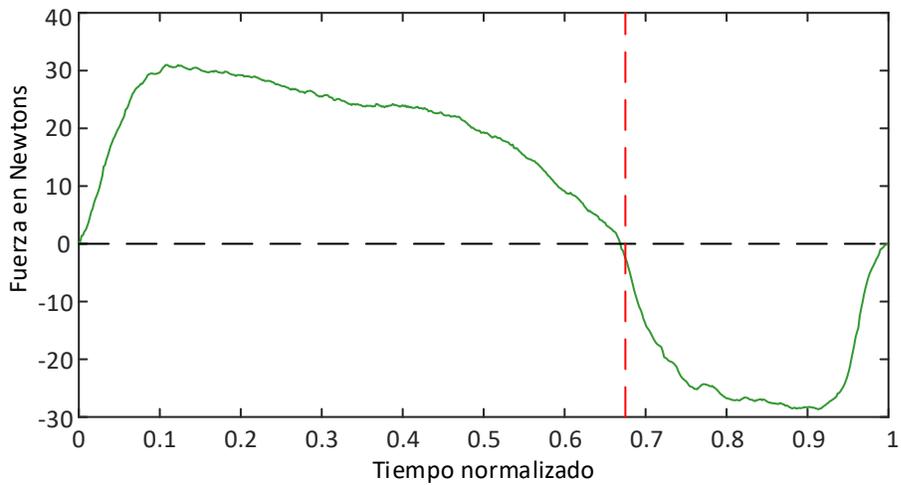
Tabla 4.40. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 5.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	25.28 N	-8.73 N	7.16 s	0.722	0.702	2.84
2	26.63 N	-21.95 N	6.24 s	0.727	0.698	4.22

**Pruebas sujeto 6.**



**Figura 4.51.** Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 6.



**Figura 4.52.** Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 6.

**Tabla 4.41.** Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 6.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	34.74 N	-22.45 N	6.92 s	0.618	0.660	6.30
2	30.98 N	-28.68 N	5.88 s	0.673	0.675	0.237

## Pruebas sujeto 7.

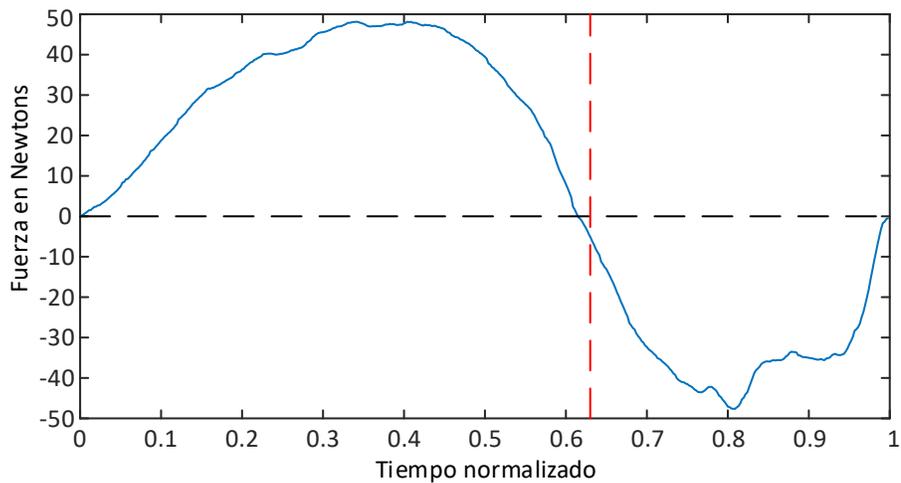


Figura 4.53. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 7.

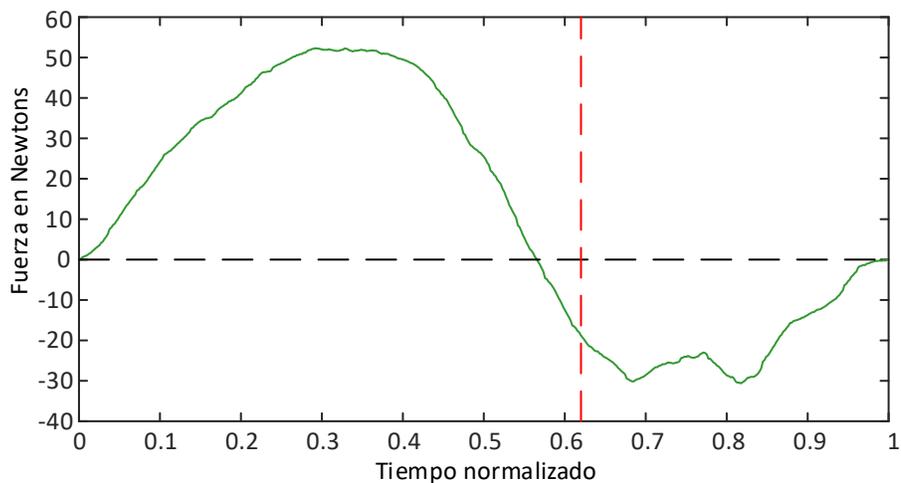


Figura 4.54. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 7.

Tabla 4.42. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 7.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	48.16 N	-47.64 N	4.60 s	0.615	0.63	2.349
2	52.32 N	-30.63 N	4.76 s	0.565	0.62	8.85

### Pruebas sujeto 8.

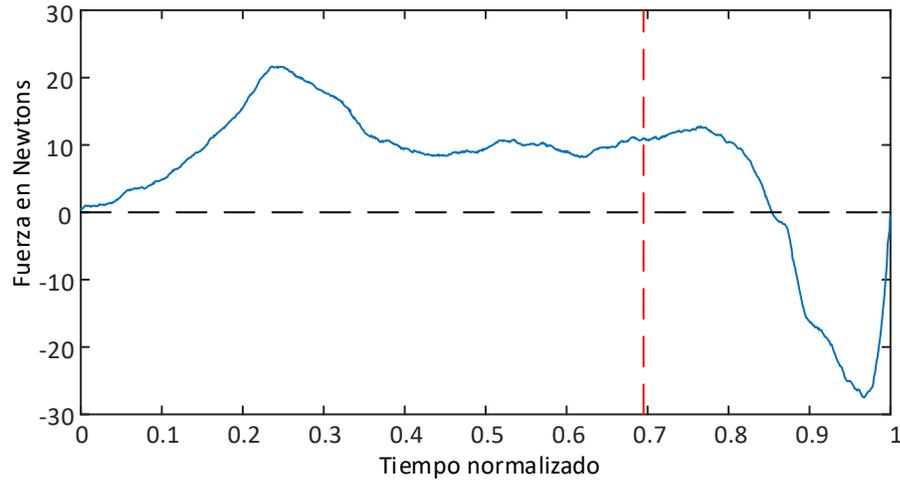


Figura 4.55. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 8.

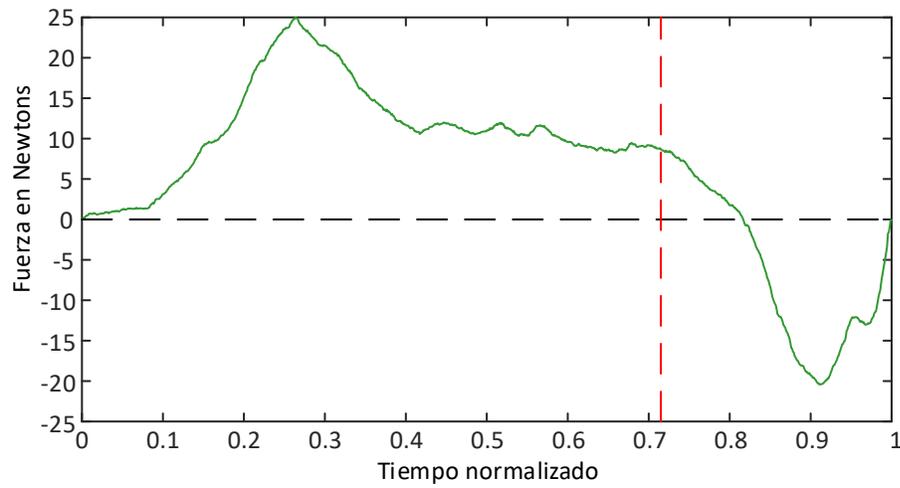


Figura 4.56. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 8.

Tabla 4.43. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 8.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	21.66 N	-27.50 N	9.64 s	0.844	0.615	21.48
2	24.96 N	-20.42 N	9.38 s	0.815	0.660	14.05

### Pruebas sujeto 9.

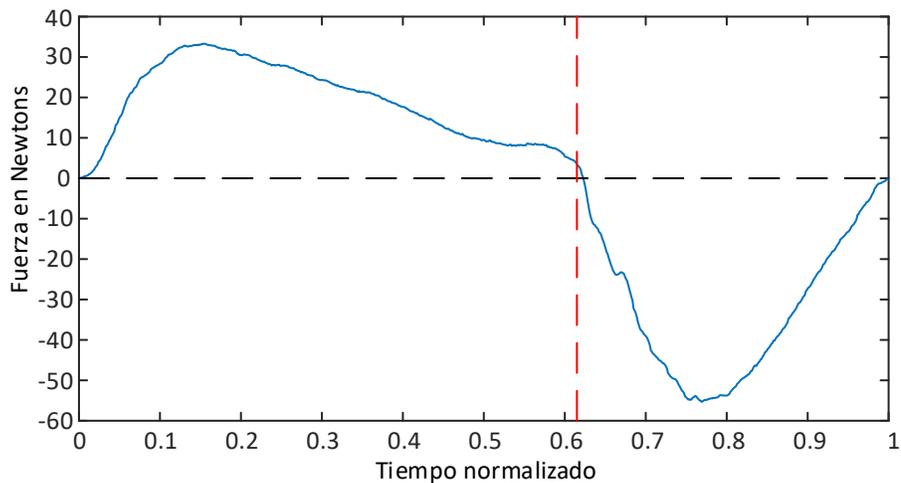


Figura 4.57. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 9.

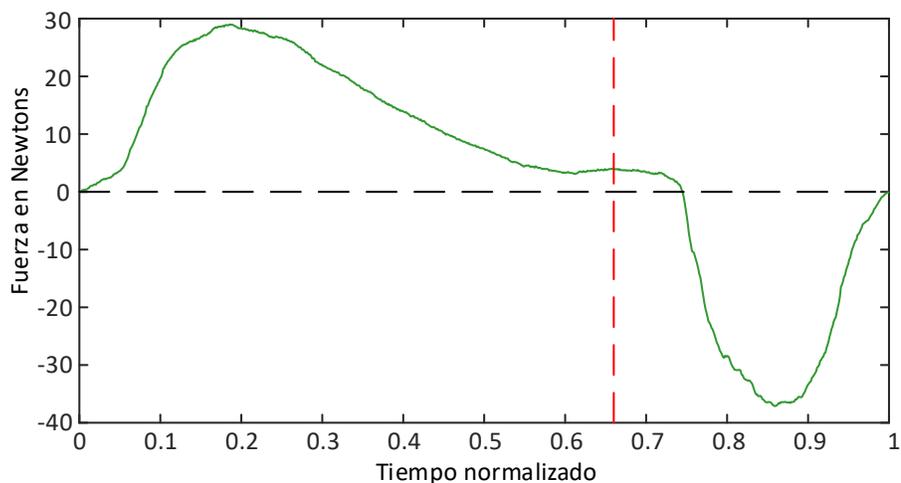


Figura 4.58. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 9.

Tabla 4.44. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 9.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	33.29 N	-55.30 N	7.52 s	0.622	0.695	1.18
2	28.98 N	-37.12 N	7.83 s	0.744	0.715	12.8

### Pruebas sujeto 10.

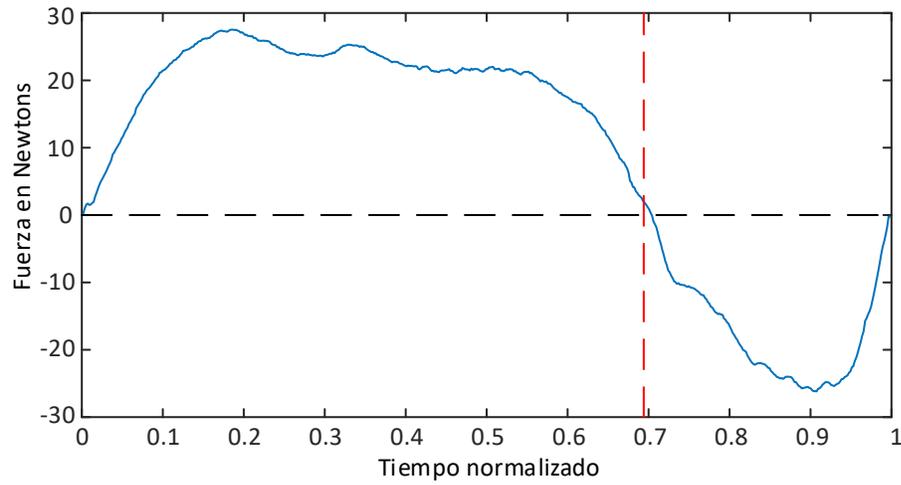


Figura 4.59. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 10.

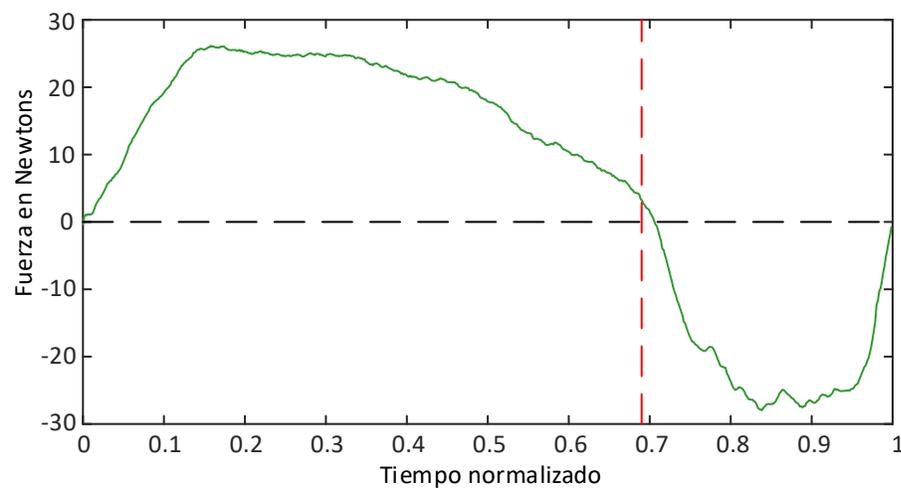


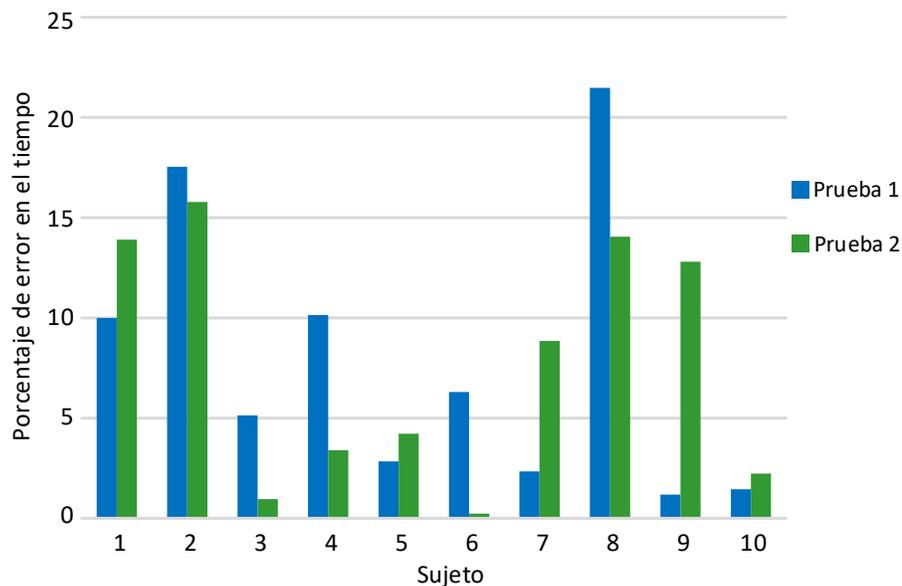
Figura 4.60. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 10.

Tabla 4.45. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 10.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	27.53 N	-26.17 N	5.51 s	0.704	0.694	1.45
2	26.14 N	-27.95 N	6.01 s	0.705	0.690	2.23

En los resultados mostrados previamente se pueden ver las pruebas realizadas por los 10 sujetos de control. Dados los parámetros que se programaron en el controlador de impedancia, esta prueba es la menos rígida de las tres. En este caso se puede ver que las fuerzas máximas aplicadas por los sujetos en algunas ocasiones no son simétricas; esto quiere decir que la fuerza máxima positiva y la negativa no son iguales, esto es un factor importante a considerar, ya que parte de la teoría de control óptimo se espera que esta fuerza sea simétrica.

Los errores en el tiempo son variables entre los sujetos de control, el error más grande que se encontró es de casi % 21, y el error más pequeño es de casi %0.23, errores muy similares con respecto a las pruebas realizadas con los primeros parámetros. En la Figura (4.61) se muestra los porcentajes de error  $\%e_{\tau/T}$  de los 10 sujetos de control de las dos pruebas, de forma que se pueda visualizar el entrenamiento de los sujetos de control en cada una de las pruebas. Como se puede observar la mayoría de los sujetos logro reducir el porcentaje de error en la relación  $\tau/T$ , con excepción del sujeto 9, donde se puede observar que en ese caso el porcentaje de error aumento en la segunda prueba.

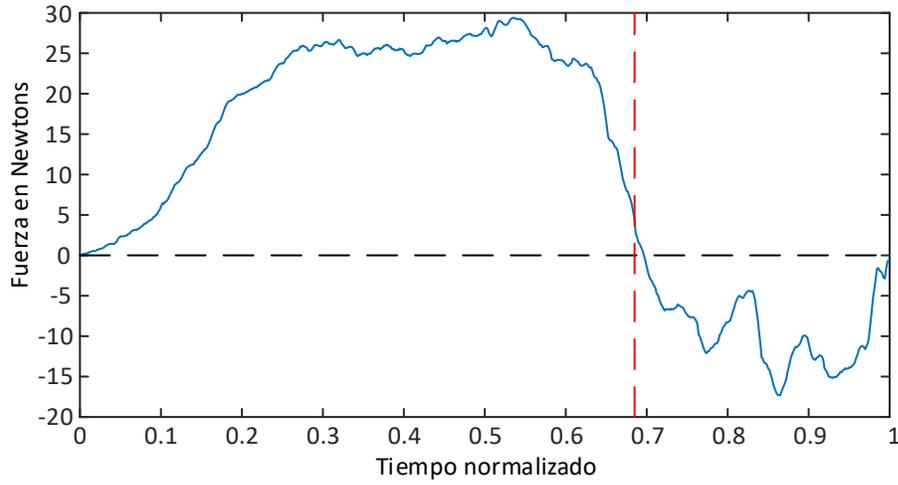


**Figura 4.61.** Porcentaje de error  $\%e_{\tau/T}$  para la solución del problema de tiempo mínimo considerando  $\xi = 0.375$ .

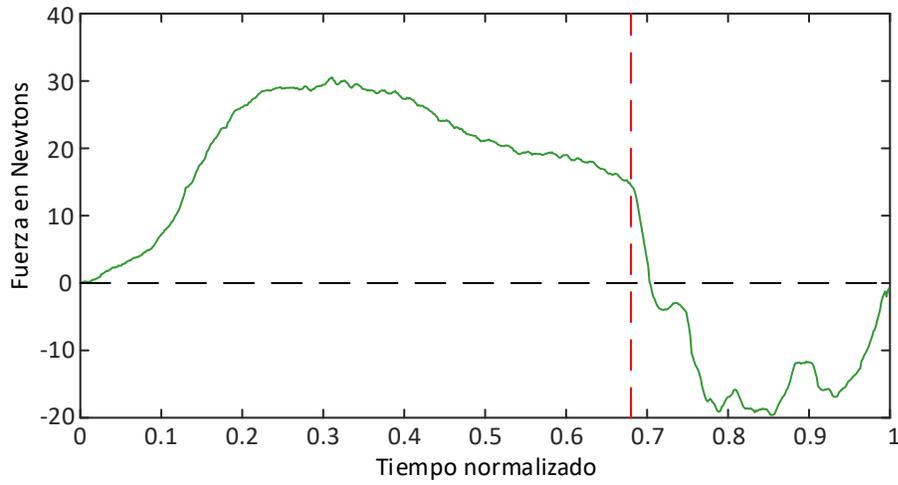
#### 4.2.2.3. Resultados utilizando un valor de $\xi = 0.707$ .

A continuación se muestran los resultados obtenidos de los 10 sujetos de control

**Pruebas sujeto 1.**



**Figura 4.62.** Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 1.



**Figura 4.63.** Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 1.

**Tabla 4.46.** Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 1.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	29.39 N	-17.33 N	6.18 s	0.695	0.685	1.45
2	30.55 N	-19.59 N	6.15 s	0.702	0.680	3.67

## Pruebas sujeto 2.

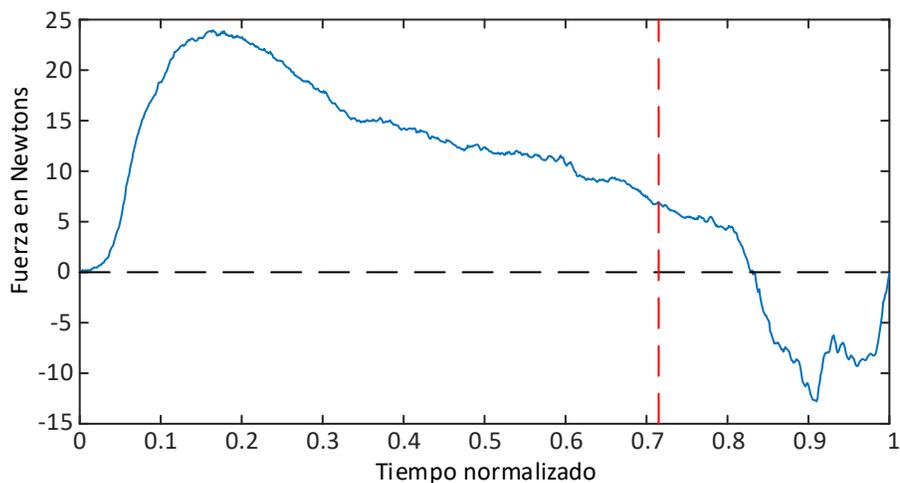


Figura 4.64. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 2.

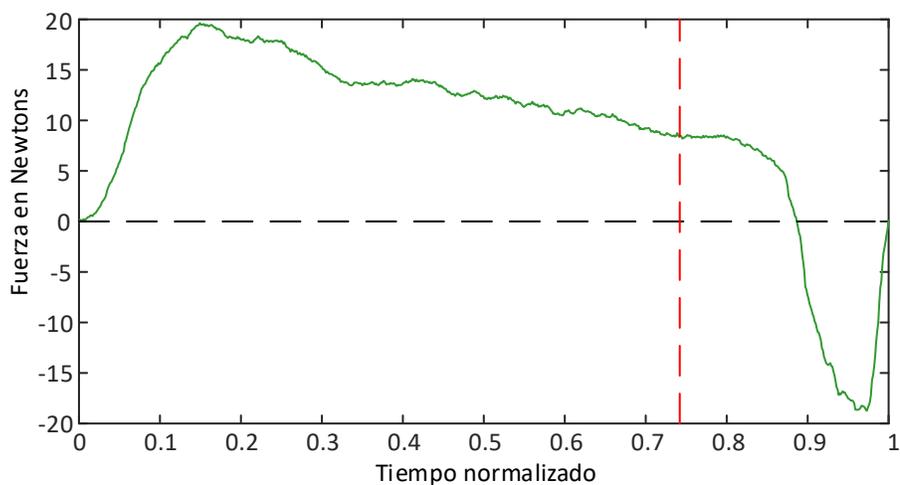
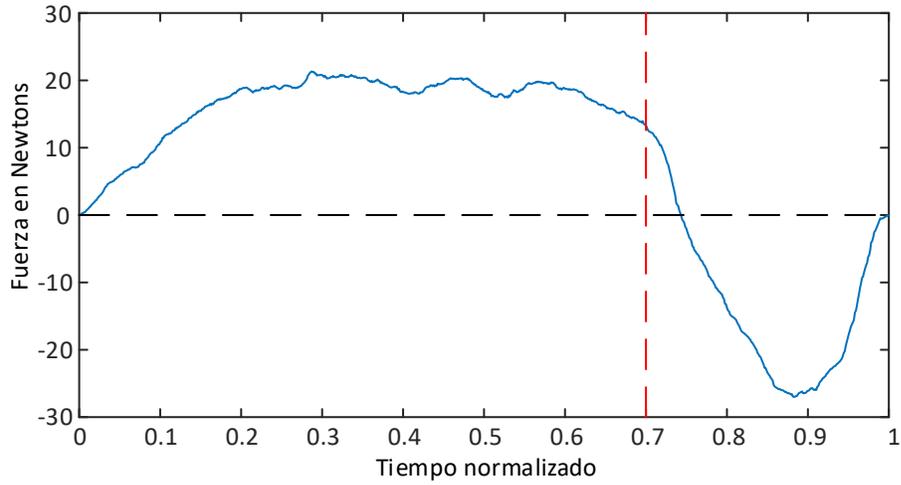


Figura 4.65. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 2.

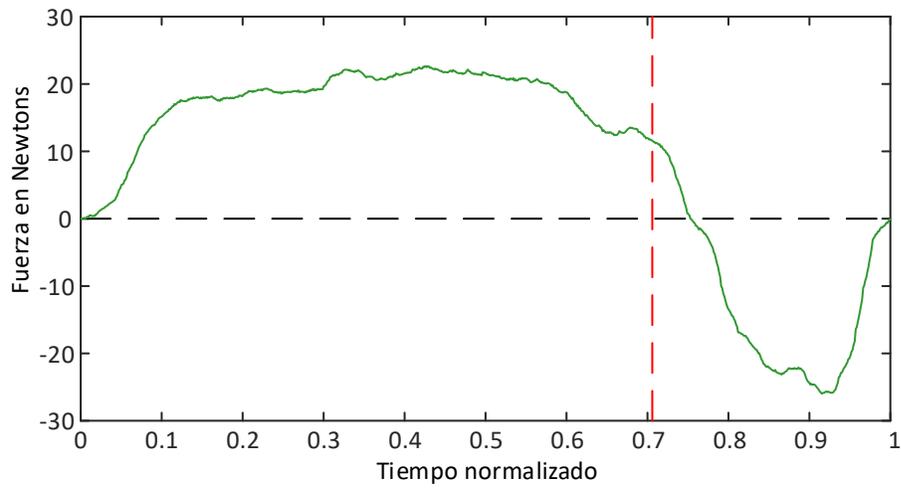
Tabla 4.47. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 2.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	23.95 N	-12.78 N	8.03 s	0.833	0.715	16.50
2	19.63 N	-18.74 N	7.77 s	0.886	0.742	19.40

### Pruebas sujeto 3.



**Figura 4.66.** Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 3.



**Figura 4.67.** Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 3.

**Tabla 4.48.** Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 3.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	21.32 N	-26.99 N	7.98 s	0.741	0.70	5.85
2	22.66 N	-25.97 N	7.65 s	0.751	0.705	6.52

## Pruebas sujeto 4.

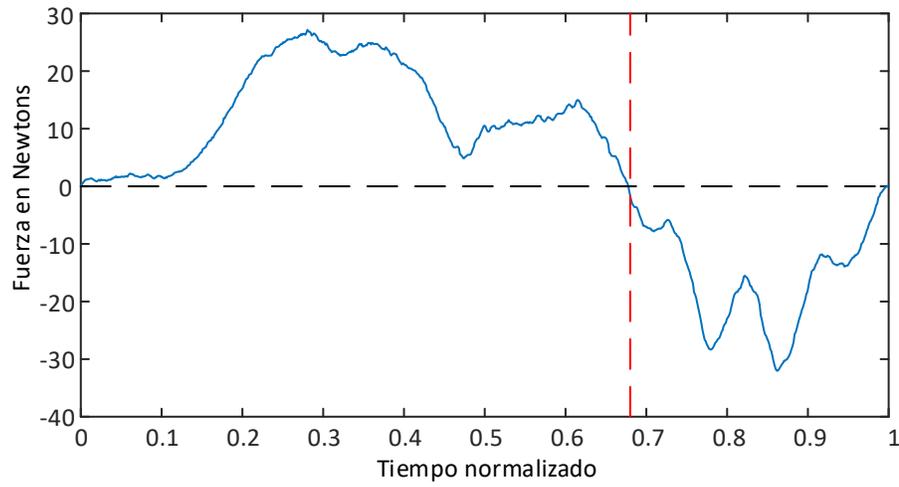


Figura 4.68. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 4.

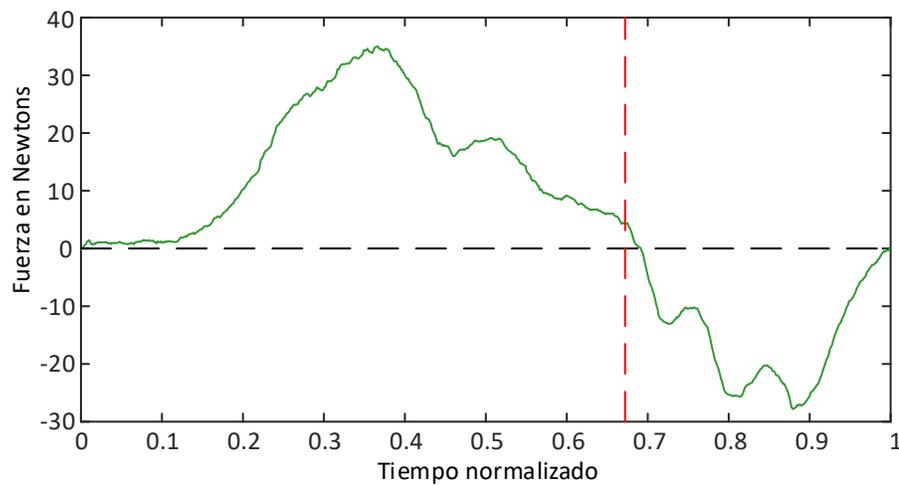
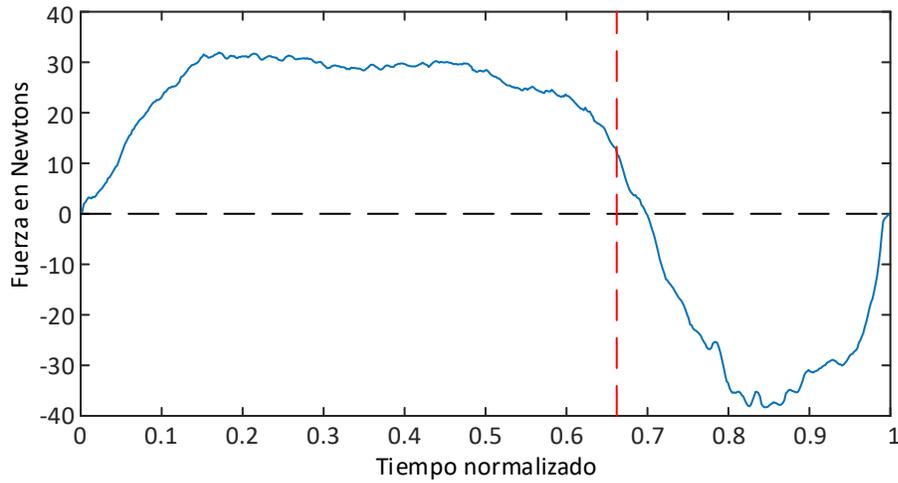


Figura 4.69. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 4.

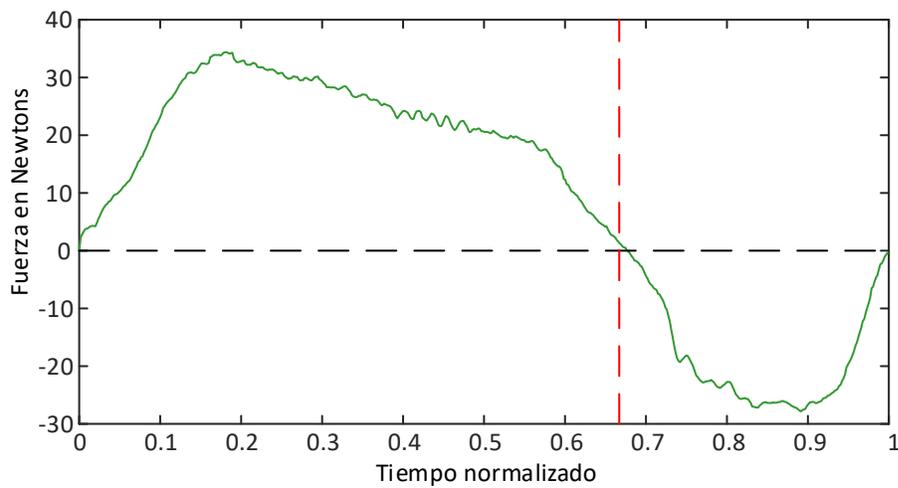
Tabla 4.49. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 4.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	27.17 N	-32.61 N	7.63 s	0.677	0.680	0.36
2	34.98 N	-27.81 N	6.76 s	0.690	0.672	2.79

**Pruebas sujeto 5.**



**Figura 4.70.** Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 5.



**Figura 4.71.** Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 5.

**Tabla 4.50.** Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 5.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	31.46 N	-38.29 N	5.33 s	0.697	0.662	5.42
2	34.38 N	-27.83 N	5.50 s	0.676	0.667	1.39

Pruebas sujeto 6.

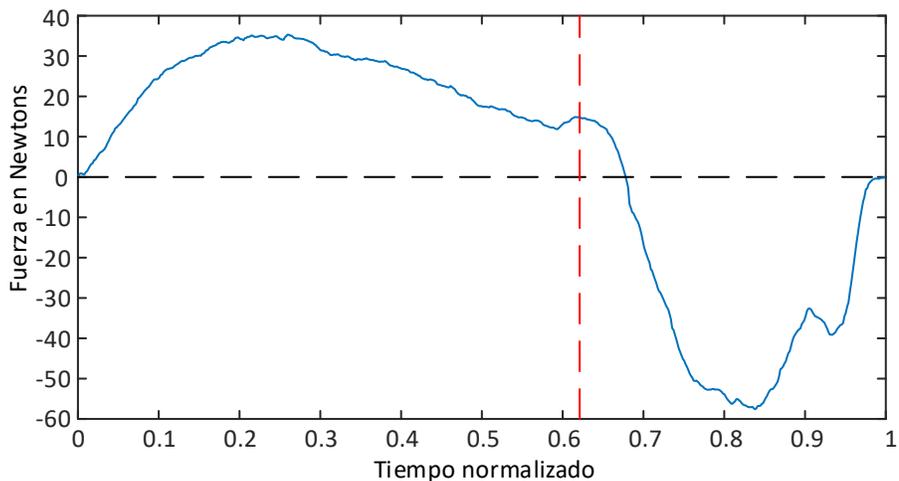


Figura 4.72. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 6.

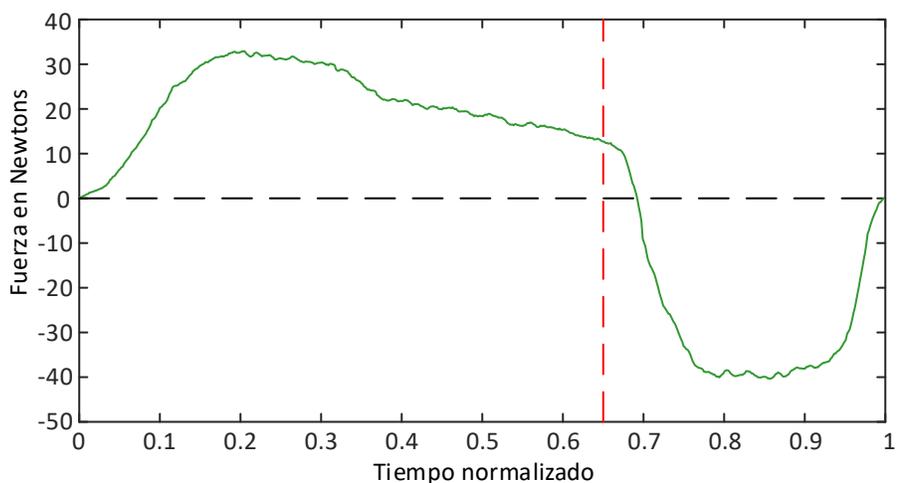


Figura 4.73. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 6.

Tabla 4.51. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 6.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	35.32 N	-57.57 N	6.05 s	0.677	0.621	9.11
2	32.93 N	-40.32 N	6.31 s	0.692	0.650	6.53

### Pruebas sujeto 7.

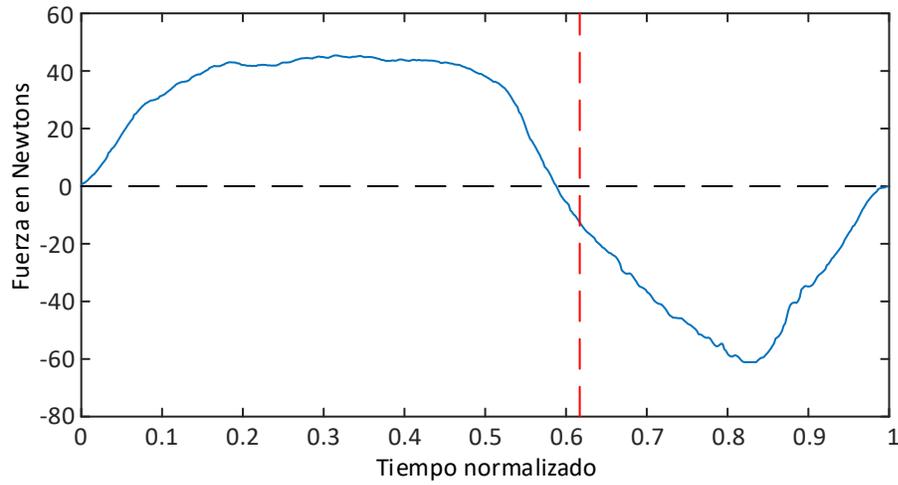


Figura 4.74. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 7.

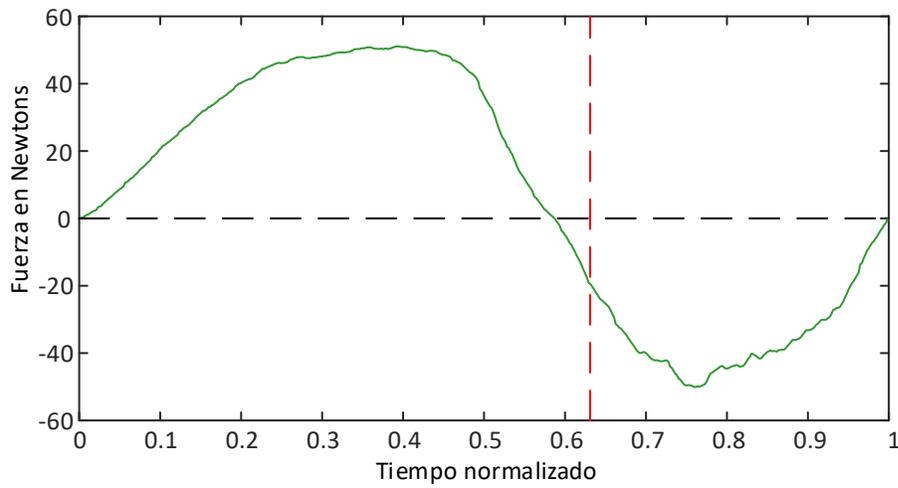


Figura 4.75. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 7.

Tabla 4.52. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 7.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	45.41 N	-61.15 N	5.04 s	0.589	0.617	4.50
2	51.10 N	-50.06 N	4.77 s	0.587	0.631	6.97

## Pruebas sujeto 8.

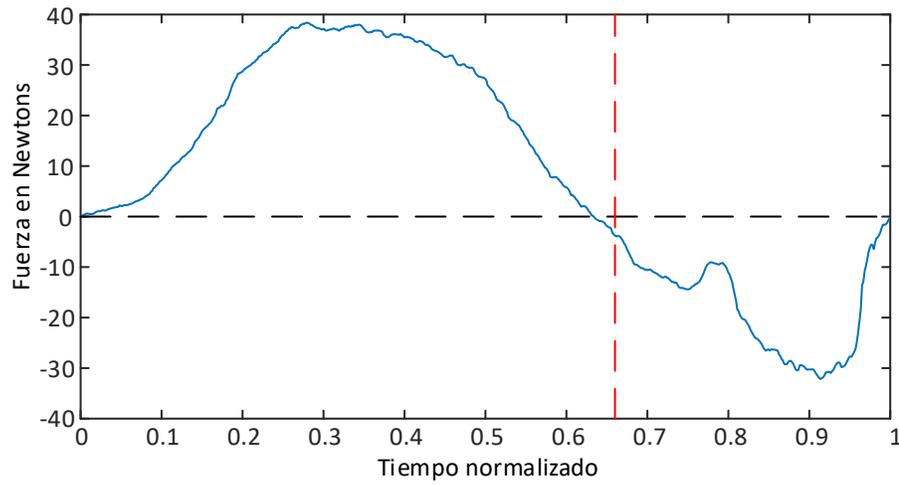


Figura 4.76. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 8.

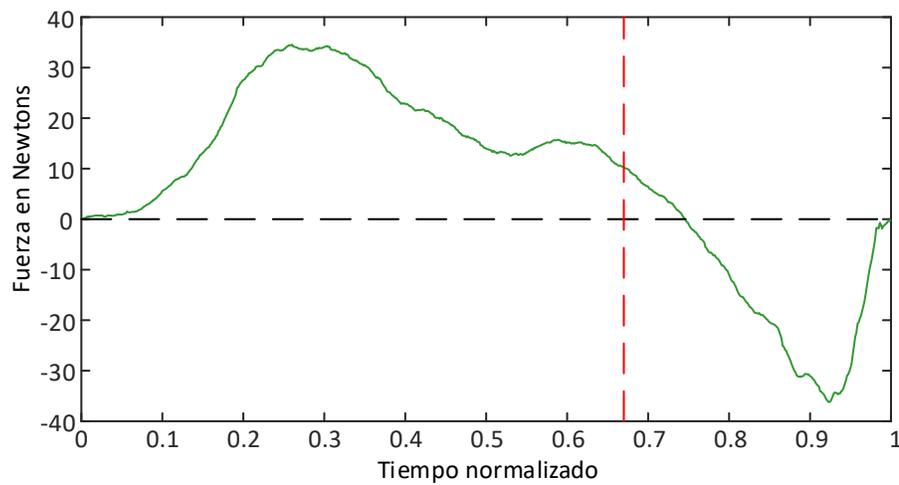


Figura 4.77. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 8.

Tabla 4.53. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 8.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	38.39 N	-32.15 N	6.23 s	0.634	0.66	3.93
2	34.56 N	-36.19 N	6.92 s	0.744	0.67	11.07

### Pruebas sujeto 9.

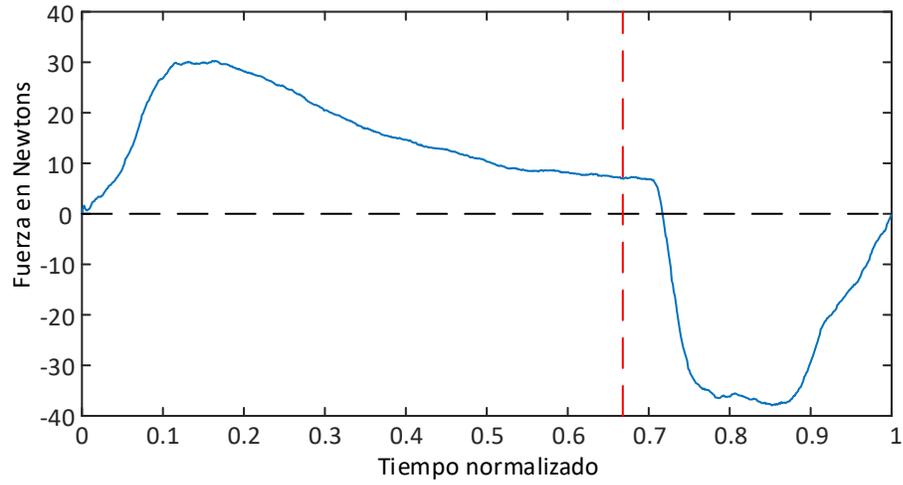


Figura 4.78. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 9.

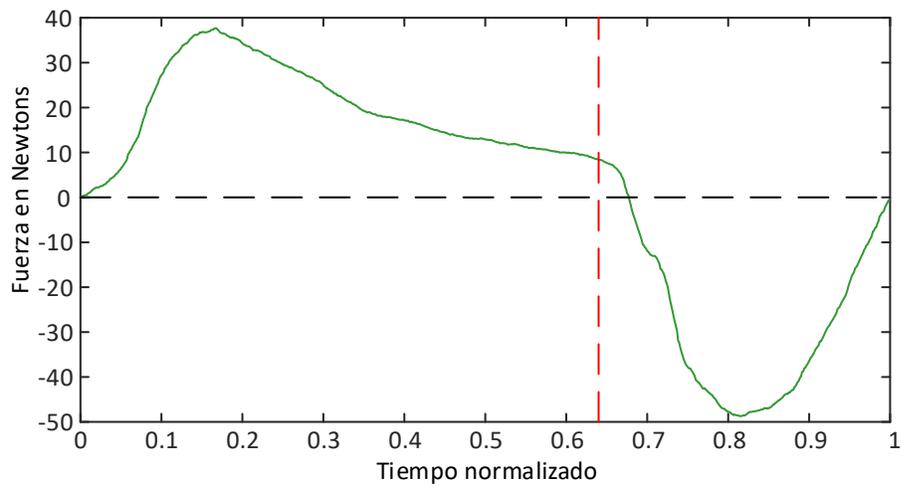


Figura 4.79. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 9.

Tabla 4.54. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 9.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	30.28 N	-37.92 N	7.83 s	0.716	0.66	7.66
2	37.68 N	-48.74 N	7.32 s	0.677	0.64	5.85

### Pruebas sujeto 10.

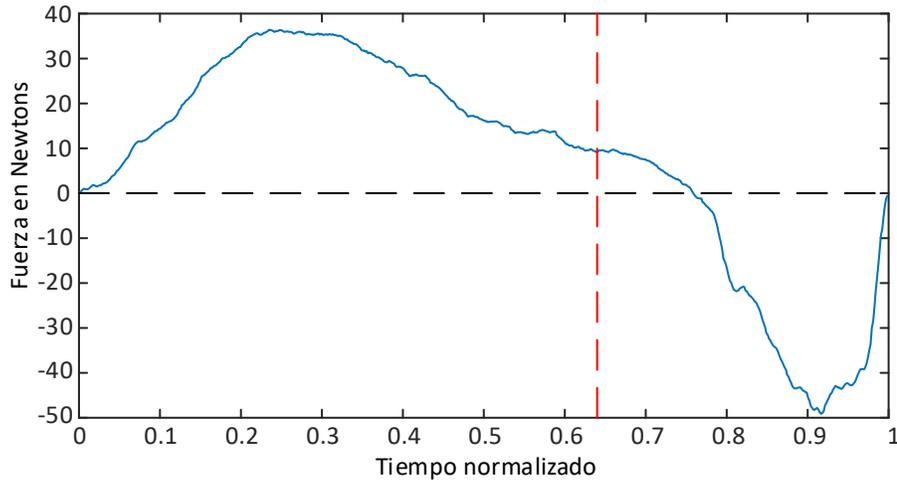


Figura 4.80. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 1 por el sujeto de control 10.

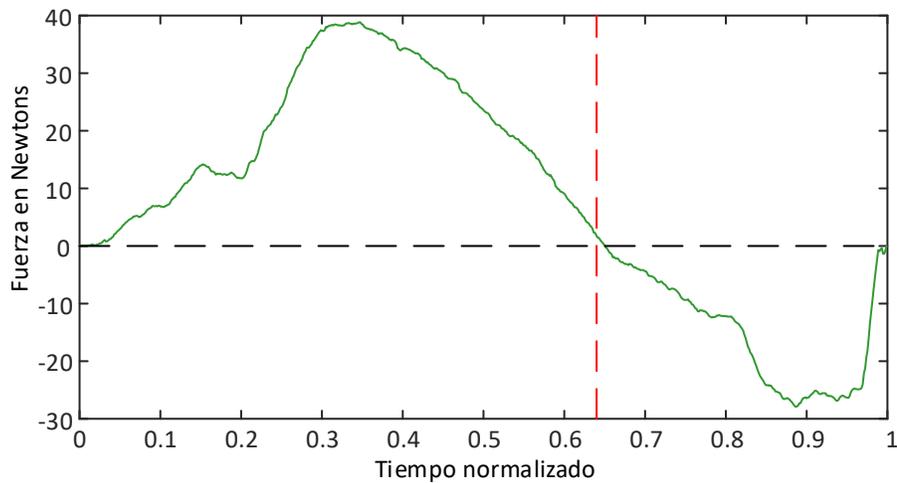


Figura 4.81. Perfil de fuerza aplicado de la prueba 2 por el sujeto de control 10.

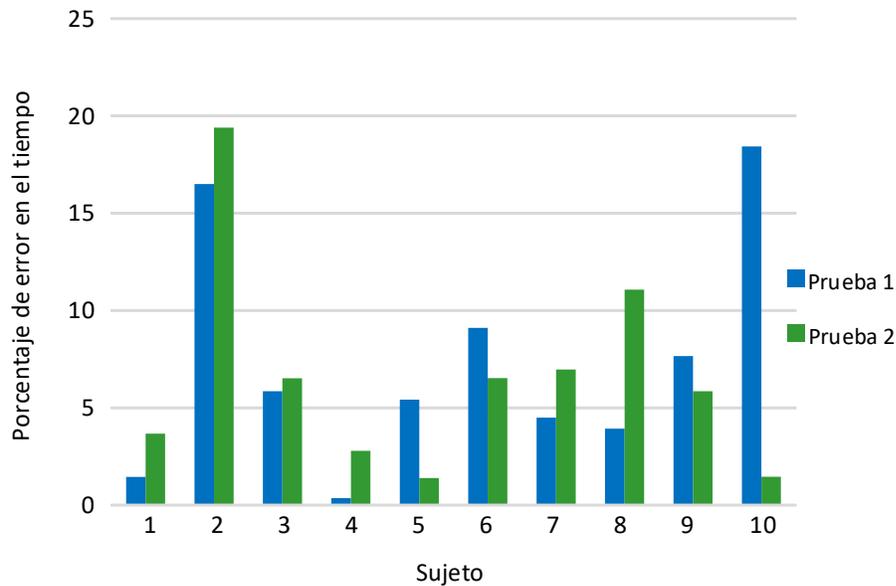
Tabla 4.55. Porcentaje de error de la relación de tiempo de las pruebas del sujeto 10.

Prueba	$F_+$	$F_-$	Tiempo	$(\tau/T)_m$	$(\tau/T)_e$	$\%e_{\tau/T}$
1	36.41 N	-49.12 N	6.22 s	0.758	0.64	18.43
2	38.85 N	-27.95 N	6.76 s	0.649	0.64	1.46

Los resultados previamente mostrados representan los perfiles de fuerza aplicados por las personas para la realización de la maniobra, siendo esta la prueba más rígida estudiada.

Como se puede observar los puntos máximos de las fuerzas aplicadas son simétricas en la mayoría de los sujetos, salvo algunas excepciones donde la fuerza de frenado del sistema llegaba a ser mayor y aplicada en menor tiempo que la fuerza inicial. En este caso se puede observar que algunos sujetos les tomaba menos tiempo en llegar a la fuerza pico; aún así, en los resultados encontrados esta fuerza no se aplicaba de manera abrupta, lo mismo sucede en el final de la maniobra, donde la fuerza no se puede dejar de aplicar de manera abrupta, sino que llegaba de manera suave a la fuerza en cero.

Los errores encontrados en la relación de tiempo  $\tau/T$  son muy similares a las pruebas anteriores, donde el error mayor es de % 19 y el menor de % 0.36. En la Figura (4.82) se muestran los porcentajes de error  $\%e_{\tau/T}$  de los 10 sujetos de control.



**Figura 4.82.** Porcentaje de error  $\%e_{\tau/T}$  para la solución del problema de tiempo mínimo considerando  $\xi = 0.707$ .

### 4.2.3. Resultados experimentales de estimación de fuerza por medio de Electromiografía.

Para la solución del problema de estimación de fuerza, se utiliza el método de mínimos cuadrados, donde se busca encontrar los coeficientes de flexión  $f_i$  y los coeficientes de extensión  $e_i$ . Para realizar esta estimación se toman las pruebas realizadas por los sujetos para la solución del problema de esfuerzo y tiempo mínimo.

Para ilustrar el procedimiento realizado para la estimación de fuerza, se toma en cuenta la

prueba realizada por el sujeto de control 1 para la solución del problema de tiempo mínimo. Para una primera estimación se toma un orden del modelo de  $n = 20$ , los datos de fuerza obtenidos por el sensor FANUC, y las señales EMG recibidas por el brazalette MYO. Con estas últimas señales se obtiene el valor  $EMG_{RMS}$ , tomando una ventana de 100 datos para el suavizado de la señal.

La estimación de los coeficientes  $e$  y  $f$  se obtienen a partir de

$$\hat{X}_i = (A^T A)^{-1} A^T F \quad (4.5)$$

donde

$$\hat{X}_i = \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Con  $i$  igual al orden del modelo. Por lo que tomando todo el perfil de fuerza y un modelo de orden 20, los coeficientes  $e_{20}$  resultantes son

$$e_{20} = \begin{bmatrix} 341.62 & -42.87 & -80.17 & -47.41 & 12.78 & 19.88 & 56.45 \\ 24.45 & -49.48 & -45.33 & 68.32 & 50.66 & -14.85 \\ -45.13 & 11.67 & -48.95 & 26.42 & 40.67 & 47.31 & -380.05 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

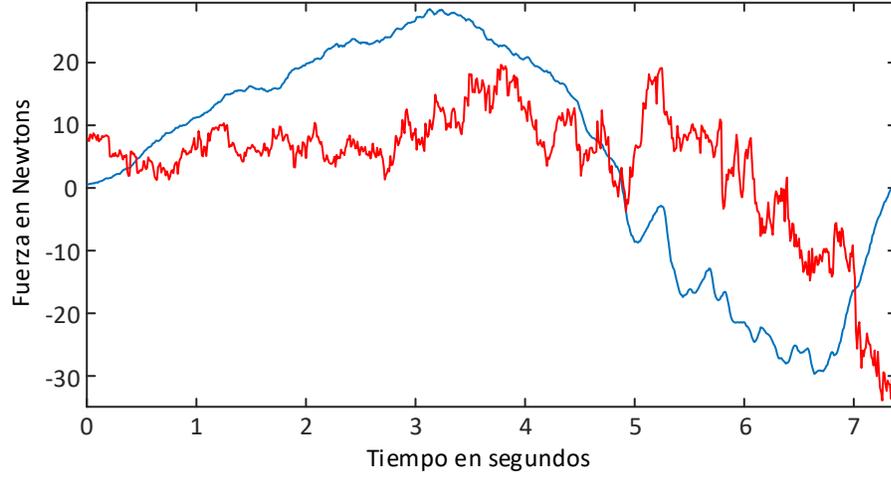
y los coeficientes  $f_{20}$  son

$$f_{20} = \begin{bmatrix} 338.90 & -194.44 & -47.54 & 45.68 & 73.11 & -286.35 & 134.78 \\ 26.71 & -23.83 & -31.34 & 157.64 & -103.45 & -73.47 \\ -77.67 & 80.20 & -30.53 & 70.33 & 14.66 & 303.11 & -497.03 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Con estos coeficientes es posible realizar la estimación del perfil de fuerza aplicado por el sujeto,  $\hat{F}$ , de tal forma que

$$\hat{F} = A\hat{X} \quad (4.9)$$

Como se puede observar en la Figura (4.83), la fuerza estimada  $\hat{F}$  presenta mucho error y no parece asemejarse a la fuerza aplicada por el sujeto de control, por lo que los valores de los coeficientes de  $\hat{X}_{20}$  no permiten realizar una estimación acertada de la fuerza. Si se analiza el movimiento de la articulación y la activación de los grupos musculares se llega a la conclusión de que cuando se está aplicando el perfil de fuerza positivo, se realiza un movimiento de extensión de la muñeca, esto es que los músculos extensores se contraen mientras que los músculos flexores se relajan; mientras que al realizar el cambio en el sentido



**Figura 4.83.** Estimación del perfil de fuerza a partir de la  $\hat{X}_{20}$  considerando todo el perfil de fuerza aplicado por el sujeto de control 1.

del perfil de fuerza, es decir, cuando se busca detener la masa se realiza un cambio en la activación muscular y los músculos flexores se contraen mientras que los músculos extensores se relajan. Por lo que se plantea una estimación separada de los coeficientes, primero se toma el perfil de fuerza positivo estimando  $\hat{X}_{20+}$ , y después se toma el perfil de fuerza negativo para estimar  $\hat{X}_{20-}$ , como

$$\hat{X}_{20+} = \begin{bmatrix} e_{20+} \\ f_{20+} \end{bmatrix} \quad \hat{X}_{20-} = \begin{bmatrix} e_{20-} \\ f_{20-} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

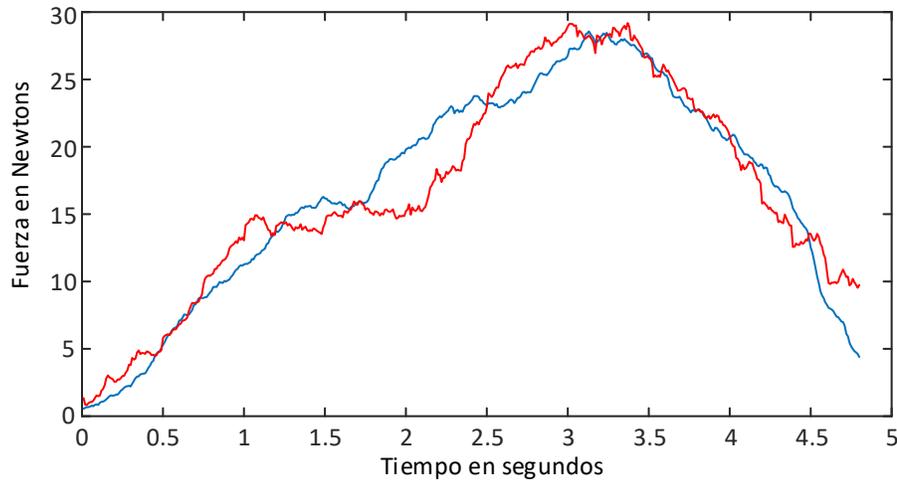
Por lo tanto tomando el perfil de fuerza positivo, los coeficientes  $e_{20+}$  son

$$e_{20+} = \begin{bmatrix} 71.26 & 12.59 & 1.65 & 6.21 & -3.78 & -1.78 & -0.83 \\ 3.85 & -9.67 & 5.61 & 5.31 & -3.11 & -7.06 \\ 6.80 & -10.51 & 13.05 & 6.54 & 9.05 & -11.01 & 9.47 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

los coeficientes  $f_{20+}$

$$f_{20+} = \begin{bmatrix} 118.63 & 7.37 & 67.34 & 86.26 & 70.67 & -54.57 & 74.29 \\ -12.52 & 23.95 & -13.16 & 30.73 & -60.92 & -51.28 \\ 21.92 & 1.96 & 32.54 & 50.61 & 12.24 & 7.81 & 540.95 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Utilizando estos coeficientes en la ecuación (4.9) se obtiene la estimación de la fuerza, como se muestra en el Figura (4.84). Como se puede observar esta fuerza calculada tiene un



**Figura 4.84.** Estimación del perfil de fuerza a partir de la  $\hat{X}_{20+}$  considerando el perfil de fuerza positiva aplicado por el sujeto de control 1.

perfil más similar a la fuerza aplicada por el sujeto. De igual forma se realiza una estimación de la fuerza negativa, donde ahora el valor de los coeficientes  $e_{20-}$  son

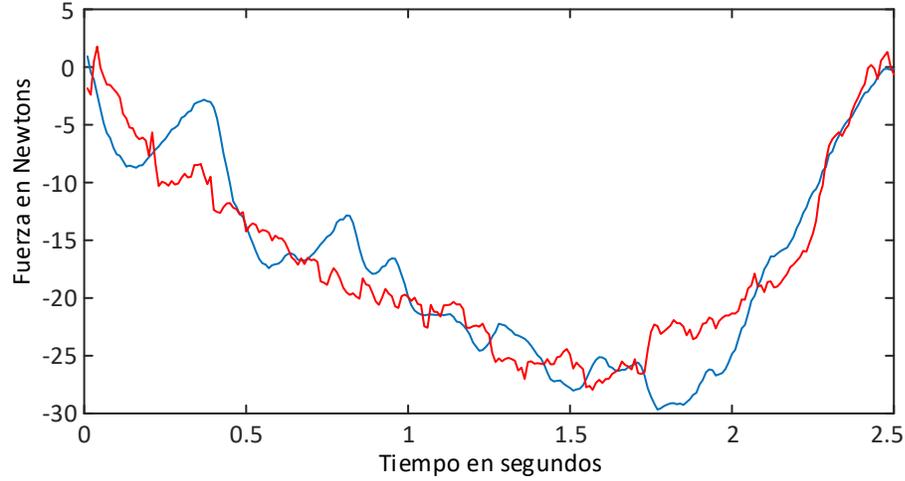
$$e_{20-} = \begin{bmatrix} -241.69 & 3.21 & -49.18 & 32.32 & -14.97 & -24.81 & 11.96 & \\ 1.67 & 6.75 & -56.16 & 28.59 & -18.73 & -1.48 & & \\ 2.45 & -7.20 & -2.52 & -56.67 & -8.83 & -26.79 & 239.14 & \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

los coeficientes  $f_{20-}$  son

$$f_{20-} = \begin{bmatrix} -50.29 & -2.10 & -1.11 & 13.66 & -22.10 & 2.26 & -6.39 & \\ -22.51 & 0.69 & 3.38 & -7.59 & -7.78 & -1.55 & & \\ -8.92 & -7.65 & -6.78 & -10.29 & -11.01 & 10.67 & 15.41 & \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

La estimación de fuerza realizada con estos coeficientes se muestra en la Figura (4.85); como se puede ver esta fuerza estimada es más cercana al perfil realizado por el sujeto de control. Comparando la estimación de la fuerza total y la estimación separada de las fuerzas dependiendo del sentido de la fuerza, se puede observar la diferencia que existe en los coeficientes. Cuando se hace la estimación de la fuerza positiva, se le da mayor peso a los coeficientes de flexión, donde  $f_{20+}(1)$  y  $f_{20+}(20)$  son más grandes en magnitud en comparación de  $e_{20+}(1)$  y  $e_{20+}(20)$ . Caso contrario, en la estimación de fuerza negativa los coeficientes con mayor magnitud son  $e_{20-}(1)$  y  $e_{20-}(20)$ .

Estos resultados son tomando un orden del modelo de  $n = 20$ , para corroborar el



**Figura 4.85.** Estimación del perfil de fuerza a partir de la  $\hat{X}_{20-}$  considerando el perfil de fuerza negativa aplicado por el sujeto de control 1.

comportamiento de la estimación de fuerza y tratar de mejorar el error presentado se toma ahora un modelo de orden  $n = 10$ . Para estimar los coeficientes de  $\hat{X}_{10+}$  y  $\hat{X}_{10-}$

Haciendo la estimación de los coeficientes tomando el perfil de fuerza positivo se tiene que los coeficientes de extensión  $e_{10+}$  son

$$e_{10+} = \begin{bmatrix} 81.78 & -18.25 & -0.58 & 16.10 & -6.65 \\ 17.72 & 9.30 & 7.76 & 5.98 & -7.91 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Y los coeficientes de flexión  $f_{10+}$  son

$$f_{10+} = \begin{bmatrix} -103.73 & -1.13 & 34.53 & 56.59 & 104.14 \\ -1.27 & 127.61 & 49.02 & 22.24 & 676.53 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

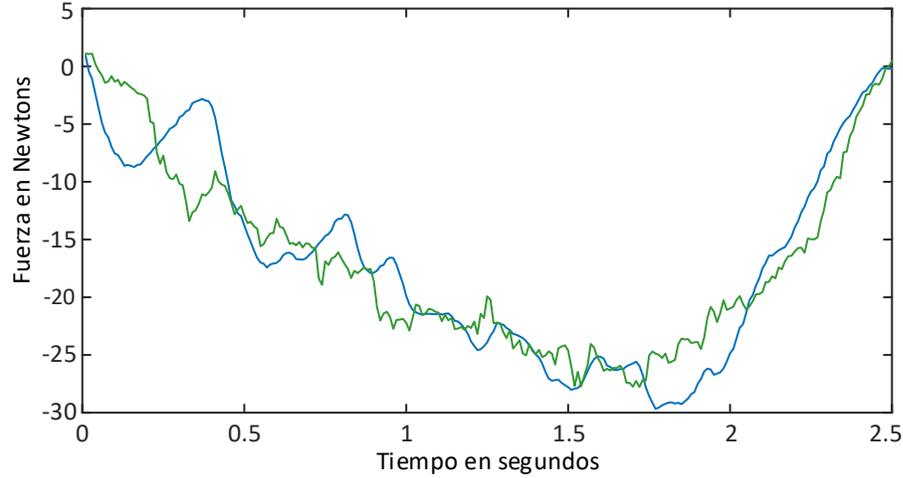
Utilizando estos coeficientes se realiza la estimación de fuerzas, como se puede observar en la Figura (4.86). Tomando ahora el perfil de fuerza negativo, se realiza la estimación de los coeficientes para  $\hat{X}_{10-}$ . Por lo que los coeficientes de extensión  $e_{10-}$  son

$$e_{10-} = \begin{bmatrix} -136.81 & 12.54 & -10.96 & 11.83 & -28.36 \\ -20.67 & -14.01 & -28.31 & 37.48 & -36.46 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Y los coeficientes de flexión  $f_{10-}$  son

$$f_{10-} = \begin{bmatrix} -58.93 & 13.14 & -13.08 & 20.02 & 13.29 \\ 14.69 & 21.12 & -9.55 & 37.12 & -169.49 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$





**Figura 4.87.** Estimación del perfil de fuerza a partir de la  $\hat{X}_{10\_}$  considerando el perfil de fuerza negativa aplicado por el sujeto de control 1.

Realizando la estimación de los coeficientes  $\hat{X}_{30\_}$  por medio de la fuerza negativa se tiene que los coeficientes de extensión  $e_{30\_}$  son:

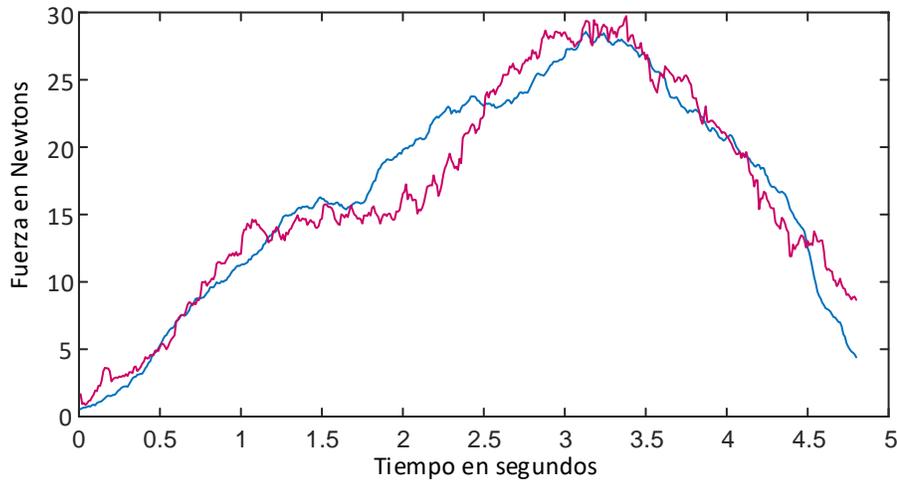
$$e_{30\_} = \begin{bmatrix} -133.86 & -21.24 & -36.74 & 5.34 & -18.97 & -52.57 & -37.03 & \\ -73.54 & -57.81 & -11.26 & 34.06 & -67.30 & -57.86 & -19.27 & 27.65 \\ 46.56 & -4.64 & 23.18 & 53.14 & -20.15 & -28.85 & 14.05 & 50.65 \\ 17.06 & -36.25 & 14.82 & 31.38 & 3.13 & 0.41 & 159.20 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Y los coeficientes de flexión  $f_{30\_}$  son:

$$f_{30\_} = \begin{bmatrix} -75.81 & 14.86 & 14.81 & -20.03 & -15.89 & 6.27 & 10.86 & \\ -21.51 & -4.79 & 7.19 & -22.90 & -38.09 & -2.97 & 2.36 & -9.05 \\ -12.92 & -3.51 & -11.71 & 16.58 & -14.84 & -14.31 & -4.02 & 16.92 \\ -16.15 & 0.48 & 2.74 & 7.14 & -11.75 & -4.93 & 83.21 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Por lo tanto la estimación de fuerza con estos coeficientes se muestra en la Figura (4.89). Como se puede observar, los errores en la estimación de fuerza van disminuyendo mientras el orden del modelo va aumentando; esto se puede ver de forma más clara en la Figura (4.90) donde se muestra el error RMSE de los datos de fuerza medidos contra los datos de fuerza estimados, tanto de la estimación de la fuerza positiva como la fuerza negativa.

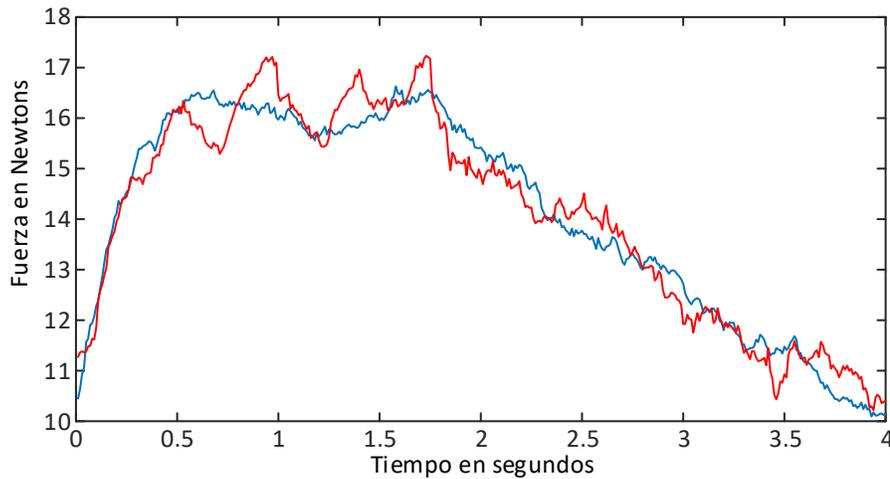
A continuación se muestran los resultados de la estimación de fuerza utilizando las pruebas realizadas por otros sujetos de control, se hace la estimación de los coeficientes de extensión



**Figura 4.88.** Estimación del perfil de fuerza a partir de la  $\hat{X}_{30+}$  considerando el perfil de fuerza positiva aplicado por el sujeto de control 1.

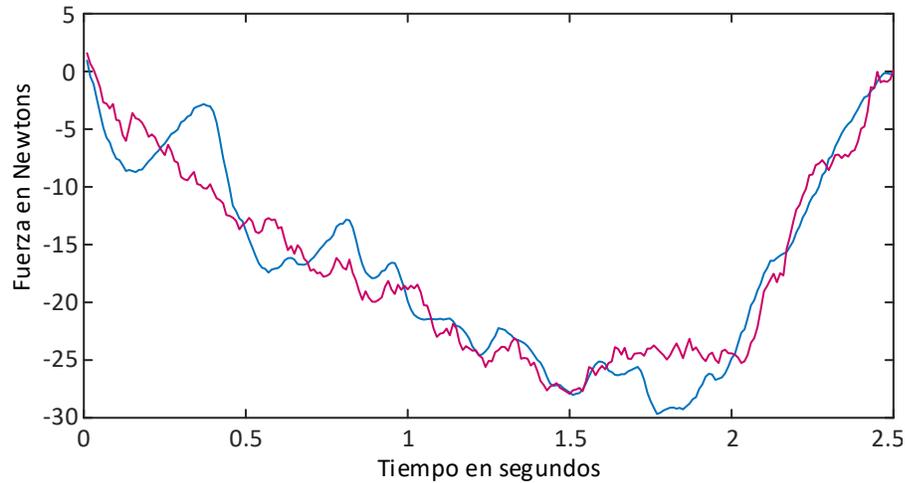
y flexión considerando el análisis separado de las fuerzas, por lo que por medio de mínimos cuadrados se obtiene  $\hat{X}_{20+}$  y  $\hat{X}_{20-}$  para cada uno de los sujetos.

En la Figura (4.91) se muestra la estimación de fuerza positivo de la prueba realizada por el sujeto de control 2 para la solución del problema de tiempo mínimo. En este caso se tiene un error de  $s_{20+} = 0.4658$ . En la Figura (4.92) se muestra el resultado de la estimación de fuerza negativo, donde la desviación es de  $s_{20-} = 3.4974$ .



**Figura 4.91.** Estimación del perfil de fuerza a partir de la  $\hat{X}_{20+}$  considerando el perfil de fuerza positiva aplicado por el sujeto de control 2.

Tomando la prueba realizada por el sujeto de control 3, se hace la estimación de fuerza tomando un orden del modelo de 20, por lo que la estimación de la fuerza positiva se puede



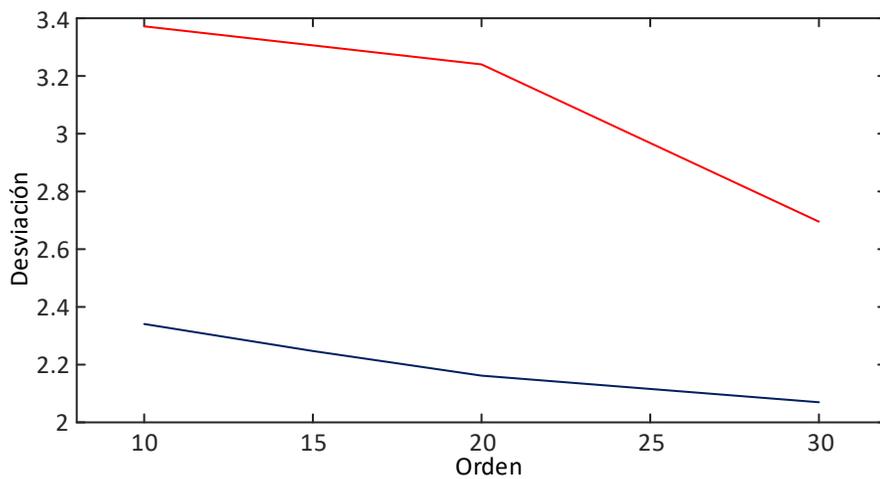
**Figura 4.89.** Estimación del perfil de fuerza a partir de la  $\hat{X}_{30-}$  considerando el perfil de fuerza negativa aplicado por el sujeto de control 1.

observar en La Figura (4.93), donde el error es de  $s_{20+} = 1.0952$ . Para el caso de la fuerza negativa, se muestra el resultado de la estimación en la Figura (4.94), donde la desviación es de  $s_{20-} = 1.8118$ .

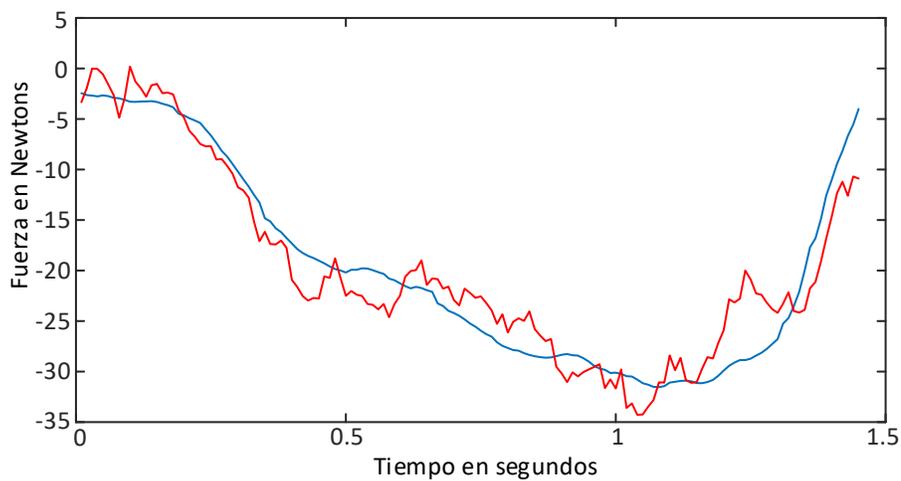
En la Figura (4.95) se muestra el perfil de fuerza estimado, para una de las pruebas realizadas por el sujeto de control 8, donde el error es de  $s_{20+} = 2.9331$ . Tomando ahora la estimación de la fuerza negativa, se tiene que la desviación es de  $s_{20-} = 3.8575$ . En la Figura (4.96) se muestra el resultado obtenido contra la fuerza aplicada por el sujeto de control.

En la Figura (4.97) se muestra el resultado de la estimación de fuerza tomando una de las pruebas realizadas por el sujeto de control 9, donde el error es de  $s_{20+} = 2.0166$ . Considerando la fuerza negativa, el resultado se muestra en la Figura (4.98), donde la desviación es de  $s_{20-} = 5.3675$ .

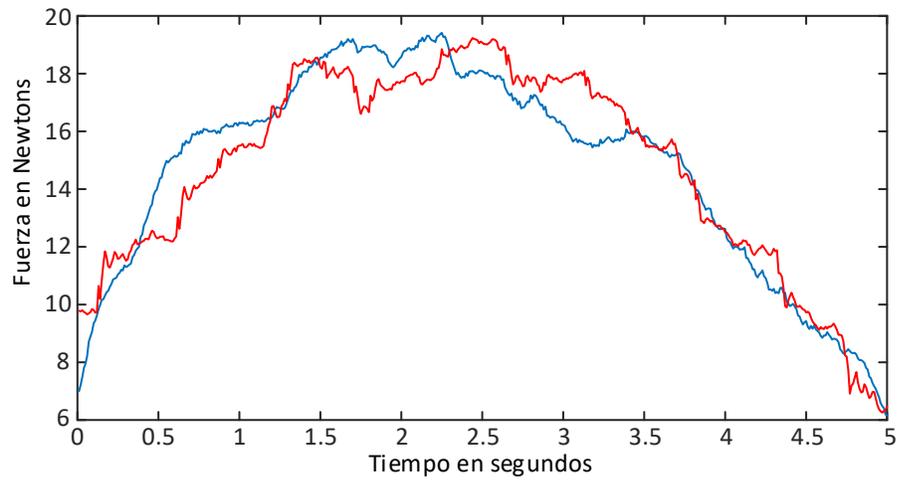
Como se puede observar en los resultados mostrados se puede realizar una estimación de fuerza con errores muy pequeños. El error RMSE menor se presentó en la estimación realizada del sujeto 2, donde  $s_{20+} = 0.4658$ , mientras que en la estimación de fuerza del sujeto 9 se presentó el error más grande, donde  $s_{20-} = 5.3675$ . Como se había mencionado, es importante recalcar que se realiza una estimación de los coeficientes  $\hat{X}$  para cada uno de los sujetos, ya que las señales EMG de cada sujeto son diferentes, esto por la activación muscular, el grosor de la piel, la cantidad de grasa, el tejido muscular entre otros, son diferentes para cada persona.



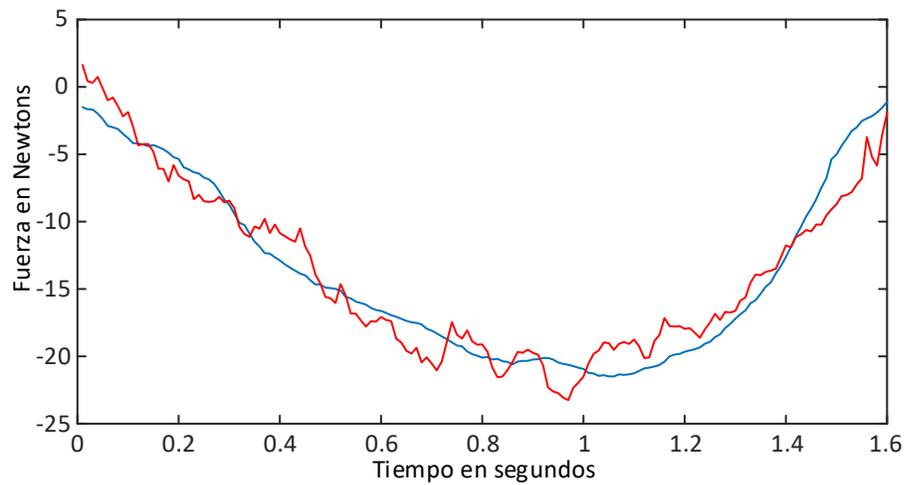
**Figura 4.90.** Error en la fuerza estimada con respecto a la fuerza aplicada por el sujeto de control 1. La línea roja representa el error en la estimación de la fuerza negativa y la línea azul representa el error en la estimación de la fuerza positiva.



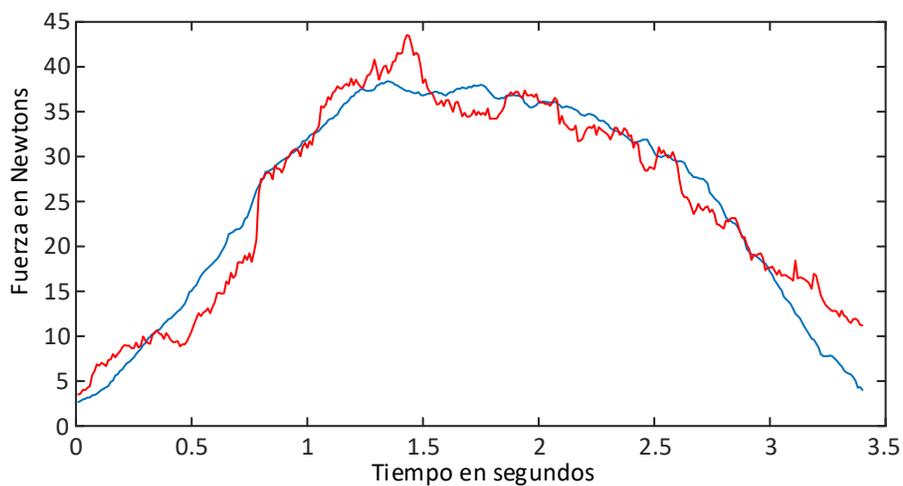
**Figura 4.92.** Estimación del perfil de fuerza a partir de la  $\hat{X}_{20-}$  considerando el perfil de fuerza negativo aplicado por el sujeto de control 2.



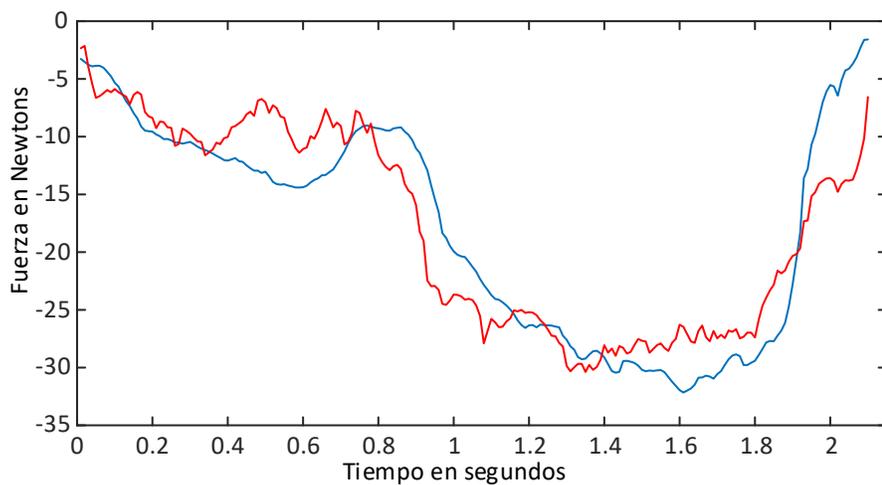
**Figura 4.93.** Estimación del perfil de fuerza a partir de la  $\hat{X}_{20+}$  considerando el perfil de fuerza positivo aplicado por el sujeto de control 3.



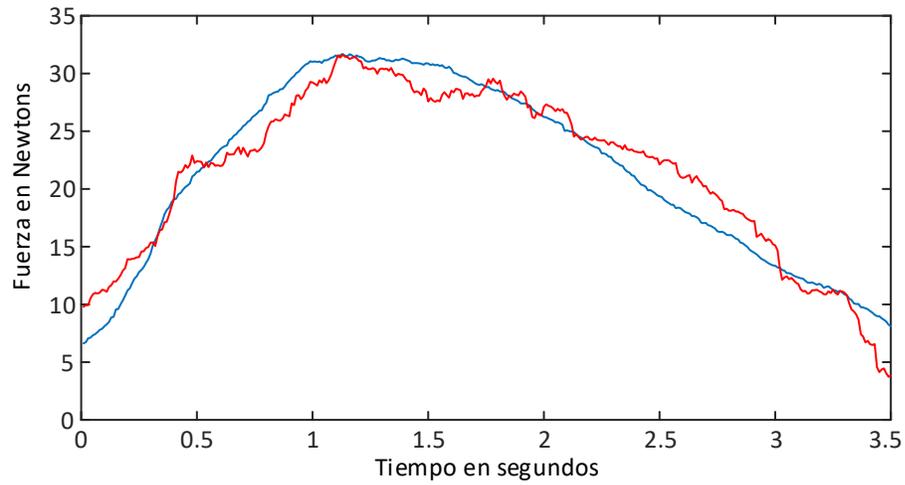
**Figura 4.94.** Estimación del perfil de fuerza a partir de la  $\hat{X}_{20-}$  considerando el perfil de fuerza negativo aplicado por el sujeto de control 3.



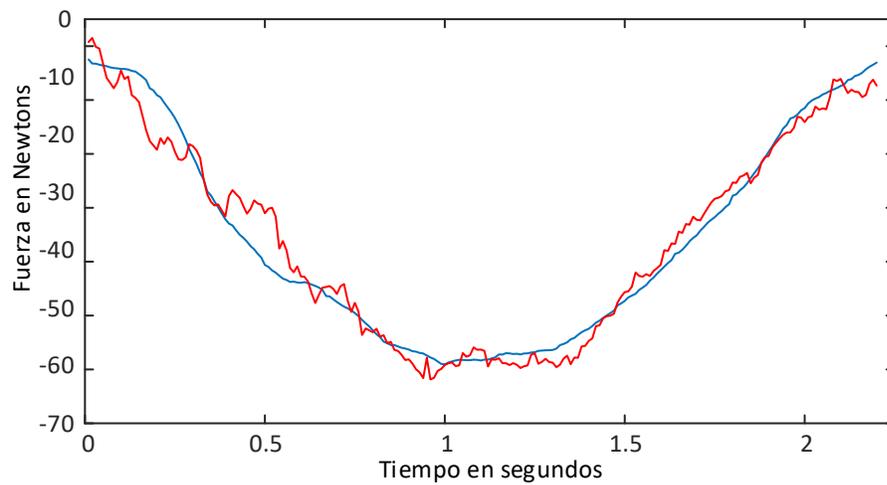
**Figura 4.95.** Estimación del perfil de fuerza a partir de la  $\hat{X}_{20+}$  considerando el perfil de fuerza positivo aplicado por el sujeto de control 8.



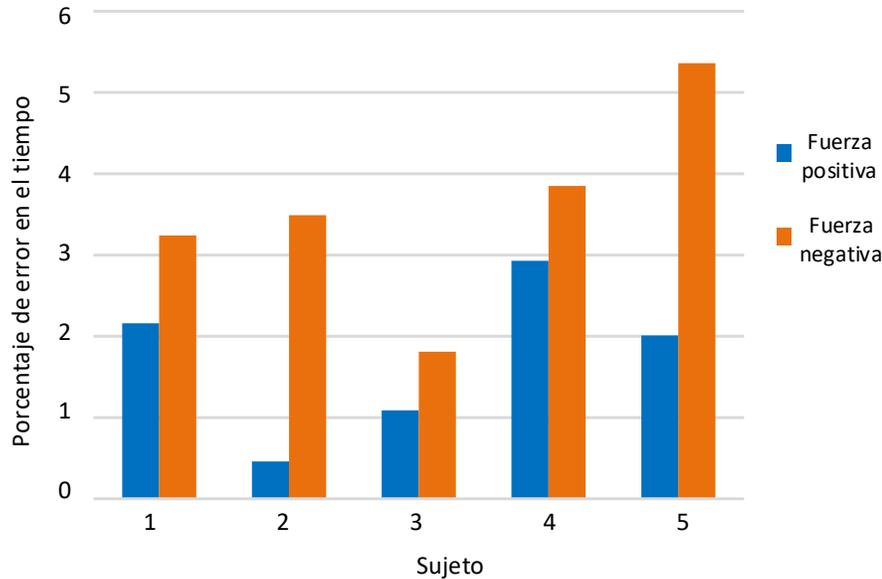
**Figura 4.96.** Estimación del perfil de fuerza a partir de la  $\hat{X}_{20-}$  considerando el perfil de fuerza negativo aplicado por el sujeto de control 8.



**Figura 4.97.** Estimación del perfil de fuerza a partir de la  $\hat{X}_{20+}$  considerando el perfil de fuerza positivo aplicado por el sujeto de control 9.



**Figura 4.98.** Estimación del perfil de fuerza a partir de la  $\hat{X}_{20-}$  considerando el perfil de fuerza negativo aplicado por el sujeto de control 9.



**Figura 4.99.** Error RMS de la estimación de fuerza positivo y negativo.

En la Figura (4.99) se muestran los errores RMS de la estimación del perfil de fuerza positivo y negativo para los sujetos de control

### 4.3. Conclusiones del Capítulo 4

En este capítulo se presenta la validación experimental para los problemas planteados en los capítulos 2 y 3.

Como plataforma experimental se utiliza el controlador de impedancia programado en el robot FANUC, con la facilidad de poder cambiar el valor de los coeficientes del sistema de manera fácil. Por lo que se puede realizar la validación de los problemas planteados en la teoría de control óptimo.

Para la validación de la estimación de fuerza, se utiliza el brazalete Myo Control Armband. Al tener ocho sensores integrados es posible modificar la localización de los electrodos en el antebrazo de forma que se pueda realizar la estimación de la fuerza dependiendo de los músculos deseados a analizar.

Con base a los resultados obtenidos para la solución a los problemas de la teoría de control óptimo se puede concluir que es posible optimizar de menos uno de los criterios de la maniobra, para el caso de los dos problemas, esfuerzo y tiempo mínimo, es posible realizar un aprendizaje de la maniobra de forma que se pueda optimizar el tiempo.

---

Considerando los resultados encontrados para la estimación de fuerza, se puede observar que con el modelo lineal propuesto es posible realizar una estimación de los coeficientes de flexión y extensión, de forma que se pueda reproducir la fuerza aplicada por los sujetos a partir de las señales EMG.

---



---

## Conclusiones

---

En este trabajo de tesis se utilizan dos teorías, la teoría de control óptimo y la activación muscular. Para la teoría de control óptimo se busca solucionar dos problemas, esfuerzo y tiempo mínimo; y utilizando la activación muscular, realizar la estimación de la fuerza aplicada por los sujetos al realizar la maniobra.

Para la solución del problema de esfuerzo mínimo, se buscó establecer el perfil de fuerza que debe aplicar un sujeto para mover un sistema conformado por una masa a lo largo de una línea recta, como se pudo observar en la sección 4. Los porcentajes de error en la fuerza aplicada por los sujetos, respecto a la fuerza que predice el enfoque de control óptimo son bastante considerables, a pesar de tener una etapa de entrenamiento y las pruebas realizadas, no fue posible disminuir ese error. Esta diferencia puede explicarse por la incapacidad de una persona para ejercer fuerza de manera instantánea, como lo demanda la solución al problema de control óptimo.

Un aspecto importante a resaltar es el tiempo en el cual se hace el cambio en la dirección de la fuerza, donde el entrenamiento y la repetición de la maniobra ayudaba a las personas a mejorar ese tiempo. En el caso del sujeto 9, las primeras pruebas realizadas se tenían un error del casi 50 %, y una vez aprendida la maniobra, se pudo disminuir a casi el 20 %. Cabe resaltar que en ningún momento se le indica a la persona cuando realizar el cambio en la dirección de la fuerza o como aplicar la fuerza para realizar la maniobra.

Para la solución del problema de tiempo mínimo, la finalidad era mover un sistema conformado por masa, resorte y amortiguador en el menor tiempo posible a lo largo de una línea recta. En este caso el único aspecto a analizar fue el tiempo donde se hacía el cambio en la dirección de la fuerza, el cual se obtenía a partir de la fuerza máxima aplicada por la persona y la razón de amortiguamiento del sistema. Considerando las pruebas con los primeros parámetros del sistema, donde  $\xi = 0.53$ , se tiene que los errores encontrados fueron bastante pequeños, donde por ejemplo para el sujeto 6, quien presentó el error más grande, la primera prueba se presentó un error de casi el 20 % y se logró reducir a casi el 9 %, y en el caso del sujeto 10, quien presentó los errores más pequeños, en la primera prueba se encontró un error de casi el 1 % y se logró reducir a casi el 0.3 %. En el caso de las pruebas usando los segundos parámetros, con  $\xi = 0.375$ , se presentó que el sujeto 8 tuviera los errores más grandes, donde las primeras pruebas el error era de 21 % y después de la repetición de la maniobra se logró reducir a casi 14 %; en el caso del sujeto 6, fue quien presentó los errores más pequeños, donde el error inicial es de 6.3 % y se logró reducir a casi 0.23 %. Teniendo en cuenta los últimos parámetros, con  $\xi = 0.707$ , se encontraron errores bastante pequeños, en este caso se presentaron situaciones donde se llegaba a aumentar el error de las primeras pruebas a las últimas, por ejemplo el caso del sujeto 2, donde el error va de 16 % al 19 %, en este caso se puede decir que el error entre estos dos no es grande. Caso contrario el sujeto 10 donde el error disminuye entre las pruebas, el cual va de 18.4 % de inicio a reducirse a casi 1.5 %. Cabe resaltar que en esta maniobra no se le indicó a la persona cual era la solución que se esperaba ni en qué momento realizar el cambio en el sentido de la fuerza, la idea era ver como aprendían los sujetos a realizar la maniobra y su evolución en cada prueba realizada.

Para la solución de los problemas de esfuerzo y tiempo mínimo, el movimiento que se realiza es el de llevar la masa de una posición inicial a una posición final prescrita, por lo que considerando los niveles de construcción de movimiento se puede considerar que la acción realizada por los sujetos de control entra en el nivel de acciones D. Ya sé que se utilizan retroalimentaciones visuales, que indican el punto final, para el aprendizaje de la maniobra. De los resultados encontrados se puede decir que una persona es capaz de realizar una maniobra de manera óptima sin tener conocimiento de los resultados esperados a partir de la teoría de control óptimo. Por lo que a partir del entrenamiento adecuado se puede ver una mejora en los resultados, en este caso se veía que a pesar de que la fuerza no podía mejorarse y los errores eran bastante grandes, si se podía ver una mejora en el tiempo donde se hacía el cambio en la dirección de la fuerza.

---

Los resultados encontrados para la estimación de fuerza por medio de las señales electromiográficas mostraron errores bastante pequeños, donde el error más grande presentado fue de 5 N en la estimación de la fuerza negativa aplicada por el sujeto de control 5, por lo que la utilización del método de mínimos cuadrados permite encontrar coeficientes de flexión y extensión capaces de reproducir señales de fuerzas a partir de la activación articular de las personas. Como se pudo observar mientras más grande sea el orden del modelo la variación entre la fuerza estimada y la fuerza aplicada por la persona va reduciendo. Cabe resaltar que para realizar esta estimación es necesario que la fuerza utilizada para encontrar los coeficientes sea diferente de cero, esto en el caso de la fuerza positiva, y en el caso de la estimación de fuerza negativa, no tomar datos donde la fuerza aun es positiva. Esto ayuda que se tenga menor ruido en las señales EMG y la reproducción de la fuerza tenga menor error. Durante la realización de las pruebas se les daba a las personas tiempo para descansar entre las pruebas, esto ayuda a tener menor fatiga muscular, lo cual se puede ver reflejado en las señales EMG y ayuda a la estimación de las fuerzas.

Como trabajo derivado de este trabajo de tesis se publicó el artículo “Validación del comportamiento del sistema neuromotor bajo el enfoque de control óptimo” en el Congreso Nacional de Ingeniería Biomédica (CNIB) con sede en León, Guanajuato del 18 al 20 de Octubre de 2018.

## Trabajo a futuro

Los siguientes aspectos pueden ser desarrollados como trabajo futuro relacionado a este tema:

- Determinar el perfil de fuerza, utilizando la teoría de control óptimo, para la solución del problema de esfuerzo mínimo considerando diferentes condiciones de frontera y realizar pruebas experimentales con sujetos de control para verificar el comportamiento de los resultados obtenidos contra el resultado de fuerza calculado.
  - Realizar pruebas experimentales con sujetos de control que tengan algún problema en el sistema neuromotor, para analizar el perfil de fuerza aplicado contra el resultado
-

obtenido a partir de la solución de los problemas de esfuerzo y tiempo mínimo.

- Estudiar otros métodos para la estimación de fuerzas a partir de las señales electromiográficas y el perfil de fuerza aplicado por el sujeto, de forma que se pueda considerar todo el perfil, incluso si se tiene un cambio en el sentido de la fuerza.
-

---

## Referencias

---

- [1] D. Kulić, G. Venture, K. Yamane, E. Demircan, I. Mizuuchi, y K. Mombaur, “Anthropomorphic movement analysis and synthesis: a survey of methods and applications,” *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 32, no. 4, pp. 776–795, 2016.
- [2] *Dr. Emilio J. González Galván asistente a la conferencia inaugural del ICRA del Dr Oussama Khatib*, 2005. Comunicación personal.
- [3] S. Safavynia, G. Torres-Oviedo, y L. Ting, “Muscle synergies: implications for clinical evaluation and rehabilitation of movement,” *Topics in spinal cord injury rehabilitation*, vol. 17, no. 1, pp. 16–24, 2011.
- [4] C. Alessandro, I. Delis, F. Nori, S. Panzeri, y B. Berret, “Muscle synergies in neuroscience and robotics: from input-space to task-space perspectives,” *Frontiers in computational neuroscience*, vol. 7, p. 43, 2013.
- [5] A. Shumway-Cook y M. H. Woollacott, *Motor control: translating research into clinical practice*. Lippincott Williams & Wilkins, 2007.
- [6] F. Moreno, V. Luis, R. Menayo, y J. Fuentes, “Bases del control motor y del aprendizaje aplicadas al tenis,” *Ed Wanceulen*, 2009.
- [7] L. Nashner, “Adapting reflexes controlling the human posture,” *Experimental brain research*, vol. 26, no. 1, pp. 59–72, 1976.

- [8] C. Runge, C. Shupert, F. Horak, y F. Zajac, “Ankle and hip postural strategies defined by joint torques,” *Gait & posture*, vol. 10, no. 2, pp. 161–170, 1999.
- [9] N. Bernstein, “The co-ordination and regulation of movements,” *The co-ordination and regulation of movements*, 1966.
- [10] M. L. Latash, *Progress in Motor Control: Bernstein’s traditions in movement studies*. Human Kinetics, 1998.
- [11] A. G. Feldman y M. F. Levin, “The origin and use of positional frames of reference in motor control,” *Behavioral and brain sciences*, vol. 18, no. 4, pp. 723–744, 1995.
- [12] M. L. Latash y F. Lestienne, *Motor control and learning*, vol. 78. Springer, 2006.
- [13] A. G. Feldman *et al.*, “Referent control of action and perception,” *Challenging Conventional Theories in Behavioral Neuroscience*, 2015.
- [14] B. Abernethy, V. Kippers, R. Mackinnon, R. J. Neal, S. Hanrahan, y G. Walsh, “The biophysical foundations of human movement,” *Developmental Medicine and Child Neurology*, vol. 38, no. 10, p. 964, 1996.
- [15] R. Cano-de-la Cuerda, A. Molero-Sánchez, M. Carratalá-Tejada, I. Alguacil-Diego, F. Molina-Rueda, J. Miangolarra-Page, y D. Torricelli, “Teorías y modelos de control y aprendizaje motor. aplicaciones clínicas en neurorrehabilitación,” *Neurología*, vol. 30, no. 1, pp. 32–41, 2015.
- [16] R. A. Schmidt y T. D. Lee, *Motor control and learning: A behavioral emphasis*. Human Kinetics, 1999.
- [17] A. Shumway-Cook y M. H. Woollacott, “Theory and practical applications,” 2001.
- [18] O. Sporns y G. M. Edelman, “Solving bernstein’s problem: A proposal for the development of coordinated movement by selection,” *Child development*, vol. 64, no. 4, pp. 960–981, 1993.
- [19] K. Kamm, E. Thelen, y J. L. Jensen, “A dynamical systems approach to motor development,” *Physical therapy*, vol. 70, no. 12, pp. 763–775, 1990.
- [20] S. B. Perry, “Clinical implications of a dynamic systems theory,” *Journal of Neurologic Physical Therapy*, vol. 22, no. 1, pp. 4–10, 1998.

- [21] M. Latash, “Evolution of motor control: from reflexes and motor programs to the equilibrium-point hypothesis,” *Journal of human kinetics*, vol. 19, pp. 3–24, 2008.
- [22] M. L. Latash, *Fundamentals of motor control*. Academic Press, 2012.
- [23] A. Spiers, G. Herrmann, y C. Melhuish, “An optimal sliding mode controller applied to human motion synthesis with robotic implementation,” in *American Control Conference (ACC), 2010*, pp. 991–996, IEEE, 2010.
- [24] F. Lacquaniti y J. F. Soechting, “Coordination of arm and wrist motion during a reaching task,” *Journal of Neuroscience*, vol. 2, no. 4, pp. 399–408, 1982.
- [25] A. d’Avella y F. Lacquaniti, “Control of reaching movements by muscle synergy combinations,” *Frontiers in computational neuroscience*, vol. 7, p. 42, 2013.
- [26] S. Safavynia, G. Torres-Oviedo, y L. Ting, “Muscle synergies: implications for clinical evaluation and rehabilitation of movement,” *Topics in spinal cord injury rehabilitation*, vol. 17, no. 1, pp. 16–24, 2011.
- [27] M. C. Tresch, P. Saltiel, A. d’Avella, y E. Bizzi, “Coordination and localization in spinal motor systems,” *Brain Research Reviews*, vol. 40, no. 1-3, pp. 66–79, 2002.
- [28] E. Bizzi, V. Cheung, A. d’Avella, P. Saltiel, y M. Tresch, “Combining modules for movement,” *Brain research reviews*, vol. 57, no. 1, pp. 125–133, 2008.
- [29] F. A. Mussa-Ivaldi y E. Bizzi, “Motor learning through the combination of primitives,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B: Biological Sciences*, vol. 355, no. 1404, pp. 1755–1769, 2000.
- [30] A. d’Avella, M. Giese, Y. P. Ivanenko, T. Schack, y T. Flash, *Modularity in motor control: from muscle synergies to cognitive action representation*. Frontiers Media SA, 2016.
- [31] T. Wojtara, F. Alnajjar, S. Shimoda, y H. Kimura, “Muscle synergy stability and human balance maintenance,” *Journal of neuroengineering and rehabilitation*, vol. 11, no. 1, p. 129, 2014.
- [32] Q. An, Y. Ishikawa, T. Funato, S. Aoi, H. Oka, H. Yamakawa, A. Yamashita, y H. Asama, “Muscle synergy analysis of human standing-up motion using forward dynamic simulation with four body segment model,” in *Distributed Autonomous Robotic Systems*, pp. 459–471, Springer, 2016.

- [33] V. H. Heyward, *Evaluación de la aptitud física y prescripción del ejercicio*. Ed. Médica Panamericana, 2008.
- [34] X. A. Jódar, I. G. Rodríguez, y J. L. L. Elvira, “Consideraciones sobre conceptos y clasificaciones de la fuerza muscular desde el punto de vista mecánico,” *COLECCIÓN ICD: INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS DEL DEPORTE*, no. 21, 2011.
- [35] J. Bautista, *Principios y metodos para el entrenamiento de la fuerza muscular*. Colección Textos de rehabilitación y desarrollo humano, Universidad del Rosario, 2009.
- [36] J. Haro y M. J. Pérez, “El problema de la braquistócrona y otros problemas de la física como introducción al cálculo de variaciones,” *SUMA*, vol. 70, pp. 43–63, 2012.
- [37] E. Umez-Eronini, E. Palos, *et al.*, *Dinámica de sistemas y control*. No. 620.72 U4, 2001.
- [38] D. E. Kirk, *Optimal control theory: an introduction*. Courier Corporation, 2012.
- [39] E. Todorov, “Optimality principles in sensorimotor control,” *Nature neuroscience*, vol. 7, no. 9, p. 907, 2004.
- [40] G. Schultz y K. Mombaur, “Modeling and optimal control of human-like running,” *IEEE/ASME Transactions on mechatronics*, vol. 15, no. 5, pp. 783–792, 2010.
- [41] A. Antoniou y W.-S. Lu, *The Optimization Problem*. Springer, 2007.
- [42] A. Karniel y G. F. Inbar, “A model for learning human reaching movements,” *Biological cybernetics*, vol. 77, no. 3, pp. 173–183, 1997.
- [43] M. B. Shapiro y R. V. Kenyon, “Time-optimal control of fast point-to-point movement,”
- [44] L. S. Pontryagin, *Mathematical theory of optimal processes*. Routledge, 2018.
- [45] S. Barnett, “Introduction to mathematical control theory,” 1975.
- [46] K. Ogata y Y. Yang, *Modern control engineering*, vol. 4. Prentice hall India, 2002.
- [47] Q. Zhang, M. Hayashibe, P. Fraisse, y D. Guiraud, “Fes-induced torque prediction with evoked emg sensing for muscle fatigue tracking,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 16, no. 5, pp. 816–826, 2011.
- [48] L. Kent, S. Siegler, A. Guez, y W. Freedman, “Modelling of muscle emg to torque by the neural network model of backpropagation,” in *Engineering in Medicine and Biology Society, 1990., Proceedings of the Twelfth Annual International Conference of the IEEE*, pp. 1477–1478, IEEE, 1990.

- [49] W. Genadry, R. Kearney, y I. Hunter, “Dynamic relationship between emg and torque at the human ankle: variation with contraction level and modulation,” *Medical and Biological Engineering and Computing*, vol. 26, no. 5, pp. 489–496, 1988.
- [50] E. A. Clancy, L. Liu, P. Liu, y D. V. Z. Moyer, “Identification of constant-posture emg–torque relationship about the elbow using nonlinear dynamic models,” *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 59, no. 1, pp. 205–212, 2012.
- [51] P. K. Artemiadis y K. J. Kyriakopoulos, “Emg-based control of a robot arm using low-dimensional embeddings,” *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 26, no. 2, pp. 393–398, 2010.
- [52] S. A. Dalley, H. A. Varol, y M. Goldfarb, “A method for the control of multigrasp myoelectric prosthetic hands,” *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, vol. 20, no. 1, pp. 58–67, 2012.
- [53] T. Lenzi, S. M. M. De Rossi, N. Vitiello, y M. C. Carrozza, “Intention-based emg control for powered exoskeletons,” *IEEE transactions on biomedical engineering*, vol. 59, no. 8, pp. 2180–2190, 2012.
- [54] L. Kent, “A neurogenetic model of muscle emg to torque,” in *Neural Networks, 1999. IJCNN’99. International Joint Conference on*, vol. 5, pp. 3597–3600, IEEE, 1999.
- [55] P. Liu, F. Martel, D. Rancourt, E. A. Clancy, y D. R. Brown, “Fingertip force estimation from forearm muscle electrical activity,” in *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2014 IEEE International Conference on*, pp. 2069–2073, IEEE, 2014.
- [56] T. Everett y C. Kell, *Human movement: an introductory text*. Elsevier health sciences, 2010.
- [57] J. M. Rothstein, S. H. Roy, y S. L. Wolf, *Manual del Especialista en Rehabilitacion (Cartoné y bicolor)*, vol. 88. Editorial Paidotribo, 2005.
- [58] B. A. Gowitzke y M. Milner, *El cuerpo y sus movimientos. Bases Científicas*, vol. 44. Editorial Paidotribo, 1999.
- [59] R. Eston y T. Reilly, *Kinanthropometry and exercise physiology laboratory manual: tests, procedures and data: volume two: physiology*. Routledge, 2013.
- [60] T. Togawa, T. Tamura, y P. A. Oberg, *Biomedical transducers and instruments*. CRC press, 1997.

- [61] D. I. Ruben, *Clinical Electromyography, An Issue of Neurologic Clinics-E-Book*, vol. 30. Elsevier Health Sciences, 2012.
- [62] J. Brazeiro, S. Petraccia, y M. Valdés, “Mano controlada por señales musculares,” *Universidad de la República*, 2015.
- [63] I. Cifuentes, “Diseño y construcción de un sistema para la detección de señales electromiográficas,” *UADY*, vol. 1, pp. 1–110, 2010.
- [64] G. R. Naik, *Applications, Challenges, and Advancements in Electromyography Signal Processing*. IGI Global, 2014.
- [65] E. A. Clancy y N. Hogan, “Relating agonist-antagonist electromyograms to joint torque during isometric, quasi-isotonic, nonfatiguing contractions,” *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 44, no. 10, pp. 1024–1028, 1997.
- [66] L. Ljung, *System identification: theory for the user*. Prentice-hall, 1987.