



Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Facultad de Ingeniería
Centro de Investigación y Estudios de Posgrado

Análisis Modal de Resonancia Armónica

T E S I S

Que para obtener el grado de:

Maestro en Sistemas Eléctricos de Potencia

Presenta:

José Ramón Lemus Rosas

Asesores:

Dr. Ciro Alberto Núñez Gutiérrez
Dra. Nancy Visairo Cruz

San Luis Potosí, S. L.P.

Noviembre de 2018



Resumen

La resonancia armónica a menudo se manifiesta como sobretensiones en un sistema de potencia. Hasta hace algunos años el barrido de frecuencia era la principal herramienta para analizar este fenómeno, sin embargo, fuera de las frecuencias a las que resuena un sistema, no proporciona información adicional que permita caracterizar el problema. En el 2005, el doctor Wilsun Xu presentó una técnica denominada Análisis Modal de Resonancia basada en el estudio de la singularidad del sistema. Esta técnica, además de proporcionar las frecuencias de resonancia, revela los nodos en los que tiene mayor efecto y los nodos desde donde se puede controlar. En el presente trabajo se desarrolla un algoritmo en lenguaje de cálculo que ejecuta la técnica de Análisis Modal de Resonancia sobre un sistema eléctrico. El código tiene como datos de entrada la matriz de admitancias de la red y como salida los resultados del análisis modal y el barrido de frecuencia. Los resultados del barrido que genera el programa son contrastados con los que produce el software Power Factory.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres Ma. de los Ángeles Rosas y Ramón Lemus el haberme mostrado siempre un ejemplo de disciplina y respeto.

Agradezco a mis hermanos Cristian y Diego el motivarme día tras día.

Agradezco a mis asesores, los doctores Nancy Visairo y Ciro Alberto Núñez el brindarme las herramientas para desarrollar este trabajo, su incondicional apoyo y su infinita paciencia.

Agradezco al doctor Juan Segundo el dar directriz al proyecto.

Agradezco a SEL la confianza y el apoyo económico.

Finalmente agradezco el consejo de mis amigos Jorge Soto y Emanuel Rosas.

Índice

Índice de figuras.....	1
Introducción	1
Planteamiento del problema.....	1
Objetivos	2
Objetivo general.....	2
Objetivos específicos	2
Alcance	2
Capítulo 1. Marco teórico del análisis modal	3
1.1 Resonancia armónica.....	3
1.1.1 Fuentes de armónicas.....	4
1.1.2 Efecto de las armónicas en transformadores.....	5
1.1.3 Efecto en las barras de neutros.....	6
1.1.4 Efecto en los motores de inducción	7
1.2 Técnicas de análisis de resonancia armónica	10
1.2.1 Barrido de frecuencia.....	10
1.2.2 Análisis modal de resonancia armónica.....	12
Capítulo 2. Desarrollo del algoritmo de análisis modal de resonancia.....	17
2.1 Captura de datos	17
2.2 Ejecución del análisis	20
2.3 Presentación de resultados	21
2.4 Código del análisis modal de resonancia armónica.	23
Capítulo 3. Evaluación del algoritmo de análisis modal de resonancia.....	27
3.1 Circuito ejemplo 1	27
3.2 Circuito ejemplo 2.....	30
Conclusiones.....	33
Bibliografía	35

Índice de figuras

Figura 1. Resonancia serie	3
Figura 2. Resonancia paralelo	3
Figura 3. Imagen térmica de un transformador	5
Figura 4. Armónicas de tercer orden en un sistema balanceado	7
Figura 5. Imagen térmica de un motor de inducción	8
Figura 6. Captura de parámetros de simulación	18
Figura 7. Circuito ejemplo de 3 nodos	18
Figura 8. Diagrama de flujo del programa en la etapa de ejecución	20
Figura 9. Presentación de resultados del barrido de frecuencia	22
Figura 10. Presentación de resultados del análisis modal	22
Figura 11. Circuito de 3 nodos	27
Figura 12. Barrido de frecuencia sobre circuito de 3 nodos en programa	28
Figura 13. Barrido de frecuencia sobre circuito de 3 nodos en PowerFactory	28
Figura 14. Análisis modal sobre circuito de 3 nodos	29
Figura 15. Circuito de 8 nodos	30
Figura 16. Análisis modal sobre circuito de 8 nodos	31

Introducción

Planteamiento del problema

Los capacitores en paralelo han jugado un papel muy importante en la operación económica de los sistemas de potencia por cerca de un siglo [1]. Éstos pueden reducir el flujo de corriente reactiva a través del sistema incrementando su capacidad y reduciendo sus pérdidas [2]. Con el paso del tiempo, dispositivos más sofisticados como los STATCOM (por sus siglas en inglés Static Synchronous Compensator) o los SVC (Static VAR Compensator) han sido desarrollados tomando como base bancos de capacitores de potencia. Los capacitores tienen gran impacto en el mercado debido a su bajo costo y alta confiabilidad. De cualquier modo, una de las principales desventajas de estos bancos es que pueden interactuar con la impedancia de la red en presencia de armónicos que son comúnmente producto de tensiones y corrientes generadas por cargas no lineales dando lugar a resonancia armónica y problemas de calidad de energía [3].

Con el creciente aumento en el uso de cargas no lineales, se han empezado a tener algunos problemas en las instalaciones eléctricas debido a los efectos de las componentes armónicas de corrientes y tensiones en el sistema eléctrico, que no se contemplaban anteriormente. Entre estos están el sobrecalentamiento de cables, transformadores y motores, corrientes excesivas en el neutro, fenómenos de resonancia entre los elementos del circuito (si se cuentan con bancos de capacitores para corrección del factor de potencia) y en general la calidad en el suministro de energía eléctrica se ha ido deteriorando por la distorsión presente en las tensiones y corrientes [4].

Hasta hace algunos años el barrido de frecuencia era la principal herramienta para analizar la resonancia en circuitos eléctricos. Esta técnica consiste en analizar el comportamiento de la impedancia de Thevenin en cada nodo del sistema en función de la frecuencia de la fuente de alimentación. Al utilizarla es posible determinar las frecuencias en las que la red presenta resonancia, sin embargo, al estar basada en el circuito equivalente de Thevenin, no es posible

visualizar directamente qué nodos están dando origen al fenómeno. En el 2005, el doctor Wilsun Xu presentó una técnica denominada Análisis Modal de Resonancia (AMR). Dicha técnica está basada en el estudio de la singularidad de la matriz de admitancias que define el sistema a partir del análisis de los eigenvalores y eigenvectores de la misma. La técnica AMR, además de proporcionar las frecuencias de resonancia, revela los nodos en los que la resonancia produce las mayores sobretensiones y los nodos desde donde se puede controlar. Esta información ayuda en gran medida al usuario a establecer soluciones al problema de resonancia.

Objetivos

Objetivo general

Generar un código en lenguaje de cálculo estructurado que permita ejecutar el barrido de frecuencia y el análisis modal de resonancia de un sistema eléctrico de potencia.

Objetivos específicos

1. El programa deberá tomar como datos de entrada la matriz de admitancias del sistema y los parámetros de la simulación.
2. El programa deberá entregar los factores de participación asociados a cada uno de los buses del sistema y a cada modo de resonancia.
3. Validar que los resultados del barrido de frecuencia que genera el programa coinciden con los proporcionados por un software especializado como lo es Power Factory.

Alcance

El alcance del proyecto contempla la programación de un algoritmo capaz de ejecutar las técnicas de barrido de frecuencia y de análisis modal considerando una matriz de admitancias introducida por el usuario con la finalidad de analizar la resonancia en un sistema eléctrico de potencia.

Capítulo 1. Marco teórico del análisis modal

1.1 Resonancia armónica

La resonancia eléctrica es un fenómeno que se produce en un circuito en el que existen elementos reactivos (bobinas y capacitores) cuando es recorrido por una corriente alterna de una frecuencia tal que hace que la reactancia se anule, en caso de estar ambos en serie (Figura 1), o se haga infinita si están en paralelo (Figura 2). Para que exista resonancia eléctrica la reactancia capacitiva X_C e inductiva X_L deben tener la misma magnitud. Entonces, la impedancia Z del circuito se reduce a una resistencia pura.

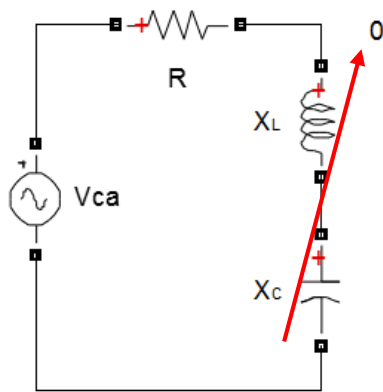


Figura 1. Resonancia serie.

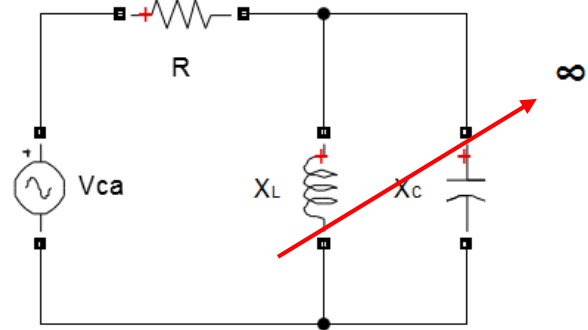


Figura 2. Resonancia paralelo.

En otras palabras, la resonancia eléctrica se da cuando la Reactancia Inductiva neta cancela la Reactancia Capacitiva neta [5].

Así en un circuito serie, compuesto únicamente por bobinas y capacitores su impedancia será:

$$Z = jL\omega - j\frac{1}{\omega C} = j\left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right) = jX_s \quad (1)$$

donde,

L es la inductancia en H

C es la capacitancia en F

ω es la frecuencia angular en r/s

X_s es reactancia del sistema en Ω

Debe existir un valor ω tal que haga nulo el valor de X_s , este valor será la pulsación de resonancia del circuito a la que se denominará ω_0 . Si X_s es nula, entonces la frecuencia de resonancia será:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ (Hz)} \quad (2)$$

1.1.1 Fuentes de armónicas

En general, la distorsión armónica se genera por la conexión de dispositivos electrónicos al sistema de potencia, cuya característica V/I es no lineal. Existe una gran variedad de dispositivos electrónicos que pueden generar distorsión en la red; de hecho, es posible demostrar que la gran mayoría de cargas tiene cierto grado de no linealidad, aunque en muchos de los casos su efecto puede ser despreciado. A continuación, se muestra una lista con ejemplos de elementos no lineales [6]:

1. Saturación de transformadores
2. Corrientes de energización de transformadores
3. Fuerzas magnetomotrices en máquinas rotatorias de corriente alterna
4. Hornos de arco eléctrico
5. Lámparas fluorescentes
6. Fuentes reguladas por conmutación
7. Cargadores de baterías
8. Compensadores estáticos de VAR
9. Variadores de frecuencia para motores
10. Inversores
11. Convertidores de estado sólido

El incremento en el uso de equipos electrónicos como celulares y computadoras representa un incremento de carga no lineal y por ende distorsión en la red.

1.1.2 Efecto de las armónicas en transformadores

La mayoría de los transformadores están diseñados para operar con corriente alterna a una frecuencia fundamental (50 ó 60 Hz), lo que implica que operando en condiciones de carga nominal y con una temperatura no mayor a la temperatura ambiente especificada, el transformador debe ser capaz de disipar el calor producido por sus pérdidas sin sobrecalentarse ni deteriorar su vida útil. La Figura 3 muestra la captura de una cámara térmica sobre un transformador en funcionamiento. Se puede ver que el deterioro en el aislamiento de una de sus boquillas comienza a generar un punto de calor. Las pérdidas en los transformadores consisten en pérdidas sin carga o de núcleo y pérdidas con carga, que incluyen las pérdidas I^2R , pérdidas por corrientes de Eddy y pérdidas adicionales en el tanque, sujetadores, u otras partes de hierro.



Figura 3. Imagen térmica de un transformador [20].

De manera individual, el efecto de las armónicas en estas pérdidas se explica a continuación [7]:

- **Pérdidas sin carga o de núcleo [8]:** producidas por la tensión de excitación en el núcleo. Aunque la corriente de magnetización consiste de armónicas, estas pérdidas son muy pequeñas comparadas con las de la corriente de carga, por lo que sus efectos en las pérdidas totales son mínimos.
- **Pérdidas I^2R :** si la corriente de carga contiene componentes armónicas, el valor eficaz de la corriente se incrementará y en consecuencia estas pérdidas también aumentarán.
- **Pérdidas por corrientes de Eddy [8]:** estas pérdidas a frecuencia fundamental son proporcionales al cuadrado de la corriente de carga y al cuadrado de la frecuencia, razón por la cual se puede tener un aumento excesivo de éstas en los devanados que conducen corrientes de carga no senoidal (y por lo tanto también en su temperatura).

1.1.3 Efecto en las barras de neutros

Dado que éste es el primer punto de unión de los neutros de las cargas monofásicas, en el caso balanceado, las corrientes (fundamental y armónicas de orden par) de secuencia positiva y negativa se cancelan aquí. Estas barras pueden llegar a sobrecargarse por el efecto de cancelación de las componentes armónicas de secuencia positiva y negativa entre los conductores neutros que alimentan diferentes cargas [9]. En el caso de corrientes armónicas de secuencia cero (armónicas “triples”), éstas no se cancelarán en el neutro aun en condiciones balanceadas, por lo que estas barras se pueden sobrecargar por el flujo de estas corrientes.

En la realidad, las barras de neutros transportan corrientes producidas por el desbalance de cargas más las armónicas de tercer orden generadas por éstas. Por esta razón las barras que están dimensionadas para soportar la misma corriente de fase pueden sobrecargarse fácilmente en presencia de cargas no lineales [9].

Actualmente, muchos fabricantes de equipo eléctrico ofrecen transformadores de potencia construidos con múltiples devanados secundarios conectados individualmente en estrella.

Éstos devanados utilizan el mismo neutro, pero tienen la particular de estar desfasados entre sí lo que permite que las corrientes de secuencia cero de cada secundario no lleguen con la misma fase al neutro y sean canceladas entre sí. Al mitigar el flujo de estas corrientes a través del neutro se reducen las pérdidas de estos transformadores y se mejora la calidad del suministro de energía [10].

En la Figura 4 se puede ver como las armónicas de tercer orden se encuentran en fase en un sistema trifásico balanceado.

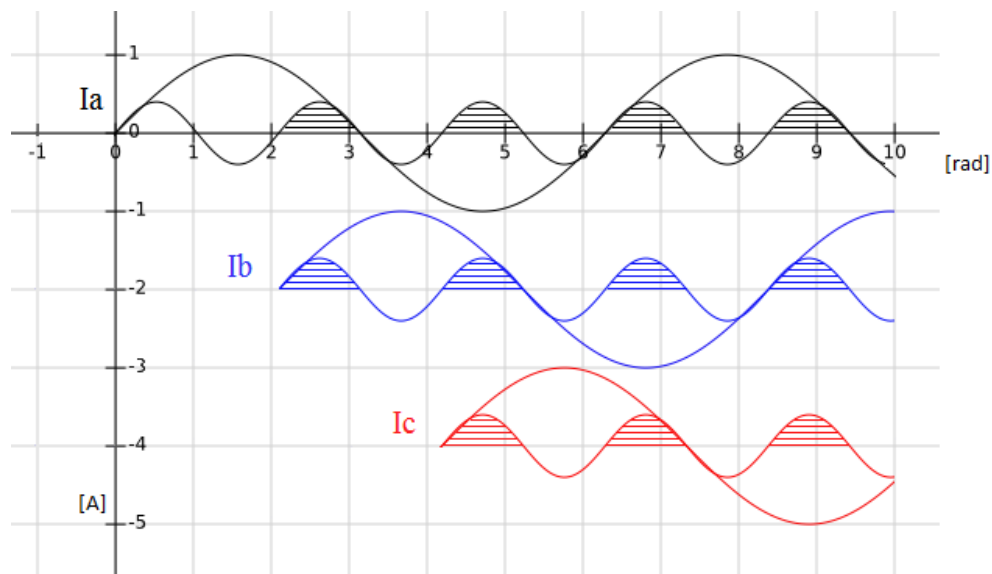


Figura 4. Armónicas de tercer orden en un sistema balanceado.

En el caso de que se estén alimentando cargas no lineales, es recomendable que las barras de neutros tengan una capacidad de corriente igual al doble de la de las fases.

1.1.4 Efecto en los motores de inducción

Fundamentalmente, las armónicas producen los siguientes efectos en las máquinas de corriente alterna: un aumento en sus pérdidas y la disminución en el torque generado. Éste ha sido el tema de análisis de muchos artículos por su importancia en la industria y a continuación se mostrará un estudio simplificado de estos efectos con base en las referencias citadas [4], [11], [12], [13], [14].

Pérdidas en los motores de inducción: si la tensión que se alimenta a un motor de inducción contiene componentes armónicas, entonces se incrementarán sus pérdidas I^2R en el rotor y estator, pérdidas de núcleo (Eddy e histéresis) y pérdidas adicionales. Se describen a continuación las más relevantes:

- **Pérdidas I^2R en el estator:** según la IEEE (por sus siglas en inglés Institute of Electrical and Electronics Engineers), las pérdidas en el estator son determinadas utilizando la resistencia a corriente directa de la máquina, corregida a la temperatura especificada. Al operar la máquina de inducción con tensiones con contenido armónico no sólo aumentan estas pérdidas por el efecto piel que incrementa el valor de la resistencia efectiva, sino que también aumenta el valor de la corriente de magnetización, incrementándose aún más las pérdidas I^2R . La Figura 5 muestra la captura de una cámara térmica sobre un motor de inducción en funcionamiento.

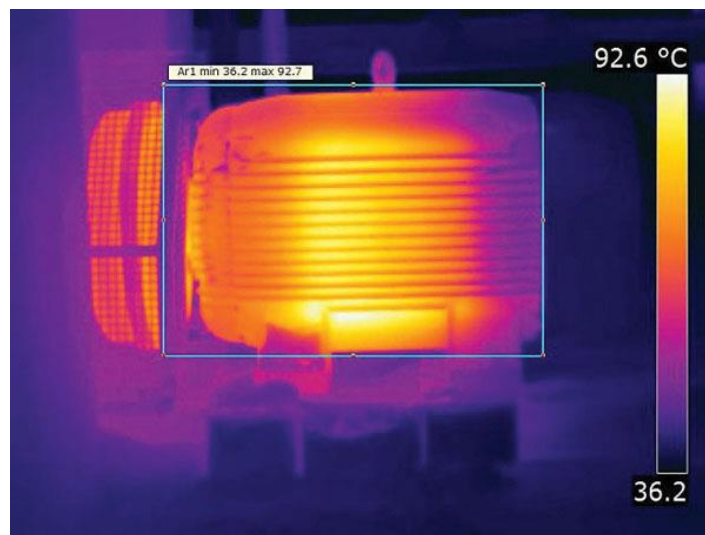


Figura 5. Imagen térmica de un motor de inducción [20].

- **Pérdidas I^2R en el rotor:** éstas aumentan de manera más significativa que las anteriores, por el diseño de la jaula en los motores de inducción que se basa en el

aprovechamiento del efecto piel para el arranque. Esta resistencia aumenta en forma proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia y por ende las pérdidas.

- **Pérdidas en el núcleo:** estas pérdidas son función de la densidad de flujo en la máquina. Éstas aumentan con excitación de tensión no senoidal puesto que se tienen densidades de flujo pico más elevadas, sin embargo, su aumento es aún menor que el de las pérdidas mencionadas anteriormente e incluso son más difíciles de cuantificar.
- **Pérdidas adicionales:** son muy difíciles de cuantificar aún bajo condiciones de tensión senoidal. Al aplicar tensión no senoidal, éstas aumentan en forma particular para cada máquina.
- **Torque en el motor de inducción:** las armónicas de secuencia positiva producen en el motor de inducción un torque en el mismo sentido de la dirección de rotación, en tanto que las de secuencia negativa tienen el efecto opuesto. En caso de que se tenga conectado el neutro, el par producido por las armónicas “triples” es igual a cero. Dependiendo del contenido armónico de la tensión aplicada, el par promedio de operación puede verse disminuido considerablemente, sin embargo, en la mayoría de los casos el efecto producido por las armónicas de secuencia negativa se cancela con el efecto de las de secuencia positiva, por lo que su efecto neto en el par promedio puede despreciarse [11].

La interacción de las corrientes armónicas del rotor con el flujo en el entrehierro de otra armónica resulta en torques pulsantes en los motores, los que pueden afectar la calidad del producto donde las cargas son sensibles a estas variaciones. Estos torques pulsantes también pueden excitar una frecuencia de resonancia mecánica lo que resultaría en oscilaciones que pueden causar fatiga de la flecha y otras partes mecánicas conectadas. Por lo general la magnitud de estos torques es generalmente pequeña y su valor promedio es cero.

1.2 Técnicas de análisis de resonancia armónica

Una vez definido el contexto del impacto que tienen las armónicas en los elementos que conforman un sistema eléctrico de potencia es posible justificar la necesidad de profundizar en el estudio de técnicas que permitan analizar la resonancia armónica.

En términos del tema de tesis a desarrollar se presentarán dos técnicas:

1. Barrido en frecuencia.
2. Análisis Modal

1.2.1 Barrido de frecuencia

El barrido de frecuencia es la técnica más sencilla y comúnmente empleada para el análisis de armónicos y presenta los mínimos requerimientos de datos. En esencia, el barrido de frecuencia determina la respuesta de frecuencia de una red vista desde un nodo particular de la misma [15].

El método se desarrolla como sigue, se inyecta una corriente de 1 pu de amplitud a una frecuencia múltiplo de la frecuencia fundamental en el nodo de interés y se calcula la tensión que aparece en dicho nodo. Este cálculo se repite para el rango de frecuencias que se estudia utilizando un incremento determinado para los pasos de frecuencia empleados y para cada nodo del circuito bajo estudio.

El proceso se basa en resolver la expresión matricial:

$$U(f) = Z(f) * I(f) \quad (3)$$

donde $U(f)$, $Z(f)$ e $I(f)$ son el vector de tensión, la matriz de impedancia y el vector de las inyecciones de corriente para cada frecuencia f , respectivamente. En un estudio típico, solo el k -ésimo elemento del vector $I(f)$ tiene valor unitario, mientras el resto es cero. De forma que

el vector $U(f)$ resultante se correspondería con la k -ésima columna de la matriz de impedancia para dicha frecuencia.

El elemento $U_k(f)$ es la tensión de frecuencia f que se produce en el k -ésimo nodo cuando se inyecta una corriente unitaria de dicha frecuencia en dicho nodo. En otras palabras, se corresponde con la impedancia equivalente de Thevenin del k -ésimo nodo, $Z_{kk}(f)$. Cada elemento $U_m(f)$ con $m \neq k$, representa la tensión de frecuencia f que aparece en el nodo m por una inyección en el nodo k . Es decir, se corresponde con la impedancia de transferencia $Z_{mk}(f)$.

Concluido el procedimiento se obtienen los valores de impedancia equivalente contra frecuencia en cada uno de los nodos de la red. Este tipo de estudio es la herramienta más efectiva para detectar resonancias en el sistema y ha sido ampliamente utilizada para el diseño de filtros.

La matriz de impedancia de la red para cada frecuencia se determina como la inversa de la matriz de admitancia $Y(f)$ que se construye a partir de los modelos establecidos para los diferentes elementos del sistema eléctrico [15].

Utilizando el modelo del sistema para secuencia positiva, negativa o cero, pueden obtenerse las características de impedancia contra frecuencia para inyecciones de las distintas secuencias, lo que permite ampliar las posibilidades del estudio y su aplicación a sistemas desbalanceados.

Existen diversos programas comerciales capaces de ejecutar el barrido de frecuencia a partir de la matriz de impedancias tales como:

1. EMTF Electromagnetic Transienst Program
2. Power Factory DigSilent
3. Power World
4. PSCAD Power Systems CAD

1.2.2 Análisis modal de resonancia armónica

La resonancia armónica a menudo se manifiesta como sobretensiones armónicas en un sistema de potencia. Se observó que tal fenómeno está asociado con la singularidad de la matriz de admitancias de la red [16]. Analizando las características de los eigenvalores del sistema bajo estudio se puede obtener información útil acerca de la naturaleza y magnitud de la resonancia.

A pesar de que la causa de esta resonancia es bien conocida, las herramientas para su análisis son limitadas. El análisis por barrido de frecuencia es el método más común para identificar la existencia de resonancia y determinar la frecuencia resonante. Desafortunadamente esta herramienta no ofrece la información adicional que se requiere para resolver el problema ya que no revela directamente la fuente que da origen al fenómeno.

La resonancia armónica se genera por el intercambio de energía entre los elementos capacitivos e inductivos del circuito. Por lo tanto, resulta útil contar con una herramienta que permita revelar las complejas interacciones de energía que se tienen en el sistema y muestre la causa de un problema de resonancia en particular.

Las respuestas a las siguientes preguntas dan origen a metodologías orientadas a mitigar los efectos de la resonancia:

1. ¿Qué bus excita una resonancia en particular con mayor facilidad?
2. ¿En qué nodo se puede observar más fácilmente la resonancia?
3. ¿Qué elementos de la red están involucrados en el fenómeno?
4. ¿Qué tan lejos puede propagarse la resonancia en el sistema?
5. ¿Se ha observado resonancia en distintos buses originados por una misma causa?

Durante años se ha observado que la resonancia en paralelo está relacionada con la presencia de elementos de gran magnitud en la inversa de la matriz de admitancias de los sistemas.

Suponga un sistema que experimenta una resonancia en paralelo a una frecuencia f de acuerdo al análisis de barrido de frecuencia. Esto significa que algunos elementos del vector de tensión calculado a partir de la siguiente ecuación tienen grandes valores en f .

$$[V_f] = [Y_f]^{-1}[I_f] \quad (4)$$

donde Y_f es la matriz de admitancias del sistema a la frecuencia f . El vector de corrientes inyectadas I_f únicamente tiene una entrada con valor 1.0 pu.

Una resonancia se puede manifestar como sobretensiones y/o sobrecorrientes y ocurrirá cuando la matriz de admitancias se acerque a la singularidad. De esta forma, es posible analizar la singularidad de esta matriz a través de sus eigenvalores. La teoría establecida para el análisis de eigenvalores puede ser utilizada para este propósito como sigue.

Por simplificación, el subíndice f ya no será utilizado en las siguientes ecuaciones. De acuerdo a la teoría, la matriz Y se puede expresar de la siguiente forma:

$$[Y] = [L][\Lambda][T] \quad (5)$$

donde Λ es la matriz diagonal de eigenvalores mientras que L y T son las matrices de eigenvectores izquierdo y derecho, respectivamente.

$$[Y]^{-1} = [L][\Lambda]^{-1}[T] \quad (6)$$

Sustituyendo esta última ecuación en la de tensiones nodales se tiene:

$$[V] = [L][\Lambda]^{-1}[T][I] \quad (7)$$

$$[L]^{-1}[V] = [\Lambda]^{-1}[T][I] \quad (8)$$

Dado que $L^{-1} = T$

$$[T][V] = [\Lambda]^{-1}[T][I] \quad (9)$$

Definiendo $[U] = [T][V]$ como el vector de tensiones modal y $[J] = [T][I]$ como el vector de corrientes modal la ecuación puede simplificarse como sigue:

$$[U] = [\Lambda]^{-1}[J] \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

La inversa de los eigenvalores tiene unidades de impedancia por lo que es llamada matriz de impedancia modal. En la ecuación se observa que, si un eigenvalor es cero o muy pequeño, su inversa será grande y una inyección de su corriente modal dará origen a una gran tensión modal. Esta inyección de corriente no afectará las otras tensiones modales debido a que no existe acoplamiento entre los modos. En otras palabras, se puede determinar la ubicación de la resonancia en el dominio modal.

El problema es que ese eigenvalor (conocido como el modo crítico de resonancia armónica) no está relacionado a la inyección de corriente en un bus específico dado que se están manejando modos de corriente.

La corriente modal J_l es la proyección lineal de las corrientes físicas en dirección al primer eigenvector:

$$J_1 = T_{11}I_1 + T_{12}I_2 + T_{13}I_3 + \dots + T_{1n}I_n \quad (12)$$

De la ecuación anterior se concluye que los valores de T_{11} , T_{12} , etc. ponderan el efecto que tendrá cada corriente nodal en la excitación de una resonancia.

Las tensiones nodales físicas están relacionadas con las tensiones modales por la siguiente ecuación:

$$[V] = [L][U] \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{21} \\ \vdots \\ L_{n1} \end{bmatrix} U_1 + \begin{bmatrix} L_{12} \\ L_{22} \\ \vdots \\ L_{n2} \end{bmatrix} U_2 + \dots + \begin{bmatrix} L_{1n} \\ L_{2n} \\ \vdots \\ L_{nn} \end{bmatrix} U_n \approx \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{21} \\ \vdots \\ L_{n1} \end{bmatrix} U_1 \quad (14)$$

La aproximación de arriba es posible debido a que U_1 tiene un valor mayor al resto de las tensiones modales [16]. Si L_{31} tiene el valor más grande, el bus 3 presentará también la mayor magnitud de tensión, lo que indica que es el mejor lugar para colocar un sensor.

En resumen, el eigenvector derecho proporciona los índices de observabilidad del sistema, es decir, en qué nodos se presentan sobretensiones armónicas mientras que el eigenvector izquierdo proporciona los índices de excitabilidad del sistema, es decir, desde qué nodos se puede excitar la resonancia. El conocer la ubicación de la resonancia y los puntos desde donde es excitada facilita en gran medida la solución del problema.

Es posible combinar la excitabilidad y la observabilidad en un solo índice de acuerdo a la teoría de análisis modal selectivo [16].

$$[V] = [L][\Lambda]^{-1}[T][I] = [L] \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n^{-1} \end{bmatrix} [T][I] \quad (15)$$

Dado que la impedancia modal crítica λ_1 es mayor al resto de las impedancias modales es posible desarrollar la siguiente aproximación:

$$[V] \approx \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & T_{nn} \end{bmatrix} [I] \quad (16)$$

Al multiplicar las dos primeras matrices se obtiene:

$$[V] \approx \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} L_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_1^{-1} L_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{-1} L_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \cdots & T_{nn} \end{bmatrix} [I] \quad (17)$$

Finalmente, al factorizar la admitancia modal crítica λ_1^{-1} se tiene:

$$[V] \approx \lambda_1^{-1} \begin{bmatrix} L_{11}T_{11} & L_{11}T_{12} & \cdots & L_{11}T_{1n} \\ L_{21}T_{11} & L_{21}T_{12} & \cdots & L_{21}T_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1}T_{11} & L_{n1}T_{12} & \cdots & L_{n1}T_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \quad (18)$$

Los elementos de la diagonal de la matriz son llamados factores de participación. Estos factores caracterizan la excitabilidad y la observabilidad combinadas y ponderan de forma general el efecto que tiene cada bus en el fenómeno de resonancia, así, a partir de la ecuación (18) se definen como:

$$PF_{bm} = L_{bm}T_{mb} \quad (19)$$

b = número de bus

m = número de modo

El análisis de sistemas a partir de sus eigenvalores es una técnica de desacople matricial poderosa. Es aplicado en distintas áreas como son: el análisis de estabilidad dinámica (ecuaciones diferenciales), el estudio de estabilidad de tensión [17], el diagnóstico de fallas en máquinas [18] y el análisis en tiempo real de oscilaciones de potencia [19].

Capítulo 2. Desarrollo del algoritmo de análisis modal de resonancia.

En este capítulo se describe el código desarrollado para la ejecución del análisis modal con un circuito ejemplo de tres nodos.

El programa consta de tres partes principales, la captura de datos, la ejecución del análisis y la presentación de resultados.

2.1 Captura de datos

La captura de datos se realiza directamente en el código. Los datos de entrada son cinco:

1. Frecuencia inicial
2. Frecuencia final
3. Incremento
4. Orden del sistema
5. Matriz de admitancias

La frecuencia inicial, la frecuencia final y el incremento dirigen el análisis. Al incrementarse el número de capacitores se incrementa también el número de frecuencias a las que resonará el sistema por lo que, de ser el caso, se recomienda disminuir el paso de la simulación para no pasar por alto ninguna de éstas. Estos valores en conjunto con el orden del sistema son utilizados para inicializar los vectores en los que se almacenará la información resultante del análisis.

La Figura 6 muestra las líneas de código en las que deben ser capturados los parámetros de la simulación.

```

8      %Captura de parámetros de estudio
9 -    inicio=0;
10 -   fin=3600;
11 -   paso=1;
12 -   orden=3;

```

Figura 6. Captura de parámetros de simulación.

La matriz de admitancias debe ser introducida en función de la frecuencia. Lo anterior es necesario debido a que el análisis de resonancia se basa en el estudio del intercambio de energía reactiva entre cada uno de los inductores y capacitores del sistema por lo que la ubicación y magnitud de cada elemento deben estar definidas de forma particular. El programa no requiere información de las fuentes que alimentan el sistema, sin embargo, es importante tener en cuenta que el código no procesa circuitos con fuentes dependientes. El manejo de estas requiere de un proceso iterativo adicional fuera del alcance del programa.

Como ejemplo, se tiene el siguiente circuito:

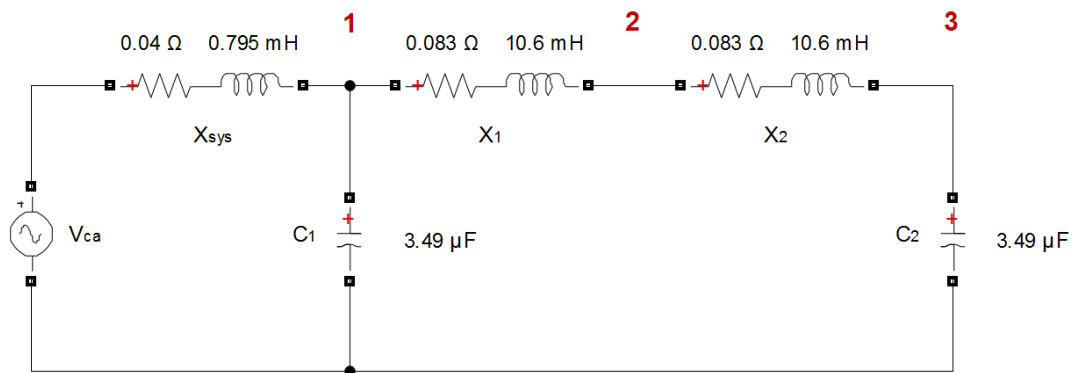


Figura 7. Circuito ejemplo de 3 nodos.

La matriz de admitancias para un circuito de n nodos se construye como sigue:

Los elementos y_{ij} para $i = j$ se forman sumando las admitancias de los elementos conectados al nodo i .

Los elementos y_{ij} para $i \neq j$ se forman con el negativo de la admitancia del elemento conectado entre el nodo i y el nodo j .

Esta matriz es cuadrada y simétrica y se muestra en la siguiente ecuación:

$$[Y] = \begin{bmatrix} y_{11} & -y_{12} & \dots & -y_{1n} \\ -y_{21} & y_{22} & \dots & -y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_{n1} & -y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix} \quad (17)$$

De esta forma, la matriz de admitancias para el circuito ejemplo se define de la siguiente forma:

$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{1}{X_{sys}} + \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_{c1}} & -\frac{1}{X_1} & 0 \\ -\frac{1}{X_1} & \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} & -\frac{1}{X_2} \\ 0 & -\frac{1}{X_2} & \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_{c2}} \end{bmatrix} \quad (18)$$

La forma en la que debe ser introducida la matriz de admitancias en el programa es como sigue:

```
%Captura de matriz de admitancias
```

```
ybus =
```

```
[1/(2*pi*f*0.015*1j)+1/(1+2*pi*f*0.01*1j)+(2*pi*f*0.003*1j),1/(1+2*pi*f*0.01*1j),0;
-1/(1+2*pi*f*0.01*1j),2/(1+2*pi*f*0.01*1j),-1/(1+2*pi*f*0.01*1j);
0,-1/(1+2*pi*f*0.01*1j),1/(1+2*pi*f*0.01*1j)+(2*pi*f*0.004*1j)];
```

donde, la variable f representa la frecuencia, π representa al número π y $1j$ representa el número imaginario. La matriz se define entre corchetes, los elementos son separados por comas y las filas por punto y coma.

2.2 Ejecución del análisis

Una vez que se han introducido los parámetros de la simulación y la matriz de admitancias, el programa está listo para ser ejecutado.

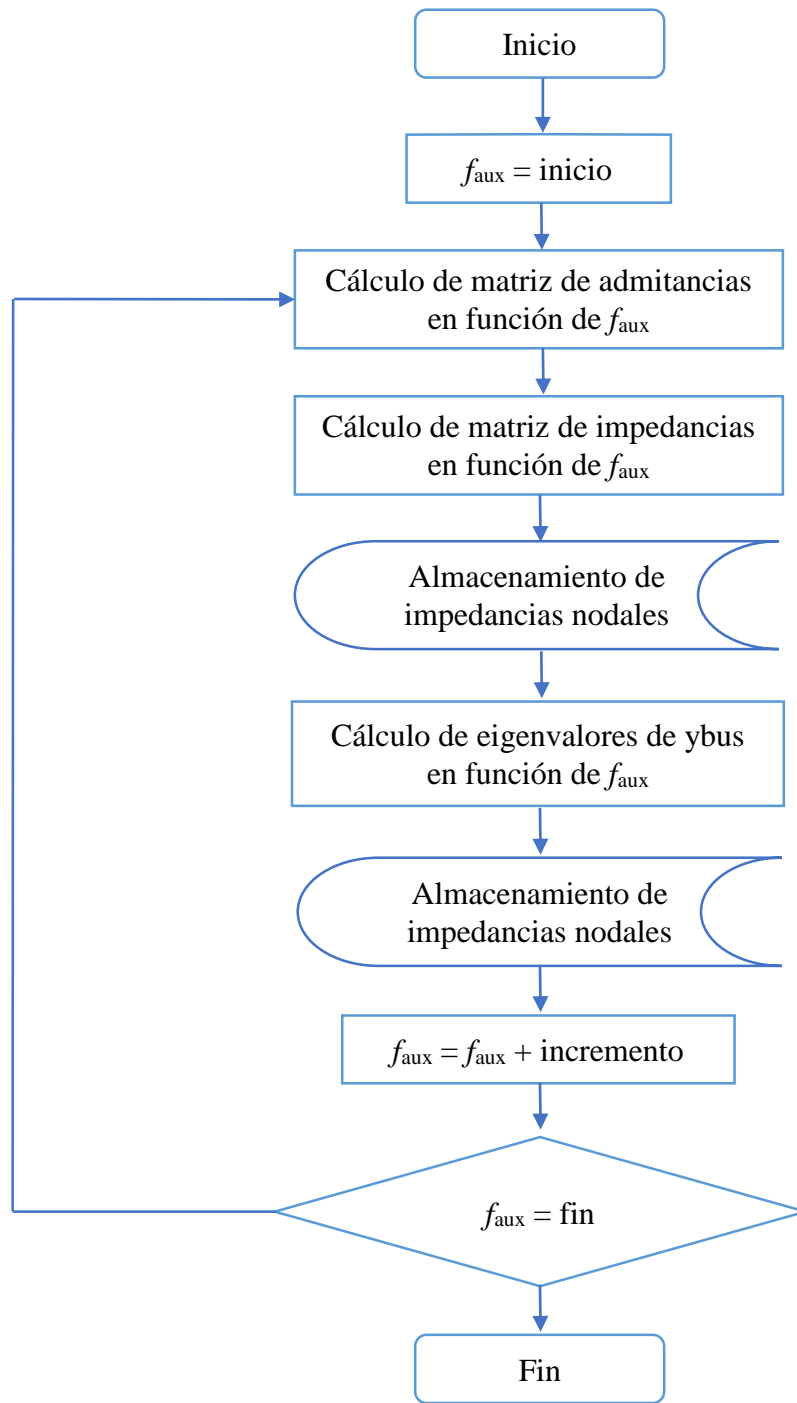


Figura 8. Diagrama de flujo del programa en la etapa de ejecución.

La Figura 8, muestra el diagrama de flujo que sigue el código durante la etapa de ejecución. El programa inicia con el cálculo de la matriz de admitancias en función de la frecuencia inicial (introducida por el usuario). Posteriormente, se calcula la inversa de la matriz de admitancias para obtener la matriz de impedancias. La diagonal de esta matriz contiene las impedancias de Thevenin en cada nodo del sistema. Esta diagonal es almacenada en el vector “driving”, mismo que se usará en la etapa de presentación de resultados.

Después de que se almacena la diagonal de la matriz de impedancias, se utiliza la matriz de admitancias calculada en función de la frecuencia inicial y se calculan sus eigenvalores. La inversa de estos eigenvalores representa las impedancias modales que tiene el sistema para esa frecuencia. Una vez calculadas y almacenadas estas impedancias, se repite el proceso incrementando (de acuerdo al valor de la variable “incremento” definido por el usuario) el valor de la frecuencia.

2.3 Presentación de resultados

Los resultados que genera el programa son dos gráficas y un listado con los factores de participación de los modos de resonancia. La primera gráfica muestra cómo varía la impedancia del sistema vista desde cada nodo conforme se incrementa la frecuencia, como se muestra en la Figura 9. La segunda gráfica muestra cómo varía la impedancia de cada modo del sistema conforme se incrementa la frecuencia, como se muestra en la Figura 10. Estas figuras son un ejemplo de cómo se verían dichas gráficas si se corre el análisis sobre el circuito ejemplo de la Figura 7.

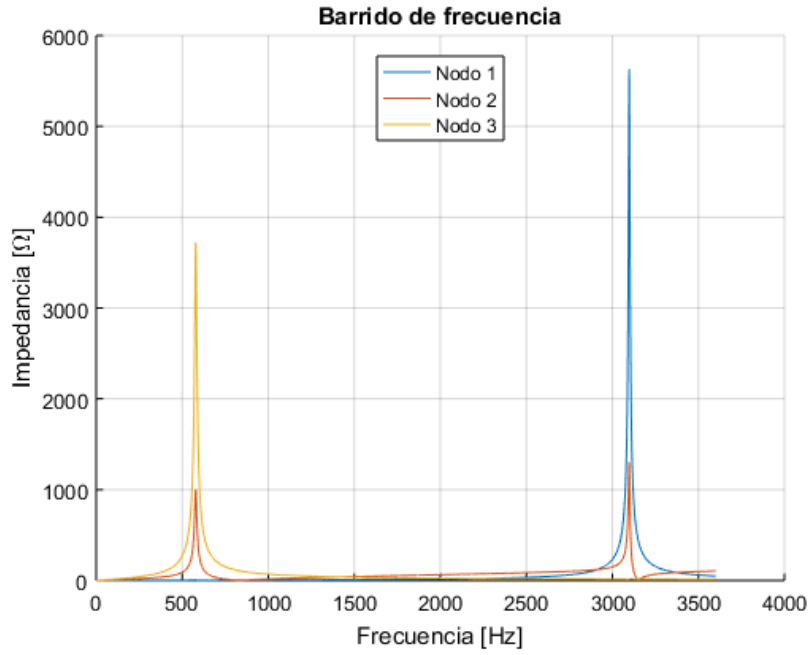


Figura 9. Resultados del barrido de frecuencia.

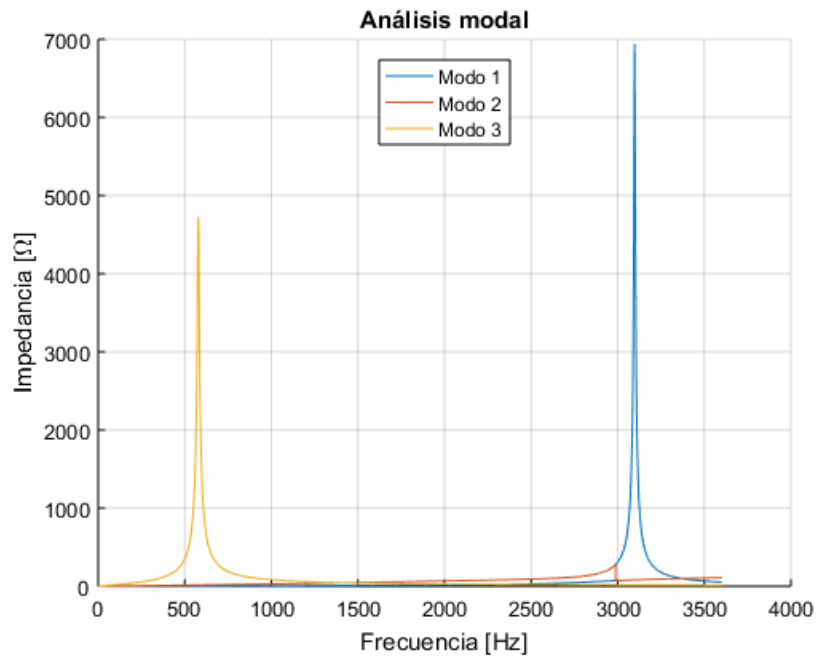


Figura 10. Resultados del análisis modal.

Los factores de participación son un índice que combina la observabilidad y la excitabilidad que presenta cada nodo para cada uno de los modos del sistema. Antes de presentar estos factores, el programa identifica las frecuencias de resonancia e ignora aquellas que no generan un pico de impedancia que no sobrepase el 15 % de la mayor impedancia detectada durante el análisis. Lo anterior se realiza con la finalidad de descartar elementos capacitivos que no contribuyan sustancialmente al fenómeno. Se eligió ese porcentaje con base en los resultados obtenidos en las simulaciones, donde se observó que conforme incrementaba el orden del sistema, se presentaban picos de impedancia modal cuya magnitud no era significativa.

Una vez que son identificadas las frecuencias de resonancia, éstas se utilizan para calcular los eigenvectores izquierdo y derecho que origina el sistema ante esas condiciones utilizando la ecuación (16).

2.4 Código del análisis modal de resonancia armónica.

A continuación se muestra el código completo para la ejecución del circuito de la Figura 7.

```
%           Análisis modal de resonancia armónica

%El siguiente código ejecuta barrido de frecuencia y análisis modal de
%resonancia sobre una matriz de admitancias introducida por el usuario.

clear,clc

%Captura de parámetros de estudio
inicio=0;
fin=3600;
paso=1;
orden=3;
f=inicio;

%Cálculo de muestras
aux=fin-inicio;
if mod(aux,paso)>0
```

```

        fin=fin+paso-mod(aux,paso);
end
aux=1;
muestras=(fin-inicio)/paso;
driving=zeros(orden,muestras);
modal=zeros(orden,muestras);

for f=inicio:paso:fin

    %Captura de matriz de admitancias
    ybus = [1/(0.04+2*pi*f*7.9577e-
04*1j)+1/(0.835+2*pi*f*0.0106*1j)+(2*pi*f*3.4484e-06*1j),-
1/(0.835+2*pi*f*0.0106*1j),0;
            -1/(0.835+2*pi*f*0.0106*1j),2/(0.835+2*pi*f*0.0106*1j),-
1/(0.835+2*pi*f*0.0106*1j);
            0,-
1/(0.835+2*pi*f*0.0106*1j),1/(0.835+2*pi*f*0.0106*1j)+(2*pi*f*3.4484e-
06*1j)];

    %Barrido de frecuencia
    zbus=inv(ybus);
    driving(:,aux)=diag(zbus,0);

    %Cálculo de impedancias modales
    modal(:,aux)=eig(ybus).^(-1);

    aux=aux+1;

end

%Graficando el barrido de frecuencia
figure('Color','white'),hold
grid on
title('Barrido de frecuencia')
xlabel('Frecuencia [Hz]')

```

```

ylabel('Impedancia [\Omega]')
lnodos={1,orden};
lmodos={1,orden};

for aux=1:orden
    plot(abs(driving(aux,:)));
    lnodos{1,aux}=['Nodo ',num2str(aux)];
end
legend(lnodos,'Location','north')

%Graficando el análisis modal
figure('Color','white'),hold
grid on
title('Análisis modal')
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Impedancia [\Omega]')

for aux=1:orden
    plot(abs(modal(aux,:)))
    lmodos{1,aux}=['Modo ',num2str(aux)];
end
legend(lmodos,'Location','north')

%Identificación de las frecuencias de resonancia
for aux=1:orden
    a=findpeaks(abs(modal(aux,:)));
    b=a;
    [a,b]=findpeaks(abs(modal(aux,:)));
    picos(aux)=max(a);
    localidad(aux)=max(b);
end
columnas=size(picos,2);
maximo=max(picos(:));

for ay=1:columnas
    if(picos(ay)/maximo<0.15)
        localidad(ay)=0;
    end
end

numero=max(size(localidad));

%Cálculo de factores de participación

```

```
for aux=1:numero
    f=localidad(aux);
    if f>0
        ybus;
        [T,D,L] = eig(ybus);
        Lee=L.*(T');
        fprintf(1,'Factores de participación para una frecuencia de');
        fprintf(1,'%10.3f',f);
        fprintf(1,' Hz');
        abs(Lee(:,aux))
    end
end
```

Capítulo 3. Evaluación del algoritmo de análisis modal de resonancia.

En este capítulo se comparan los resultados del barrido de frecuencia que genera el programa contra los que se obtienen usando el software Power Factory de la compañía DigSILENT. Para ello se introducen los mismos datos en ambos programas y se comparan las gráficas. Se utiliza un circuito hipotético de tres nodos.

3.1 Circuito ejemplo 1

El circuito que se muestra en la Figura 11 representa el circuito equivalente de una línea de transmisión monofásica sin carga. Consiste de tres elementos RL y dos capacitores. Se considerará el estudio de los 3 nodos que se resaltan en rojo.

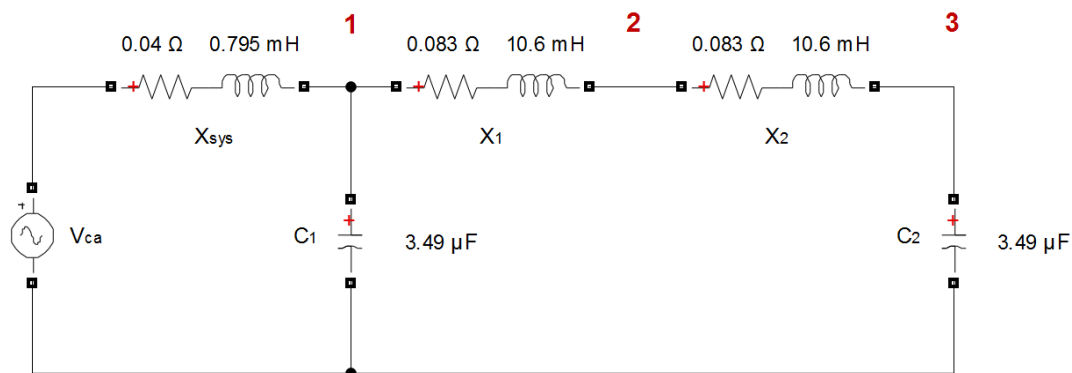


Figura 11. Circuito de 3 nodos.

El intervalo de frecuencias seleccionado es desde 0 Hz hasta 3600 Hz con un incremento de 1 Hz. La matriz de admitancias a introducir en el código de acuerdo a los valores mostrados en el circuito de la Figura 11 es la siguiente:

```
ybus =  
[1/(0.04+2*pi*f*7.9577e-  
04*1j)+1/(0.835+2*pi*f*0.0106*1j)+(2*pi*f*3.4484e-06*1j), -  
1/(0.835+2*pi*f*0.0106*1j), 0;
```

$$\begin{aligned}
 & -1/(0.835+2*\pi*f*0.0106*1j), 2/(0.835+2*\pi*f*0.0106*1j), \\
 & 1/(0.835+2*\pi*f*0.0106*1j); \\
 & 0, -1/(0.835+2*\pi*f*0.0106*1j), 1/(0.835+2*\pi*f*0.0106*1j) \\
 & + (2*\pi*f*3.4484e-06*1j)];
 \end{aligned}$$

La Figura 12 muestra los resultados del programa objeto de evaluación mientras que la Figura 13 muestra los resultados de la simulación del circuito en Power Factory.

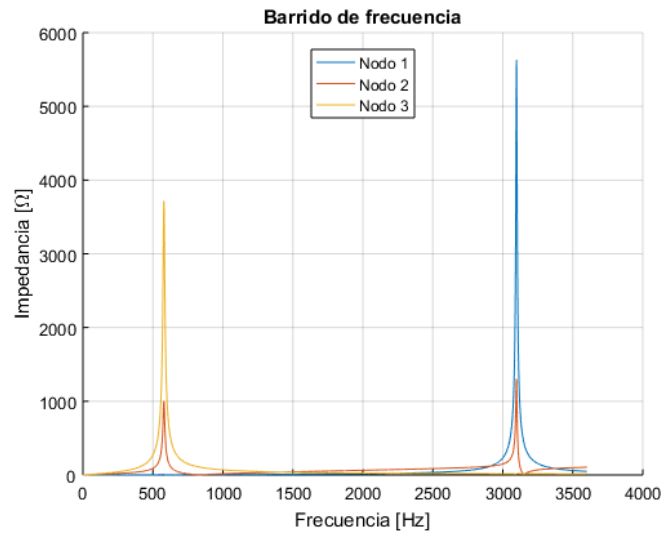


Figura 12. Resultados del barrido de frecuencia en programa.

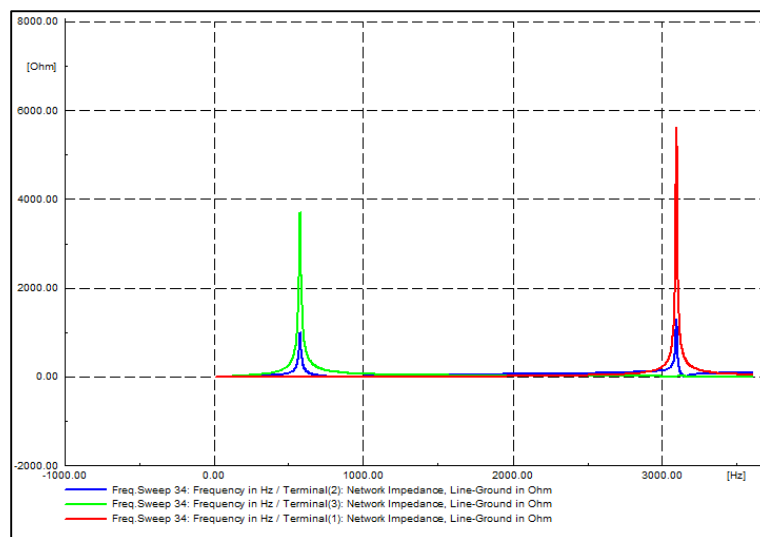


Figura 13. Resultados del barrido de frecuencia en Power Factory.

Las gráficas muestran que ambos programas identifican las mismas frecuencias de resonancia para el circuito. Estas frecuencias son 579 Hz y 3098 Hz. La primera genera un pico de impedancia en el nodo 3 mientras que la segunda genera un pico en el nodo 1.

A pesar de que el barrido de frecuencia revela las frecuencias de resonancia, las gráficas muestran que los tres nodos tienen picos de impedancia lo cual podría dificultar identificar el elemento causante de la resonancia. Al ejecutar el análisis modal se obtiene la gráfica de la Figura 14. En ella se observa que el modo 2 no tiene impacto sustancial en el fenómeno de resonancia ya que la mayor impedancia que; sin embargo, se observa que los modos 1 y 3 son los que presentan una impedancia considerablemente mayor.

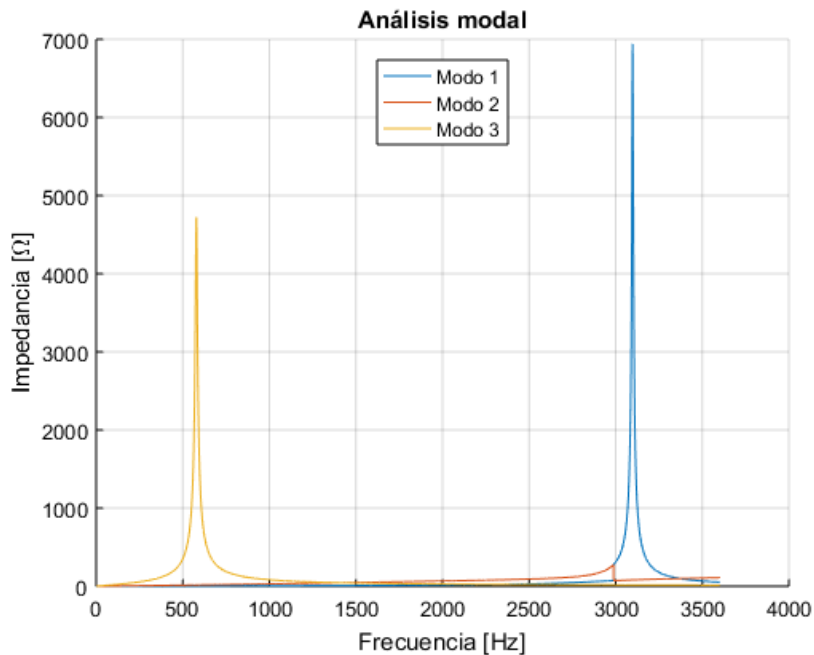


Figura 14. Resultado del análisis modal en circuito de tres nodos.

Los factores de participación que resultan para los modos 1 y 3 se presentan en la Tabla 1. En ella se puede observar que el nodo 1 tiene el mayor factor de participación para el modo 1 mientras que el nodo 3 tiene el mayor factor de participación durante el modo 3. Esto es clave para identificar los nodos en los que la resonancia tiene mayor impacto y en consecuencia para

proponer soluciones al problema que permitan mitigar el fenómeno de resonancia. La solución más común es el uso de filtros de armónicas pasivos, activos y/o híbridos.

Tabla 1. Factores de participación del circuito ejemplo.

	Modo 1	Modo 3
Nodo 1	0.9775	0.0001
Nodo 2	0.0224	0.0025
Nodo 3	0.0001	0.9974

3.2 Circuito ejemplo 2

El circuito que se muestra en la Figura 15 consta de 8 nodos y cuenta con 5 capacitores.

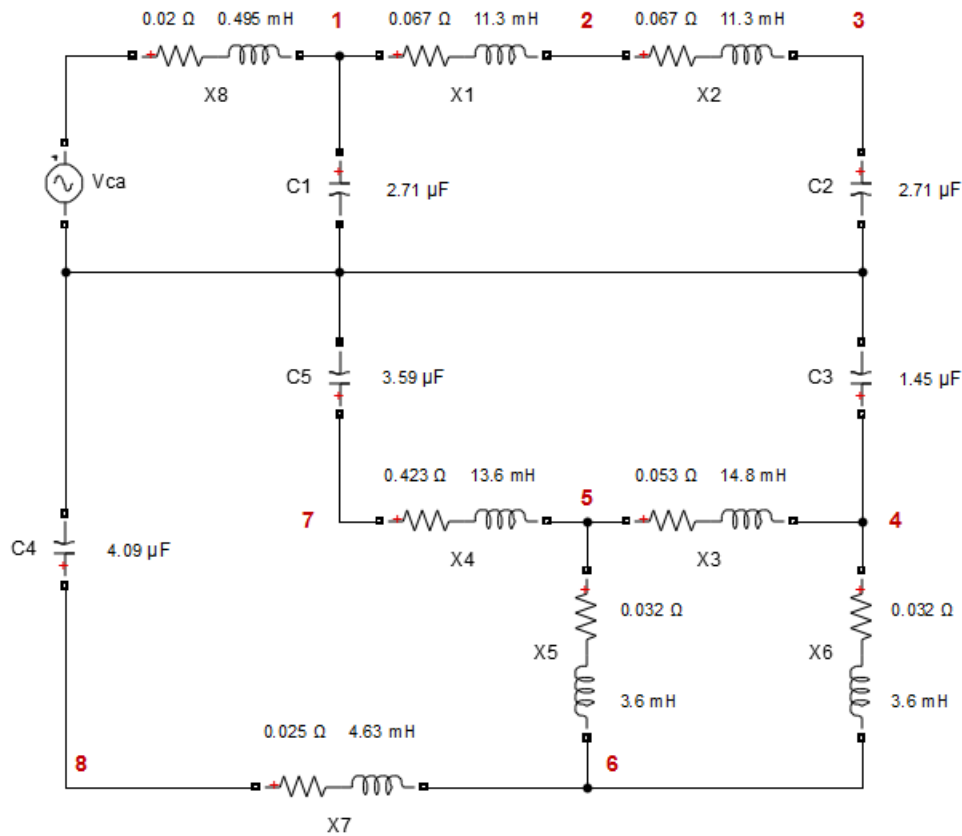


Figura 15. Circuito de 8 nodos.

Los resultados del análisis modal que se obtienen del programa al introducir los datos del circuito anterior se muestran en la Figura 16. Los factores de participación que presenta cada nodo durante los cinco modos que producen picos de impedancia (de acuerdo a la Figura 16) se muestran en la Tabla 2.

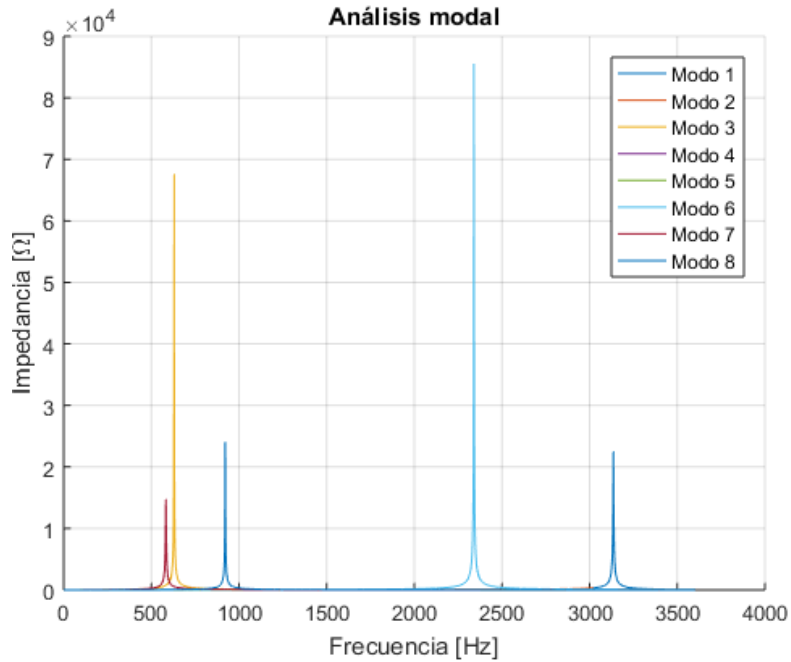


Figura 16. Resultados del análisis modal sobre circuito de 8 nodos.

Tabla 2. Factores de participación en circuito de 8 nodos.

	Modo 1	Modo 3	Modo 6	Modo 7	Modo 8
Frecuencia	3136 Hz	630 Hz	2340 Hz	2496 Hz	922 Hz
Nodo 1	0.9686	0.0001	0	0	0
Nodo 2	0.0312	0.0035	0	0	0
Nodo 3	0.0001	0.9964	0	0	0
Nodo 4	0	0	0.0018	0	0
Nodo 5	0	0	0.7783	0.0004	0
Nodo 6	0	0	0.2059	0.0001	0.0007
Nodo 7	0	0	0.0001	0.9988	0.0038
Nodo 8	0	0	0.0036	0.0000	0.9930

En la Figura 16 se observa que los modos que presentan resonancia son el modo 1, el modo 3, el modo 6, el modo 7 y el modo 8.

De la Tabla 2 se puede concluir que el nodo 1 tiene mayor participación en el fenómeno de resonancia que se presenta durante el modo 1. Lo anterior indica que si se desea mitigar el efecto de la resonancia que se produce al llegar a los 3136 Hz, el nodo 1 es el mejor lugar para colocar un sistema de compensación. De forma similar, si se desea mitigar la resonancia durante el modo 2, el lugar ideal para colocar el sistema de compensación es el nodo 3. Así mismo, los nodos 5, 7 y 8 tendrán más participación en los modos 6, 7 y 8 respectivamente.

Conclusiones

En este trabajo de tesis se estudiaron las técnicas de barrido de frecuencia y análisis modal que se emplean en el estudio de la resonancia armónica de los sistemas eléctricos de potencia. Se llevó a cabo la programación de ambos métodos de análisis y se compararon los resultados con software especializado utilizando un circuito ejemplo. Con base en lo anterior se concluye lo siguiente:

- La resonancia armónica tiene lugar en un modo específico y no está relacionada únicamente con la inyección de corriente en un bus en particular.
- A diferencia del barrido de frecuencia, el análisis modal proporciona información que permite observar y controlar la resonancia de forma más puntual.
- Los índices de observabilidad que se obtienen del eigenvector izquierdo permiten visualizar las opciones que se tienen para detectar la presencia de resonancia desde distintos puntos de la red. Si no es factible instalar un sensor en el nodo con mayor índice de observabilidad, es posible elegir otro en el que de forma indirecta se pueda medir, aunque con menor grado de efectividad.
- Los índices de controlabilidad que se obtienen del eigenvector derecho permiten visualizar las opciones que se tienen para reducir el efecto de la resonancia desde distintos puntos de la red. Si no es factible instalar un sistema de compensación en el nodo con mayor índice de controlabilidad, es posible elegir otro en el que de forma indirecta se puede ejercer control, aunque con menor grado de influencia.
- El modo de resonancia crítico puede ser identificado a partir del eigenvalor con menor valor de la matriz de admitancias.

- Las inyecciones de corriente en ciertos buses pueden excitar un modo con mayor facilidad que otros buses. Estos buses pueden ser identificados mediante los factores de participación.
- El número de modos de resonancia es igual al número de elementos capacitivos en la red. No existe acoplamiento de capacitancias que pueda dar origen a un nuevo modo en el sistema.

Bibliografía

- [1] J. Dixon, L. Morán, J. Rodríguez, R. Domke, “Reactive Power Compensation Technologies: State-of-the-Art Review” Proc. IEEE, Vol. 93, No. 12, p. 2144-2164, Diciembre, 2005.
- [2] IEEE Guide for Application of Shunt Power Capacitors, IEEE Std. 1036, 2010.
- [3] C. Liu, Y. He, K. Dai, Y. Kang, “Industrial Power Distribution System Harmonic Resonance Problem and Solution with Shunt Active Power Filter”, Febrero, 2017.
- [4] A. Tejada, A. Llamas, “Efecto de las armónicas en los sistemas de potencia”. [Consultado en Marzo, 2017]. <http://www.mty.itesm.mx/etie/deptos/ie/profesores/allamas/cursos/ueee/armonicas/07efectarm.pdf>
- [5] J. A. Gómez, J. J. Olmos, “Cuestiones y problemas de electromagnetismo y semiconductores”, Universidad Politécnica de Valencia, 2002.
- [6] J. K. Phipps, J. P. Nelson, Pankaj K. Sen, "Power Quality and Harmonic Distortion on Distribution Systems", IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 30, No. 2, p. 476, Marzo/Abril, 1994.
- [7] L. W. Pierce, “Transformer Design and Application Consideration for Nonsinusoidal Load Currents” IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 32, No. 3, p. 633-645, Mayo/Junio, 1996.
- [8] L. W. Pierce, “Transformer Design and Application Consideration for Nonsinusoidal Load Currents,” IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 32, No. 3, p. 633-645, Mayo/Junio, 1996.

- [9] G. W. Massey, "Power Distribution Systems Design for Operation Under Nonsinusoidal Load Conditions," IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 31, No. 3, p. 513-519, Junio, 1995.
- [10] G. W. Wassey, "Power Distribution System Design for Operation Under Nonsinusoidal Load Conditions", IEEE Transaction on Industry Applications, Vol. 31, No. 3, p. 513, Mayo/Junio, 1990.
- [11] G. C. Jain, "The Effect of Voltage Waveshape on the Performance of a 3-Phase Induction Motor", IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems, Vol. 83, p 561-566, Junio, 1964.
- [12] E. A. Klingshirn, H. E. Jordan, "Polyphase Induction Motor Performance and Losses on Nonsinusoidal Voltage Sources", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 87, No. 3, p. 624-631, Marzo, 1968.
- [13] P. G. Cummings, "Estimating Effect of System Harmonics on Losses and Temperature Rise of Squirrel-Cage Motors," IEEE Transaction on Industry Applications, Vol. IA-22, No. 6, p. 1121-1126, Noviembre/Diciembre, 1986.
- [14] P. K. Sen, H. A. Landa, "Derating of Induction Motors Due to Waveform Distortion", IEEE Transaction on Industry Applications, Vol. 26, No. 6, p. 1102-1107, Noviembre/Diciembre, 1990.
- [15] J. Arrillaga, N. Watson, "Power Systems Harmonic", 2da Ed., New York, John Wiley & Sons, p. 389, 2003, ISBN 0-470-85129-5.
- [16] W. Xu, Z. Huang, Y. Cui, "Harmonic Resonance Mode Analysis", IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 20, No. 2, Abril, 2005.
- [17] Al-Saadi Hasanain, Zhao Junhui, Zeng Jianwu, Wang Yang, Wang Caisheng, "Voltage Stability Evaluation by Using Extended Modal Analysis with Dynamic Internal Impedance of

Synchronous Generators”, IEEE Power and Energy Society General Meeting (PESGM), Julio, 2016.

[18] Liguó Zhang, Yutian Wang, Sheng Zhang, Guangpu Hao, “The Fault Diagnosis of Machine based on Modal Analysis”, International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation, China, Abril, 2009.

[19] Hiyama Takashi, Suzuki Naoto, “Real Time Modal Analysis of Power System Oscillations”, IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Zuiza, Mayo, 2000.

[20] Arjen SRL, Disponible en: <https://www.arjen.com.pe>, [Octubre, 2018].