



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS
POTOSÍ**

FACULTAD DE INGENIERÍA

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO

**SÍNTESIS DE UN MECANISMO PARA MODULACIÓN Y
TRANSFERENCIA DE ENERGÍA**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA**

**EN LA OPCIÓN DE:
MECATRÓNICA Y SISTEMAS MECÁNICOS (MSM)**

**PRESENTA:
ING. CARLOS ANTONIO RAMÍREZ RODRÍGUEZ**

**ASESOR:
DR. EMILIO JORGE GONZÁLEZ GALVÁN**

SAN LUIS POTOSÍ, SLP

FEBRERO 2010





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE SAN LUIS POTOSÍ

24 de septiembre de 2009

**ING. CARLOS ANTONIO RAMIREZ RODRIGUEZ
P R E S E N T E. –**

En atención a su solicitud de Temario, presentada por el **Dr. Emilio Jorge González Galván**, Asesor de la Tesis, que desarrollará Usted, con el objeto de obtener el Grado de **Maestría en Ingeniería Mecánica**. Me es grato comunicarle que en la Sesión de Consejo Técnico Consultivo celebrada el día 24 de septiembre del presente año, fue aprobado el Temario propuesto:

TEMARIO:

**“SINTESIS DE UN MECANISMO PARA MODULACIÓN Y TRANSFERENCIA
DE ENERGÍA”**

INTRODUCCIÓN.

1. ANTECEDENTES Y ALCANCES DEL PROYECTO.
2. SÍNTESIS DE GENERADORES DE FUNCIONES.
3. ANÁLISIS CINEMÁTICO Y DINÁMICO DEL MECANISMO.
4. VALIDACIÓN EXPERIMENTAL.

CONCLUSIONES


ANEXOS

BIBLIOGRAFÍA

“MODOS ET CUNCTARUM RERUM MENSURAS AUDEBO”

A T E N T A M E N T E


**ING. ARMANDO VIRAMONTES ALDANA
DIRECTOR**


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE SAN LUIS POTOSÍ
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIRECCION



**FACULTAD
DE INGENIERÍA**

Av. Manuel Nava 8
Zona Universitaria • CP 78290
San Luis Potosí, S.L.P.
tel. (444) 826 2330 al39
fax (444) 826 2336
www.uaslp.mx

“2009, 150 Años del Instituto Científico y Literario... hoy Universidad Autónoma de San Luis Potosí”

DEDICATORIA

A mi mamá Teresa Rodríguez, que con cariño y amor siempre ha estado a mi lado, me ha apoyado durante tantos años y me ha aconsejado y motivado para alcanzar mis objetivos de la vida.

Con Amor, Cariño y Respeto: Carlos

AGRADECIMIENTOS

Mi más sincero agradecimiento:

Al **Dr. Emilio J. González Galván** por su valiosa asesoría, contribución a mi formación académica y todo el apoyo incondicional que me brindó durante la realización de este trabajo.

Al **Comité Académico del Posgrado en Ingeniería Mecánica** por su contribución a mi formación académica.

A **mis compañeros de posgrado y amigos** por su amistad y apoyo.

Al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT)** por brindarme el apoyo económico durante mis estudios.

A la **Universidad Autónoma de San Luis Potosí** por haberme dado una profesión y ayudarme a desarrollarme como persona.

Resumen

La recuperación de la habilidad para caminar es un objetivo específico de la rehabilitación de pacientes con lesiones crónicas de espina dorsal. La pérdida total o parcial de las facultades motrices en el hombre tiene una influencia de igual magnitud sobre la bipedestación y la marcha. La forma de restablecer en lo posible las facultades motrices pertenece al área de rehabilitación neurológica, y también la forma de reeducar la marcha cuando ella no es funcional

La técnica para lograr dicha rehabilitación involucra el uso de un soporte para el sostenimiento gradual del peso del paciente, quien marcha sobre una máquina caminadora. En la rehabilitación es necesario sostener el peso del paciente para que éste pueda realizar los ejercicios necesarios para reeducar su marcha. Una de las características de la marcha es el desplazamiento verticalmente, del centro de gravedad de la persona, con un rango de movimiento de aproximadamente 5 cm. Esta técnica ha dado buenos resultados y se ha probado tanto a nivel de humanos como de animales de laboratorio a los que se les produce, de manera intencional, distintos niveles de incapacidad. Se cree que esta forma de entrenamiento puede activar la generación de un patrón de caminado, al nivel de la espina dorsal del paciente.

El sostenimiento del peso puede lograrse con sistemas tan sencillos como una polea ubicada sobre el paciente. Enrollado a la polea puede colocarse un cable en cuyo extremo se coloca un arnés con el que se sujeta al paciente y en el otro extremo, un peso similar al del mismo. La desventaja de esta solución radica en que la inercia del dispositivo puede producir fuerzas no deseadas que se transmiten al paciente a través del arnés, al acelerarse verticalmente el extremo del cable durante el caminado. Otra solución puede ser un simple resorte cuyos extremos se unen, por un lado, a un punto fijo y del otro al arnés que sostiene al paciente. La desventaja de esta alternativa radica en la variación de la fuerza vertical ejercida sobre el paciente, al extenderse o contraerse el resorte.

Otras soluciones un poco más complejas involucran la creación de dispositivos de un solo grado de libertad (4 barras) que modulan el intercambio de la energía potencial que se produce por el desplazamiento vertical del centro de gravedad del paciente durante el caminado, y la energía almacenada por otro medio, por ejemplo, de un resorte. La restricción de este tipo de dispositivos radica en la capacidad limitada del mecanismo para generar la función específica que permita la citada modulación de energía potencial. Considerando estas propuestas, en el presente trabajo se desarrolló la síntesis de un mecanismo de eslabonamientos que permita la modulación precisa del proceso de intercambio de energía potencial con el paciente.

Índice

Resumen	VI
Introducción	1
1. Antecedentes y alcances del proyecto	6
1.1. Análisis del patrón de marcha humana.	6
1.1.1. Centro de gravedad.	7
1.2. Rehabilitación de la marcha humana.	8
1.3. Estado del arte.	11
2. Síntesis de generadores de funciones	13
2.1. Función moduladora.	13
2.2. Síntesis de tipo y número.	17
2.2.1. Mecanismo de 4 barras.	17
2.3. Síntesis dimensional.	20
2.3.1. Síntesis para tres puntos de precisión.	22
2.3.2. Síntesis para cuatro puntos de precisión.	23
2.3.3. Síntesis para cinco puntos de precisión.	24
2.3.4. Síntesis de tres derivadas.	26
2.3.5. Síntesis de aproximación por mínimos cuadrados.	28
3. Análisis cinemático y dinámico del mecanismo	31
3.1. Análisis cinemático.	31
3.1.1. Análisis de posición articular.	31
3.1.2. Análisis de velocidad articular.	33
3.1.3. Análisis de aceleración articular.	33
3.1.4. Aceleraciones lineales de los centros de gravedad.	34
3.2. Análisis dinámico.	37
4. Validación experimental	42
4.1. Índices de desempeño.	42
4.2. Diseño definitivo.	45
4.2.1. Trabajo con pesos diferentes.	62
4.3. Desarrollo del prototipo.	65
4.3.1. Pruebas.	67

Conclusiones	73
Anexos	75
Anexo 1. Código general en MATLAB® para el mecanismo cuatro barras.	76
Anexo 2. Código de síntesis de 3 puntos de precisión en MATLAB® Para el mecanismo cuatro barras.	83
Anexo 3. Código de síntesis de 4 puntos de precisión en MATLAB® Para el mecanismo cuatro barras.	84
Anexo 4. Código de síntesis de 5 puntos de precisión en MATLAB® Para el mecanismo cuatro barras.	85
Anexo 5. Código de síntesis de tres derivadas en MATLAB® Para el mecanismo cuatro barras.	87
Anexo 6. Código de síntesis de aproximación por mínimos cuadrados (estimación lineal) en MATLAB® para el mecanismo cuatro barras.	88
Anexo 7. Código de error de diseño en MATLAB® para el mecanismo cuatro barras. . .	89
Anexo 8. Código de error estructural en MATLAB® para el mecanismo cuatro barras. .	89
Anexo 9. Código de error por áreas en MATLAB® para el mecanismo cuatro barras. . . .	90
Anexo 10. Código de error de energías en MATLAB® para el mecanismo cuatro barras.	91
Anexo 11. Código de error por fuerzas en MATLAB® para el mecanismo cuatro barras.	91
Bibliografía	92

Introducción

Con los avances continuos realizados en el diseño de instrumentos, controles automáticos y equipo automatizado, el estudio de los mecanismos toma un nuevo significado. Se puede definir a los mecanismos como la parte del diseño de máquinas que se interesa del diseño cinemático de los mecanismos de eslabones articulados, levas, engranes y trenes de engranes [1].

En el estudio de los mecanismos, el diseño y el análisis son dos aspectos completamente distintos. El concepto *diseño* podría llamarse más propiamente *síntesis*, es decir, el proceso de idear un patrón o método para lograr un movimiento dado. Diseño es el proceso de establecer tamaños, formas, composiciones de los materiales y disposiciones de las piezas de tal manera que el mecanismo o máquina resultante desempeñe las tareas prescritas. Mediante el proceso de *síntesis* se busca un mecanismo que produzca un movimiento específico.

Aunque existen muchas fases dentro del proceso de diseño que es factible plantear de un modo científico y bien ordenado, el proceso en su conjunto es por su propia naturaleza, tanto un arte, como una ciencia. Requiere imaginación, intuición, creatividad, sentido común y experiencia. El papel de la ciencia dentro del proceso de diseño sirve sencillamente para proveer las herramientas que utilizarán los diseñadores para poner en práctica su arte. Es precisamente en el proceso de evaluación de varias alternativas interactuantes que los diseñadores se enfrentan a la necesidad de un gran número de instrumentos matemáticos y científicos. Cuando éstos se aplican de forma correcta ofrecen información más exacta y confiable para juzgar un diseño que se pueda crear a través de la intuición o el cálculo. Por ende, suelen constituir un auxiliar extraordinario para decidir entre varias alternativas. Sin embargo, las herramientas científicas no pueden tomar decisiones suplantando a los diseñadores; éstos pueden poner en práctica su imaginación y capacidad creativa, incluso al grado de pasar por encima de las predicciones matemáticas.

Es probable que el conjunto más abundante de métodos científicos de que dispone el diseñador quede dentro de la categoría denominada *análisis*. Se trata de técnicas que permiten que el diseñador examine en forma crítica un diseño ya existente o propuesto con el fin de determinar si es adecuado para el trabajo o función para el que se creó. Así el análisis, por sí solo, no es una ciencia creativa sino más bien de evaluación y clasificación de cosas ya concebidas.

Es preciso tener siempre en mente que aunque la mayor parte de los esfuerzos realizados se dediquen al análisis, la meta real es la síntesis, es decir, el diseño de una máquina o un sistema. El análisis es una herramienta y, sin embargo, es tan vital que se usará inevitablemente como uno de los pasos en el proceso de diseño.

La mayoría de las máquinas se componen de mecanismos. Un mecanismo es un sistema mecánico compuesto por varios cuerpos unidos entre sí mediante diferentes tipos de uniones llamadas pares cinemáticos, de tal manera que generan uno o varios movimientos definidos. Una máquina es un mecanismo o conjunto de mecanismos que transmiten carga desde la fuente de energía hasta la resistencia que se debe vencer [1].

En el estudio de los mecanismos es necesario definir los distintos tipos de movimiento producidos por estos mecanismos. Un cuerpo rígido en el espacio tridimensional se define por 6 cantidades independientes (movimiento en los tres ejes principales y rotación alrededor de cada uno de estos ejes), y éstas pueden restringirse para producir distintos tipos de movimiento:

1. **Movimiento plano:** Cuando un cuerpo rígido se mueve de tal forma que la posición de cada línea recta del cuerpo es paralela a todas sus posiciones, el cuerpo tiene *movimiento plano de traslación*. Existen 2 tipos de traslación: Rectilínea y curvilínea. Si cada punto del cuerpo rígido que tiene movimiento plano permanece a una distancia constante de un eje fijo que está perpendicular al plano de movimiento, el cuerpo tiene *movimiento plano de rotación*. En el caso de *movimiento* complejo cualquier línea de referencia trazada en el cuerpo cambiará tanto su posición lineal como su orientación angular, los puntos en el cuerpo recorrerán trayectorias paralelas y habrá, en todo instante, un centro de rotación, el cual cambiará continuamente de orientación, por lo cual, existe una combinación simultánea de rotación y traslación.
2. **Movimiento helicoidal:** Cuando un cuerpo rígido se mueve de manera que cada punto del mismo tiene movimiento de rotación alrededor de un eje fijo y al mismo tiempo, tiene una traslación paralela al eje, se dice que el cuerpo tiene movimiento helicoidal.
3. **Movimiento esférico:** Cuando un cuerpo rígido se mueve de tal manera que cada punto del cuerpo tiene movimiento alrededor de un punto fijo en tanto que permanece a una distancia constante del mismo, el cuerpo tiene movimiento esférico.
4. **Movimiento espacial:** Si un cuerpo tiene movimiento de rotación alrededor de tres ejes no paralelos y de traslación en tres direcciones independientes, se dice que tiene un movimiento espacial general.

Cadena Cinemática

Un *eslabón* es un cuerpo rígido que tiene dos o más pares o elementos de apareamiento, por medio de los cuales se puede conectar a otros cuerpos con el fin de transmitir fuerza o movimiento [1,2]. Por lo general, un eslabón es un miembro rígido que tiene en ambos extremos la posibilidad de conectarse a otros dos eslabones.

Los eslabones que constan de 2, 3 o 4 articulaciones son llamados *binarios*, *ternarios* o *cuaternarios*, respectivamente. Cuando el eslabón tiene solo una articulación se le llama eslabón unitario.

Un *par cinemático* (o *junta*) es una conexión entre dos o más eslabones, el cual permite algún movimiento consistente entre los eslabones conectados [2]. Si la unión o articulación mediante la cual se conectan dos eslabones tiene un contacto superficial, tal como una unión de perno, la conexión se llama *par inferior*. Si la conexión ocurre en un punto a lo largo de una línea recta tal como dos dientes de engranes en contacto o leva seguidor, se le conoce como *par superior*. Los mecanismos de eslabonamientos utilizan pares inferiores, como se ilustra en la Figura 1.

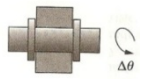


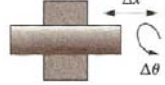

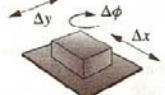
Pares Inferiores			
Nombre	Símbolo	Grados de libertad	
Revoluta	(R)	1 GDL	
Prismática	(P)	1 GDL	
Helicoidal	(H)	1 GDL	
Cilíndrica	(C)	2 GDL	
Esférica	(S)	3 GDL	
Plana	(F)	3 GDL	

Figura 1: Pares cinemáticos inferiores.

Al ensamble de los eslabones interconectados por medio de pares cinemáticos se les conoce como cadena cinemática. Cuando un eslabón de la cadena cinemática se mantiene fija y los otros se mueven, a tal cadena se le llama mecanismo. Se pueden formar diferentes mecanismos a partir de la primera cadena cinemática. Para ello se cambia el eslabón fijo entre los distintos eslabones, obteniéndose así diferentes características de movimiento. A todos los mecanismos formados a partir de la misma cadena cinemática se les conoce como *inversiones cinemáticas*.

La mayoría de los mecanismos son cadenas cinemáticas cerradas donde cada eslabón se conecta por lo menos con otros dos eslabones. Cuando algunos de los eslabones de la cadena son acoplados a un solo eslabón, se dice que dicha cadena cinemática es abierta. Una determinada cadena cinemática, aunque sea abierta, puede contener un subconjunto de eslabones que constituyen a su vez una subcadena cinemática cerrada. Un lazo cinemático es la trayectoria imaginaria seguida por una cadena cinemática cerrada.

Se define una *manivela* como un eslabón que realiza una revolución completa y está pivotada a la bancada; un *balancín* como un eslabón que tiene rotación oscilatoria (de vaivén) y está pivotada a la bancada. Finalmente, un *acoplador* es un eslabón que tiene movimiento complejo y no está pivotado a la bancada. *Bancada* se define como cualquier eslabón o eslabones que están fijos (inmóviles) con respecto al marco de referencia, aunque éste también puede estar en movimiento [2].

El concepto de *grado de libertad* (GDL), también llamado *movilidad* (M), es fundamental tanto para la síntesis como para el análisis de mecanismos. Es necesario ser capaz de determinar rápidamente el GDL de cualquier conjunto de eslabones o juntas que pueda ser sugerido como solución a un problema. Se define como el número mínimo de parámetros independientes requeridos para especificar la posición de cada uno de los eslabones de un mecanismo [1,2]. Los grados de libertad en un mecanismo representan el número de movimientos de entrada independientes que permiten conocer completamente la configuración del mecanismo. El grado de libertad de una articulación es igual al número de movimientos permitidos por dicha articulación.

Mecanismo plano

Un mecanismo plano es aquel mecanismo en el cual todos los movimientos de los eslabones que lo constituyen son paralelos a un mismo plano de referencia. Se distingue del *mecanismo espacial* en el cual los movimientos de los eslabones que lo constituyen, tienen lugar en más de un plano de referencia. Hay ejemplos de mecanismos planos considerados clásicos como el de corredera manivela, el de cuatro barras, leva y seguidor, engranajes, etc. El presente trabajo se orientará principalmente a la síntesis de un mecanismo plano que utiliza pares inferiores. La construcción de este tipo de mecanismos es relativamente sencilla y constituye una solución para una amplia variedad de problemas prácticos.

Para determinar el GDL global de cualquier mecanismo plano, se debe considerar el número de eslabones, así como las juntas y las interacciones entre ellos. El GDL de cualquier ensamble de eslabones se puede calcular con la *ecuación de Gruebler* [2].

$$M = 3(L - 1) - 2J_1 - J_2 \quad (1)$$

Donde: M = grado de libertad o movilidad

L = número de eslabones

J_1 = número de juntas de 1 GDL

J_2 = número de juntas de 2 GDL

El grado de libertad de un ensamble de eslabones predice por completo su condición. Existen sólo tres posibilidades. Si el GDL es positivo, será un *mecanismo* y los eslabones tendrán movimiento relativo. Si el GDL es exactamente cero entonces se tendrá una *estructura*, lo que significa que ningún movimiento es posible. Si el GDL es negativo, entonces se tendrá una estructura *precargada*, lo que significa que no será posible ningún movimiento y que algunos esfuerzos también pueden estar presentes en el momento del ensamble. Se puede considerar al eslabonamiento de cuatro barras como el mecanismo articulado más simple que permite el movimiento controlado con un grado de libertad simple. También es extremadamente variado en función de los tipos de movimiento que puede generar.

El estudio presentado en este trabajo se centra en el diseño de un sistema mecánico basado en un mecanismo cuatro barras, aplicable en la rehabilitación de pacientes con lesiones crónicas en la espina dorsal. Esta condición incide negativamente en los patrones funcionales de la marcha o incapacitan total o parcialmente al paciente para caminar. Una técnica para lograr dicha rehabilitación involucra el uso de un soporte para el sostenimiento gradual del peso del paciente, quien marcha sobre una máquina caminadora. Esta técnica ha dado buenos resultados y se ha probado tanto a nivel de pacientes humanos como de animales de laboratorio a los que se les produce, de manera intencional, distintos niveles de incapacidad. Se realizan actualmente investigaciones que buscan establecer si esta forma de entrenamiento puede activar la generación de un patrón de caminado, al nivel de la espina dorsal del paciente. El sostenimiento del peso puede lograrse por diversos medios que se discuten en el presente trabajo, a los que se agrega la propuesta presentada que consiste del diseño de un dispositivo de baja inercia capaz de modular el intercambio de energía potencial, que fluctúa durante el proceso de caminado, con la energía almacenada en un elemento elástico. Se plantea un análisis de la cinemática y dinámica del mecanismo modulador y la construcción de un prototipo del sistema.

El presente trabajo se encuentra organizado como sigue. En el Capítulo 1 se identifica la necesidad o problema a abarcar y su investigación preliminar de las tecnologías y productos similares existentes, así como el planteamiento de objetivo. En el Capítulo 2 se explora el tema de síntesis de mecanismos, donde se determina el movimiento requerido o deseado y la adecuación de un mecanismo que produzca dicho movimiento. El análisis del mecanismo en lo que se refiere al comportamiento cinemático y análisis dinámico se presenta en el Capítulo 3. En el Capítulo 4 se presenta la evaluación del mecanismo definitivo y la creación de prototipo y pruebas. Por último, se dan las conclusiones.

Capítulo 1

Antecedentes y alcances del proyecto

En la era tecnológica actual, las máquinas y mecanismos ocupan un papel primordial. Éstos se encuentran presente en muchas de las actividades del ser humano, desde la vida cotidiana hasta los sectores productivos y de servicios, incluyendo los de información. Con los notables avances realizados en el diseño de instrumentos, controles automáticos y equipo automatizado, el estudio de los mecanismos toma un nuevo significado.

Un campo de aplicación del área de síntesis y diseño de mecanismos que recientemente ha recibido considerable atención, es la aplicación en el campo de la rehabilitación neurológica. Por ejemplo, en los últimos años se ha introducido el uso de caminadoras y el equipo de soporte parcial de peso del cuerpo para rehabilitar los patrones de la marcha en pacientes portadores de diferentes enfermedades neurológicas. La importancia del soporte del peso del paciente durante su rehabilitación, radica en que la persona no puede cargar su propio peso en sus extremidades inferiores por lo que necesita un soporte gradual de su peso mientras realiza sus ejercicios de rehabilitación de marcha, donde con la rehabilitación los músculos de sus piernas puedan en un futuro sostener su propio peso.

1.1. Análisis del patrón de marcha humana

El caminar puede parecer muy simple, pero en realidad es el producto de muchas interacciones complejas entre las fuerzas generadas en el cuerpo y fuerzas externas que actúan sobre ellas, coordinadas de manera que producen un patrón particular de movimiento, conocido como paso normal. Una de las características inherentes a la raza humana es la posibilidad de desplazamiento sobre sólo dos extremidades de manera prolongada en el tiempo. A continuación se presenta una descripción de su fisiología considerando la cinemática de los movimientos.

El conocimiento de la locomoción humana normal es la base del tratamiento sistemático y del manejo de la marcha patológica. La locomoción humana normal se ha descrito como una serie de movimientos alternantes, rítmicos, de las extremidades y del tronco que determinan un desplazamiento hacia delante del centro de gravedad. Más específicamente, la locomoción humana normal puede describirse enumerando algunas de sus características. Aunque existen pequeñas diferencias en la forma de la marcha de un individuo a otro, estas diferencias caen dentro de pequeños límites [3].

El ciclo de la marcha comienza cuando el pie contacta con el suelo y termina con el siguiente contacto con el suelo del mismo pie. Los dos mayores componentes del ciclo de la marcha son: la fase de apoyo y la fase de balanceo.

- *Fase de apoyo (60% del tiempo de cada ciclo):* Comienza con el contacto inicial del talón con el suelo y finaliza con el despegue del antepié (área metatarsal del pie, entre la planta del pie y los dedos).
- *Fase de balanceo u oscilación (40% del tiempo de cada ciclo):* Transcurre desde el instante del despegue del antepié, avanzando el pie en el aire como preparación del siguiente apoyo, hasta el contacto en el suelo.

Si se tiene en cuenta la duración de cada una de las fases, puede ser evidente que, sumando los ciclos que se están produciendo de manera simultánea en ambos miembros inferiores, en algún momento ambos pies se encuentran en contacto con el suelo. A éste nuevo periodo se le denomina *fase de doble apoyo*. Dentro de los múltiples aspectos que atañen a la marcha se abordarán aquellos que pueden ayudar a entender un análisis dinámico posterior, así como entender ciertos patrones patológicos.

1.1.1. Centro de gravedad

El *centro de gravedad* es un punto teórico en el cual un objeto puede ser balanceado (también llamado punto de equilibrio). El objeto se comporta como si su peso estuviera concentrado en ese punto. Puede estar dentro o fuera del objeto. También es el punto de aplicación de la resultante de la fuerza de la gravedad ejercida por la atracción terrestre sobre todas las partículas de la masa del cuerpo.

Las leyes de la mecánica establecen claramente que el mínimo gasto de energía se consigue cuando un cuerpo se mueve en línea recta, sin que el centro de gravedad se desvíe, tanto para arriba como para abajo, o de un lado a otro. Esta línea recta sería posible en la marcha normal si las extremidades inferiores terminaran en ruedas. Como no es esto lo que ocurre, el centro de gravedad del cuerpo se desvía de una línea recta, pero para la conservación de la energía, la desviación o desplazamiento debe quedarse a un nivel óptimo. Los desplazamientos del centro de gravedad durante la marcha son dos:

- *Desplazamiento horizontal*

Cuando una persona camina, no permanece siempre en el plano de la línea de progresión, sino que su cuerpo oscila de un lado a otro. Este desplazamiento lateral del centro de gravedad es de unos 5 cm. (ver Figura 1.1.a). La cabeza y el tronco desempeñan un papel pasivo durante la marcha, limitándose a mantenerse centrados por encima del área formada por los pies e inclinando el peso del cuerpo hacia la extremidad que apoya. La cintura escapular tiene un movimiento de rotación asíncrono con el de la pelvis. Esta asincronía se hace máxima en la carrera. En los extremos de la cintura escapular los brazos se comportan como péndulos que empiezan a oscilar. Por ello puede decirse que este sistema de rotación de la cintura escapular y balanceo de los brazos en sentido contrario a la pelviana constituye un sistema de amortiguación que proporciona mayor suavidad a la marcha [3,4].

- *Desplazamiento vertical*

Durante la marcha, el cuerpo experimenta un desplazamiento rítmico arriba y abajo. Este desplazamiento vertical tiene una íntima relación con la locomoción bipodal: en las fases de doble apoyo, el centro de gravedad se encuentra en el punto más bajo; en las fases de apoyo, el centro de gravedad alcanza el punto más alto. Se ha comprobado que la distancia entre estos dos puntos es de aproximadamente 5 cm. Por lo tanto, el cuerpo durante la marcha debe levantarse y bajarse a esta distancia, para lo que requiere un gasto energético.

Se ha comprobado también que el centro de gravedad en su desplazamiento describe una curva sinusoidal (ver Figura 1.1.b) que es la que demanda menor consumo energético. Para conseguir este desplazamiento sinusoidal del centro de gravedad existe una serie de movimientos coordinados de la extremidad inferior. La pelvis, la cadera y la rodilla actúan coordinadamente para disminuir la amplitud de la curva, mientras que la rodilla, el tobillo y el pie trabajan para suavizar los cambios de sentido de la curva. La pelvis contribuye al desplazamiento suave del centro de gravedad con 2 movimientos: uno en el plano horizontal y otro en el plano vertical. Para la desaceleración del centro de gravedad, en el momento de chocar el talón con el piso, la rodilla se flexiona frente a una creciente contracción del cuádriceps y el pie realiza una flexión plantar contra la acción del tibial anterior. Ambos movimientos acortan la pierna y absorben el impacto producido al chocar con el suelo. Una vez que el centro de gravedad ha sido desacelerado, el cuerpo necesita ser impulsado hacia arriba para pasar por encima de la pierna contraria, dando lugar al siguiente paso. Esto se realiza de la siguiente manera: la pierna es elongada por la extensión de la rodilla y la flexión plantar del pie, y el resultado de ambos movimientos es el despegue del talón y la aceleración del centro de gravedad [3,4].

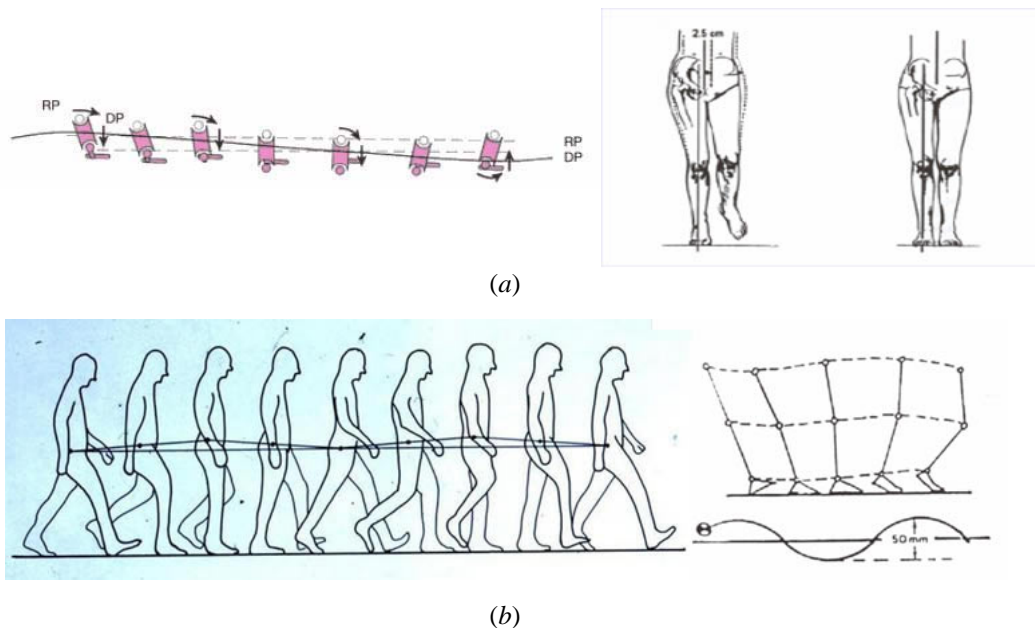


Figura 1.1. Desplazamiento del centro de gravedad: (a) Horizontal y (b) Vertical.

1.2. Rehabilitación de la marcha humana

La recuperación de la habilidad para caminar es un objetivo específico de la rehabilitación de pacientes con lesiones crónicas de la espina dorsal, accidente cerebro vascular (ACV) o esclerosis múltiple. Una lesión en la espina dorsal (SCI, por sus siglas en inglés: Spinal Cord Injury) ocurre como resultado de un evento importante, tal como un accidente automovilístico o una caída. Una lesión en la espina dorsal interfiere los mensajes entre el cerebro y el resto del cuerpo y tiene como resultado la parálisis y pérdida de sensibilidad debajo de donde ocurre la lesión.

El lugar en donde ocurre la lesión y la severidad de la misma determina las limitaciones físicas que tendrá la persona. La pérdida total o parcial de las facultades motrices en el hombre tiene una influencia de igual magnitud sobre la bipedestación y la marcha. La forma de restablecer en lo posible las facultades motrices pertenece a la rehabilitación como también pertenece la forma de reeducar la marcha cuando ella no es funcional. La mayoría de las enfermedades neurológicas inciden negativamente en los patrones funcionales de la marcha o incapacitan total o parcialmente al paciente para caminar.

Los pacientes con trastornos de marcha causados por diferentes lesiones del sistema nervioso, caídas o lesiones musculares, a menudo manifiestan incapacidad para soportar el peso corporal sobre los miembros afectados, ya sea por patrones anormales en el caminado o debilidad muscular. En otros casos cargan asimétricamente el peso sobre un miembro con el objeto de facilitar la transferencia del paso al deambular, reduciendo el equilibrio y aumentando la posibilidad de una caída. Existe un grupo de dispositivos de sostén que ayudan a realizar la marcha como es el caso de bastones, andadores, trípodes y cualquier otro dispositivo que permita la ambulación con una carga reducida sobre los miembros inferiores afectados.

La rehabilitación de la marcha es un aspecto importante de la rehabilitación neurológica. Hay un grupo importante de técnicas terapéuticas que tienen en común las siguientes metas de tratamiento:

1. Mejorar la fuerza muscular en miembros inferiores.
2. Aumentar la estabilidad funcional y el equilibrio para desarrollar la marcha.
3. Facilitar el aprendizaje de los patrones normales de movimiento.
4. Mejorar el control de la postura y el movimiento.
5. Aumentar las capacidades físicas para la ambulación.
6. Lograr buen control de tronco y de desplazamiento de peso.

En los últimos años se ha difundido por el mundo el uso en la rehabilitación de diferentes enfermedades neurológicas usando una caminadora eléctrica para el entrenamiento de la marcha. Este dispositivo se combina con un equipo de soporte parcial del peso del cuerpo (ver Figura 1.2). Este procedimiento ha dado buenos resultados y ha sido reportado en la literatura de manera creciente durante los últimos cinco años. Esta técnica se ha probado tanto a nivel de pacientes humanos como de animales de laboratorio a los que se les produce, de manera intencional, distintos niveles de incapacidad [5].

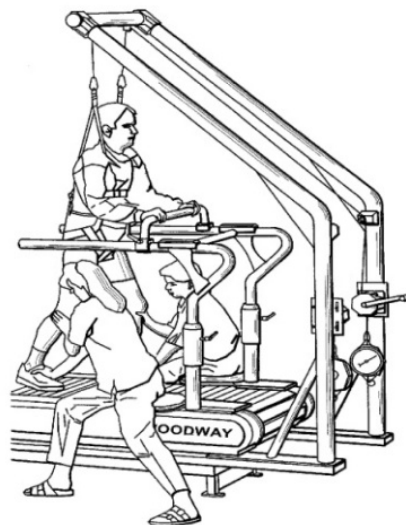


Figura 1.2. Técnica de rehabilitación con el uso de una caminadora eléctrica y un equipo de soporte parcial del peso.

Con la introducción de estas nuevas técnicas para reeducar y reaprender la marcha en pacientes con incapacidad para realizarla, se ha obtenido un impacto positivo en la rehabilitación de una gama bastante amplia de pacientes con diferentes enfermedades neurológicas.

El entrenamiento de la marcha en la caminadora con la ayuda del arnés, permite el ajuste e incremento del peso corporal para la corrección y la mejoría en la misma, permitiendo que cada sesión de rehabilitación sea adaptada a las necesidades individuales del paciente. La carga soportada por las extremidades inferiores del paciente se incrementa gradualmente hasta sostenerse por completo sobre sí mismo mientras que continúa desarrollando patrones apropiados del paso de la marcha, teniendo un impacto importante en su rehabilitación para corregir el paso, el balance y la coordinación.

Se ha postulado que las variables de la marcha, tales como cadencia del paso, duración del ciclo, tiempo de postura, tiempo de oscilación, velocidad de la marcha y longitud del paso tienen correlación directa con el nivel de la función, es decir, un mayor nivel de función repercutirá en una mayor calidad en la marcha.

Las estrategias estándares para la enseñanza de la marcha usando este tipo de dispositivos, tienen los siguientes objetivos:

- Mejorar el control de la postura de la flexión-extensión de la rodilla.
- Aumentar la capacidad de apoyar totalmente el peso corporal.
- Crear una fase de desplazamiento en el ciclo del paso más largo.

La capacidad de controlar la cantidad de peso corporal en la postura de bipedestación, en los músculos de los miembros inferiores, permite un reentrenamiento del mecanismo de la carga basado en las capacidades de cada paciente. El que los pacientes caminen más lentamente a través de una cadencia de paso reducida, corrigiendo la misma hasta lograr mayores valores en la longitud del paso, permite que practiquen un paso favorable caracterizado por un mayor estímulo para el entrenamiento del balance debido a períodos más largos de la postura del o los miembros paréticos o afectados.

El entrenamiento en la plataforma móvil con descarga parcial de peso corporal permite a los pacientes corregir la marcha con mayor calidad en la misma, entrenando en diferentes ciclos de velocidad de la marcha. En estudios clínicos, el entrenamiento ha probado ser superior con respecto a la restauración y la mejora de la velocidad del paso en piso, en pacientes hemiparéticos (con disminución de fuerza motora en extremidades) crónicos. Esto da lugar a una actividad disminuida de los músculos antigravitatorios del lado afectado [6].

Se puede concluir planteando que el entrenamiento de la marcha en la plataforma móvil con descarga parcial del peso corporal, ofrece las ventajas del entrenamiento orientado a la función con repeticiones numerosas de un patrón supervisado de marcha. El entrenamiento podría por lo tanto convertirse en una herramienta para recuperar la capacidad de caminar en un período de tiempo más corto.

En el caso de una condición como la paraplejía, inicialmente dos terapeutas asisten al movimiento de modo que los pacientes entrenan el paso no solamente en forma repetitiva sino también de una manera correcta [6]. Los protocolos de tratamiento deben, por lo tanto, ser adaptables a las necesidades y a las capacidades individuales de cada paciente y deben llevar gradualmente al paciente a soportar totalmente su peso corporal para una marcha más completa, revirtiendo los patrones anormales de marcha, por una marcha cualitativamente superior.

1.3. Estado del arte

Como se mencionó anteriormente, el sostener el peso del paciente para su entrenamiento puede lograrse con sistemas tan sencillos como una polea ubicada sobre el paciente. Enrollada a la polea puede colocarse un cable en cuyo extremo se coloca un arnés con el que se sujete al paciente y en el otro extremo, un peso similar al del mismo o simplemente se traba el cable que sujeta al paciente por medio de un cabrestante.

Existen bastantes equipos a la venta así como patentes en sus diferentes formas, diseñados con el propósito de rehabilitación en reeducación de la marcha. De igual modo, la complejidad de estos equipos varía desde los más simples hasta los que involucran un control activo para el sostenimiento gradual del paciente (ver Figura 1.3).



Figura 1.3. Diferentes configuraciones de sistemas de rehabilitación de la marcha

En resumen se pueden clasificar las configuraciones de los sistemas para soporte del peso del paciente en la rehabilitación de marcha como sigue (ver Figura 1.4):

- A. Atrancamiento del cable que soporta al paciente por medio de un cabrestante.
- B. Colocar un peso similar al del paciente del otro lado de la polea que sostiene al paciente.
- C. La unión de un resorte a un punto fijo y al arnés que sostiene al paciente.
- D. El uso de sistemas activos para el control del peso del paciente.

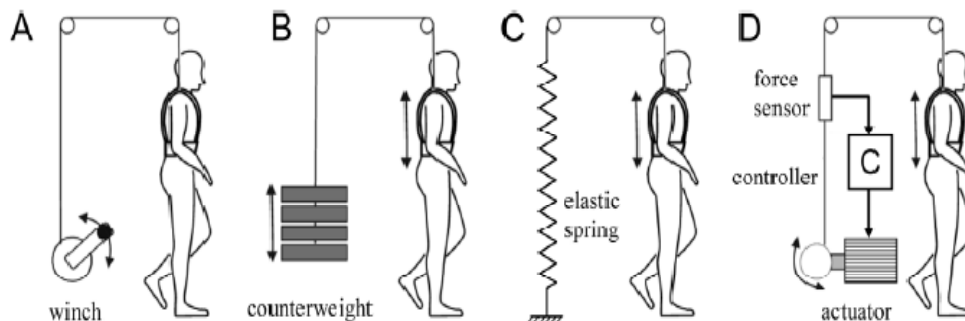


Figura 1.4. Principales formas de soporte del paciente.

La desventaja de las soluciones A y B radica en que la inercia del dispositivo puede producir fuerzas no deseadas que se transmiten al paciente a través del arnés, al acelerarse y desacelerarse verticalmente el extremo del cable durante el caminado. Como la posición del centro de gravedad del paciente tiende a fluctuar durante la marcha normal, este desplazamiento no puede realizarse cuando el cable se fija y en el caso del peso se sentirían aún más las fuerzas del arnés hacia el paciente si éstas tuvieran la libertad de moverse verticalmente.

La desventaja de la alternativa C radica en la variación de la fuerza vertical ejercida sobre el paciente, proporcional a la rigidez del resorte y al desplazamiento vertical del centro de masa del paciente. La restricción de la alternativa D radica en el costo del sistema, ya que se involucra el uso de sensores y actuadores para lograr compensar el movimiento vertical del centro de gravedad del paciente y seguir sosteniéndolo.

Otras soluciones complejas involucran la creación de dispositivos que modulan el intercambio de energía potencial que se produce por el desplazamiento vertical del paciente durante el caminado y la energía almacenada por medio, de un resorte. La restricción de este tipo de dispositivos radica en la limitada capacidad del mecanismo para generar la función específica que permita la citada modulación de energía potencial.

Así, el presente trabajo tiene como *objetivo* desarrollar un dispositivo de baja inercia que permita la modulación precisa del proceso de intercambio de energía potencial con el paciente debido a la alteración del centro de gravedad que ocurre durante la marcha normal, para un buen soporte del paciente cuando éste realice sus ejercicios de rehabilitación y reeducación de la marcha.

Se establecieron las siguientes exigencias:

- Solución, la más sencilla posible.
- Modulación del proceso de transferencia de energía del peso del paciente con la energía que almacena un resorte.
- Sostenimiento del peso total y parcial del paciente durante la rehabilitación.
- Eliminación de fuerzas indeseables a través del dispositivo de soporte hacia el paciente.
- Dispositivo de baja inercia.
- Fácil operación.
- Bajo costo en comparación con los dispositivos utilizados actualmente.

En los siguientes capítulos se presentan aspectos relacionados con el diseño del mecanismo modulador, así como las pruebas experimentales realizadas con un prototipo.

Capítulo 2

Síntesis de generadores de funciones

La síntesis de un mecanismo consiste en encontrar la geometría (dimensiones y tipo de articulaciones) de dicho mecanismo que proporcione las características deseadas de un movimiento previamente definido. Al aplicar la síntesis al diseño de un mecanismo, el problema se divide en tres partes: a) el tipo de mecanismo que se debe emplear mediante el cual se pueda generar el movimiento deseado considerando procesos de manufactura, materiales a utilizar, confiabilidad, repetitividad, espacio disponible y costos, entre otros, b) el número de eslabones y conexiones necesarios para producir el movimiento requerido y c) las proporciones o longitudes individuales de los eslabones, de tal manera que el mecanismo cumpla con el rango de amplitudes del movimiento requerido. A estas divisiones se les conoce como *síntesis de tipo*, *síntesis de número* y *síntesis dimensional*, respectivamente [7].

Dentro de la *síntesis dimensional* existen tres tipos de síntesis para generar el movimiento deseado:

1. *Generador de funciones.*
2. *Síntesis para la generación de trayectoria.*
3. *Síntesis para la conducción de cuerpo rígido.*

En éste capítulo se definirá el movimiento requerido para la necesidad descrita en el capítulo anterior, así como la descripción de los diferentes métodos de síntesis utilizados para definir la configuración del mecanismo a utilizar para que éste reproduzca dicho movimiento.

2.1. Función moduladora

Como ya se mencionó, realizar la síntesis de un mecanismo consiste en encontrar las características del mismo, para reproducir un movimiento previamente definido. El movimiento que se desea generar parte del problema del sostenimiento del paciente cuando éste realiza sus ejercicios de rehabilitación y su centro de gravedad fluctúa verticalmente provocando los problemas mencionados en el capítulo 1.

La energía potencial es la energía que posee un cuerpo en virtud de su posición. No es una propiedad de un cuerpo sino de un sistema, pues depende de la elección de un nivel de referencia (NR) [8]. Si, en este caso, el cuerpo en cuestión es el de un paciente representado como un bloque de masa m en el extremo de una polea y como el centro de gravedad de esta persona se desplaza verticalmente, se puede establecer que su energía potencial varía (ver Figura 2.1) con respecto a un sistema de referencia establecido por debajo de la carga. Así, la variación de energía potencial gravitatoria al desplazarse un cuerpo de masa m desde una altura h_1 hasta una altura h_2 es:

$$\Delta E = mg(h_2 - h_1) \quad (2.1)$$

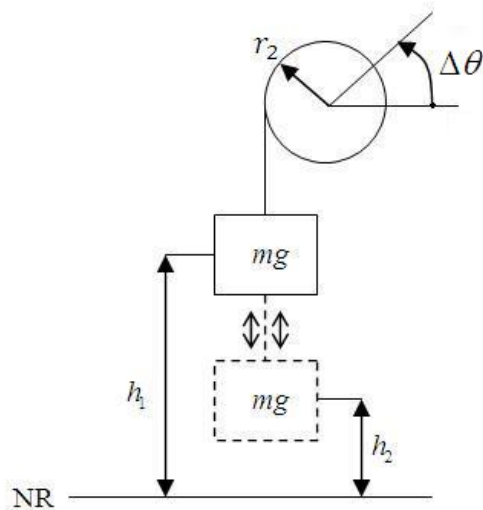


Figura 2.1. Esquema representativo de una carga que varía verticalmente.

Se puede observar en la Figura 2.1 que la diferencia de las posiciones de la carga es proporcional al desplazamiento de la polea, esto es:

$$(h_2 - h_1) = r_2 \Delta\theta \quad (2.2)$$

Se observa que la energía potencial disminuye conforme se desplaza la carga hacia abajo y aumenta conforme se regresa hacia su posición original. Así, se establece que la energía potencial gravitatoria en la carga, cuando ésta fluctúa verticalmente, es:

$$E = mgr_2 \Delta\theta \quad (2.3)$$

Esta energía se desea modular al intercambiarse con la energía potencial elástica que almacena un resorte. Cuando se estira un resorte, una fuerza variable hace un trabajo sobre éste. Conforme el resorte está estirado cada vez más, la fuerza de restauración del resorte se hace más grande y es necesario aplicar una fuerza mayor. Se encuentra que la fuerza F aplicada es directamente proporcional al desplazamiento o al cambio de longitud del resorte, es decir [8]:

$$F = k\Delta x = k(x_2 - x_1) \quad (2.4)$$

En donde k es una constante de proporcionalidad denominada constante del resorte y cuyas unidades son fuerza sobre unidad de longitud y x es el desplazamiento del resorte. El trabajo ejercido al resorte de x_1 a x_2 se obtiene de manera [8]:

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{1}{2} k(x_2^2 - x_1^2) \quad (2.5)$$

Este trabajo sobre un resorte se convierte en la energía potencial elástica del mismo, que en términos generales puede plantearse como:

$$E_e = \frac{1}{2} kx^2 \quad (2.6)$$

Si en otra polea colocamos un resorte como se muestra en la Figura 2.2 el desplazamiento del resorte (x) es:

$$x = r_4 \theta_{40} \quad (2.7)$$

Donde la posición $\theta_{40} = 0$ define la condición en la que el resorte no se encuentra esforzado, mientras que $\theta_{20} = 0$ establece la posición de referencia de la masa m .

Para modular el intercambio de energía, se considera que en el estado 1 la carga ha experimentado un cierto desplazamiento debido al giro inicial θ_{20} de la polea que la conecta y tiene una energía potencial inicial. De igual modo, el resorte también se encuentra extendido debido al giro inicial θ_{40} de la polea que la conecta, almacenando energía potencial elástica inicial. Al igualar estas energías, se tiene:

$$mgr_2 \theta_{20} = \frac{1}{2} k (r_4 \theta_{40})^2 \quad (2.8)$$

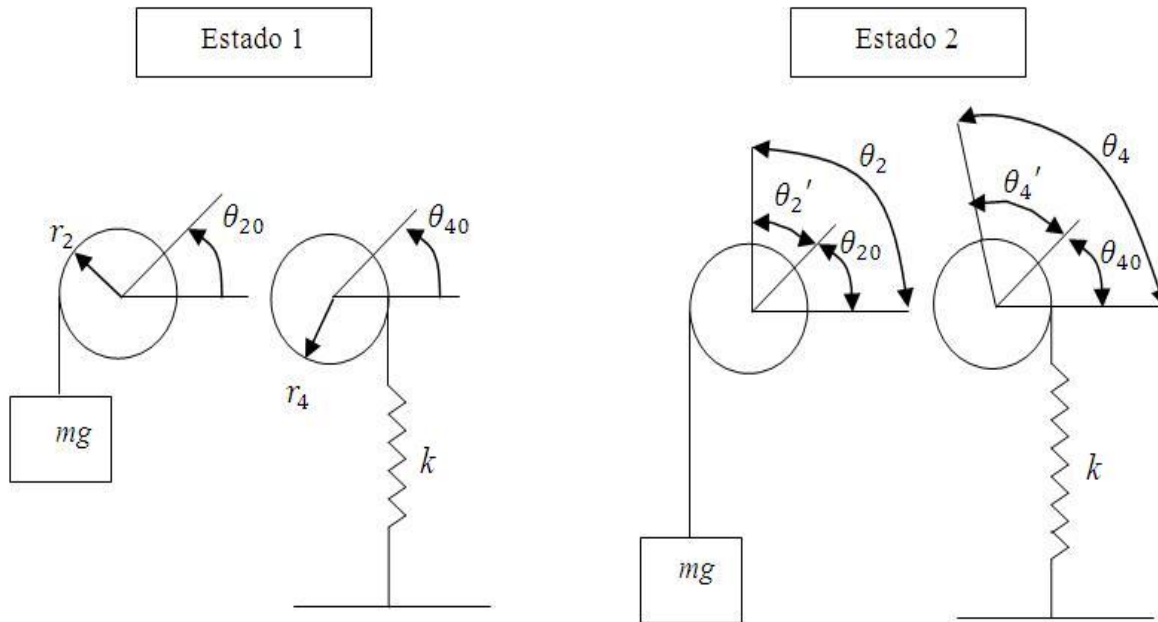


Figura 2.2. Estados de las posiciones de la carga y resorte.

En el estado 2 aumenta el desplazamiento de la carga, que es lo que pasa con el centro de gravedad del paciente cuando éste realiza su rehabilitación de marcha. A su vez, el resorte también aumenta su desplazamiento de manera que se realiza el intercambio de energía, es decir, la carga pierde energía potencial y el resorte gana energía potencial elástica y viceversa. Así, para que la variación de energías potenciales sean iguales en magnitud en todo momento conforme se desplace la carga se tiene:

$$mgr_2 (\theta_{20} + \theta_2') = \frac{1}{2} k (r_4)^2 (\theta_{40} + \theta_4')^2 \quad (2.9)$$

Se observa en la Figura 2.2 que:

$$\theta_2 = \theta_2' + \theta_{20} \quad (2.10)$$

$$\theta_4 = \theta_4' + \theta_{40} \quad (2.11)$$

Sustituyendo θ_2 y θ_4 en la ecuación 2.9 se obtiene:

$$mgr_2(\theta_2) = \frac{1}{2}k(r_4)^2(\theta_4)^2 \quad (2.12)$$

Se puede entonces establecer una relación entre el giro de entrada θ_2 debido al desplazamiento de la carga verticalmente y el giro de salida θ_4 para modular la transferencia de energía entre la carga y el resorte. Despejando θ_4 de la ecuación 2.12 se obtiene:

$$\theta_4 = \sqrt{\frac{2mgr_2}{kr_4^2}}\theta_2 \quad (2.13)$$

Se obtiene entonces la función deseada para la modulación de energía de tal manera que $\theta_4 = f(\theta_2)$ donde todos los parámetros son conocidos. Se muestra en la Figura 2.3 la función graficada para cada valor de entrada θ_2 y su correspondiente valor θ_4 , dando valores arbitrarios de la masa, gravedad, constante de rigidez del resorte, radios de las poleas, definidos todos en la misma figura y $0^\circ \leq \theta_2 \leq 360^\circ$.

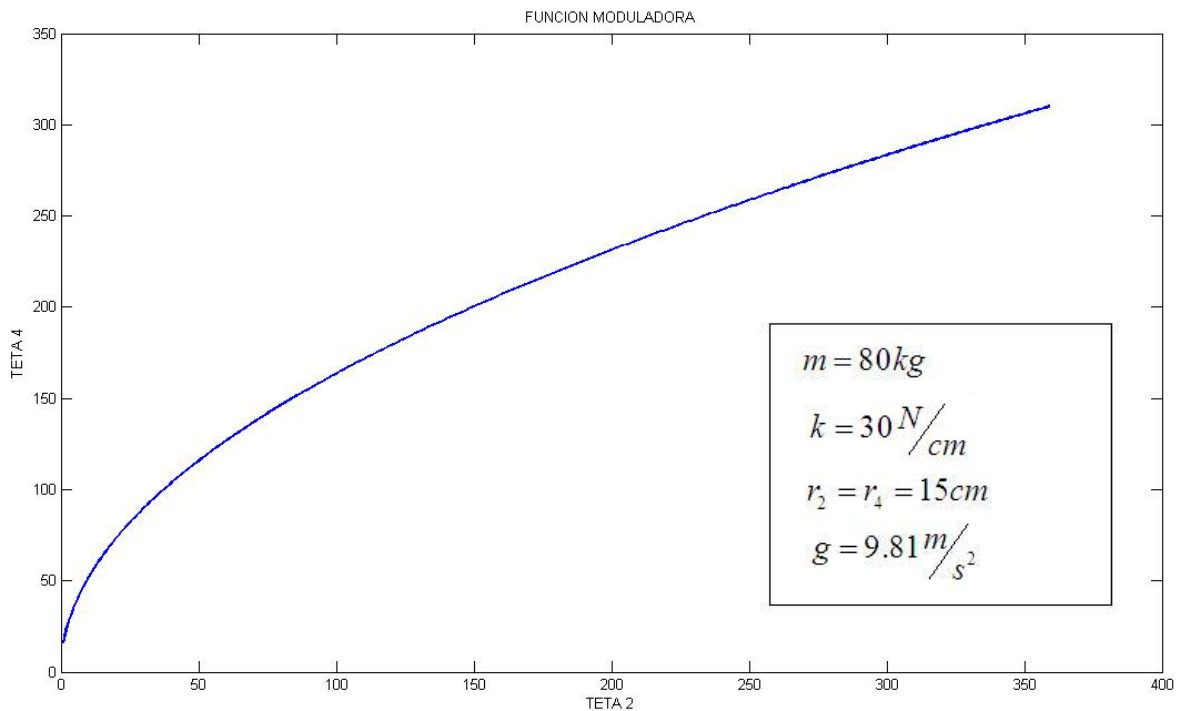


Figura 2.3. Función moduladora.

2.2. Síntesis de tipo y número

Como ya se mencionó, para efectuar la síntesis de un mecanismo se necesita definir el movimiento específico deseado para que el mecanismo sintetizado lo reproduzca. Así, el movimiento que se desea se describió anteriormente y se requiere un movimiento de rotación-rotación, es decir, el movimiento de entrada es de rotación así como el movimiento de salida. Se observa también que se necesita un mecanismo de un solo grado de libertad para generar el movimiento de la polea que sujeta al paciente. Mientras éste realiza su rehabilitación de marcha, cuando su centro de gravedad fluctúa verticalmente, se tendrá el movimiento oscilante θ_2 de entrada. Se busca un movimiento de oscilación de salida θ_4 en la polea donde se encuentra el resorte, relacionando ambos desplazamientos como se establece en la ecuación (2.13).

Para generar dicho movimiento se pueden utilizar engranes, bandas y poleas o mecanismos de eslabones articulados. Este tipo de mecanismos, por el tipo de movimiento y como ya se mencionó en la introducción, son la primera posibilidad a explorar en el problema de diseño ya que presentan muchas ventajas como la sencillez y facilidad de fabricación. Además, pueden funcionar en ambientes hostiles, son menos sensibles a errores de fabricación y pueden manejar cargas elevadas. Por lo tanto, por estas ventajas se elige como opción un mecanismo de eslabones articulados.

El eslabonamiento más sencillo dentro de los mecanismos eslabonados, es el de cuatro barras. Esta es la opción inicial lógica para sugerirlo como tipo de mecanismo para generar el movimiento prescrito anteriormente.

2.2.1. Mecanismo de 4 barras

Como ya se mencionó anteriormente, el mecanismo 4 barras se presenta como uno de los más empleados a la hora de resolver muchos problemas de generación de movimientos en mecanismos de un grado de libertad. Se eligió para generar el movimiento previamente definido en la ecuación (2.13).

El mecanismo de 4 barras es un mecanismo formado por tres barras móviles y una cuarta barra fija unidas mediante pares cinemáticos de revoluta y se enumeran de la siguiente manera (ver Figura 2.4):

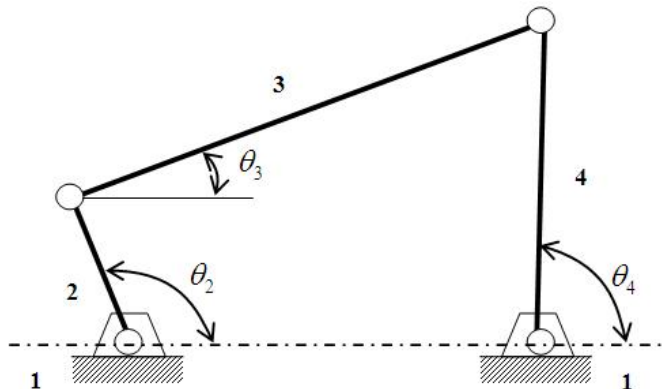


Figura 2.4. Mecanismo de 4 barras articuladas

El eslabón 1 es el marco o base y es fijo. El eslabón 2 es el eslabón de entrada o motriz, el cual puede girar completamente o puede oscilar. El eslabón 3 es el eslabón acoplador, el cual generalmente describe una trayectoria compleja. El eslabón 4 es el eslabón de salida, que también puede oscilar o girar completamente

dependiendo de la configuración del mecanismo. El ángulo θ_2 es la variable de entrada y generalmente es conocida. El ángulo θ_4 es la variable de salida y el ángulo θ_3 es la variable del eslabón acoplador.

Para cualquier valor del ángulo de entrada θ_2 , el mecanismo de cuatro barras se puede ensamblarse o armar según dos configuraciones distintas. Estas dos configuraciones representan la ramificación del mecanismo, como se observa en la Figura 2.5.

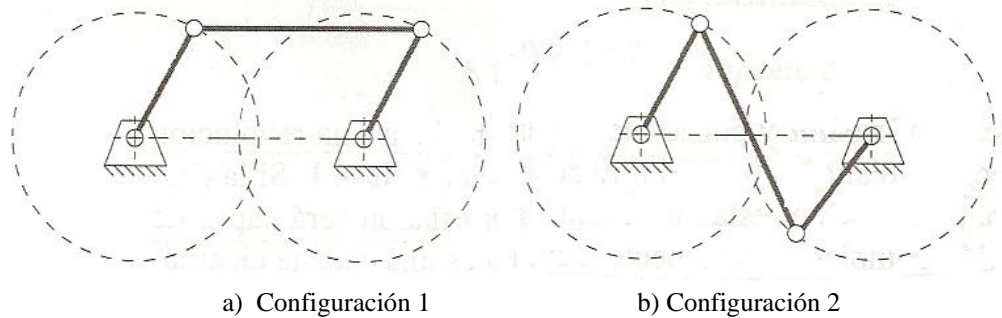


Figura 2.5. Configuraciones en el mecanismo 4 barras.

La condición de *Grashof* [7] es una relación muy simple que predice el comportamiento de rotación o rotabilidad de las inversiones de un eslabonamiento de cuatro barras, basado solo en las longitudes de los eslabones.

Sea:

S = longitud del eslabón más corto

L = longitud del eslabón más largo

P = longitud de un eslabón restante

Q = longitud del último eslabón restante

Entonces sí:

$$S + L \leq P + Q \quad (2.14)$$

El eslabonamiento cumple la condición de *Grashof* y por lo menos un eslabón será capaz de realizar una revolución completa con respecto al plano de bancada. Ésta se llama cadena cinemática de clase I [2]. Si la desigualdad no es cierta, entonces el eslabonamiento no cumple la condición de *Grashof* y ningún eslabón será capaz de realizar una revolución completa con respecto a cualquier otro eslabón. Esta es una cadena cinemática de clase II.

Los movimientos posibles de un mecanismo de cuatro barras dependerán tanto de la condición de *Grashof* como de la inversión elegida. Las inversiones se definirán con respecto al eslabón más corto. Los movimientos son:

En el caso de la clase I donde $S + L < P + Q$, si se fija cualquier eslabón adyacente al más corto, se obtiene un mecanismo *manivela-balancín*, donde el eslabón más corto girará por completo y el otro eslabón oscilará pivotado a la bancada (ver Figura 2.6a).

Si se fija el eslabón más corto, se obtendrá una *doble-manivela*, en la que ambos eslabones pivotados a la bancada realizan revoluciones completas, así como lo hace el acoplador (ver Figura 2.6b).

Si se fija el eslabón opuesto al más corto, se obtendrá un *doble-balancín de Grashof*, en el que ambos eslabones pivotados a la bancada oscilan y sólo el acoplador realiza una revolución completa (ver Figura 2.6c).

En el caso de la clase II donde $S + L > P + Q$, todas las inversiones serán *balancines triples*, en los que ningún eslabón puede girar por completo (ver Figura 2.6d).

En el caso de la clase III donde $S + L = P + Q$, conocida como *caso especial de Grashof*, todas las inversiones serán *dobles-manivelas* o *manivela-balancín*, pero tendrán puntos de cambio dos veces por revolución de la manivela de entrada cuando todos los eslabones se vuelven colineales. En estos puntos de cambio el comportamiento de salida se volverá indeterminado. El comportamiento del mecanismo es entonces impredecible ya que puede asumir cualquiera de dos configuraciones. Su movimiento debe ser limitado para evitar que alcance los puntos de cambio (ver Figura 2.6e).

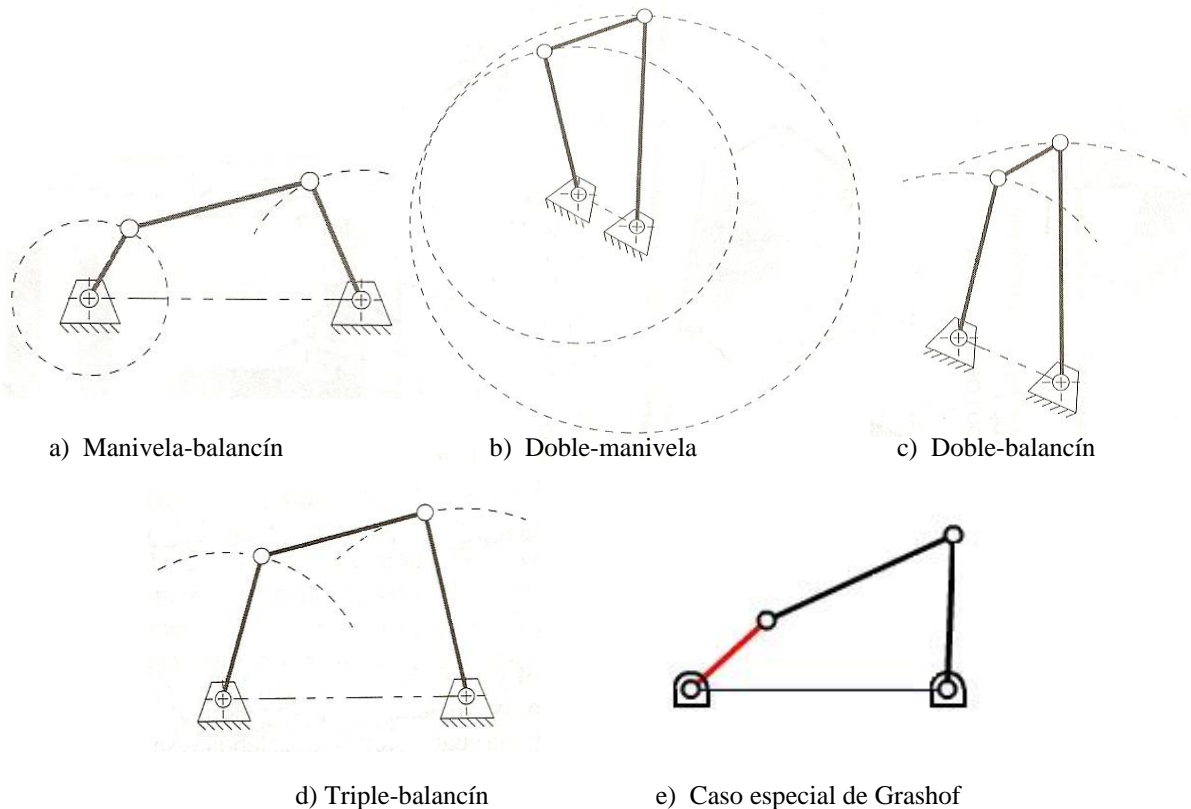


Figura 2.6 Movimientos posibles en un mecanismo cuatro barras.

2.3 Síntesis dimensional

La síntesis dimensional de un mecanismo de eslabones articulados es la determinación de las proporciones (longitudes) de los eslabones necesarios para lograr los movimientos deseados. Como ya se mencionó anteriormente, los problemas principales en la síntesis cinemática se pueden clasificar en tres categorías: generación de funciones, generación de trayectorias y guía de cuerpos rígidos.

Generador de funciones. Este tipo de síntesis consiste en obtener las dimensiones de un mecanismo de una manera tal que exista una correlación de un movimiento de entrada con un movimiento de salida en el mecanismo.

Síntesis para la generación de trayectoria. En este caso se obtienen las dimensiones geométricas del mecanismo que sean adecuadas para generar una determinada trayectoria específica. Por lo general, la trayectoria la genera un punto en un eslabón del mecanismo.

Síntesis para la conducción de cuerpo rígido. En este caso la síntesis dimensional se realiza con el objetivo que un cuerpo rígido pase a través de una serie de configuraciones deseadas. Por lo general, el cuerpo rígido va unido a un eslabón del mecanismo.

Mediante la síntesis de tipo y número resultó que el mecanismo de eslabonamientos articulados de cuatro barras es el más indicado para realizar la función prescrita anteriormente en la ecuación (2.13) para la modulación de transferencia de energía potencial de un paciente que realiza su rehabilitación de marcha con la energía potencial elástica que almacena un resorte debido a la variación vertical de su centro de gravedad.

Para continuar con la síntesis del mecanismo de cuatro barras y una vez definido el movimiento que se quiere generar con dicho mecanismo, se establece que el movimiento pertenece a la síntesis cinemática de generador de funciones. El mecanismo generador de función utiliza al eslabón 2 como el eslabón de entrada y toma la salida del eslabón 4. La *función* generada es la relación entre los ángulos del eslabón 2 y el eslabón 4 de tal manera que $\theta_4 = f(\theta_2)$ y reproduzca la función deseada.

Se observa en la Figura 2.7 un esquema de la configuración del mecanismo generador de función, de tal forma que se obtendrán las longitudes de los eslabones l_1, l_2, l_3 y l_4 respectivamente.

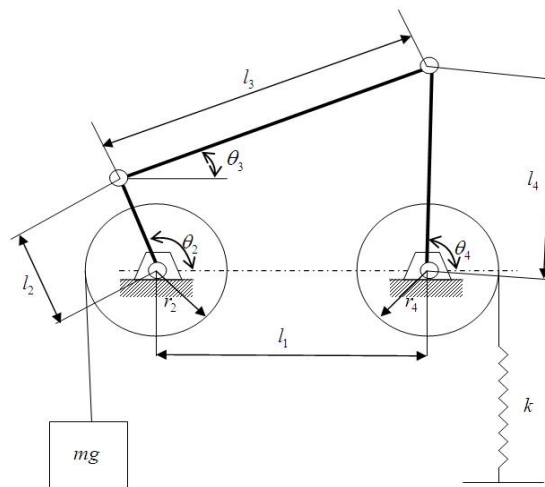


Figura 2.7. Esquema general del mecanismo

Al diseñar un mecanismo para generar una función particular, generalmente la función resultante es exacta solo en un número finito de puntos, conocidos como *puntos de precisión*. En otras palabras, la función ideal o deseada y la función generada por el mecanismo generador de función realmente concuerdan solamente en los puntos de precisión. En los demás puntos de la función deseada, la función generada por el mecanismo difiere de la ideal en una cantidad que depende de la distancia entre los puntos de precisión y de la naturaleza de la función ideal.

En el presente trabajo se realizaron 5 tipos de síntesis para el mecanismo generador de función, las cuales parten todas de la ecuación de *Freudenstein* [9] que se describe a continuación.

De acuerdo al diagrama del mecanismo 4 barras de la Figura 2.8, se establecen ecuaciones de restricción para dicho mecanismo mediante ecuaciones de cierre de circuito, esto es, la suma de los componentes x y y de los eslabones debe ser cero.

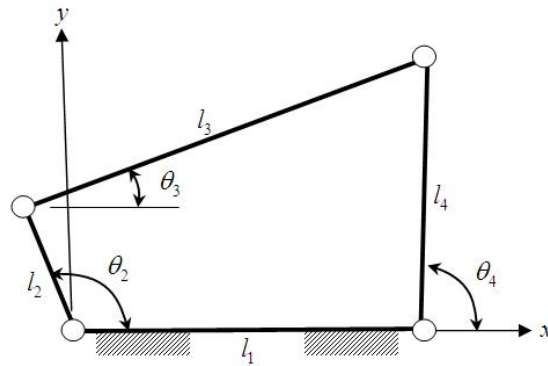


Figura 2.8. Mecanismo 4 barras

Así:

$$l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 - l_4 \cos \theta_4 - l_1 = 0 \quad (2.15)$$

$$l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 - l_4 \sin \theta_4 = 0 \quad (2.16)$$

Como se observa, las variables conocidas son los ángulos de entrada θ_2 y los ángulos de salida θ_4 ya que $\theta_4 = f(\theta_2)$ y se desconocen las longitudes de los eslabones así como los ángulos del eslabón acoplador. Se busca una ecuación que relacione el ángulo de entrada con el ángulo de salida y las longitudes de los eslabones sin que aparezca el ángulo del eslabón acoplador.

Elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones (2.15) y (2.16) se obtiene

$$l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 + l_4^2 + 2l_1l_4 \cos \theta_4 - 2l_1l_2 \cos \theta_2 = 2l_4l_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) \quad (2.17)$$

Dividiendo entre $2l_2l_4$,

$$\left(\frac{l_1}{l_2}\right) \cos \theta_4 - \left(\frac{l_1}{l_4}\right) \cos \theta_2 + \left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 + l_4^2}{2l_2l_4}\right) = \cos(\theta_2 - \theta_4) \quad (2.18)$$

Haciendo

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{l_1}{l_2} \\
 K_2 &= \frac{l_1}{l_4} \\
 K_3 &= \frac{l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 + l_4^2}{2l_2l_4}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

La ecuación 2.18 queda como

$$K_1 \cos \theta_4 - K_2 \cos \theta_2 + K_3 = \cos(\theta_2 - \theta_4) \tag{2.20}$$

En donde K_1 , K_2 y K_3 son tres relaciones laterales independientes llamadas *coeficientes de diseño*. La ecuación (2.20) es la llamada ecuación de *Freudenstein* y da la relación más simple posible entre θ_2 y θ_4 .

A partir de los coeficientes de diseño se pueden determinar las longitudes de los eslabones. Se propone la longitud del eslabón 1 que esta fijo para conocer las longitudes de los demás eslabones entonces, si l_1 es conocida

$$\begin{aligned}
 l_2 &= \frac{l_1}{K_1} \\
 l_4 &= \frac{l_1}{K_2} \\
 l_3 &= \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_4^2 - 2l_2l_4K_3}
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

2.3.1 Síntesis para tres puntos de precisión

Utilizando la ecuación de Freudenstein ahora se utilizara un método de síntesis para cubrir el diseño de un mecanismo de eslabones articulados de cuatro barras para generar una función que sea exacta en tres puntos [10].

Se seleccionan tres pares de puntos de precisión para θ_2 y θ_4 donde los valores de θ_2 son los ángulos deseados de entrada y θ_4 los ángulos de salida resultantes de la función deseada $\theta_4 = f(\theta_2)$; establecida en la ecuación (2.13) así, se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\theta_{2,1}, \theta_{4,1}) \\ (\theta_{2,2}, \theta_{4,2}) \\ (\theta_{2,3}, \theta_{4,3}) \end{array} \right\}$$

Estos tres pares de ángulos que corresponden a los puntos de precisión se sustituyen en la ecuación de Freudenstein, lo cual da tres ecuaciones simultáneas. Estas ecuaciones son lineales para los coeficientes de diseño K_1 , K_2 y K_3 entonces

$$\begin{aligned} K_1 \cos \theta_{4,1} - K_2 \cos \theta_{2,1} + K_3 &= \cos(\theta_{4,1} - \theta_{2,1}) \\ K_1 \cos \theta_{4,2} - K_2 \cos \theta_{2,2} + K_3 &= \cos(\theta_{4,2} - \theta_{2,2}) \\ K_1 \cos \theta_{4,3} - K_2 \cos \theta_{2,3} + K_3 &= \cos(\theta_{4,3} - \theta_{2,3}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Las ecuaciones resultantes se resuelven para K_1 , K_2 y K_3 utilizando álgebra matricial

$$Y = AX \quad (2.23)$$

Donde,

$$\begin{aligned} Y &= [\cos(\theta_{4,1} - \theta_{2,1}) \quad \cos(\theta_{4,2} - \theta_{2,2}) \quad \cos(\theta_{4,3} - \theta_{2,3})]^T \\ X &= [K_1 \quad K_2 \quad K_3]^T = \text{Coeficientes de diseño} \\ A &= \begin{bmatrix} \cos \theta_{4,1} & -\cos \theta_{2,1} & 1 \\ \cos \theta_{4,2} & -\cos \theta_{2,2} & 1 \\ \cos \theta_{4,3} & -\cos \theta_{2,3} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La solución entonces es

$$X = A^{-1}Y \quad (2.24)$$

A partir de los coeficientes de diseño K_1 , K_2 y K_3 encontrados se pueden determinar las longitudes de los eslabones con las ecuaciones (2.21) donde se tiene que proponer la longitud del eslabón fijo para obtener las longitudes de los demás eslabones.

2.3.2 Síntesis para cuatro puntos de precisión

Utilizando la ecuación de Freudenstein, de igual manera que la síntesis anterior, ahora se utilizará un método de síntesis para el diseño de un mecanismo de eslabones articulados de cuatro barras usado para generar una función que utilice cuatro puntos de precisión [11].

Se seleccionan cuatro pares de puntos de precisión para θ_2 y θ_4 donde los valores de θ_2 son los ángulos deseados de entrada y θ_4 los ángulos de salida resultantes de la función deseada (2.13).

Así, se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} (\theta_{2,1}, \theta_{4,1}) \\ (\theta_{2,2}, \theta_{4,2}) \\ (\theta_{2,3}, \theta_{4,3}) \\ (\theta_{2,4}, \theta_{4,4}) \end{array} \right\}$$

Estos cuatro pares de ángulos que corresponden a los puntos de precisión se sustituyen en la ecuación de Freudenstein, lo cual da cuatro ecuaciones con solo tres incógnitas K_1 , K_2 y K_3 . El método para resolverlas es sumando 2 ecuaciones para así tener tres ecuaciones con tres incógnitas K_1 , K_2 y K_3 .

$$\begin{aligned}
 K_1[\cos \theta_{4,1} + \cos \theta_{4,2}] - K_2[\cos \theta_{2,1} + \cos \theta_{2,2}] + 2K_3 &= \cos(\theta_{4,1} - \theta_{2,1}) + \cos(\theta_{4,2} - \theta_{2,2}) \\
 K_1 \cos \theta_{4,3} - K_2 \cos \theta_{2,3} + K_3 &= \cos(\theta_{4,3} - \theta_{2,3}) \\
 K_1 \cos \theta_{4,4} - K_2 \cos \theta_{2,4} + K_3 &= \cos(\theta_{4,4} - \theta_{2,4})
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Las ecuaciones resultantes se resuelven para K_1 , K_2 y K_3 utilizando álgebra matricial

$$Y = AX \tag{2.26}$$

Donde,

$$Y = [\cos(\theta_{4,1} - \theta_{2,1}) + \cos(\theta_{4,2} - \theta_{2,2}) \quad \cos(\theta_{4,3} - \theta_{2,3}) \quad \cos(\theta_{4,4} - \theta_{2,4})]^T$$

$$X = [K_1 \quad K_2 \quad K_3]^T = \text{Coeficientes de Diseño}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta_{4,1} + \cos \theta_{4,2} & -(\cos \theta_{2,1} + \cos \theta_{2,2}) & 2 \\ \cos \theta_{4,3} & -\cos \theta_{2,3} & 1 \\ \cos \theta_{4,4} & -\cos \theta_{2,4} & 1 \end{bmatrix}$$

La solución entonces es

$$X = A^{-1}Y \tag{2.27}$$

A partir de los coeficientes de diseño K_1 , K_2 y K_3 encontrados se pueden determinar las longitudes de los eslabones con las ecuaciones (2.21), donde se tiene que proponer la longitud del eslabón fijo para obtener las longitudes de los demás eslabones.

2.3.3 Síntesis para cinco puntos de precisión

Utilizando la ecuación de Freudenstein, ahora se utilizará un método de síntesis para el diseño de un mecanismo de eslabones articulados de cuatro barras que genere una función con cinco puntos de precisión [11].

En éste método la función que se desea, se establece de la forma $y = f(x)$ y se aproxima por una función deseada $\theta_4 = f(\theta_2)$, en este caso,

$$y = \sqrt{\frac{2mgr_2}{kr_4^2}} x \tag{2.28}$$

El factor de escala para la función a representar es:

$$\frac{\theta_2 - \theta_{2I}}{x - X_I} = \frac{\theta_{2F} - \theta_{2I}}{X_F - X_I} \quad (2.29)$$

$$\frac{\theta_4 - \theta_{4I}}{y - Y_I} = \frac{\theta_{4F} - \theta_{4I}}{Y_F - Y_I}$$

Donde X_I y X_F son valores arbitrarios escogidos inicial y final respectivamente.

De los valores seleccionados X_I y X_F se obtienen $Y_I = f(X_I)$ y $Y_F = f(X_F)$. Se seleccionan 5 pares de puntos, donde x_i está dentro del intervalo $X_I \leq x_i \leq X_F$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1, y_1 \\ x_2, y_2 \\ x_3, y_3 \\ x_4, y_4 \\ x_5, y_5 \end{array} \right\}$$

Se establecen los rangos para los ángulos $\Delta\theta_2$ y $\Delta\theta_4$:

$$\theta_{2,i} = \frac{x_i - X_I}{X_F - X_I} \Delta\theta_2 + \theta_{2I} \quad (2.30)$$

$$\theta_{4,i} = \frac{y_i - Y_I}{Y_F - Y_I} \Delta\theta_4 + \theta_{4I}$$

Se sustituyen los ángulos $\theta_{2,i}$ y $\theta_{4,i}$, $i = 1, \dots, 5$, en la ecuación de Freudenstein obteniendo 5 ecuaciones no lineales conteniendo las 5 incógnitas $K_1, K_2, K_3, \theta_{2I}, \theta_{4I}$ con los rangos de los ángulos de entrada y salida $\Delta\theta_2$ y $\Delta\theta_4$ conocidos.

$$K_1 \cos \left[\frac{y_i - Y_I}{Y_F - Y_I} \Delta\theta_4 + \theta_{4I} \right] - K_2 \cos \left[\frac{x_i - X_I}{X_F - X_I} \Delta\theta_2 + \theta_{2I} \right] + K_3 = \cos \left[\frac{x_i - X_I}{X_F - X_I} \Delta\theta_2 + \theta_{2I} - \left(\frac{y_i - Y_I}{Y_F - Y_I} \Delta\theta_4 + \theta_{4I} \right) \right] \quad (2.31)$$

donde $i = 1, \dots, 5$

Las ecuaciones se solucionan por el método numérico de Newton-Raphson [12] para sistemas de ecuaciones no lineales. Se proponen valores iniciales o actuales para $K_1, K_2, K_3, \theta_{2I}, \theta_{4I}$

$$X_{act} = [K_1 \quad K_2 \quad K_3 \quad \theta_{2I} \quad \theta_{4I}] \quad (2.32)$$

Se calculan nuevos valores para $K_1, K_2, K_3, \theta_{2I}, \theta_{4I}$

$$X_{new} = X_{ant} - J^{-1}f(X_{ant}) \quad (2.33)$$

Donde,

$$J = \text{Jacobiano} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(X_{ant})}{\partial K_1} & \frac{\partial f_1(X_{ant})}{\partial K_2} & \frac{\partial f_1(X_{ant})}{\partial K_3} & \frac{\partial f_1(X_{ant})}{\partial \theta_{2I}} & \frac{\partial f_1(X_{ant})}{\partial \theta_{4I}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_5(X_{ant})}{\partial K_1} & \frac{\partial f_5(X_{ant})}{\partial K_2} & \frac{\partial f_5(X_{ant})}{\partial K_3} & \frac{\partial f_5(X_{ant})}{\partial \theta_{2I}} & \frac{\partial f_5(X_{ant})}{\partial \theta_{4I}} \end{pmatrix}$$

El proceso se repite hasta obtener los valores óptimos. A partir de los coeficientes de diseño K_1, K_2 y K_3 encontrados se pueden determinar las longitudes de los eslabones con las ecuaciones (2.21) donde se tiene que proponer la longitud del eslabón fijo para obtener las longitudes de los demás eslabones.

2.3.4 Síntesis de tres derivadas

Utilizando la ecuación de Freudenstein, ahora se utilizará un método de síntesis para el diseño de un mecanismo de eslabones articulados de cuatro barras que genere la función deseada a partir de un punto (θ_2, θ_4) y los tres valores de las derivadas correspondientes de la función $\theta_4 = f(\theta_2)$ [13,14].

$$\theta_4 = \sqrt{\frac{2mgr_2}{kr_4^2}} \theta_2$$

Se tiene

$$h_4 = \frac{d\theta_4}{d\theta_2}$$

$$h_4' = \frac{d^2\theta_4}{d\theta_2^2} \quad (2.34)$$

$$h_4'' = \frac{d^3\theta_4}{d\theta_2^3}$$

A partir de la ecuación de Freudenstein se deriva sucesivamente con respecto a θ_2 resultando

$$\begin{aligned} K_2 \sin \theta_2 + K_1(a_1 \sin \theta_4 + b_1 \cos \theta_4) &= (c_1 \cos \theta_4 + d_1 \sin \theta_4) \sin \theta_2 + (-c_1 \sin \theta_4 + d_1 \cos \theta_4) \cos \theta_2 \\ K_2 \cos \theta_2 + K_1(a_2 \sin \theta_4 + b_2 \cos \theta_4) &= (c_2 \cos \theta_4 + d_2 \sin \theta_4) \sin \theta_2 + (-c_2 \sin \theta_4 + d_2 \cos \theta_4) \cos \theta_2 \\ K_2 \sin \theta_2 + K_1(a_3 \sin \theta_4 + b_3 \cos \theta_4) &= (c_3 \cos \theta_4 + d_3 \sin \theta_4) \sin \theta_2 + (-c_3 \sin \theta_4 + d_3 \cos \theta_4) \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Donde

i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	$-h_4$	0	$-(1-h_4)$	0
2	$-h_4'$	$-h_4^2$	h_4'	$-(1-h_4)^2$
3	$h_4'' - h_4^3$	$3h_4 h_4'$	$-h_4'' - (1-h_4)^3$	$-3h_4'(1-h_4)$

Se definen las siguientes variables

$$E_i = a_i \sin \theta_4 + b_i \cos \theta_4$$

$$D_i = c_i \cos \theta_4 + d_i \sin \theta_4 \quad (2.36)$$

$$F_i = -c_i \sin \theta_4 + d_i \cos \theta_4$$

Resulta

$$\begin{aligned} K_2 \sin \theta_2 + K_1 E_1 &= D_1 \sin \theta_2 + F_1 \cos \theta_2 \\ K_2 \sin \theta_2 + K_1 E_2 &= D_2 \sin \theta_2 + F_2 \cos \theta_2 \\ K_2 \sin \theta_2 + K_1 E_3 &= D_3 \sin \theta_2 + F_3 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Se toman las 2 primeras ecuaciones con $i = 1$ y $i = 2$

$$K_2 \sin \theta_2 + K_1 E_1 = D_1 \sin \theta_2 + F_1 \cos \theta_2 \quad (2.38)$$

$$K_2 \sin \theta_2 + K_1 E_2 = D_2 \sin \theta_2 + F_2 \cos \theta_2$$

Se resuelven las ecuaciones (2.38) para K_1 y K_2 en términos de θ_2 .

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & \sin \theta_2 \\ E_2 & \sin \theta_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D_1 \sin \theta_2 + F_1 \cos \theta_2 \\ D_2 \sin \theta_2 + F_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Si el ángulo θ_2 es desconocido y solo se cuenta con el ángulo de salida θ_4 , se obtiene la solución cuadrática de la siguiente ecuación

$$\tan^2 \theta_2 \lambda_1 + \tan \theta_2 \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad (2.40)$$

Donde,

$$\lambda_1 = D_2(E_3 - E_1) + E_2(D_1 - D_3)$$

$$\lambda_2 = E_2(F_1 - F_3) - D_1 E_3 + E_1 D_3 + F_2(E_3 - E_1)$$

$$\lambda_3 = E_1 F_3 - F_1 E_3$$

Así

$$\tan \theta_2 = \frac{-\lambda_2 \pm \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1\lambda_3}}{2\lambda_1} \quad (2.41)$$

Se sustituyen K_1 y K_2 en la ecuación de Freudenstein para obtener K_3

$$K_3 = \cos(\theta_2 - \theta_4) - K_2 \cos \theta_2 + K_1 \cos \theta_4 \quad (2.42)$$

Se observa que

(h_4, h_4', h_4'') conduce a los valores de (a_i, b_i, c_i, d_i) además,

$(\theta_4, a_i, b_i, c_i, d_i)$ conduce a los valores de (E_i, D_i, F_i) y también,

(E_i, D_i, F_i) conduce al valor de θ_2 , si es desconocido, y a los valores de (K_1, K_2, K_3)

A partir de los coeficientes de diseño K_1 , K_2 y K_3 encontrados se pueden determinar las longitudes de los eslabones con las ecuaciones (2.21), donde se tiene que proponer la longitud del eslabón fijo para obtener las longitudes de los demás eslabones.

2.3.5 Síntesis de aproximación por mínimos cuadrados

Utilizando la ecuación de Freudenstein, ahora se utilizará un método de síntesis para cubrir el diseño de un mecanismo de eslabones articulados de cuatro barras para generar una función, utilizando un número cualquiera finito de puntos deseados [15,16].

Se seleccionan m pares de puntos para θ_2 y θ_4 donde los valores de θ_2 son los ángulos deseados de entrada y θ_4 los ángulos de salida resultantes de la función deseada $\theta_4 = f(\theta_2)$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\theta_{2,1}, \theta_{4,1}) \\ \vdots \\ (\theta_{2,m}, \theta_{4,m}) \end{array} \right\} \text{ de la ecuación (2.13)}$$

En la ecuación de Freudenstein se observa que los coeficientes de diseño están presentes de forma lineal, por lo tanto, se puede establecer un arreglo matricial de la siguiente forma para m puntos:

$$Y = AX + E \quad (2.43)$$

Donde,

$$Y = [\cos(\theta_{2,1} - \theta_{4,1}) \quad \cdots \quad \cos(\theta_{2,m} - \theta_{4,m})]^T$$

$$E = [e_1 \quad \cdots \quad e_m]^T = \text{Errores residuales.}$$

$$X = [K_1 \quad K_2 \quad K_3] = \text{Coeficientes de diseño.}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta_{4,1} & -\cos \theta_{2,1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \theta_{4,m} & -\cos \theta_{2,m} & 1 \end{bmatrix}$$

El principio de mínimos cuadrados selecciona, como opción óptima para los parámetros desconocidos, el valor particular de \hat{X} que minimiza la suma de los cuadrados de los errores residuales:

$$\min J = \sum_{j=1}^m e_j^2 = E^T E \quad (2.44)$$

Usando la expresión (2.43) se deriva $E = Y - A\hat{X}$ y se obtiene:

$$J = Y^T Y - 2Y^T A\hat{X} + \hat{X}^T A^T A\hat{X} \quad (2.45)$$

La minimización de ésta función requiere que se satisfagan las siguientes condiciones:

- Condición necesaria:

$$\nabla_{\hat{X}} J = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial K_1} \\ \frac{\partial J}{\partial K_2} \\ \frac{\partial J}{\partial K_3} \end{bmatrix} = -2A^T Y + 2A^T A\hat{X} = 0 \quad (2.46)$$

- Condición suficiente:

La condición de suficiencia se satisface cuando la siguiente matriz es positiva definida (es decir que sus eigenvalores sean positivos),

$$\nabla_{\hat{X}}^2 J = 2 \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial K_1^2} & \frac{\partial^2 J}{\partial K_1 \partial K_2} & \frac{\partial^2 J}{\partial K_1 \partial K_3} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial K_2 \partial K_1} & \frac{\partial^2 J}{\partial K_2^2} & \frac{\partial^2 J}{\partial K_2 \partial K_3} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial K_3 \partial K_1} & \frac{\partial^2 J}{\partial K_3 \partial K_2} & \frac{\partial^2 J}{\partial K_3^2} \end{bmatrix} = 2A^T A \quad (2.47)$$

A partir de la condición necesaria se puede obtener una solución para el valor óptimo de los coeficientes de diseño K_1 , K_2 y K_3

$$\hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T Y \quad (2.48)$$

Donde la matriz $A^T A$ se define como,

$$A^T A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m (\cos \theta_{4,i})^2 & -\sum_{i=1}^m \cos \theta_{4,i} \cos \theta_{2,i} & \sum_{i=1}^m \cos \theta_{4,i} \\ & \sum_{i=1}^m (\cos \theta_{2,i})^2 & -\sum_{i=1}^m \cos \theta_{2,i} \\ \text{Simétrica} & & m \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Y la matriz $A^T Y$ como

$$A^T Y = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \cos \theta_{4,i} \cos(\theta_{2,i} - \theta_{4,i}) \\ -\sum_{i=1}^m \cos \theta_{2,i} \cos(\theta_{2,i} - \theta_{4,i}) \\ \sum_{i=1}^m \cos(\theta_{2,i} - \theta_{4,i}) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Como se explicó anteriormente, a partir de los coeficientes de diseño K_1 , K_2 y K_3 encontrados se pueden determinar las longitudes de los eslabones con las ecuaciones (2.21), proponiendo la longitud del eslabón fijo para obtener las longitudes de los demás eslabones.

En el capítulo siguiente se describe el análisis cinemático y dinámico del mecanismo de eslabonamientos articulado de 4 barras para poder evaluar y determinar, en el último capítulo, cuál síntesis es la que proporciona la configuración del mecanismo más eficiente.

Capítulo 3

Análisis cinemático y dinámico del mecanismo

El mecanismo a utilizar para la modulación de transferencia de energía, es el mecanismo de eslabonamientos articulados de cuatro barras para reproducir el movimiento deseado. Se usaron distintos métodos de síntesis resumidos en el capítulo anterior, en el cual también se definieron sus características geométricas (dimensiones y tipo de articulaciones). Es necesario realizar un análisis del mecanismo para conocer su comportamiento cinemático y dinámico. Para realizar estos análisis es necesario tener el conocimiento de las características geométricas de dicho mecanismo.

3.1 Análisis cinemático

El análisis cinemático de mecanismos es un procedimiento que consiste en predecir su posición, velocidad y aceleración, a partir del conocimiento de las características geométricas de dicho mecanismo. El enfoque usado es el de análisis cinemático articulado, el cual tiene que ver con los movimientos relativos que existen dentro de los eslabones del mecanismo. A estos movimientos generalmente se les designa mediante variables que representan a los desplazamientos que son permitidos por las distintas articulaciones que conforman al mecanismo y por tal motivo, se le da el nombre de variables articulares. Como resultado de éste análisis se pretenden obtener las variables articulares desconocidas en función de las variables articuladas conocidas (movimientos de entrada) así como sus primeras derivadas (velocidades articulares) y sus segundas derivadas (aceleraciones articulares) con respecto al tiempo [10,11].

Antes de realizar este análisis, primeramente se deben seleccionar las variables necesarias de tal manera que estas representen adecuadamente a todos y cada uno de los movimientos permitidos por las articulaciones del mecanismo. Con lo anterior se podrá conocer de manera completa la configuración del mecanismo en cualquier instante.

3.1.1 Análisis de posición articular

Plantear el problema de posición articular de un mecanismo significa obtener sus ecuaciones de restricción. Al plantear una ecuación de restricción deben de entenderse claramente las condiciones de validez de dicha ecuación; por ejemplo, si esta es válida para cualquier instante de tiempo, para determinadas configuraciones, para ciertos intervalos de variación de ángulos variables, etc. Por lo general, el número de ecuaciones de restricción debe ser tal que se involucren a todas las variables que definen el mecanismo.

El mecanismo de eslabonamientos articulados de cuatro barras es de un solo grado de libertad, lo que significa que se requiere sólo de un parámetro para definir, por completo, las posiciones de todos los demás eslabones. El parámetro o variable conocida del mecanismo de cuatro barras es el ángulo θ_2 del eslabón de

entrada, también se conocen las longitudes l_1, l_2, l_3 y l_4 de los eslabones y el problema consiste en encontrar las variables desconocidas θ_3 y θ_4 .

De acuerdo al diagrama cinemático auxiliar del mecanismo 4 barras de la Figura 2.8 se establecieron las ecuaciones de restricción (2.15) y (2.16). Para obtener θ_4 en función de θ_2 se despeja θ_3 de estas ecuaciones.

$$l_3 \cos \theta_3 = l_1 + l_4 \cos \theta_4 - l_2 \cos \theta_2 \quad (3.1)$$

$$l_3 \sin \theta_3 = l_4 \sin \theta_4 - l_2 \sin \theta_2 \quad (3.2)$$

. Elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones (3.1) y (3.2) se obtiene,

$$(-2l_4l_2 \sin \theta_2) \sin \theta_4 + (2l_1l_4 - 2l_4l_2 \cos \theta_2) \cos \theta_4 + l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 + l_4^2 - 2l_1l_2 \cos \theta_2 = 0 \quad (3.3)$$

Resultando una ecuación de la forma

$$A \sin \theta + B \cos \theta + C = 0$$

Así su solución es:

$$\theta_4 = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{C - B} \right) \quad (3.4)$$

Donde,

$$A = -2l_4l_2 \sin \theta_2$$

$$B = 2l_1l_4 - 2l_4l_2 \cos \theta_2$$

$$C = l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 + l_4^2 - 2l_1l_2 \cos \theta_2$$

Para obtener θ_3 , de las ecuaciones (3.1) y (3.2)

$$\cos \theta_3 = \frac{l_1 + l_4 \cos \theta_4 - l_2 \cos \theta_2}{l_3} \quad (3.5)$$

$$\sin \theta_3 = \frac{l_4 \sin \theta_4 - l_2 \sin \theta_2}{l_3} \quad (3.6)$$

Para satisfacer las ecuaciones (3.5) y (3.6)

$$\theta_3 = 2 \tan^{-1} \left(\frac{\sin \theta_3}{1 + \cos \theta_3} \right) \quad (3.7)$$

La ecuación (3.4) tiene dos soluciones, que representan las formas de ensamblar el mecanismo (ramas del mecanismo). Si el discriminante dentro del radical es negativo, la solución es compleja conjugada, lo cual significa que las longitudes elegidas de los eslabones no son capaces de conectarse con el valor elegido del ángulo de entrada θ_2 .

3.1.2 Análisis de velocidad articular

Una vez que se analiza la posición, el siguiente paso es determinar las velocidades de todos los eslabones en el mecanismo. Para realizar este análisis, se derivan con respecto al tiempo las ecuaciones de restricción. Como resultado de ello se obtendrá un sistema lineal de ecuaciones, donde las incógnitas serán las primeras derivadas con respecto al tiempo (velocidades articulares) de las variables articulares desconocidas $\dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4$, suponiendo la velocidad articular de entrada $\dot{\theta}_2$ conocida, así como las posiciones articulares θ_2, θ_3 y θ_4 .

Derivando las ecuaciones (2.15) y (2.16) con respecto al tiempo se tiene:

$$-\dot{\theta}_2 l_2 \sin \theta_2 - l_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 + l_4 \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 = 0 \quad (3.8)$$

$$l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + l_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 - l_4 \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 = 0 \quad (3.9)$$

Despejando $\dot{\theta}_3$ de la ecuación 3.8 se obtiene

$$\dot{\theta}_3 = \frac{l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - l_4 \dot{\theta}_4 \sin \theta_4}{-l_3 \sin \theta_3} \quad (3.10)$$

Despejando $\dot{\theta}_4$ y sustituyendo $\dot{\theta}_3$ de la ecuación (3.9) se obtiene

$$\dot{\theta}_4 = \frac{l_2 \dot{\theta}_2 \cot \theta_3 \sin \theta_2 - l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2}{l_4 \cot \theta_3 \sin \theta_4 - l_4 \cos \theta_4} \quad (3.11)$$

Así, $\dot{\theta}_4$ está en función de la variable conocida $\dot{\theta}_2$ y, conociendo estas dos variables, se obtiene $\dot{\theta}_3$ con la ecuación (3.10).

3.1.3 Análisis de aceleración articular

Una vez que se analiza la posición y velocidad, el siguiente paso es determinar las aceleraciones de todos los eslabones en el mecanismo. La importancia del análisis de aceleración reside en el hecho de que las fuerzas a las que están sujetos los mecanismos son directamente proporcionales a la aceleración que éstos experimentan.

Para realizar este análisis, se derivan dos veces las ecuaciones de restricción con respecto al tiempo. Como resultado de ello se obtiene también un sistema de ecuaciones lineales donde las incógnitas serán las segundas derivadas con respecto al tiempo (aceleraciones articulares) de las variables articulares desconocidas $\ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_4$, donde la aceleración articular de entrada $\ddot{\theta}_2$ se supone conocida, así como las velocidades articulares $\dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ y $\dot{\theta}_4$ y posiciones articulares θ_2, θ_3 y θ_4 .

Derivando dos veces las ecuaciones (2.15) y (2.16) con respecto al tiempo se tiene:

$$-l_2\ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 - l_2\dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 - l_3\ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 - l_3\dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 + l_4\ddot{\theta}_4 \sin \theta_4 + l_4\dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 = 0 \quad (3.12)$$

$$l_2\ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - l_2\dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + l_3\ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 - l_3\dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 - l_4\ddot{\theta}_4 \cos \theta_4 + l_4\dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 = 0 \quad (3.13)$$

Despejando $\ddot{\theta}_3$ de la ecuación (3.12) se obtiene

$$\ddot{\theta}_3 = \frac{-l_2\ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 - l_2\dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 - l_3\dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 + l_4\ddot{\theta}_4 \sin \theta_4 + l_4\dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4}{l_3 \sin \theta_3} \quad (3.14)$$

Despejando $\ddot{\theta}_4$ y sustituyendo $\ddot{\theta}_3$ de la ecuación (3.13) se obtiene

$$\ddot{\theta}_4 = \frac{l_2\ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - l_2\dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 - l_3\dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 + l_4\dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 + \cot \theta_3 (-l_2\ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 - l_2\dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 - l_3\dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 + l_4\dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4)}{l_4 \cos \theta_4 - l_4 \cot \theta_3 \sin \theta_4} \quad (3.15)$$

Así $\ddot{\theta}_4$ está en función de la variable conocida $\ddot{\theta}_2$ y, conociendo éstas dos variables, se obtiene $\ddot{\theta}_3$ de la ecuación (3.14).

3.1.4 Aceleraciones lineales de los centros de gravedad

Para completar el análisis cinemático se determinan las aceleraciones lineales de los centros de gravedad del mecanismo a lo largo de los ejes coordenados, debido a las aceleraciones angulares de los eslabones.

Se observa en la figura 3.1 un esquema representativo de la configuración del mecanismo de eslabonamientos cuatro barras, sus eslabones y las poleas donde se encuentra la carga y el resorte. Se establece el sistema de ejes coordenados x, y en el punto 0.

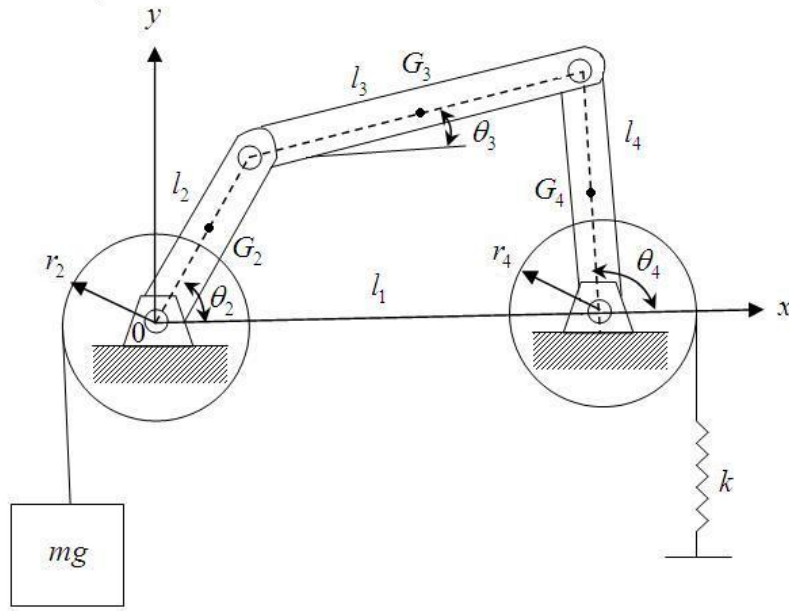


Figura 3.1. Esquema del mecanismo

El vector al centro de gravedad del eslabón dos, considerando su geometría como una barra prismática y uniforme, es:

$$\vec{r}_{G_2} = \left(\frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \right) \hat{i} + \left(\frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \right) \hat{j} \quad (3.16)$$

Se deriva el vector \vec{r}_{G_2} con respecto al tiempo para encontrar la velocidad lineal del centro de gravedad del eslabón dos, así

$$\dot{\vec{r}}_{G_2} = \left(-\frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \right) \hat{i} + \left(\frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \right) \hat{j} \quad (3.17)$$

Se deriva dos veces el vector \vec{r}_{G_2} con respecto al tiempo para encontrar la aceleración lineal del centro de gravedad del eslabón dos, obteniéndose:

$$\ddot{\vec{r}}_{G_2} = \left(-\frac{l_2}{2} \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 - \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 \right) \hat{i} + \left(\frac{l_2}{2} \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 \right) \hat{j} = a_{2x} \hat{i} + a_{2y} \hat{j} \quad (3.18)$$

Así

$$a_{2x} = -\frac{l_2}{2} \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 - \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 \quad (3.19)$$

$$a_{2y} = \frac{l_2}{2} \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 \quad (3.20)$$

El vector de posición del centro de gravedad del eslabón 3, nuevamente considerando su geometría como una barra prismática uniforme, es:

$$\vec{r}_{G3} = \left(l_2 \cos \theta_2 + \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 \right) \hat{i} + \left(l_2 \sin \theta_2 + \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 \right) \hat{j} \quad (3.21)$$

La velocidad lineal del centro de gravedad del eslabón 3 es:

$$\dot{\vec{r}}_{G3} = \left(-l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 \right) \hat{i} + \left(l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 \right) \hat{j} \quad (3.22)$$

La aceleración lineal del centro de gravedad del eslabón 3 resulta:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_{G3} = & \left(-l_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 - \frac{l_3}{2} \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 - \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 \right) \hat{i} + \\ & \left(l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + \frac{l_3}{2} \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 - \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 \right) \hat{j} = a_{3x} \hat{i} + a_{3y} \hat{j} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Así

$$a_{3x} = -l_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 - \frac{l_3}{2} \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 - \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 \quad (3.24)$$

$$a_{3y} = l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + \frac{l_3}{2} \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 - \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 \quad (3.25)$$

El vector de posición del centro de gravedad del eslabón 4 es; bajo la consideración de ser una barra prismática uniforme, es:

$$\vec{r}_{G4} = \left(l_1 + \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 \right) \hat{i} + \left(\frac{l_4}{2} \sin \theta_4 \right) \hat{j} \quad (3.26)$$

La velocidad lineal del centro de gravedad del eslabón 4 resulta:

$$\dot{\vec{r}}_{G4} = \left(-\frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 \right) \hat{i} + \left(\frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 \right) \hat{j} \quad (3.27)$$

y la aceleración lineal del centro de gravedad del eslabón 4 es:

$$\ddot{\vec{r}}_{G4} = \left(-\frac{l_4}{2} \ddot{\theta}_4 \sin \theta_4 - \frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 \right) \hat{i} + \left(\frac{l_4}{2} \ddot{\theta}_4 \cos \theta_4 - \frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 \right) \hat{j} = a_{4x} \hat{i} + a_{4y} \hat{j} \quad (3.28)$$

Así

$$a_{4,x} = -\frac{l_4}{2}\ddot{\theta}_4 \sin \theta_4 - \frac{l_4}{2}\dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 \quad (3.29)$$

$$a_{4,y} = \frac{l_4}{2}\ddot{\theta}_4 \cos \theta_4 - \frac{l_4}{2}\dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 \quad (3.30)$$

3.2 Análisis dinámico

Una vez que se ha utilizado la síntesis y el análisis cinemático, se continúa con el análisis dinámico. Este análisis tiene como propósito determinar las fuerzas y los pares de torsión en el sistema debido al movimiento que presentan los eslabones en el mecanismo, ya que los componentes principales en lo que se llama dinámica de sistemas mecánicos son la fuerza y el movimiento. En éste análisis, el movimiento es conocido por predicciones analíticas basadas en el análisis cinemático [2].

Para determinar las fuerzas y los pares presentes en todos los eslabones del mecanismo de eslabonamientos articulados de cuatro barras, se utiliza la segunda ley de Newton aplicada al movimiento plano de translación y rotación de un cuerpo rígido. Debe señalarse que al usar la segunda ley de Newton, es necesario dibujar un diagrama de cuerpo libre donde se representen todas las fuerzas y los pares presentes en el eslabón. Como se sabe, para el movimiento plano desarrollado por el mecanismo, la resultante de las fuerzas externas aplicadas a un cuerpo rígido es igual a la masa total del sistema multiplicada por la aceleración del centro de masa y la suma de los momentos con respecto al centro de masa es igual al momento de inercia de masa con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento que pasa por el centro de masa, multiplicado por la aceleración angular del cuerpo rígido.

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \vec{T} = I_G\vec{\alpha} \quad (3.31)$$

Donde

\vec{F} = suma de las fuerzas externas aplicadas al eslabón

m = masa del eslabón

\vec{a} = aceleración del centro de masa del eslabón

\vec{T} = suma de los pares aplicados al eslabón, con respecto al centro de masa

I_G = momento de inercia de masa con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento que pasa por el centro de masa

$\vec{\alpha}$ = aceleración angular del eslabón

Se suman por separado las componentes de las fuerzas en la dirección horizontal y vertical. Los pares de torsión en el sistema bidimensional están aplicados en una dirección perpendicular al plano de movimiento, lo que permite descomponer las dos ecuaciones vectoriales anteriores en 3 ecuaciones escalares, que se aplicarán a cada eslabón del mecanismo por separado y así conducir a un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas en el sistema.

$$\sum F_x = ma_x \quad \sum F_y = ma_y \quad \sum T = I_G\alpha \quad (3.32)$$

De acuerdo a la figura 3.1 se realiza un diagrama de cuerpo libre de cada eslabón para indicar las fuerzas que actúan sobre el mismo:

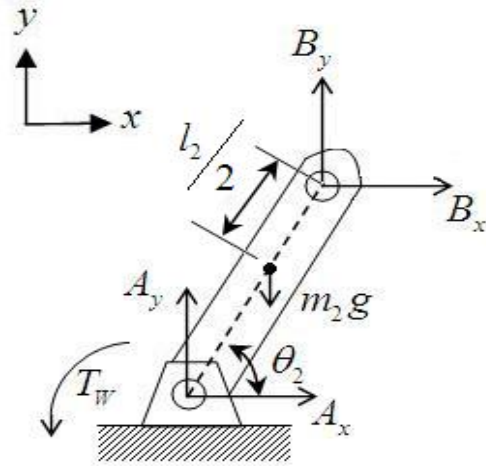


Figura 3.2 Diagrama de cuerpo libre del eslabón de entrada

En la figura 3.2 se muestran las fuerzas presentes en el eslabón de entrada. El par cinemático de revoluta que une al eslabón de entrada con el eslabón fijo tiene una fuerza A que se separa en sus componentes A_x y A_y . Además, se ubica al peso del eslabón de entrada en la dirección negativa del eje y . También existe una fuerza B debido a la unión del eslabón de entrada con el eslabón acoplador, la cual se separa en sus componentes B_x y B_y . Se encuentra un torque T_w debido a la carga que sostiene la polea que se encuentra unida al eslabón de entrada (ver Figura 3.1), así,

$$T_w = Wr_2 \quad (3.33)$$

Donde

W = peso de la carga que sostiene el mecanismo

r_2 = radio de la polea que sostiene la carga

Aplicando las ecuaciones (3.32) al eslabón de entrada se obtiene:

$$\sum F_x = A_x + B_x = m_2 a_{2x} \quad (3.34)$$

$$\sum F_y = A_y + B_y - m_2 g = m_2 a_{2y} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \sum T_{G_2} = T_w \hat{k} + \left[\left(\frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \right) \hat{i} + \left(\frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \right) \hat{j} \right] X [A_x \hat{i} + A_y \hat{j}] + \\ \left[\left(-\frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \right) \hat{i} - \left(\frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \right) \hat{j} \right] X [B_x \hat{i} + B_y \hat{j}] = I_{G_2} \ddot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Donde a_{2x} y a_{2y} están representadas en las ecuaciones (3.19) y (3.20) respectivamente.

La ecuación de torques contiene dos términos multiplicados vectorialmente que representan torques debido a las fuerzas aplicadas a una cierta distancia desde el centro de gravedad. Cuando estos productos vectoriales se desarrollan se obtiene la siguiente ecuación escalar:

$$\sum T_{G2} = T_w + A_x \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 - A_y \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 - B_x \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 + B_y \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 = I_{G2} \ddot{\theta}_2 \quad (3.37)$$

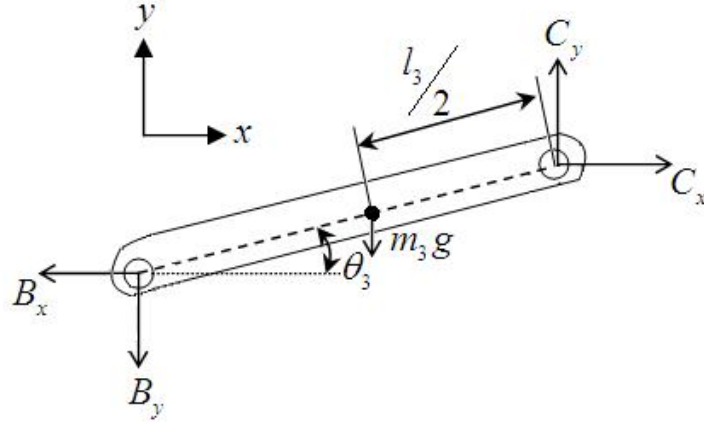


Figura 3.3. Diagrama de cuerpo libre del eslabón acoplador

En la figura 3.3 se muestran las fuerzas presentes en el eslabón acoplador. La unión que une al eslabón de entrada con el eslabón acoplador tiene una misma fuerza B , representada en un sentido opuesto a la fuerza aplicada en el eslabón de entrada y se separa en sus componentes B_x y B_y . Además, se considera al peso del eslabón acoplador en la dirección vertical hacia abajo. De igual forma existe una fuerza C debido a la unión del eslabón acoplador con el eslabón de salida, la cual también se separa en sus componentes C_x y C_y .

Aplicando las ecuaciones (3.32) al eslabón acoplador y extendiendo la ecuación de torques se obtiene:

$$\sum F_x = -B_x + C_x = m_3 a_{3x} \quad (3.38)$$

$$\sum F_y = -B_y + C_y - m_3 g = m_3 a_{3y} \quad (3.39)$$

$$\sum T_{G3} = -B_x \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 + B_y \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 - C_x \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 + C_y \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 = I_{G3} \ddot{\theta}_3 \quad (3.40)$$

Donde a_{3x} y a_{3y} están representadas en las ecuaciones (3.24) y (3.25) respectivamente.

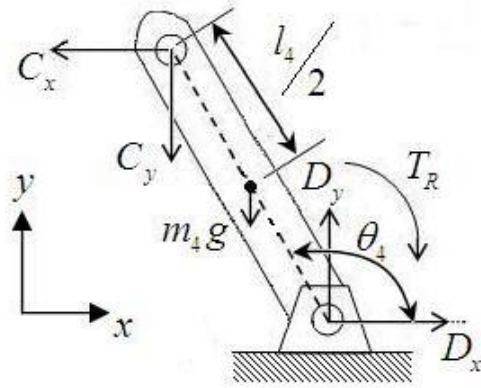


Figura 3.4. Diagrama de cuerpo libre del eslabón de salida.

En la figura 3.4 se muestran las fuerzas presentes en el eslabón de salida. La unión entre el eslabón acoplador con el eslabón de salida tiene una misma fuerza C , dibujada en sentido opuesto a la fuerza ejercida sobre el acoplador, la cual se separa en sus componentes C_x y C_y . Además, el peso del eslabón de salida está dirigido en una dirección vertical hacia abajo. También existe una fuerza D debido a la unión del eslabón de salida con el eslabón fijo, la cual se separa en sus componentes D_x y D_y . Se encuentra también un torque T_R debido a la fuerza del resorte que sostiene la polea que se encuentra unida al eslabón de salida (ver Figura 3.1) así,

$$T_R = F_R r_4 \quad (3.41)$$

Donde

$$F_R = \text{fuerza del resorte} = k\theta_4 r_4$$

$$r_4 = \text{radio de la polea que sostiene al resorte}$$

Aplicando las ecuaciones (3.32) al eslabón de salida y extendiendo la ecuación de torques se obtiene:

$$\sum F_x = -C_x + D_x = m_4 a_{4x} \quad (3.42)$$

$$\sum F_y = -C_y + D_y - m_4 g = m_4 a_{4y} \quad (3.43)$$

$$\sum T_{G4} = -T_R + D_x \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 - D_y \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 + C_x \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 - C_y \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 = I_{G4} \ddot{\theta}_4 \quad (3.44)$$

Donde a_{4x} y a_{4y} están representadas en las ecuaciones (3.29) y (3.30) respectivamente.

Así se tienen nueve ecuaciones y nueve incógnitas ($A_x, A_y, B_x, B_y, C_x, C_y, D_x, D_y, T_W$) que pueden resolverse de manera simultánea. Se toma como valor conocido el torque debido al resorte (T_R), ya que la fuerza de éste varía conforme al desplazamiento θ_4 , y se pretende determinar la capacidad del mecanismo para mantener la fuerza de la carga que debe soportar, es decir el peso del paciente que se sostendrá con el mecanismo. De esta manera se toma como valor desconocido T_W , para después solo dividirlo entre el radio de la polea (r_4) que sostiene al paciente o la carga.

Las ecuaciones (3.34)-(3.44) se pueden expresar matricialmente de la forma $Ax=b$, con los coeficientes de las incógnitas en la matriz A , las incógnitas en el vector x y los términos independientes conocidos en el vector b .

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 & -\frac{l_2}{2} \cos \theta_2 & -\frac{l_2}{2} \sin \theta_2 & \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{l_3}{2} \sin \theta_3 & \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 & -\frac{l_3}{2} \sin \theta_3 & \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 & -\frac{l_4}{2} \cos \theta_4 & \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 & -\frac{l_4}{2} \cos \theta_4 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 A_x \\
 A_y \\
 B_x \\
 B_y \\
 C_x \\
 C_y \\
 D_x \\
 D_y \\
 T_w
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 m_2 a_{2x} \\
 m_2 a_{2y} + m_2 g \\
 I_{G2} \ddot{\theta}_2 \\
 m_3 a_{3x} \\
 m_3 a_{3y} + m_3 g \\
 I_{G3} \ddot{\theta}_3 \\
 m_4 a_{4x} \\
 m_4 a_{4y} + m_4 g \\
 I_{G4} \ddot{\theta}_4 + T_R
 \end{bmatrix}
 \quad (3.45)$$

Se observa que la matriz A contiene toda la información geométrica, el vector b toda la información dinámica del sistema y el vector x contienen todas las fuerzas y torques desconocidos. La solución se encuentra resolviendo el sistema de ecuaciones de la manera $x=A^{-1}b$ suponiendo que la matriz A no es singular.

En el capítulo siguiente se abarcará la forma de evaluar que tipo de síntesis tiene mejor desempeño a través del los análisis desarrollados en el presente capítulo, y así establecer las longitudes definitivas del mecanismo para la construcción de un prototipo y pruebas.

Capítulo 4

Validación experimental

Una vez que se obtienen las longitudes de los eslabones del mecanismo de cuatro barras con la síntesis dimensional y contando con un análisis cinemático y dinámico a partir de las longitudes y características físicas del mecanismo, se puede entonces evaluar la opción que proporciona la mejor configuración y desempeño. Esto en términos del comportamiento cinemático y dinámico del mecanismo propuesto, para cumplir la tarea definida anteriormente y tener un diseño definitivo que será la base para la construcción de un prototipo que se usará para la realización de pruebas y mediciones.

4.1 Índices de desempeño

Después de realizar la síntesis dimensional para el mecanismo propuesto de eslabonamientos de cuatro barras, es necesario evaluar cada una de ellas mediante índices de desempeño. Se hace uso tanto el análisis cinemático como el dinámico, los cuales permitirán evaluar los diferentes tipos de síntesis, para así obtener la configuración del mecanismo final y que servirá como base para la construcción de un prototipo.

Con las longitudes de los eslabones calculadas a partir de los coeficientes de diseño de cualquier método de síntesis dimensional, se obtienen n pares de ángulos de entrada y salida $(\theta_{2i}, \theta_{4i})$, $i = 1, \dots, n$, obtenidos del análisis cinemático con la ecuación (4.1), los cuales dependen del rango de movimiento del mecanismo y del incremento en el valor del ángulo de entrada θ_2 .

Los índices de desempeño a utilizar son los siguientes: Error de diseño, error estructural, error por áreas, error por energías y error de fuerza. Estos índices se describen a continuación:

1. Error de diseño

El error de diseño es el error que resulta al tratar de satisfacer la ecuación de diseño. Se plantea como $e_{Di} = f(\theta_{2i}, \theta_{4i}, l_1, l_2, l_3, l_4)$, donde e_{Di} es el error de diseño [11].

Así, utilizando la ecuación de Freudenstein:

$$K_1 \cos \theta_{4i} - K_2 \cos \theta_{2i} + K_3 - \cos(\theta_{2i} - \theta_{4i}) = e_{Di} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.1)$$

Se sustituyen los ángulos de entrada de θ_{2i} y de salida θ_{4i} donde, idealmente, cada e_{Di} debería ser cero. Entonces se obtiene un error de diseño para cada par $(\theta_{2i}, \theta_{4i})$.

Como índice de desempeño se propone el siguiente escalar:

$$E_D = \sqrt{\frac{e_{D1}^2 + e_{D2}^2 + \dots + e_{Dn}^2}{n}} \quad (4.2)$$

2. Error estructural

El error estructural es el error que resulta de la diferencia entre los n ángulos generados por el mecanismo sintetizado (θ_{4i}) y los ángulos deseados (θ_{4di}) obtenidos a partir de la ecuación (2.13). Es una medida del error de posición que se tiene con el mecanismo sintetizado [7,11].

Así

$$e_{si} = (\theta_{4i} - \theta_{4di}) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.3)$$

Como índice de desempeño, se propone el siguiente escalar.

$$E_S = \sqrt{\frac{e_{S1}^2 + e_{S2}^2 + \dots + e_{Sn}^2}{n}} \quad (4.4)$$

3. Error por áreas

El error por áreas, es el error que resulta de la diferencia entre el área bajo la curva de la función deseada y la función generada. Se calcula el área bajo la curva de la función deseada, incluida en la ecuación (2.13) con la integral definida en el intervalo $[\theta_{2I}, \theta_{2F}]$ donde θ_{2I} es el ángulo de entrada inicial y θ_{2F} es el ángulo de salida final. Así, el área debajo de la curva de la función deseada es:

$$A_D = \int_{\theta_{2I}}^{\theta_{2F}} \left(\sqrt{\frac{2mgr_2\theta_2}{kr_4^2}} \right) d\theta_2 = \frac{2\sqrt{2mgr_2}}{3} \frac{kr_4^2}{kr_4^2} \left[\left(\sqrt{\theta_{2F}^3} - \sqrt{\theta_{2I}^3} \right) \right] \quad (4.5)$$

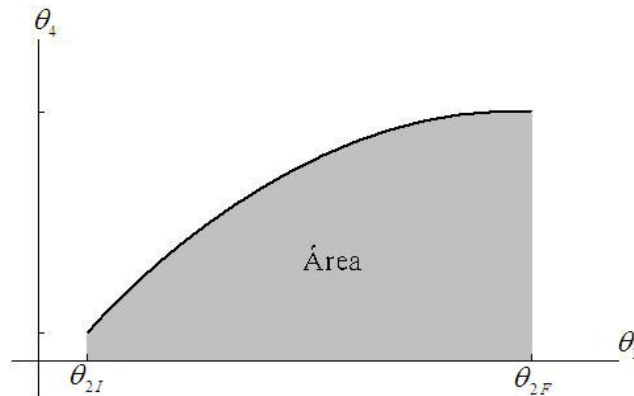


Figura 4.1 Área deseada

Para el índice de desempeño se evalúa el área bajo la curva generada a partir de todos los n ángulos θ_{4i} obtenidos de la síntesis dimensional y el análisis cinemático en el mismo intervalo $[\theta_{2I}, \theta_{2F}]$. La integración numérica se realiza utilizando la regla del trapecio considerando la partición del intervalo $[\theta_{2I}, \theta_{2F}]$ en n subintervalos iguales de longitud $\Delta\theta_2 = (\theta_{2F} - \theta_{2I})/n$. El área debajo de la curva de la función generada por el mecanismo puede evaluarse a partir de:

$$A_G = \sum_{i=1}^n \frac{\theta_{4i} - \theta_{4(i-1)}}{2} \Delta\theta_2 \quad (4.6)$$

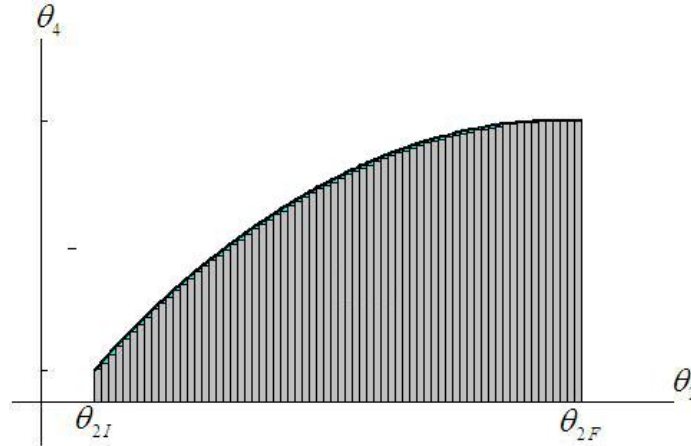


Figura 4.2. Área generada

Por lo tanto, el índice de desempeño es la diferencia entre las dos áreas:

$$E_A = A_D - A_G \quad (4.7)$$

4. Error por Energías

El error de energías es el que resulta de la diferencia entre la energía potencial de la carga y la energía potencial elástica del resorte durante el movimiento del mecanismo. La energía potencial de la carga en el rango de movimiento del mecanismo es $Ep_{w_i} = mgh_i$ donde h_i depende del movimiento del ángulo de entrada θ_{2i} y del radio de la polea que sujeta la carga r_2 así:

$$Ep_{w_i} = mgr_2\theta_{2i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.8)$$

La energía potencial elástica del resorte es $Ep_{Ri} = (1/2)kx_i^2$ donde x_i depende tanto del movimiento del ángulo de salida del mecanismo θ_{4i} como del radio de la polea que lo sostiene r_4 así:

$$Ep_{Ri} = \frac{1}{2}k(\theta_{4i}r_4)^2 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.9)$$

Se propone como índice de desempeño de error de energías el siguiente escalar:

$$E_E = \sqrt{\frac{(Ep_{W1} - Ep_{R1})^2 + (Ep_{W2} - Ep_{R2})^2 + \dots + (Ep_{Wn} - Ep_{Rn})^2}{n}} \quad (4.10)$$

5. Error de fuerza

El error de fuerza es el porcentaje de error que resulta de la diferencia entre la carga o peso del paciente que soporta el mecanismo $W = mg$ y el valor calculado en el análisis dinámico T_{Wi} en la ecuación (3.47). Este es un torque presente en la polea que sujeta la carga entonces, si se divide entre el radio de ésta (r_2), se obtiene un valor de fuerza presente en el cable (F_{Ci}) para cada posición del rango de movimiento del mecanismo, esto es $F_{Ci} = T_{Wi}/r_2$, así:

$$e_{Fi} = \frac{W - F_{Ci}}{W} \times 100 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.11)$$

Se propone como índice de desempeño el componente del vector e_{Fi} con el mayor valor absoluto.

$$E_F = \max |e_{Fi}| \quad (4.12)$$

4.2 Diseño definitivo

Contando con los índices de desempeño se puede entonces seleccionar la síntesis más adecuada, es decir, las longitudes definitivas del mecanismo que aseguren el mejor índice de desempeño posible. Se utilizó el software MATLAB® (ver código en anexo 1), para calcular el comportamiento del mecanismo, tomando en cuenta los análisis cinemático y dinámico del capítulo 3. Este programa permite variar los parámetros del mecanismo como lo es la masa, los radios de las poleas, la constante del resorte, etc. También se utilizó este software para los diferentes tipos de síntesis descritos en el capítulo 2 (ver códigos en anexos 2-6), así como los índices de desempeño (ver códigos en anexos 7-11).

Para encontrar los parámetros del sistema y así realizar el análisis del comportamiento del mecanismo sintetizado, se determinó como peso del paciente (masa de la carga) $m = 80$ Kg. Como el objetivo es modular el intercambio de energía mientras el paciente realiza sus ejercicios de rehabilitación de marcha, el centro de gravedad de éste no varía verticalmente más de 15 cm. Por lo tanto se seleccionó el mismo valor de radio de la polea que sostiene al paciente y la polea del resorte $r_2 = r_4 = 15$ cm, para que se tenga un rango cómodo y relativamente pequeño en el mecanismo, siendo éste de 80° . Debido al valor del radio de la polea seleccionada se obtiene un desplazamiento vertical de 20 cm, que es superior a los 5 cm de desplazamiento vertical indicados en el capítulo 1.

Se introdujeron los valores de la masa y radios de poleas en el código principal (anexo 1) sin tomar en cuenta las masas de los eslabones, es decir, solo el comportamiento cinemático y utilizando la síntesis de tres puntos. Se considera al error estructural solamente ya que si se tiene un error mínimo de posición con el mecanismo sintetizado los demás índices también lo serán. Se consideraron diferentes valores de constante de rigidez del resorte (k) en N/cm, para obtener un valor adecuado para esta constante, así como una iteración de grado en grado para determinar la posición inicial de θ_{20} es decir, el ensamble inicial del mecanismo.

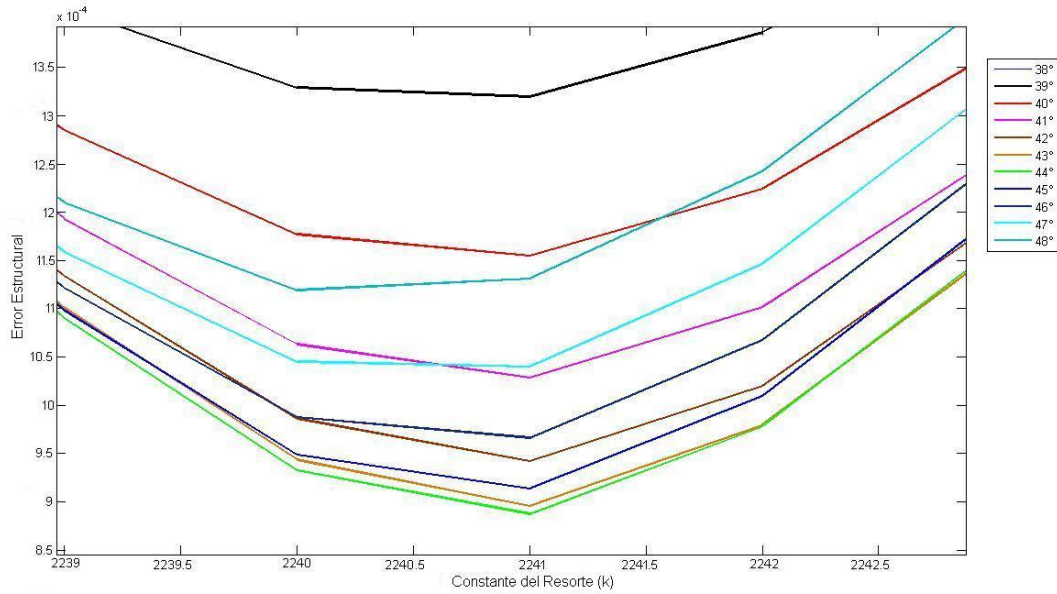


Figura 4.3. Parámetros iniciales.

De acuerdo a la figura 4.3 los parámetros que resultan con el índice de desempeño menor del error estructural son:

$$k = 22.41 \text{ N/cm}$$

$$\theta_{20} = 44^\circ$$

Teniendo los parámetros de entrada del sistema y considerando solo el desempeño cinemático, se determinan los coeficientes de diseño con la síntesis de tres puntos.

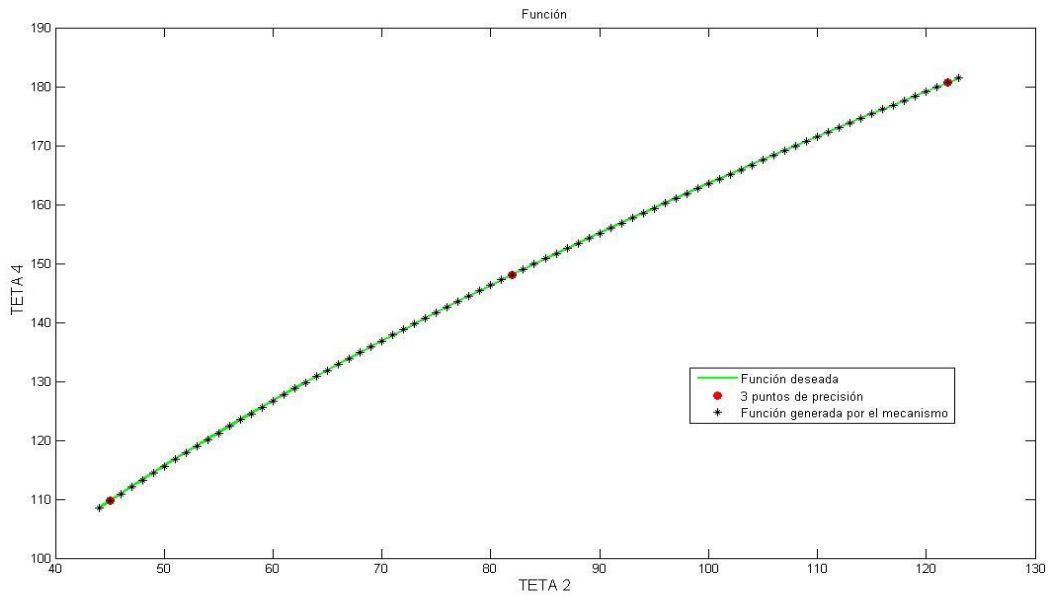


Figura 4.4. Síntesis de 3 puntos de precisión.

Se observa en la figura 4.4 la síntesis de 3 puntos de precisión empalmada con la función deseada (2.13), resultando los siguientes coeficientes de diseño:

$$K_{11} = 0.31224$$

$$K_{21} = 0.24209$$

$$K_{31} = 0.70377$$

Con las ecuaciones (2.21) se determinan las longitudes de los eslabones proponiendo la longitud del eslabón primero o fijo, en este caso $l_1 = 8.5 \text{ cm}$.

Se presentan los 4 primeros índices de desempeño para la síntesis de tres puntos:

$$E_{D1} = 2.358e-016$$

$$E_{S1} = 9.322e-004 \text{ rad}$$

$$E_{A1} = 0.001 \text{ rad}^2$$

$$E_{E1} = 0.127 \text{ J}$$

Note que no se evalúa E_{F1} porque no se han establecido las características físicas de los eslabones.

Se pueden tener errores menores a los anteriores con valores diferentes de constante del resorte y ángulo θ_{20} , como por ejemplo $k=1680\text{N/cm}$ y $\theta_{20} = 57^\circ$ donde el error estructural $E_s = 2.566e-004 \text{ rad}$ resultando los siguientes coeficientes de diseño:

$$K_1 = 0.33090$$

$$K_2 = 0.00974$$

$$K_3 = 0.34441$$

Se observa que el coeficiente de diseño 2 sufre una disminución considerable respecto de los demás coeficientes. Esto representa el incremento de los eslabones de entrada y salida, aproximadamente un tamaño 108 veces superior al del eslabón fijo de acuerdo a la ecuación (2.21). Así, si se propone que el eslabón fijo mida 30 centímetros, el eslabón acoplador medirá aproximadamente 32 metros al igual que el eslabón de salida. Esto repercutirá cuando se tomen en cuenta las masas de los eslabones y sería muy impráctico ensamblar dos eslabones de tal longitud, por lo tanto se mantienen los coeficientes mostrados anteriormente.

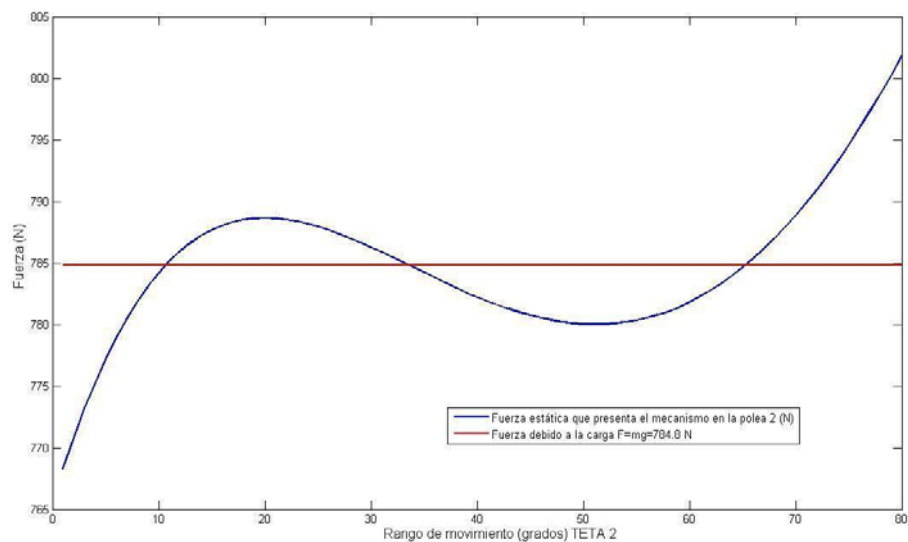


Figura 4.5. Gráfico de fuerzas.

En la figura 4.5 se muestra la fuerza que se presenta en el cable enrollado en la polea donde se sujeta el paciente, comparada con el peso del paciente que en todo momento es constante. La fuerza en el cable se evaluó en este caso considerando que las masas de los eslabones se consideran despreciables, considerando el caso estático donde $\dot{\theta}_2 = 0$ y $\ddot{\theta}_2 = 0$. Se observa que existen 15 Newtons de error máximo, es decir, aproximadamente 1.5 Kg que, en comparación con los 80 Kg que se supusieron como peso del paciente, representa un 1.8% de error. La fuerza del mecanismo es representada durante todo el rango de movimiento del ángulo de entrada θ_2 , que son 80° a partir de su posición de ensamble inicial θ_{20} , Si el mecanismo empieza 8 grados más delante de su posición inicial de ensamble θ_{20} y si solo se mueve 60 grados para cubrir un desplazamiento vertical que de acuerdo al radio de la polea seleccionada, es de 10 cm. Este desplazamiento es superior a los 5 cm de desplazamiento vertical del centro de gravedad del paciente que se tiene durante el caminado (ver figura 4.6).

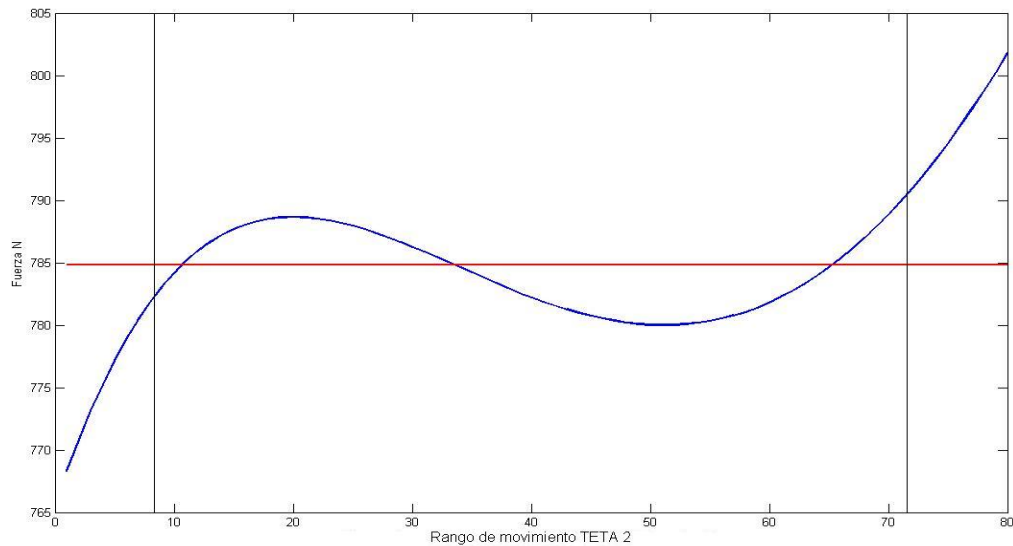


Figura 4.6. Gráfico de fuerzas con limitación del rango de movimiento de θ_2 a 60° .

Entonces la gráfica de fuerzas queda de la siguiente manera:

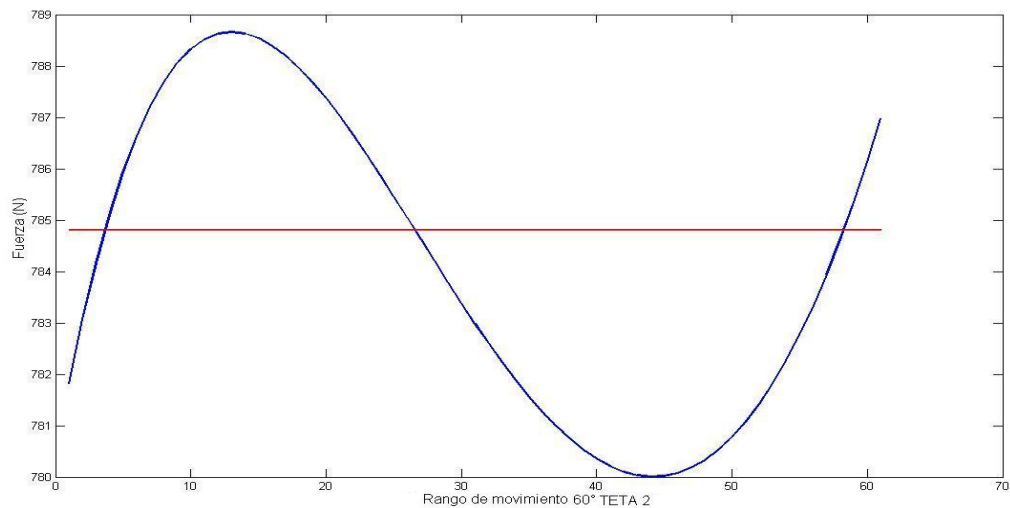


Figura 4.7. Gráfico de fuerzas con un rango de movimiento de 60° de θ_2

Así, bajo estas consideraciones, el índice de desempeño es:

$$E_{F1} = 0.611 \%$$

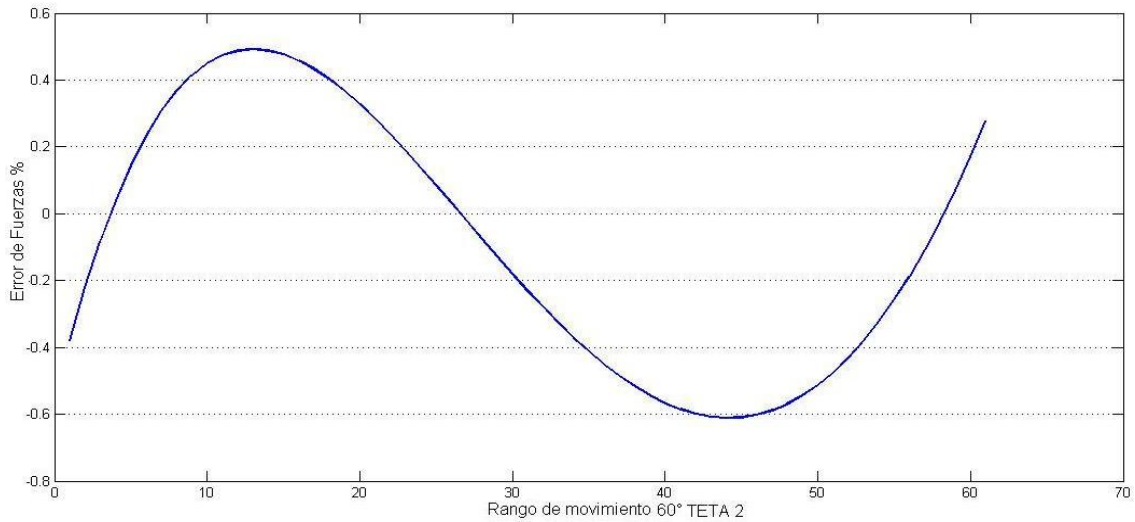


Figura 4.8. Porcentaje de error de fuerzas a partir de la síntesis de 3 puntos de precisión en un rango de movimiento de 60° de θ_2

Para la síntesis de cuatro puntos de precisión, se toman los mismos valores de entrada anteriores del sistema:

$$\begin{aligned}
 m &= 80 \text{ Kg} \\
 k &= 22.41 \text{ N/cm} \\
 r_2 &= r_4 = 15 \text{ cm} \\
 \theta_{20} &= 44^\circ
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

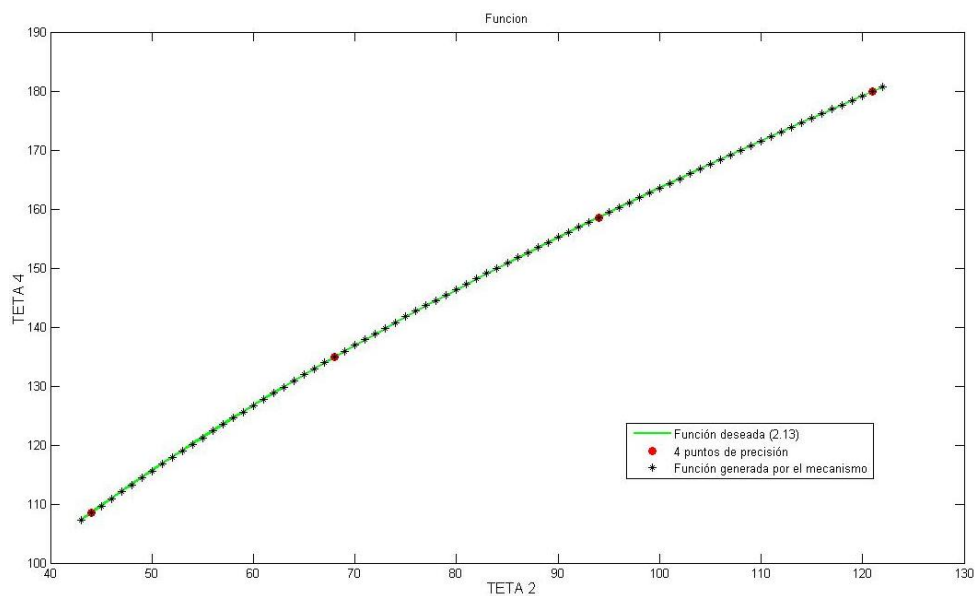


Figura 4.9. Síntesis de cuatro puntos de precisión

Se obtiene el comportamiento ilustrado en la figura 4.9 a partir de la síntesis de 4 puntos de precisión empalmada con la función deseada (2.13), resultando los siguientes coeficientes de diseño:

$$K_{12} = 0.31770$$

$$K_{22} = 0.24464$$

$$K_{32} = 0.70791$$

Con las ecuaciones (2.21) se determinan las longitudes de los eslabones proponiendo la misma longitud del eslabón primero o fijo, $l_1 = 8.5$ cm.

Los índices de desempeño para la síntesis de cuatro puntos de precisión son:

$$E_{D2} = 1.525e-016$$

$$E_{S2} = 8.983e-004 \text{ rad}$$

$$E_{A2} = 2.039e-004 \text{ rad}^2$$

$$E_{E2} = 0.112 \text{ J}$$

$$E_{F2} = 0.829 \%$$

Note que el error por fuerzas es el máximo porcentaje obtenido de error dentro del rango de movimiento del ángulo de entrada θ_2 y su equivalencia en masa es de 663.2 gramos en comparación con los 80 Kg considerados como la masa del paciente.

En la figura 4.10 se observa el porcentaje de error de fuerzas para la síntesis de 4 puntos de precisión, obtenido despreciando la masa de los eslabones y la velocidad y aceleración del eslabón de entrada.

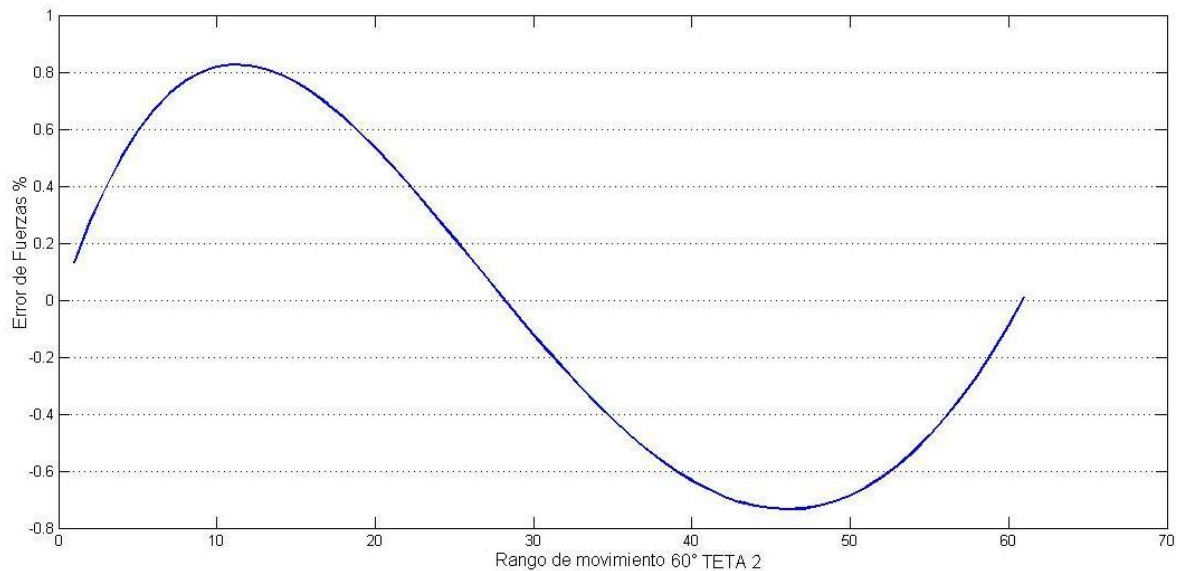


Figura 4.10 Error de fuerzas con el enfoque de síntesis de 4 puntos de precisión en un rango de movimiento de 60° de θ_2

Para la síntesis de cinco puntos de precisión, se toman los mismos parámetros de entrada anteriores del sistema, indicados en (4.13).

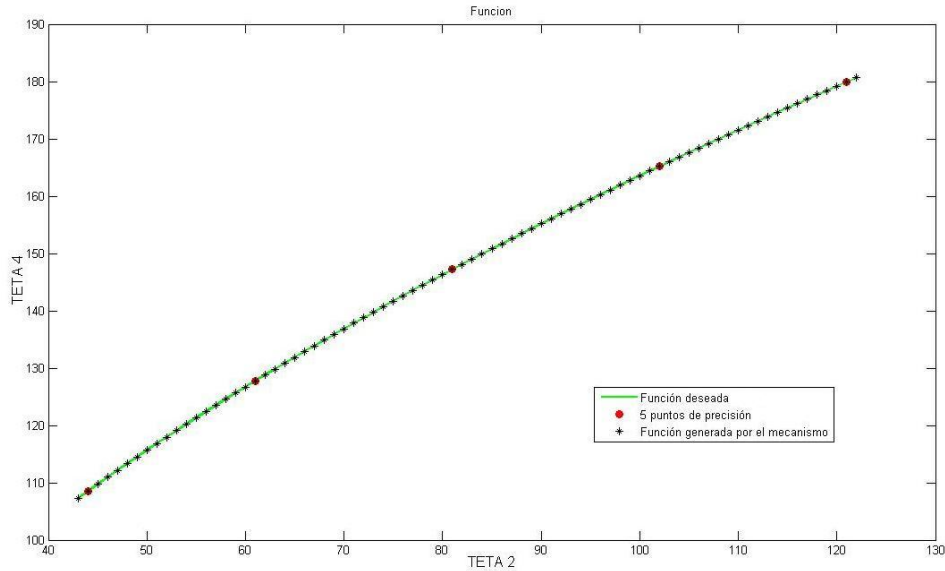


Figura 4.11. Síntesis de 5 puntos de precisión

Se observa en la figura 4.11 el desempeño usando el enfoque de síntesis de 5 puntos de precisión empalmada con la función deseada (2.28) resultando los siguientes coeficientes de diseño:

$$\begin{aligned}
 K_{13} &= 0.17771 \\
 K_{23} &= 0.17076 \\
 K_{33} &= 1.00793 \\
 \theta'_{20} &= 1.13602 \text{ rad} = 65.08967^\circ \\
 \theta'_{40} &= 1.38966 \text{ rad} = 79.62215^\circ
 \end{aligned}$$

La síntesis de 5 puntos tiene 5 incógnitas, como ya se mencionó en el capítulo 2, así que el mecanismo tendrá que ser ensamblado de diferente manera de acuerdo al resultado de θ'_{20} y θ'_{40} indicado.

Nuevamente, se usan las ecuaciones (2.21) para encontrar las longitudes de los eslabones proponiendo la misma longitud del eslabón fijo $l_1 = 8.5$ cm en cada síntesis.

Los índices de desempeño para la síntesis de cinco puntos de precisión son:

$$\begin{aligned}
 E_{D3} &= 1.103e-016 \\
 E_{S3} &= 1.047e-004 \text{ rad} \\
 E_{A3} &= 4.461e-005 \text{ rad}^2 \\
 E_{E3} &= 0.010 \text{ J} \\
 E_{F3} &= 0.154 \%
 \end{aligned}$$

Note que, de acuerdo al porcentaje error de fuerza, se tiene una equivalencia de 123.25 gramos en comparación con los 80 Kg de masa seleccionados para el paciente.

En la figura 4.12 se observa el error de fuerzas para la síntesis de 5 puntos de precisión considerando nula la velocidad y aceleración de los eslabones y una masa despreciable de los mismos.

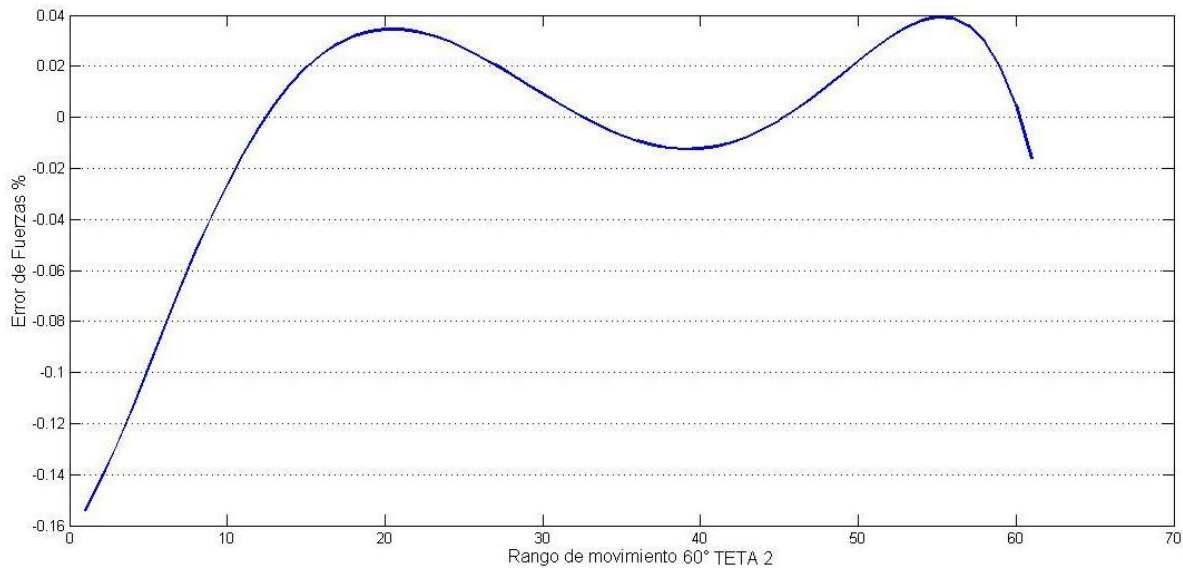


Figura 4.12. Porcentaje de error de fuerzas con el enfoque de síntesis de 5 puntos de precisión en un rango de movimiento de 60° de θ_2

Para la síntesis de tres derivadas, se toman los mismos parámetros de entrada anteriores (4.13).

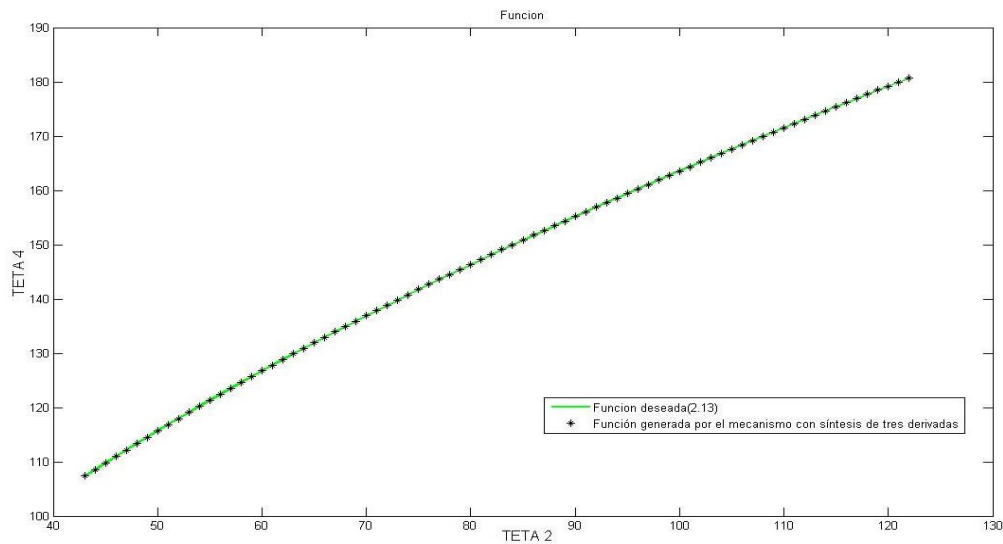


Figura 4.13. Síntesis de tres derivadas

Se observa en la figura 4.13 la síntesis de tres derivadas empalmada con la función deseada (2.13) resultando los siguientes coeficientes de diseño:

$$K_{14} = 0.31252$$

$$K_{24} = 0.24231$$

$$K_{34} = 0.70321$$

Con las ecuaciones (2.21) se determinan las longitudes de los eslabones proponiendo la misma longitud del eslabón primero o fijo que en los casos anteriores, $l_1 = 8.5$ cm.

Los índices de desempeño para la síntesis de tres derivadas son:

$$E_{D4} = 1.386e-016$$

$$E_{S4} = 7.566e-004 \text{ rad}$$

$$E_{A4} = 5.015e-004 \text{ rad}^2$$

$$E_{E4} = 0.095 \text{ J}$$

$$E_{F4} = 0.621 \%$$

Note que, de acuerdo al porcentaje de error de fuerza se tiene una equivalencia de 496 gramos en comparación con los 80 Kg de masa seleccionados para el paciente.

En la figura 4.14 se observa el error de fuerzas para la síntesis de tres derivadas considerando despreciable tanto las masas como las velocidades y aceleraciones de los eslabones.

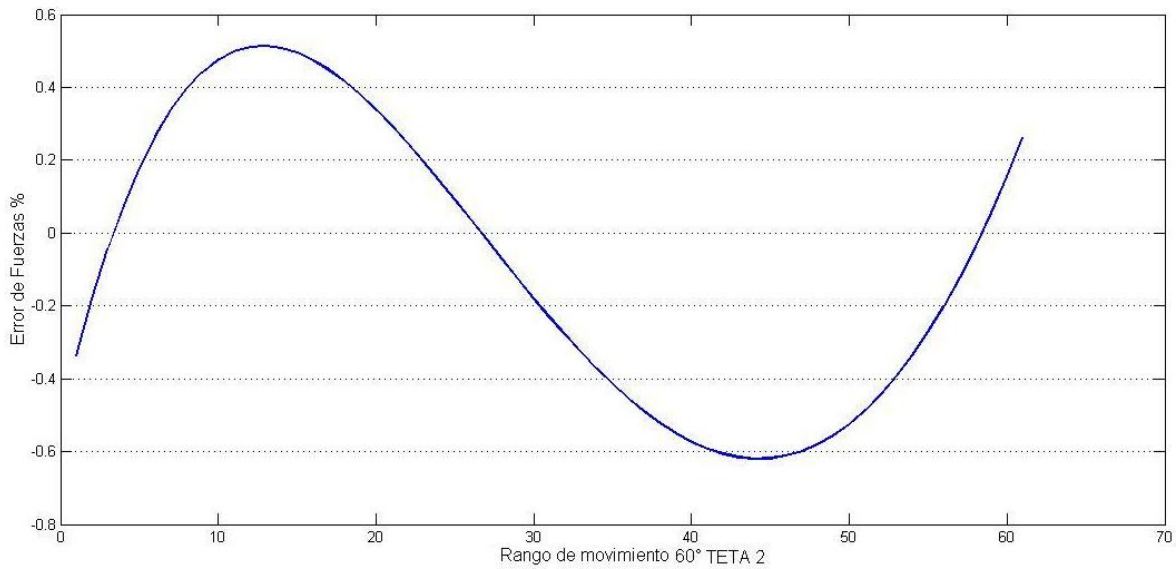


Figura 4.14. Porcentaje de error de fuerzas con el enfoque de síntesis de tres derivadas en un rango de movimiento de 60° de θ_2

Para la síntesis de aproximación por mínimos cuadrados, se toman los mismos parámetros de entrada anteriores del sistema (4.13).

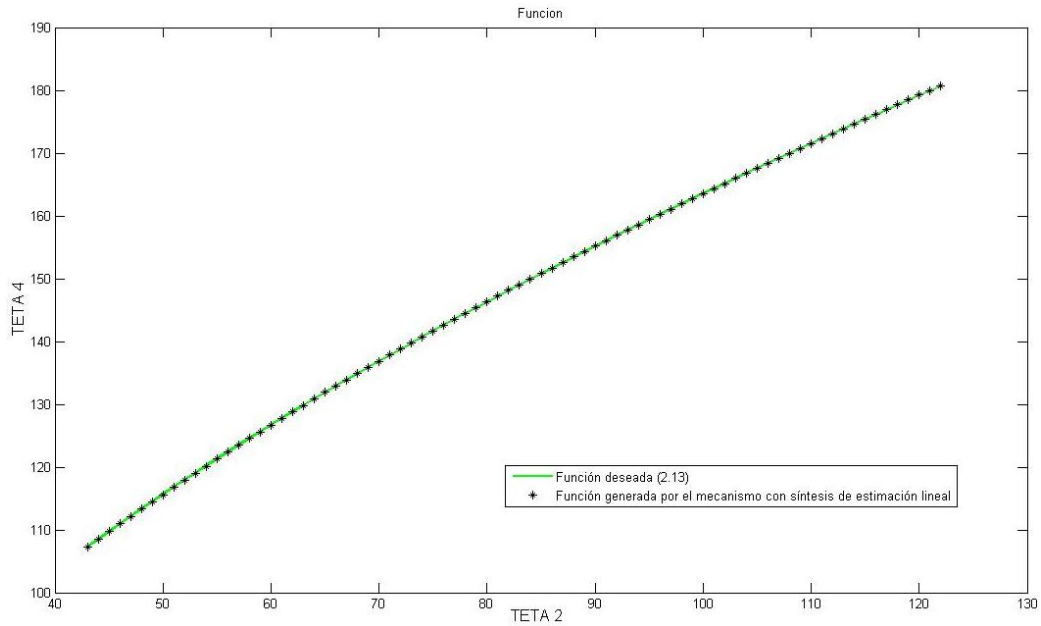


Figura 4.15. Síntesis de aproximación por mínimos cuadrados

Se observa en la figura 4.15 el desempeño de la síntesis de aproximación por mínimos cuadrados empalmada con la función deseada (2.13), resultando los siguientes coeficientes de diseño:

$$K_{15} = 0.31063$$

$$K_{25} = 0.24075$$

$$K_{35} = 0.70180$$

Con las ecuaciones (2.21) se determinan las longitudes de los eslabones proponiendo la misma longitud del eslabón primero o fijo, $l_1 = 8.5$ cm.

Los índices de desempeño para la síntesis de aproximación por mínimos cuadrados son:

$$E_{D5} = 1.714e-016$$

$$E_{S5} = 5.463e-004 \text{ rad}$$

$$E_{A5} = 2.552e-005 \text{ rad}^2$$

$$E_{E5} = 0.073 \text{ J}$$

$$E_{F5} = 0.483 \%$$

Note que, de acuerdo al porcentaje de error de fuerza, se tiene una equivalencia de 386.44 gramos en comparación con los 80 Kg de masa seleccionados para el paciente.

En este tipo de síntesis, como ya se mencionó en el capítulo 2, es posible seleccionar un número arbitrario, mayor que 3 de pares $(\theta_{2i}, \theta_{4i})$. Esto puede lograrse cambiando el incremento seleccionado para el ángulo de entrada $\Delta\theta_2$. Con el fin de establecer el incremento más idóneo, considere la figura 4.16 en la que se muestra el efecto que tiene sobre el error estructural un incremento de $\Delta\theta_2$ que vaya desde 0.1° hasta 5° .

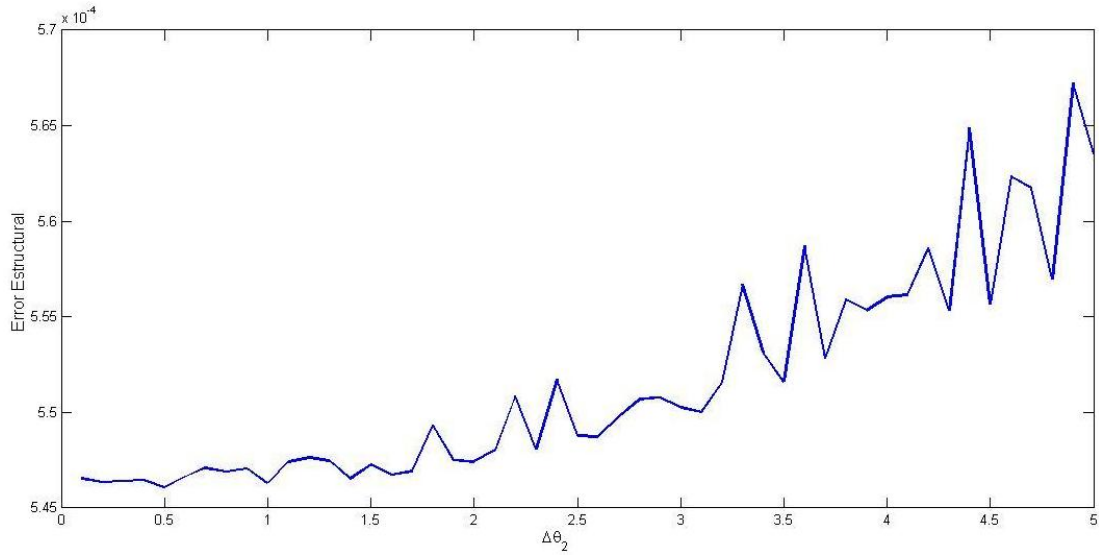


Figura 4.16 Error estructural para diferentes incrementos de θ_2 en la síntesis de aproximación por mínimos cuadrados

A partir de la figura anterior se puede establecer que un incremento $\Delta\theta_2$ inferior a 1° no produce una variación significativa en el error estructural. Así, se selecciona este valor para obtener los n pares que, considerando un rango de movimiento de 80° para θ_2 , represente un total de 80 pares $(\theta_{2i}, \theta_{4i})$.

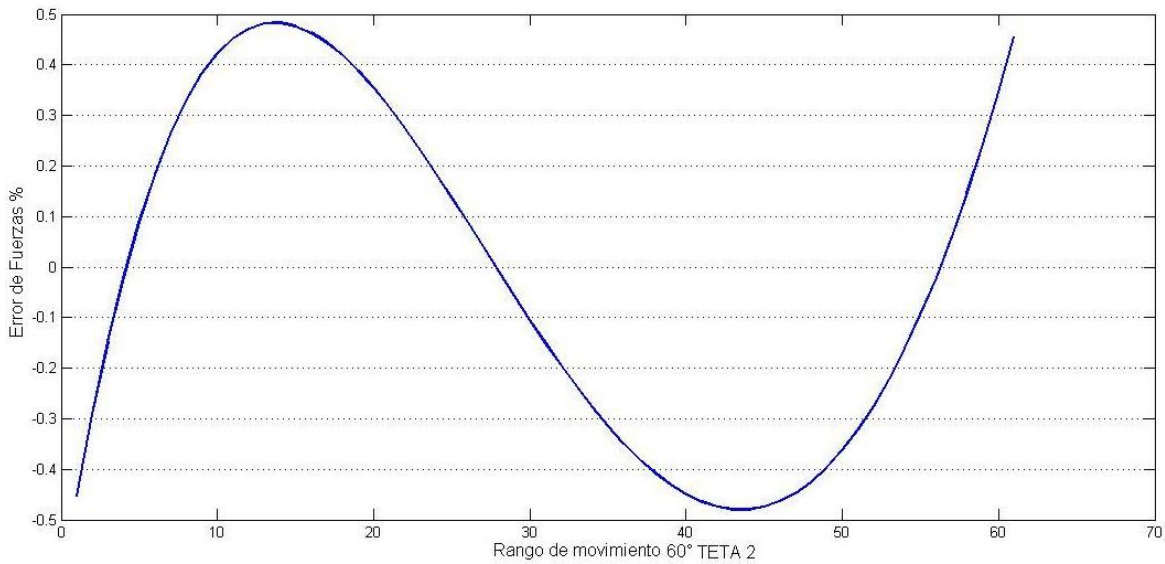


Figura 4.17. Porcentaje de error de fuerzas con el enfoque de síntesis de aproximación por mínimos cuadrados en un rango de movimiento de 60° de θ_2

En la figura 4.17 se observa el error de fuerzas para el enfoque de la síntesis de aproximación por mínimos cuadrados en un rango de movimiento de 60° de θ_2 , considerando despreciable la velocidad, aceleración y masas de los eslabones.

Se muestra a continuación una tabla de comparación entre los diferentes tipos de síntesis y los índices de desempeño para cada uno.

Índices de desempeño	3 puntos de precisión	4 puntos de precisión	5 puntos de precisión	Tres derivadas	Aproximación por mínimos cuadrados
Error de diseño	2.358e-16	1.525e-16	1.103e-16	1.386e-16	1.714e-16
Error estructural (rad)	9.322e-04	8.983e-04	1.047e-04	7.566e-04	5.463e-04
Error por área bajo la curva (rad ²)	10.074e-04	2.039e-04	4.461e-05	5.015e-04	2.552e-05
Error por energías (J)	12.756e-02	11.275e-02	1.083e-02	9.553e-02	7.337e-02
Error de fuerzas (%)	0.611	0.829	0.154	0.620	0.483

Tabla 4.1. Índices de desempeño para los diferentes tipos de síntesis

Se observa que los enfoques que presentan los índices de desempeño menores son la síntesis de 5 puntos de precisión y la síntesis de aproximación por mínimos cuadrados. La síntesis de cinco puntos de precisión está muy por debajo de la de aproximación por mínimos cuadrados en los índices de desempeño, lo que pareciera indicar que esta síntesis es la ideal para definir el mecanismo modulador. En los análisis subsecuentes se pondrá especial atención a los diseños obtenidos por medio de estos dos enfoques solamente. Estos análisis mostrarán la ventaja del enfoque de mínimos cuadrados sobre el de 5 puntos de precisión, a pesar de los índices de desempeño cuando se considera el análisis dinámico del mecanismo.

Al ensamblar el mecanismo de eslabonamientos de cuatro barras por el método de síntesis de cinco puntos es necesario cubrir los ángulos de ensamble como se muestra en la figura 4.18, donde el cable que sostiene la carga se debe ensamblar a $\theta'_{20} - \theta_{2C}$ y el resorte a $\theta'_{40} + \theta_{4C}$ para cubrir los puntos deseados de la ecuación (2.13), donde:

$$\begin{aligned}\theta_{2C} &= (\theta'_{20} - \theta_{20}) \\ \theta_{4C} &= (\theta_{40} - \theta'_{40})\end{aligned}$$

Al ser $\theta_{20} = 44^\circ$, $\theta_{40} = 107.25^\circ$ y $\theta'_{20} = 65.08967^\circ$, $\theta'_{40} = 79.62215^\circ$ entonces $\theta_{2C} = 21.08967^\circ$ y $\theta_{4C} = 27.62785^\circ$. Así, en un ensamble real sería imposible tener la precisión para cubrir todas las decimales de los ángulos donde se ensamblaran los cables.

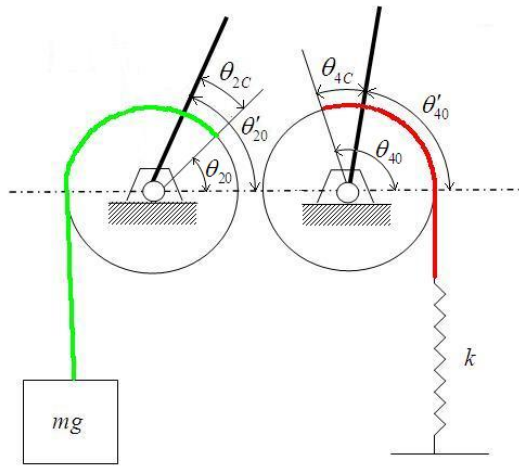


Figura 4.18. Ensamble inicial para la síntesis de 5 puntos

Si se reducen las decimales de los ángulos θ_{2c} y θ_{4c} los índices de desempeño aumentan. Por ejemplo si se establece a $\theta_{2c} = 21^\circ$ y $\theta_{4c} = 27.5^\circ$ los índices de desempeño para la síntesis de 5 puntos de precisión se modifican a los siguientes valores:

$$\begin{aligned} E'_{D3} &= 1.358e-016 \\ E'_{S3} &= 5.943e-004 \text{ rad} \\ E'_{A3} &= 2.977e-005 \text{ rad}^2 \\ E'_{E3} &= 0.075 \text{ J} \\ E'_{F3} &= 0.728 \% \end{aligned}$$

Donde se observa que los índices resultan más aproximados a los obtenidos de la síntesis por aproximación por mínimos cuadrados.

Se analizan ahora los diseños obtenidos a partir de estos dos métodos de síntesis, tomando en cuenta un análisis dinámico de los mecanismos que incluye masas de los eslabones y un perfil de velocidad y aceleración del eslabón de entrada.

La figura 4.19 muestra el perfil de velocidad propuesto para $\dot{\theta}_2$ de un ciclo completo del mecanismo modulador, es decir cuando la masa baja verticalmente 15 cm debido a los 80° de rango de movimiento del eslabón de entrada y el valor del radio de la polea que sostiene la masa, y sube a su posición original, donde se estima que el ciclo dura 1.5 segundos que es aproximadamente, lo que dura una persona en dar 2 pasos. Esto significa que la velocidad angular $\dot{\theta}_2$ tiene un valor máximo que es aproximadamente de 0.6 rad/s. esta velocidad comienza de cero y aumenta en forma de onda senoidal hasta llegar a su valor máximo de velocidad en 10° de movimiento de θ_2 . A partir de ahí se propone que dure 70° con el valor máximo de velocidad y los últimos 10° también siguiendo un perfil de onda senoidal desciende la velocidad hasta detenerse. Hasta ahora se completó medio ciclo (80°) cuando la masa regresa a su posición de inicio el perfil es el mismo solo que la velocidad ahora tiene un valor máximo de -0.6 rad/s hasta completar el ciclo (160°). La figura 4.20 muestra el correspondiente perfil de aceleración.

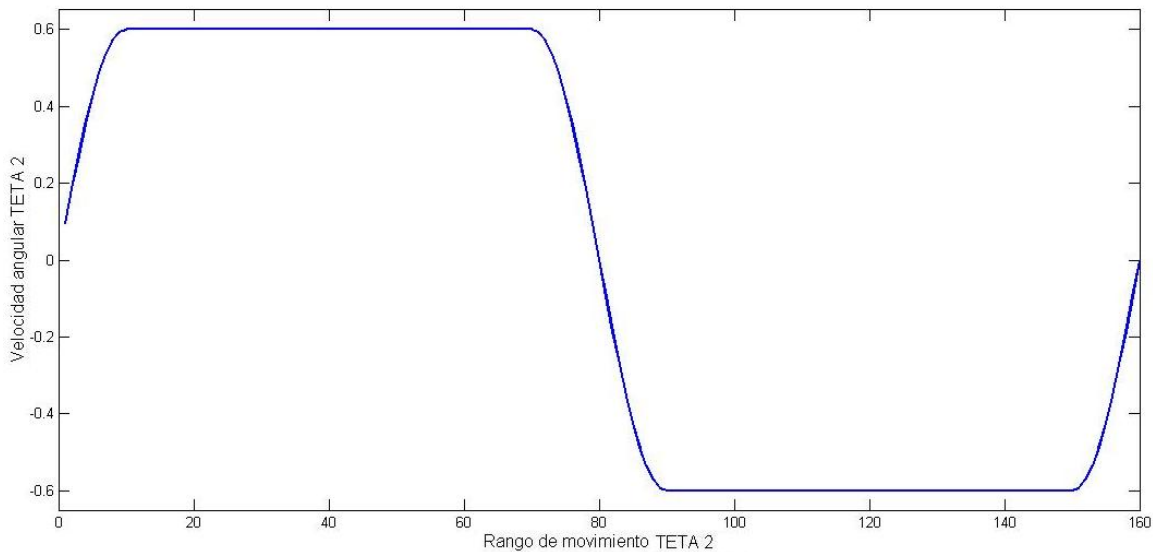


Figura 4.19. Perfil de velocidad $\dot{\theta}_2$

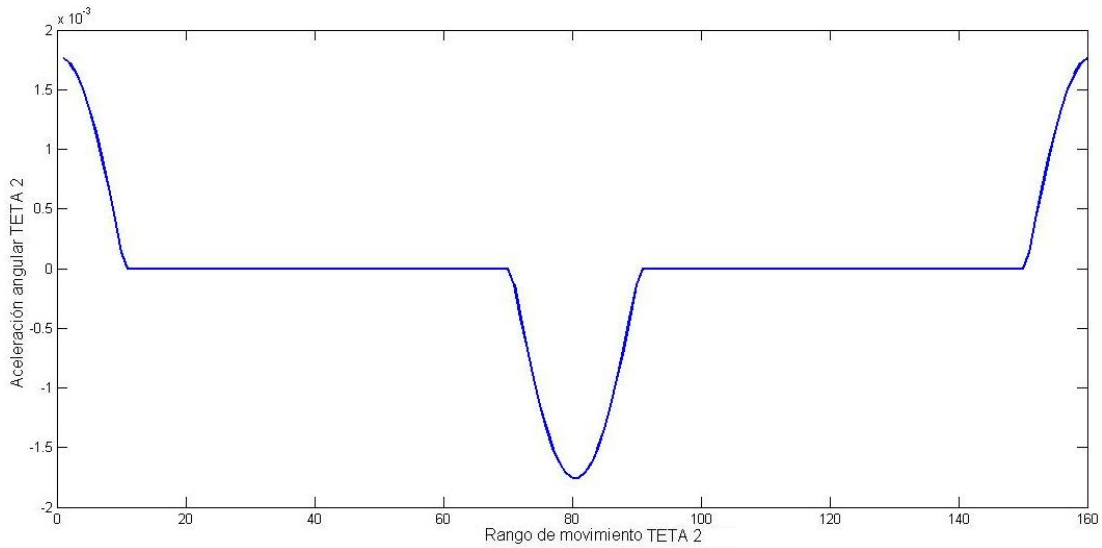


Figura 4.20. Perfil de aceleración $\ddot{\theta}_2$

En la figura 4.21 se muestra la configuración del mecanismo sintetizado con la aproximación por mínimos cuadrados con los datos siguientes, a partir de la longitud del eslabon1 de 8.5 cm. La masa de los eslabones se estimó considerando los eslabones como elementos delgados de acero (solera) de 1/8in. De espesor. Así:

$$\begin{aligned}
 m &= 80kg & l_{\text{eslabon2}} &= 27.5 \text{ cm} & m_{\text{eslabon2}} &= 380 \text{ grs} \\
 k &= 22.41 \text{ N/cm} & l_{\text{eslabon3}} &= 26.8 \text{ cm} & m_{\text{eslabon3}} &= 360 \text{ grs} \\
 r_2 = r_4 &= 15 \text{ cm} & l_{\text{eslabon4}} &= 35.4 \text{ cm} & m_{\text{eslabon4}} &= 460 \text{ grs}.
 \end{aligned}$$

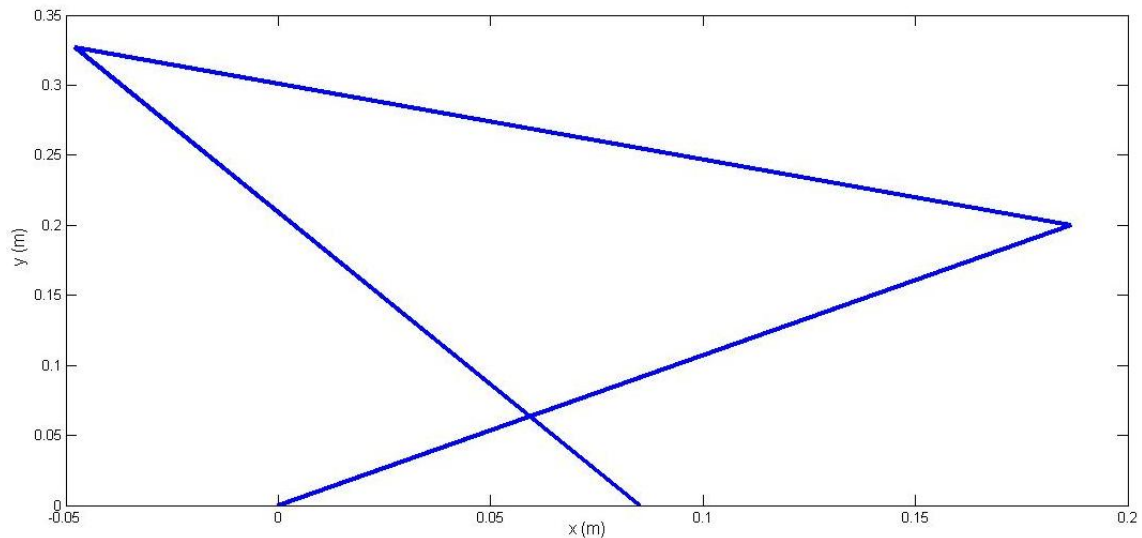


Figura 4.21. Configuración del mecanismo sintetizado con aproximación por mínimos cuadrados.

En la figura 4.22 se muestra el comportamiento de las fuerzas en el mecanismo debido a su dinámica, considerando el perfil de velocidad y aceleración citado.

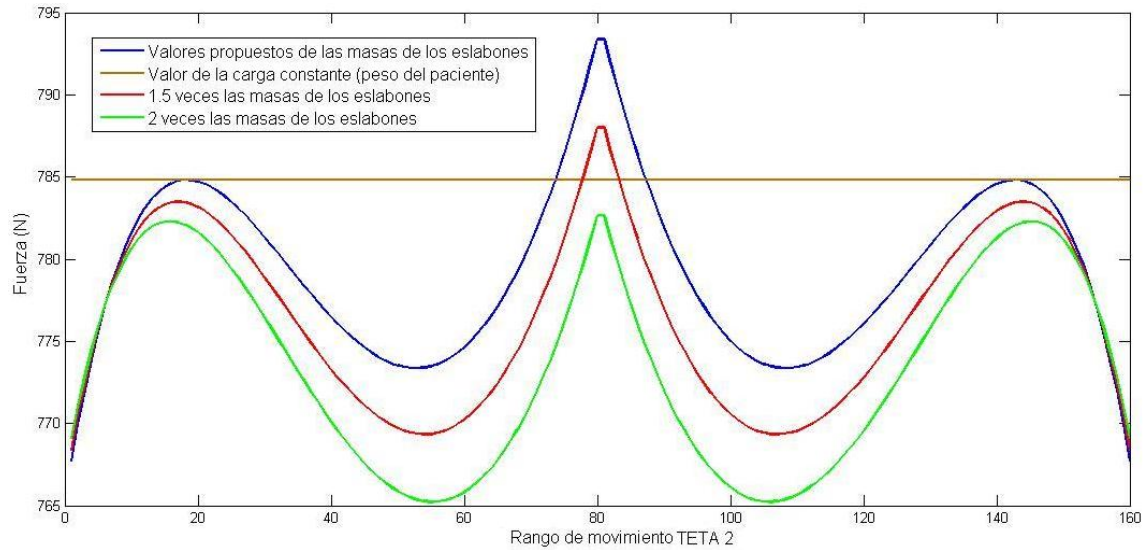


Figura 4.22. Comportamiento del mecanismo con diferentes valores de masa de los eslabones

Note que el gráfico muestra el ciclo completo del mecanismo (160°) con incrementos absolutos de θ_2 , los primeros 80° son el medio ciclo donde la carga se desplaza verticalmente hacia abajo y los otros 80° cuando la carga se desplaza verticalmente hacia arriba a su posición original. Debido a esto existe la simetría en el gráfico en 80° .

Se verifica que, conforme aumentan las masas de los eslabones, la gráfica tiende a desplazarse verticalmente hacia abajo aumentando el error de fuerzas ya que se aleja de la carga constante. Sin embargo, no pierde su forma y continua haciendo los cruces por la carga constante. Este comportamiento se puede corregir con el aumento de la constante del resorte para desplazar la gráfica verticalmente hacia arriba y así equilibrar, dependiendo de la masa de los eslabones. Esto se ilustra esquemáticamente en la figura 4.23. De este modo, se mantienen los índices de errores mencionados anteriormente. Por ejemplo, si se considera la gráfica donde se incrementa al doble la masa de los eslabones, es posible establecer una constante de rigidez del resorte de 2270 N/m para realizar el ajuste y volver a acercarse la gráfica de fuerzas del mecanismo modulador al peso del paciente (ver figura 4.24).

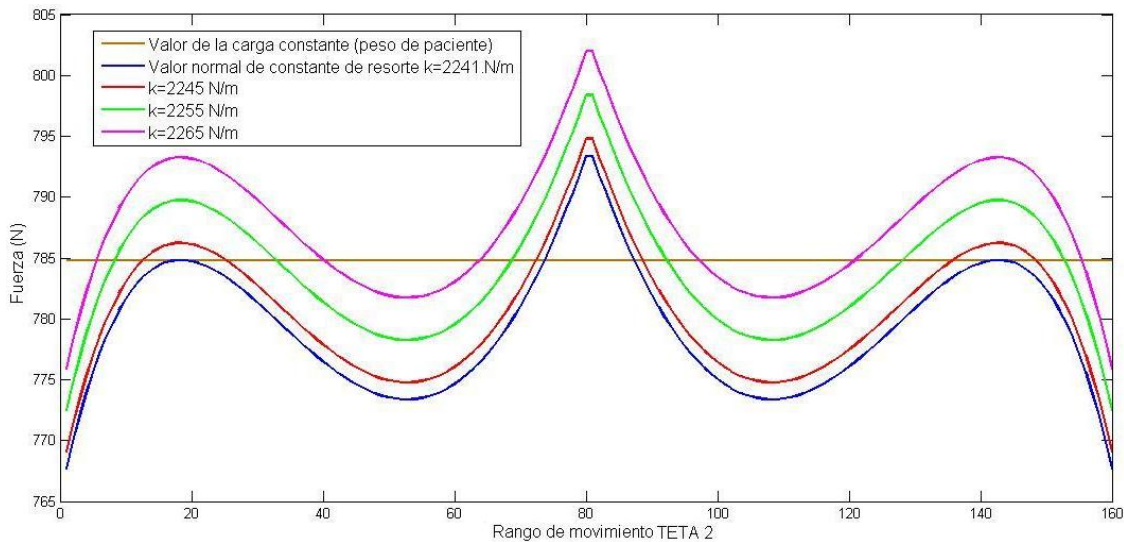


Figura 4.23 Comportamiento del mecanismo con diferentes valores de constante de resorte.

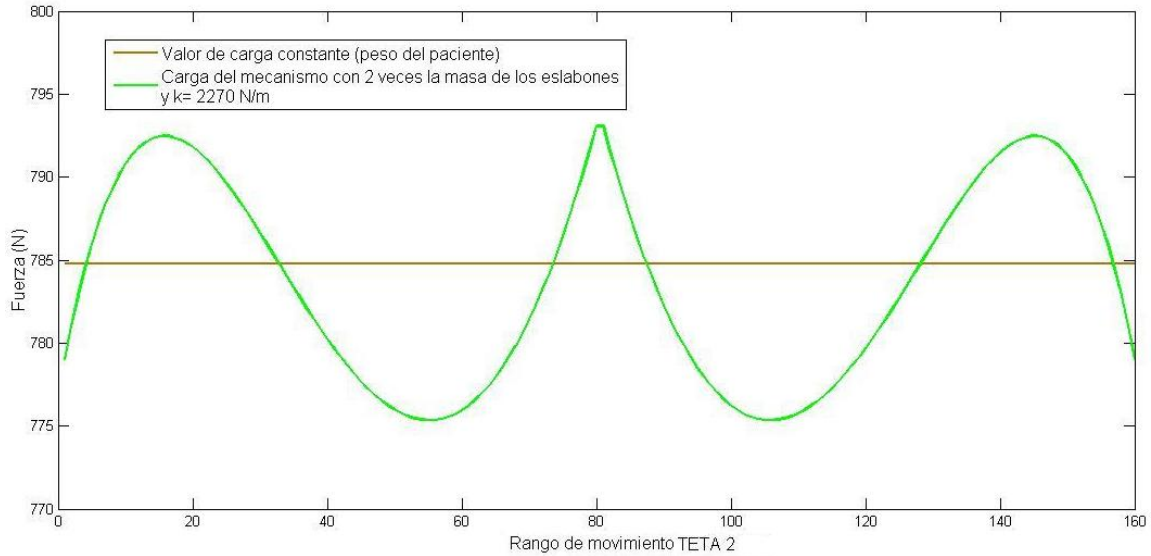


Figura 4.24 Ajuste de la constante del resorte para 2 veces la masa de los eslabones

En la figura 4.25 se muestra la configuración del mecanismo sintetizado con los 5 puntos de precisión con los datos siguientes a partir de la longitud del eslabon1 de 8.5 cm. De igual manera, se estimó la masa de los eslabones de acero proporcional a la longitud de los mismos así:

$$\begin{array}{lll}
 m = 80 \text{ Kg} & l_{\text{eslabon2}} = 47.8 \text{ cm} & m_{\text{eslabon2}} = 660.5 \text{ grs} \\
 k = 22.41 \text{ N/cm} & l_{\text{eslabon3}} = 6.2 \text{ cm} & m_{\text{eslabon3}} = 83.2 \text{ grs} \\
 r_2 = r_4 = 15 \text{ cm} & l_{\text{eslabon4}} = 49.8 \text{ cm} & m_{\text{eslabon4}} = 647 \text{ grs}.
 \end{array}$$

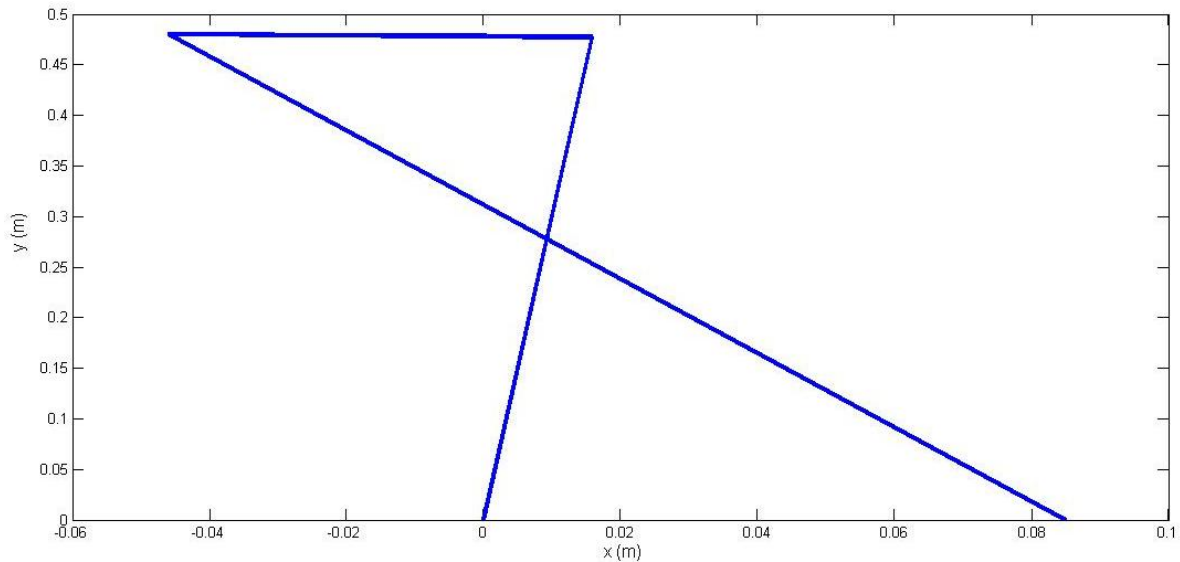


Figura 4.25. Configuración del mecanismo sintetizado con cinco puntos de precisión.

En la figura 4.26 se muestra el comportamiento de las fuerzas en el mecanismo debido al comportamiento dinámico del mecanismo, atendiendo al perfil de velocidad y aceleración del eslabón de entrada, definidos respectivamente en las figuras 4.19 y 4.20.

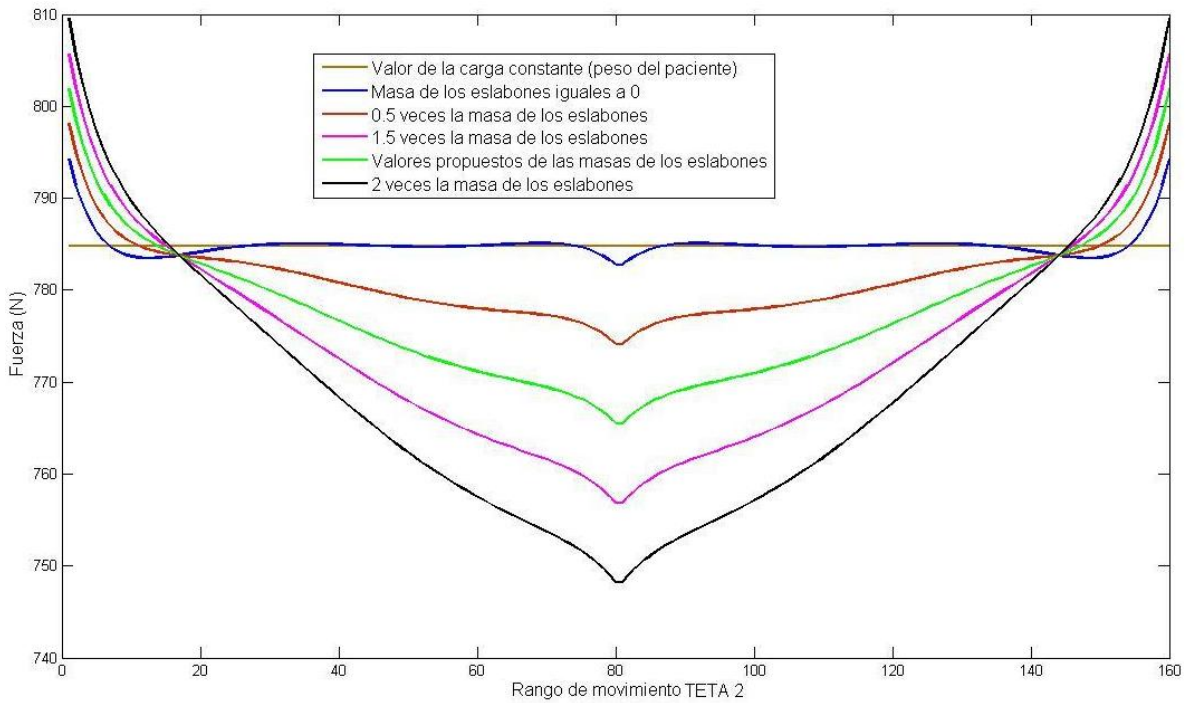


Figura 4.26. Comportamiento del mecanismo con diferentes valores de masa de los eslabones.

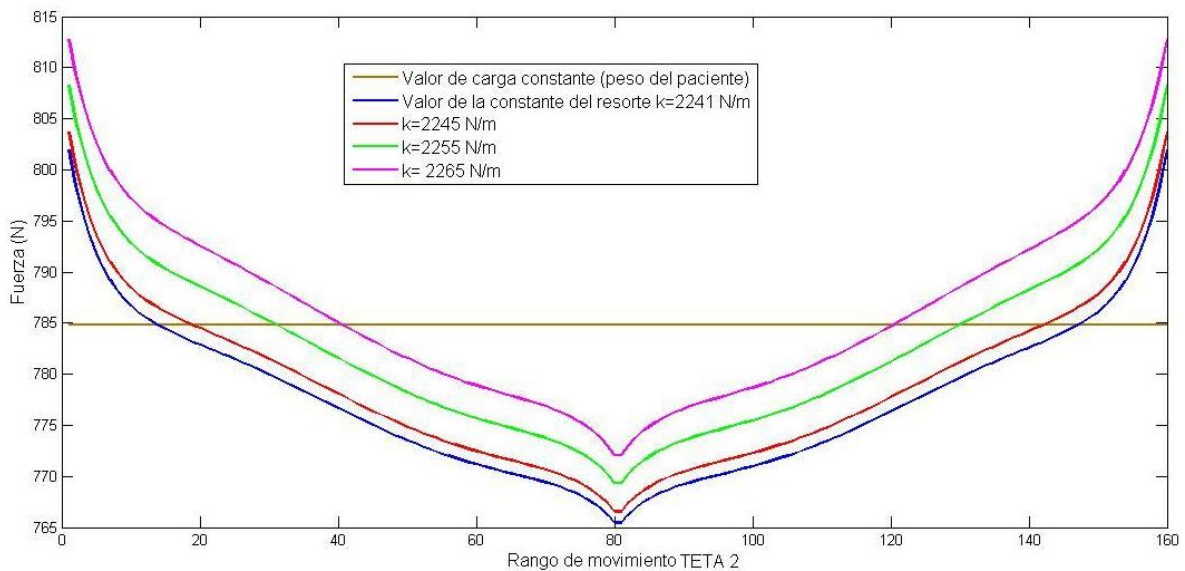


Figura 4.27. Comportamiento del mecanismo con diferentes valores de constante de resorte.

Se observa que, al considerar las masas de los eslabones en el mecanismo sintetizado con cinco puntos de precisión, este resulta ser muy sensible a estos valores ya que solo hay un cruce por la carga constante. Conforme aumenta la masa de los eslabones, la grafica que representa la fuerza ejercida por el mecanismo con respecto al ángulo de entrada sufre una alteración en su forma, aumentando la depresión en la parte central de la curva en la figura 4.26. Al incrementar la rigidez del resorte, con el objetivo de acercar la curva al peso del paciente, como se ilustra en la figura 4.27, se observa que el mecanismo obtenido con este enfoque de síntesis se aleja del valor nominal de 785N, reflejando con ello su sensibilidad al valor de las masas de los eslabones del mecanismo. También se observa que la longitud del eslabón de entrada y salida

son aproximadamente el doble de la longitud de los eslabones que con la síntesis de aproximación por mínimos cuadrados.

Considerando el diseño más compacto y la menor sensibilidad al cambio en la masa de los eslabones, que puede ajustarse variando la constante del resorte, se prefiere el diseño obtenido con el enfoque de síntesis por aproximación de mínimos cuadrados. Así, el mecanismo modulador seleccionado es el obtenido con este enfoque donde los parámetros para el mecanismo serán:

$$\begin{aligned} m &= 80 \text{ Kg} & K_1 &= 0.3106 \\ k &= 22.41 \text{ N/cm} & K_2 &= 0.2407 \\ r_2 = r_4 &= 15 \text{ cm} & K_3 &= 0.7018 \end{aligned}$$

La constante del resorte podrá ser ajustada si es que la masa de los eslabones llegara a afectar el comportamiento de la fuerza que genera el mecanismo modulador de eslabonamientos de cuatro barras. Con un rango de oscilación de 80° , pero pensado para trabajar solo 60° , en la figura 4.28 se ilustra el movimiento del mecanismo, con longitud del primer eslabón de 85mm.

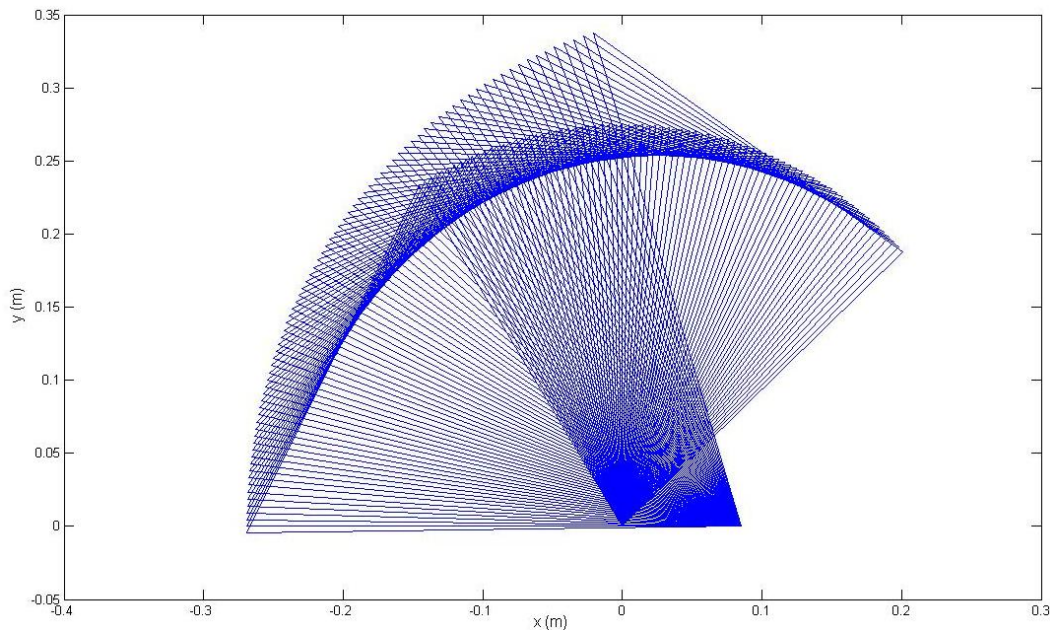


Figura 4.28. Rango de movimiento del mecanismo definitivo

4.2.1 Trabajo con pesos diferentes

El mecanismo se debe adaptar para diferentes tipos de personas o pacientes, por lo tanto, no debe cambiar su configuración para que este siga siendo funcional. La modulación de energía deseada depende de la masa de la persona que se ejercitará, de acuerdo a:

$$\theta_4 = \sqrt{\frac{2mgr_2}{kr_4^2}} \theta_2$$

Para que la función no cambie cada vez que exista una masa y, se pueda seguir utilizando el mecanismo se establece una constante de diseño a partir del diseño definido previamente como el más adecuado, así:

$$C = \frac{2mgr_2}{kr_4^2} \quad (4.14)$$

Con la constante de diseño C se tienen dos soluciones para el problema de las masas diferentes debido a la diversidad de pacientes que se rehabilitan.

1. Cambio del resorte para cada persona en específico

Esta solución presenta la ventaja de que la función deseada se mantiene, por lo tanto, la configuración del mecanismo también, pero tiene la desventaja de que se necesitaría tener todo un juego de resortes para cada persona en particular así:

$$k_{nueva} = \frac{2mgr_2}{Cr_4^2} \quad (4.15)$$

Donde

C=constante de diseño

r_2 y r_4 =radio de las poleas del mecanismo

m =peso del paciente

Por lo tanto sería muy impráctico tener una infinidad de resortes con la constante de rigidez deseada, o bien tendrían que fabricarse resortes especiales con rigideces específicas, lo cual resultaría también muy costoso

2. Cambiar el diámetro de la polea que sostiene a la persona.

Esta solución plantea tener el mismo resorte, es decir, la misma constante de rigidez en todo momento y así solamente variar el diámetro de la polea donde se sujete el paciente, esto es:

$$r_2 = \frac{Cr_4^2}{2mg} \quad (4.16)$$

Esto permite que la función sea la misma todo el tiempo, independientemente de la magnitud de la masa. Así, la configuración del mecanismo modulador en lo que respecta a la longitud de sus eslabones, el resorte y la polea que sujeta el resorte, permanecen como originalmente se diseñaron; Cambiando sólo el radio de la polea que sujeta al paciente, mediante la ecuación (4.16). Así se podría, con una sola polea de diámetros diferentes, utilizar el mecanismo para un rango dado de pesos.

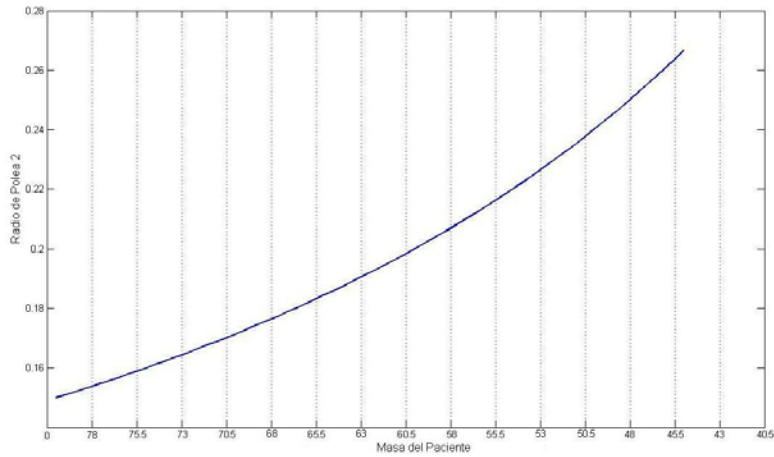


Figura 4.29 Cambio del diámetro de la polea que sostiene al paciente

De esta manera, se puede usar una sola polea formada por varias con diámetro diferente, como se hace en una transmisión de bicicleta. Al cambiar de paciente con un peso menor el cable se trasladaría a otro diámetro mayor, lo cual mejora el desempeño del mecanismo ya que al incrementarse, el diámetro de la polea, el desplazamiento es mayor. En la figura 4.30 se ilustra un esquema de la variación del diámetro de la polea.

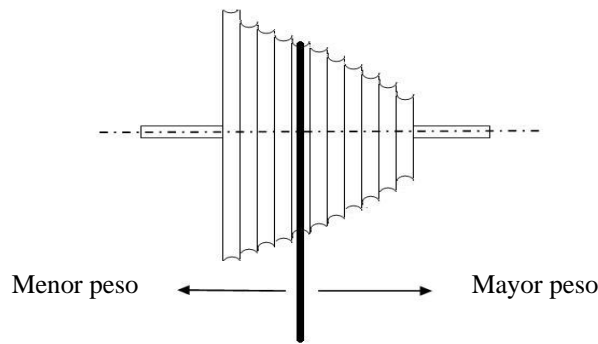


Figura 4.30 Esquema de variación del diámetro de la polea.

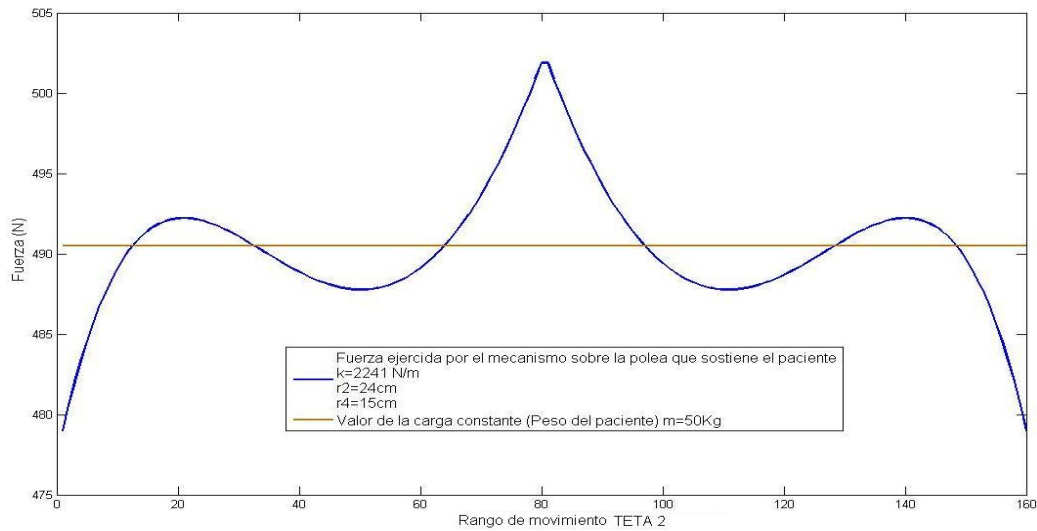


Figura 4.31. Cambio de la carga constante a 50 Kg ajustando el radio de la polea que sostiene la carga.

En la figura 4.31 se observa el comportamiento de la fuerza ejercida por el resorte al considerarse una persona con un peso de 50 Kg. Al existir menor masa se necesita una polea más grande para ajustar el torque y así tener el mismo desempeño con el mismo mecanismo, sin cambiar ningún parámetro de éste y solo cambiar el cable a la polea correcta.

4.3 Desarrollo del prototipo

Una vez definidos los parámetros del diseño definitivo, se realizó la construcción de un prototipo para observar su comportamiento cinemático y dinámico, así como observar si efectivamente modula de una manera satisfactoria la transferencia de energía potencial de una carga que cambia su posición verticalmente y la energía que almacena un resorte.

Se escogió como longitud del eslabón 1, de 8.5 cm, con los coeficientes de diseño para la síntesis de aproximación por mínimos cuadrados enunciados anteriormente y, con las ecuaciones (2.21), se obtuvieron las siguientes dimensiones de eslabones:

$$l_2 = 27.5 \text{ cm}$$

$$l_3 = 26.8 \text{ cm}$$

$$l_4 = 35.4 \text{ cm}$$

Se utilizaron 2 poleas comerciales del mismo radio $r_2 = r_4 = 3.5 \text{ cm}$. Además, se utilizó un resorte con una constante de rigidez $k = 68.2 \text{ N/cm}$. Los eslabones se formaron de acrílico ya que es conveniente que éstos pesen lo menos posible. Con la constante de diseño (4.17) y con los valores anteriores, la masa que cargará el mecanismo será $m = 5.67 \text{ Kg}$. Se muestra en la figura 4.32 el dibujo de ensamble del prototipo, modelado en computadora utilizando el paquete de SolidWorks®:

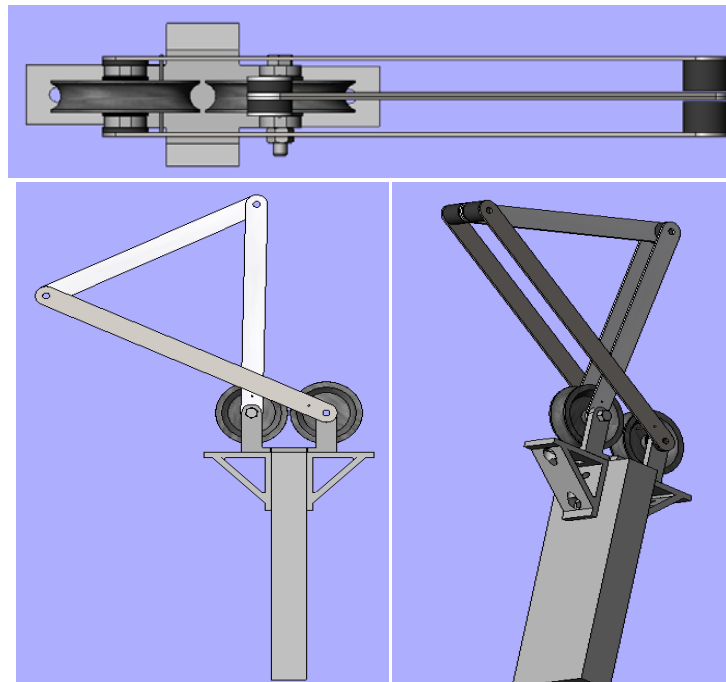


Figura 4.31. Prototipo en modelo a computadora utilizando SolidWorks®

En la figura 4.32 se muestra el prototipo ya fabricado con los parámetros mencionados anteriormente:

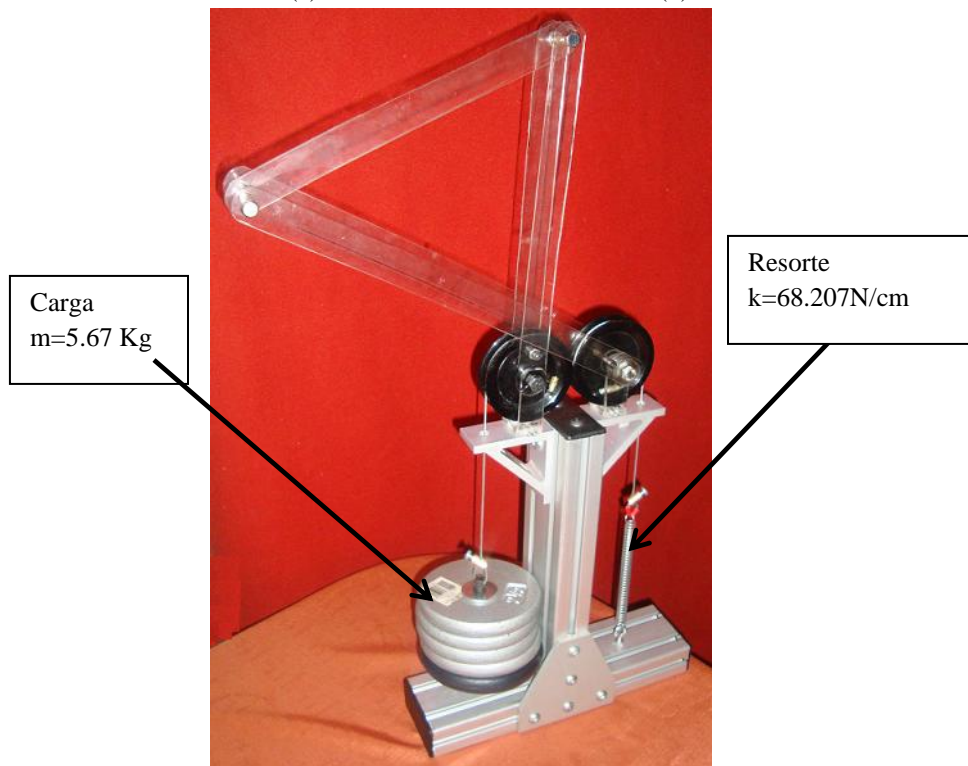
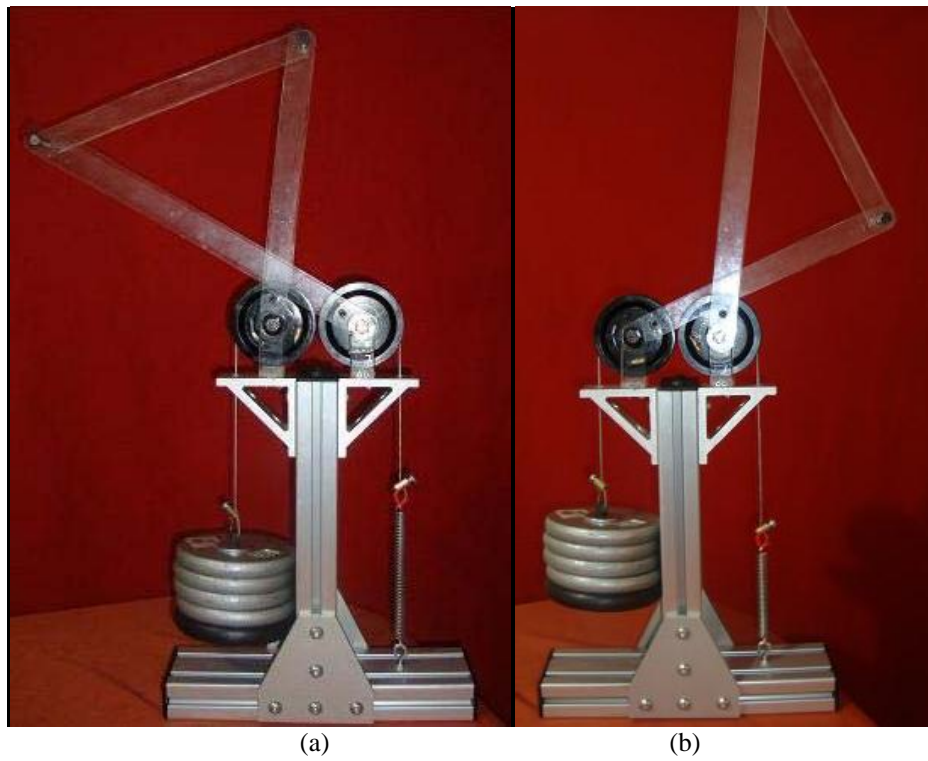


Figura 4.32. Prototipo fabricado: (a) posición más baja (b) posición más alta

4.3.1 Pruebas

Con el fin de validar las simulaciones hechas con MATLAB® y así validar el diseño definitivo, se realizaron 3 pruebas al mecanismo.

1. Prueba estática donde se desplaza la carga verticalmente hacia arriba o hacia abajo, con una velocidad despreciable. Se observa en la figura 4.32.(a) y 4.32(b) que la carga mantiene su posición vertical en la cual se coloque. Cuando se le aplica una fuerza a la carga para que ésta se mueva y cuando se le deja de aplicar, la carga permanece en su sitio. En parte este comportamiento es debido al diseño, pero además, la carga se detiene debido a la fricción entre los diferentes elementos con los que cuenta el mecanismo. De no existir fricción, al tratarse de un sistema conservativo la carga seguiría su trayecto al dejar de aplicarle la fuerza. Entonces, el trabajo aplicado se pierde por la fricción.
2. Con ayuda de un robot Fanuc M-16iB/20T y un sensor de fuerza modelo FT Gamma SI-130-10 fabricado por ATI Industrial con las siguientes características de fuerza y par:

Señal	Rango de Operación	Unidades
Fx, Fy	± 130	N
Fz	± 400	N
T x, Ty, Tz	± 10	Nm

Se realizó una medida de la carga necesaria para vencer la fricción. Con este fin, el sensor se colocó por debajo de la carga y se empujó con el sensor hasta que ésta se movió, venciendo la fricción al levantar la carga como se muestra en la figura 4.33.

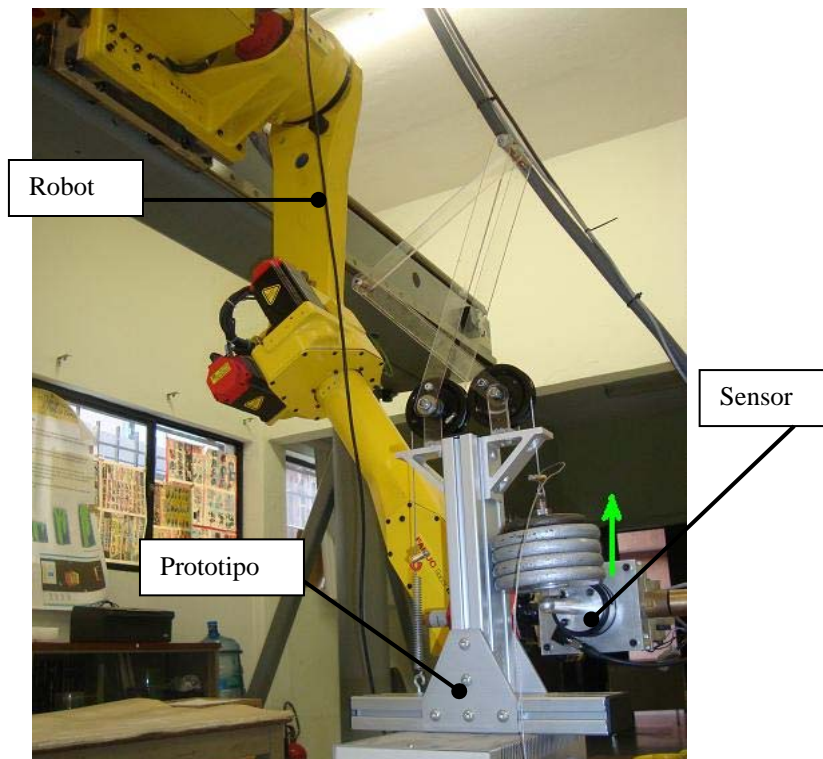


Figura 4.33. Prueba realizada para medir la fricción

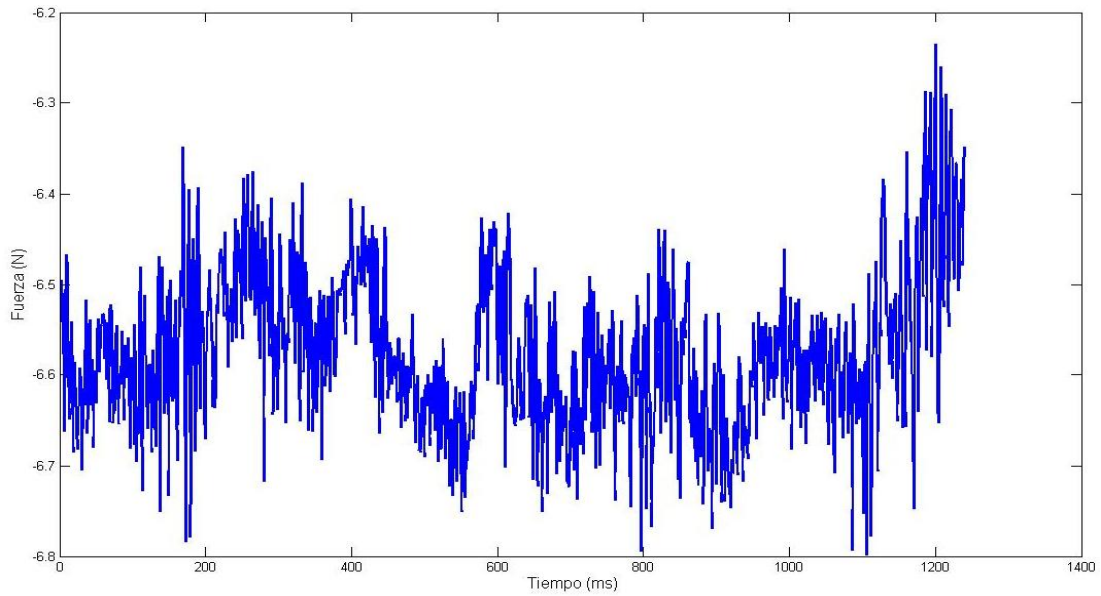


Figura 4.34. Fuerza medida por el sensor debido a la fricción.

Los resultados de la medición se ilustran en la figura 4.34 donde se observa que la fuerza de fricción varía aproximadamente entre 6.6N y 6.3N

3. Utilizando el mismo robot y el mismo sensor, se ensambló el sensor en el cable que sostiene la carga por encima de ésta (ver figura 4.35), para simular la variación del centro de gravedad de una persona mientras realiza sus ejercicios para mejorar su marcha. El robot fue encargado de variar la posición vertical de la carga y el sensor de registrar la fuerza ejercida.

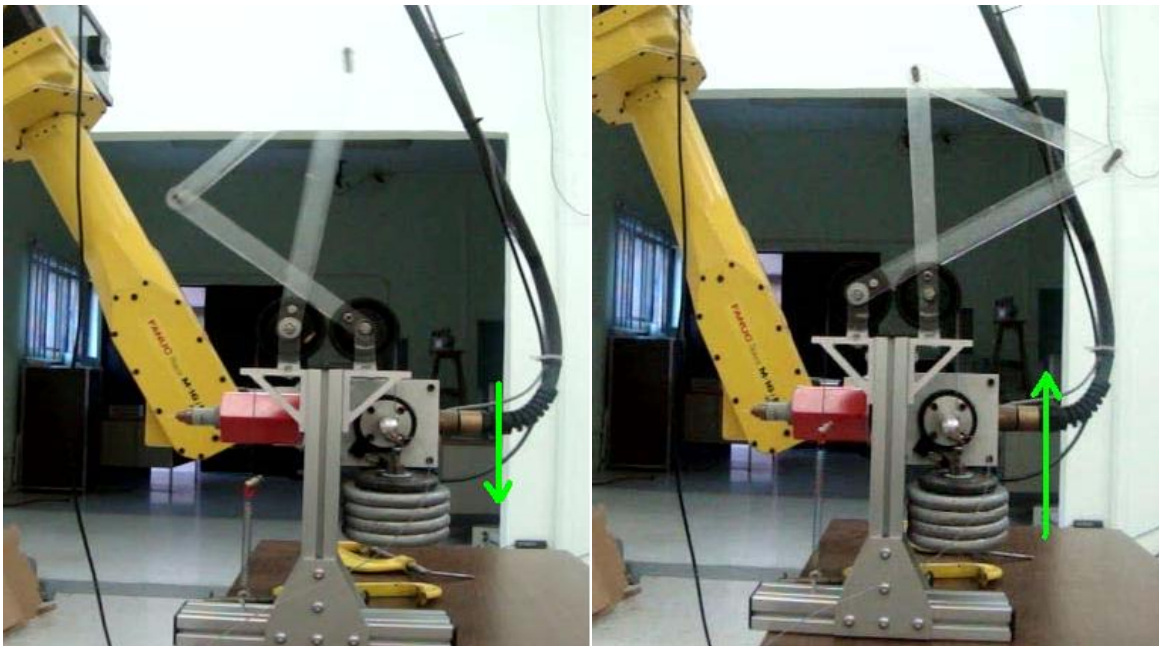


Figura 4.35. Prueba realizada al prototipo para el comportamiento dinámico.

Debido al radio pequeño de la polea, de 3.5 cm, y de acuerdo al rango de trabajo del mecanismo de 80° , se tiene aproximadamente 4.5cm de desplazamiento vertical de la carga. El tiempo del ciclo programado para el robot fue de 3 segundos durante los cuales la carga se desplaza hacia arriba y hacia abajo. El perfil de velocidad de entrada $\dot{\theta}_2$ se muestra en la figura 4.36 y el perfil de aceleración $\ddot{\theta}_2$ en la figura 4.37.

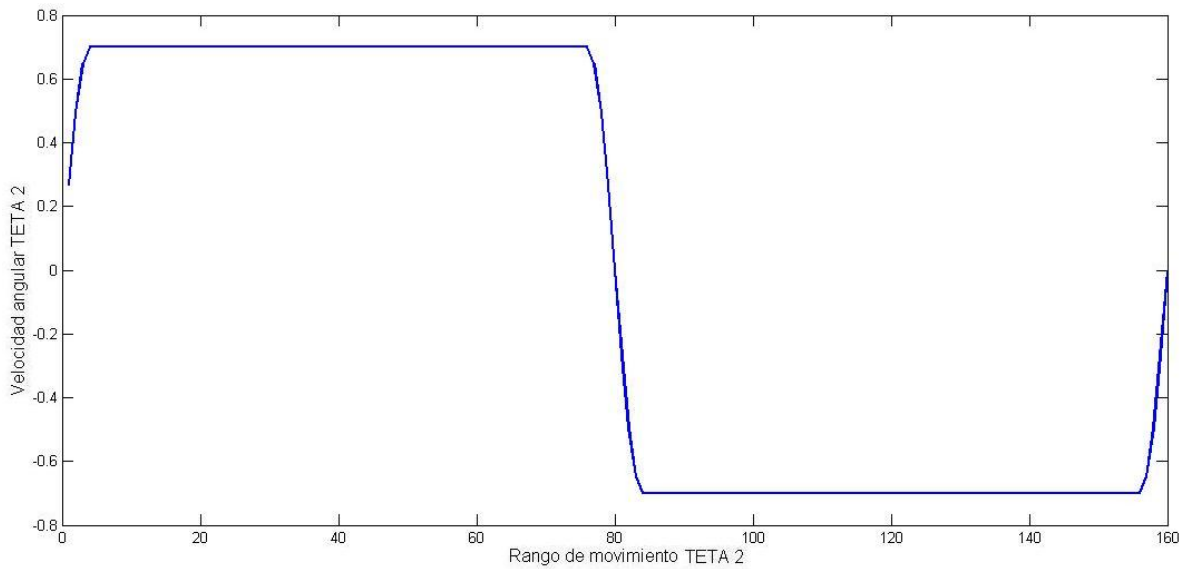


Figura 4.36. Perfil de velocidad de entrada para la prueba experimental.

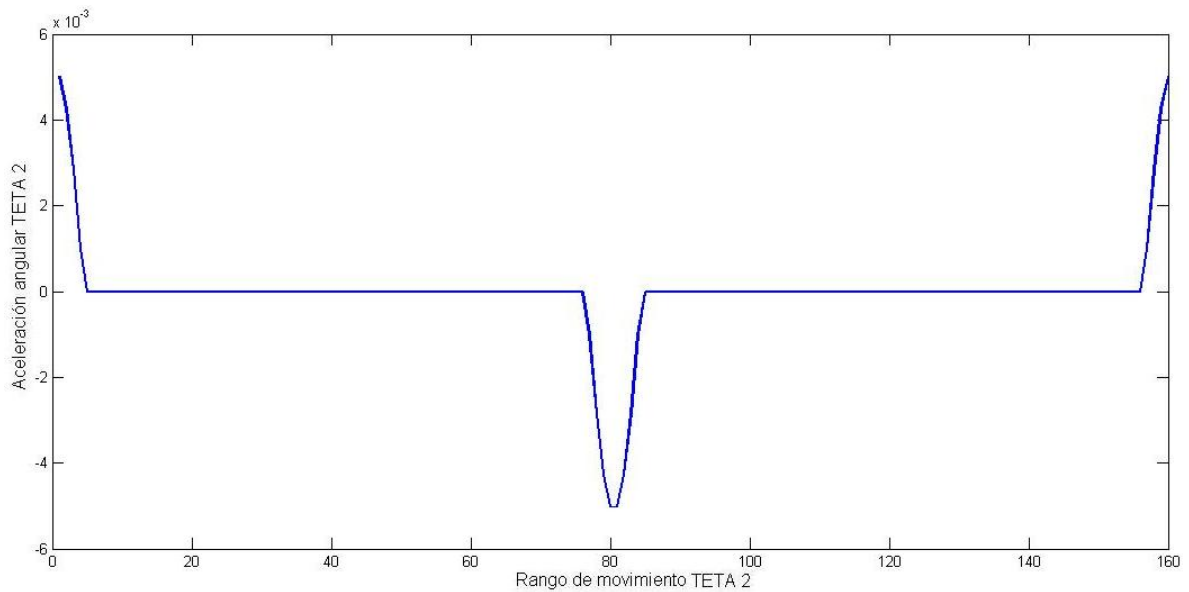


Figura 4.37. Perfil de aceleración de entrada para la prueba experimental.

En la figura 4.38 se observan las mediciones del sensor durante la prueba.

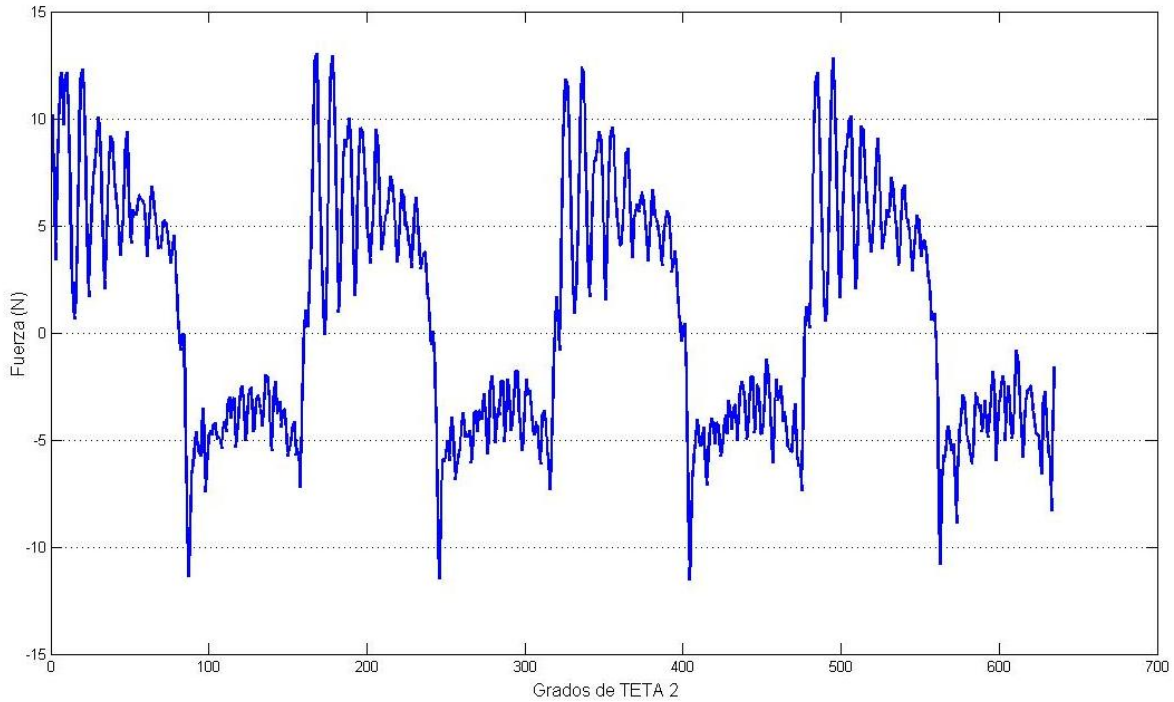


Figura 4.38. Medidas del sensor durante la prueba al prototipo.

Se puede observar el comportamiento del mecanismo, el cual en cada ciclo repite la misma medida de fuerza. El sensor mide en cada pico aproximadamente un máximo de 1Kg, lo que resulta ser el 17.6% de la carga a levantar. Como se observó en la figura 4.34, la fricción que tiene el prototipo es alta. Sin embargo, el interés por el prototipo es el conocer el comportamiento del mecanismo y validar los modelos desarrollados por el mismo. Se observa que en cada medio ciclo hay un cruce por cero y, a fin de validar este comportamiento y el del diseño definitivo para cargas más altas, se introducen los datos al código para tratar de establecer si el modelo propuesto concuerda con el comportamiento de las cargas medidas.

En la figura 4.39 se observa un diagrama del cuerpo libre del sensor, usado para modelar en el código de MATLAB® lo que el sensor está midiendo.

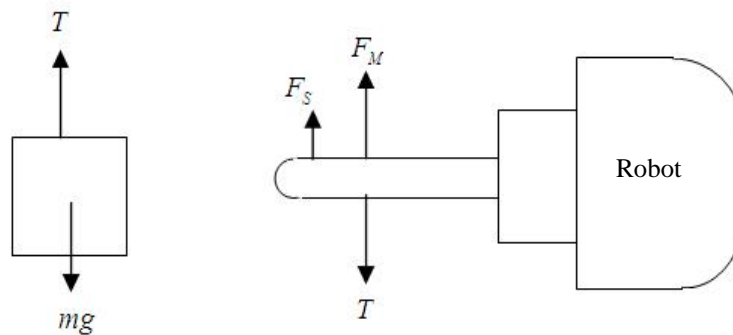


Figura 4.39 Cuerpo libre de las fuerzas que interactúan en el sensor.

De acuerdo a la figura 4.39 en la carga:

$$T - mg = m\ddot{x} \quad (4.17)$$

O bien,

$$T = m(g + \ddot{x}) \quad (4.18)$$

Donde

T = tensión del cable.

$\ddot{x} = \ddot{\theta}_2 r_2$ aceleración vertical cuando la carga se desplaza.

En el sensor se supone una masa despreciable para el elemento de aluminio donde se sujetan los cables. Así, considerando las siguientes variables:

F_S = Fuerza que mide el sensor.

F_M = Fuerza que presenta el mecanismo en el cable

F_{sf} = Fuerza que presenta el mecanismo sin modelar la fricción

F_f = Fuerza de fricción dentro del mecanismo

K = Coeficiente de fricción.

Se tiene

$$F_M + F_S - T = 0 \quad (4.19)$$

O bien

$$F_S = T - F_M \quad (4.20)$$

e introduciendo (4.17)

$$F_S = m(g + \ddot{\theta}_2 r_2) - F_M \quad (4.21)$$

Puede considerarse

$$F_M = F_{sf} + F_f \quad (4.22)$$

Y, considerando que la fuerza de fricción está en contra del movimiento, puede proponerse:

$$F_f = -K \frac{\dot{\theta}_4}{|\dot{\theta}_4|} \quad (4.23)$$

Así, pueden introducirse los valores al código, sin embargo, como no se tiene modelada la fricción del mecanismo se toma el valor promedio de fuerzas de fricción medidas durante la prueba 2 y que se ilustran en la figura 4.34, el cual es de 6.5819 N.

En la figura 4.40 se observa la simulación con el código en MATLAB®.

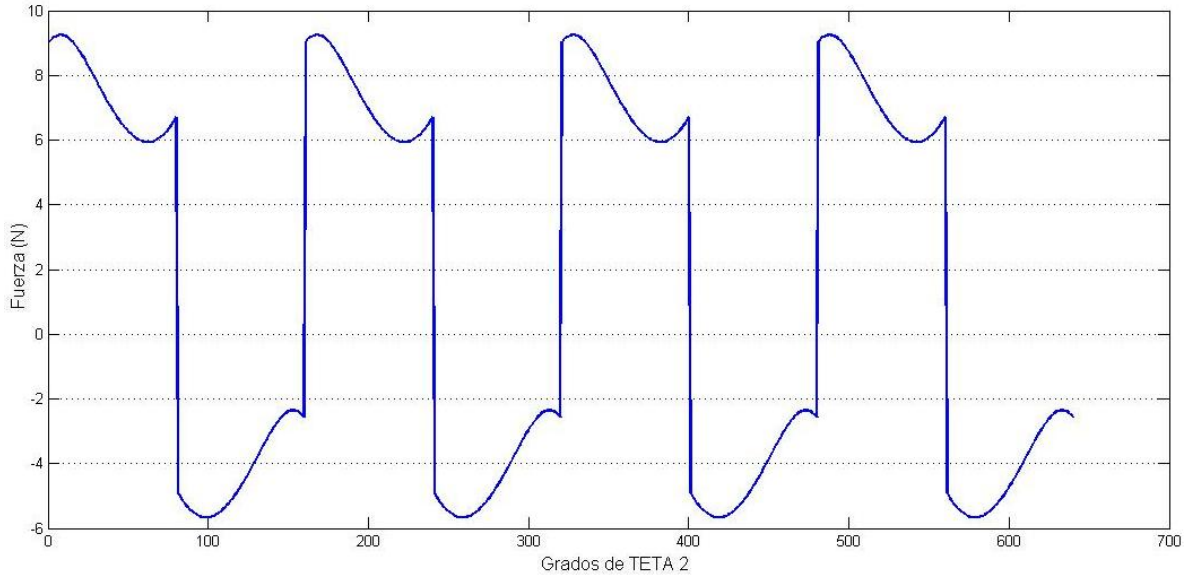


Figura 4.40. Simulación MATLAB® para la fuerza en el prototipo.

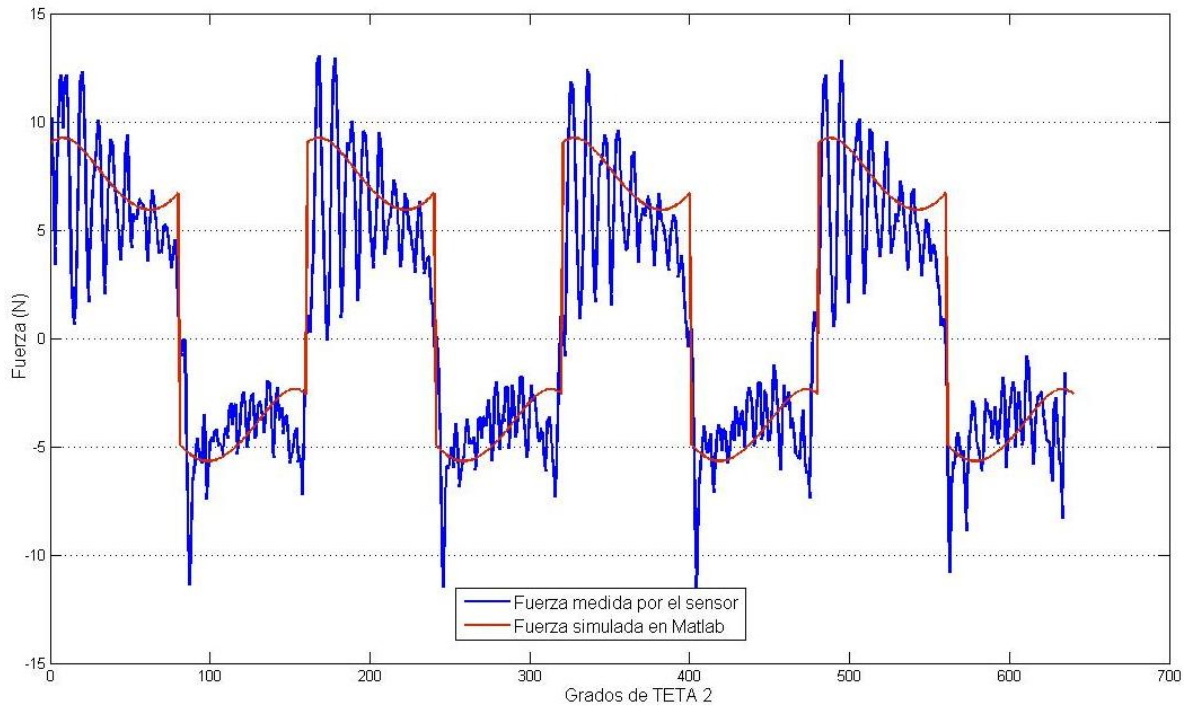


Figura 4.41 Empalme de las fuerzas presentes en el mecanismo.

Se observa que las fuerzas medidas exhiben un comportamiento oscilatorio amortiguado, que no es incluido en el modelo y por lo tanto, no es reproducido en la simulación. A pesar de ello, el comportamiento simulado guarda un valor muy parecido con las fuerzas medidas, en lo que respecta a los valores de fuerza promedio, lo cual se considera como una validación del modelo propuesto.

Conclusiones

En la actualidad el estudio de los mecanismos es un campo bien conocido de la investigación que encuentra sus usos prácticos en diferentes tipos de dispositivos como lo son las máquinas herramienta, robótica y en muchas otras ramas de la industria. El análisis y estudio de los mecanismos continua desarrollándose y los nuevos acercamientos y soluciones se están documentando constantemente. Un nuevo campo de sus usos es la rehabilitación robótica.

El trabajar con mecanismos articulados es una de las primeras opciones que debe tomar en cuenta el diseñador, debido a su sencillez y a su inmenso rango de aplicaciones para las que se pueden utilizar. Así también su costo es más económico que el uso de servomotores o componentes electrónicos. De este modo, a no ser que éstos sean necesarios, es conveniente la solución con un mecanismo de eslabonamientos.

En la rehabilitación de la marcha queda claro que es esencial el sostenimiento gradual del peso del paciente para que este logre recuperar, en la medida de lo posible, sus facultades motrices y la corrección de su caminado. Existen abundantes dispositivos para lograrlo pero solo pocos consideran el hecho de que, al caminar, el centro de gravedad de nuestro cuerpo varía verticalmente y horizontalmente, siendo el primero el causante de muchos problemas con respecto al sostenimiento del peso. Esto debido a que no se puede fijar al paciente, sino que se tiene que permitir esta variación al estar sujeto el paciente para que este no experimente fuerzas indeseadas a través del arnés que lo sujeta. Los dispositivos que ofrecen esta libertad de movimiento, mientras el paciente realiza sus ejercicios, son demasiado costosos ya que involucran el uso de sistemas electrónicos, como sensores de fuerza y no es posible que todas las personas o instituciones de rehabilitación tengan acceso a ellos.

Se exploraron diferentes tipos de síntesis de mecanismos para solucionar el problema de la modulación de energía potencial, con energía potencial elástica, siendo el enfoque de síntesis de aproximación por mínimos cuadrados la que resultó tener el mejor comportamiento del mecanismo sintetizado, contradiciendo que la síntesis de 5 puntos es la más precisa ya que para el caso de síntesis de generador de funciones solo se pueden tener 5 puntos de manera matemática exacta. Esta síntesis produjo los índices de desempeño o medidas de error menores, pero con valores de ensamble inicial inalcanzables de manera exacta. Así como resulta costosa la fabricación precisa de la longitud de los eslabones, también el mecanismo sintetizado de esta forma es muy sensible a los cambios de masa de los eslabones. Así, por ejemplo, cargar a una persona de más de 80 Kg demandaría el uso de eslabones de acero o de algún otro material resistente y por lo tanto, la masa de estos incrementaría.

Los índices de desempeño utilizados para evaluar los mecanismos sintetizados son de gran ayuda ya que abarcan desde medir la precisión de la función generada con la deseada, así como el comportamiento dinámico del mecanismo con lo que se garantiza una operación confiable, asegurando la realización de la función para lo cual fue diseñado.

Se solucionó el problema de la modulación de energía con el mecanismo de eslabonamiento más simple que es el de cuatro barras. Esto es un logro ya que este ofrece muchas ventajas, desde que la manufactura no es complicada, la posibilidad de trabajar en ambientes hostiles, no necesitar de mayor mantenimiento sencillez de ensamblaje.

Con la construcción del prototipo se determinó que efectivamente el mecanismo modula la transferencia de energía, balanceando el peso de manera eficiente generando la función propuesta (2.13). Este prototipo presenta varios problemas como lo es la fricción, que fue más alta de lo esperado ya que elevó el error a un 17% del peso de carga. Aunque la fabricación no fue precisa sino aproximada, sirvió para validar las simulaciones de MATLAB® ya que con los parámetros necesarios el comportamiento es muy parecido al medido físicamente en el prototipo con el sensor de fuerza.

Como conclusión de este trabajo, se obtuvo el diseño de un mecanismo de eslabonamientos de cuatro barras que realiza la modulación de transferencia de energía potencial de un paciente que realiza ejercicios de rehabilitación de marcha con la energía que almacena un resorte. El diseño es cien por ciento mecánico, por lo que la fabricación y costo de éste está por debajo de los dispositivos existentes en el mercado que realizan esta modulación. Esto debido a que, como ya se mencionó, constan de un sistema activo complicado.

Propuestas para trabajo a futuro

Como trabajo a futuro a desarrollar a partir de este, se encuentra fabricar el dispositivo con los valores propuestos de diseño y realizar pruebas con un paciente el cual se sostenga y realice los ejercicios y así observar la modulación de la energía. Se propone también la ampliación de la aplicación a la modulación de la energía en desplazamientos más amplios que el del centro de gravedad de una persona, incrementando la longitud de uno de los eslabones del mecanismo o el desplazamiento del pivote de uno de ellos para adecuar la función deseada en un rango más amplio[21,22]. Esto permitiría incrementar la versatilidad del diseño al poderse aplicar, por ejemplo, en una línea de ensamble de partes pesadas.

ANEXOS

Anexo 1. Código general en MATLAB® para el mecanismo cuatro barras.

```
%% SINTESIS Y ANALISIS CINEMATICO Y DINAMICO EN UN MECANISMO DE CUATRO BARRAS
clear all
%% gravedad
g=9.81;
%% masa a sostener Kilogramos
% m=50;
m=5.67;
%% Constante del resorte N/m
% KR=2241;
% KR=682.070625;
%% Radio de la polea metros
% R1=0.24;
% R2=0.15;
R1=0.035;
R2=0.035;
%% Valor inicial de teta2 grados
%% Ciclo para diferentes valores de inicio y constantes de resorte
uu=1;
% for KR=2100:2400
%   eee=1;
%   for ww=43:43
%       clear L FI K ed ft4 TR JJ G TRR ED EA ES es EF FR F TW Ep ER yy EE;
%       o=ww;
%       %% Ciclo del rango para estimacionlineal (aproximacion por mínimos cuadrados)
%       for q=5:-0.1:0.1
%           gg(uu,1)=q;
%           q=1;
%           o=43;
%           %% Rango de movimiento
%           h=79;
%           %% Longitud del eslabon 1
%           l1=0.085;
%           %% Metodo de sintesis
%           [FI,K]=estimacionlineal(m,KR,R1,R2,o,h,q);
%           %% Longitudes de los eslabones
%           l2=l1/K(1);
%           l4=l1/K(2);
%           l1=(l1*l1)+(l2*l2)+(l4*l4)-(K(3)*2*l2*l4);
%           l3=sqrt(l1);
%           L=[l1;l2;l3;l4];
%           %% para la sintesis de 5 puntos
%           o=(K(4)*180/pi);
%           %% Peso o carga N
W=m*g;
%           %% valor de las masas de los eslabones Kg
m1=0;
m2=(0.038);
```

```

m3=(0.036);
m4=(0.046);
%% Momento de inercia de los eslabones
I2=((1/12)*m2*((12*12)));
I3=((1/12)*m3*((13*13)));
I4=((1/12)*m4*((14*14)));
%% Torque producido por por la carga Nm
Tw=R1*W;
%% Ciclo para cambio de aceleración
Cambio=1;
%% Fuerza de friccion
Ff=[];
%% Fuerza que presenta el mecanismo
F=[];
%% Fuerza de carga constante
FR=[];
%% vector de velocidad angular
Vv=[];
%% vector de aceleracion angular
Aa=[];
%% Ciclo para cambio del mecanismo (de regreso)
for xx=1:8
%% valor inicial de la velocidad de teta2 y su aceleracion
t2p=0;
t2pp=0;
%% variable para el regreso del mecanismo
Cambio=Cambio*(-1);
%% COEFICIENTES DE DISEÑO
K1=K(1);
K2=K(2);
K3=K(3);
%% Ciclo para la cinematica y dinamica del mecanismo 4 barras (ida y regreso)
z=1;
if Cambio<0
    pp=0;
    p=(o+h);
    u=1;
end
if Cambio>0
    pp=(o+h);
    p=(o);
    u=-1;
end
for i=pp:u:p
    %% valor de teta 2
    t2=(i)*(pi/180);
    ft2(z,1)=t2;
    %% resolver para teta4 y teta 3
    A=((-2)*l2*l4*sin(t2));
    B(((2)*l1*l4)-(2*l2*l4*cos(t2)));
    C(((l1*l1)+(l2*l2)+(l4*l4)-(l3*l3)-(2*l1*l2*cos(t2))));
    t4=(2*(atan((-A+sqrt((A*A)+(B*B)-(C*C)))/(C-B))));
    %% OTRA RAMA
    t4=(2*(atan((-A-sqrt((A*A)+(B*B)-(C*C)))/(C-B))));
    if t4<0

```

```

    t4=t4+(2*pi);
end
ft4(z,1)=(t4);
cst3=((11-(12*cos(t2))+(14*cos(t4)))/(13));
snt3=((14*sin(t4))-(12*sin(t2)))/(13));
t3=(2*atan((snt3)/(1+cst3)));
    if t3<0
        t3=t3+(2*pi);
    end
ft3(z,1)=(t3);
%% Graficar el mecanismo 4 barras
xa=0;
ya=0;
xb=12*cos(t2);
yb=12*sin(t2);
xc=((12*cos(t2))+(13*cos(t3)));
yc=((12*sin(t2))+(13*sin(t3)));
xd=11;
yd=0;
x=[xa;xb;xc;xd];
y=[ya;yb;yc;yd];
tet4=ft4(z)*(180/pi);
tet2=i;
%% VELOCIDADES
t4p=(((-12*t2p*cos(t2))+(12*t2p*cot(t3)*sin(t2)))/((-14*cos(t4))
+(14*cot(t3)*sin(t4)));
t3p=(((-14*t4p*sin(t4))+(12*t2p*sin(t2)))/(-13*sin(t3)));
ft4p(z,1)=t4p;
ft3p(z,1)=t3p;
%% ACELERACIONES
t4pp=((14*t4p*t4p*sin(t4))-(cot(t3)*12*t2p*t2p*cos(t2))-
(cot(t3)*13*t3p*t3p*cos(t3))+(cot(t3)*14*t4p*t4p*cos(t4))-
(13*t3p*t3p*sin(t3))+(12*t2pp*cos(t2))-(cot(t3)*12*t2pp*sin(t2))-
(12*t2p*t2p*sin(t2)))/((14*cos(t4))-(14*cot(t3)*sin(t4)));
t3pp=(((-12*t2pp*sin(t2))-(12*t2p*t2p*cos(t2))-
(13*t3p*t3p*cos(t3))+(14*t4p*t4p*cos(t4))+(14*t4pp*sin(t4)))/(13*sin(t3)));
ft4pp(z,1)=t4pp;
ft3pp(z,1)=t3pp;
%% ANALISIS DE FUERZAS
a2x=((-(12/2)*t2pp*sin(t2))-((12/2)*t2p*t2p*cos(t2)));
a2y=((12/2)*t2pp*cos(t2))-((12/2)*t2p*t2p*sin(t2));
a3x=((-12*t2pp*sin(t2))-(12*t2p*t2p*cos(t2))-((13/2)*t3pp*sin(t3))-
((13/2)*t3p*t3p*cos(t3)));
a3y=((12*t2pp*cos(t2))-(12*t2p*t2p*sin(t2))+((13/2)*t3pp*cos(t3))-
((13/2)*t3p*t3p*sin(t3)));
a4x=((-(14/2)*t4pp*sin(t4))-((14/2)*t4p*t4p*cos(t4)));
a4y=((14/2)*t4pp*cos(t4))-((14/2)*t4p*t4p*sin(t4));
q1=(12/2)*sin(t2);
q2=(-12/2)*cos(t2);
q3=-1*q1;
q4=-1*q2;
q5=(-13/2)*sin(t3);
q6=(13/2)*cos(t3);
q7=q5;
q8=q6;

```

```

q9=(l4/2)*sin(t4);
q10=(-l4/2)*cos(t4);
q11=q9;
q12=q10;
Q=[1 0 1 0 0 0 0 0 0
    0 1 0 1 0 0 0 0 0
    q1 q2 q3 q4 0 0 0 0 1
%   q1 q2 q3 q4 0 0 0 0 0
    0 0 -1 0 1 0 0 0 0
    0 0 0 -1 0 1 0 0 0
    0 0 q5 q6 q7 q8 0 0 0
    0 0 0 0 -1 0 1 0 0
    0 0 0 0 0 -1 0 1 0
    0 0 0 0 q9 q10 q11 q12 0];
%   0 0 0 0 q9 q10 q11 q12 -1];
%% Para la síntesis de 5 puntos
%   t44=t4+(27.634313407652797*pi/180);
%% Torque del resorte
TR=(KR*R2*R2*(t4));
P=[(m2*a2x)
    (m2*a2y)+(m2*g)
%   ((I2*t2pp)-Tw)
    ((I2*t2pp))
    (m3*a3x)
    (m3*a3y)+(m3*g)
    (I3*t3pp)
    (m4*a4x)
    (m4*a4y)+(m4*g)
    (I4*t4pp)+TR];
%   (I4*t4pp)];
S=((inv(Q))*P);
%   TR(z)=S(9,1);
%% Torque en la carga
TW(z,1)=S(9,1);
%% aceleracion y velocidad de teta2
[t2p,t2pp]=perfilvelocidadsensor(Cambio,z,t2p,h);
V(z,1)=t2p;
aa(z,1)=t2pp;
%% Modelo de fuerza de fricción
ff=6.5819*(-Cambio);
Ff=[Ff;ff];
%% GRAFICOS
%   plot(x,y)
%   hold on
%   pause
%   plot(tet2,tet4,'k')
%   plot(z,S(9,1),'b*');
%   hold on;
z=z+1;
end
%% Perfil de velocidad y aceleración
Vv=[Vv;V];
Aa=[Aa;aa];
%% Fuerza que presenta el Mecanismo
FF=(TW/R1);

```

```

F=[F;FF];
%% vector de carga constante debido al peso
for i=1:(h+1)
    FRR(i,1)=W;
end
FR=[FR;FRR];
%% Fuerza de tensión en el extremo opuesto del sensor
Cc=(g+(Aa*R2));
FF2=(Cc*m);
%% Graficos de fuerzas
% plot(F,'b');
% hold on;
% plot(FR,'r');
% hold on;
%% Error fuerzas
[EF,ef]=errorfuerzas(F,FR,W);
% plot(EF);
%% rango menor de operacion del mecanismo
dd=1;
for j=8:68
    EF2(dd,1)=EF(j);
    F2(dd,1)=F(j);
    FR2(dd,1)=FR(j);
    dd=dd+1;
end
F22=[F22;F2];
%% Torque real
% for i=1:(h+1)
% TRR(i)=(KR*R2*R2*ft4(i));
% end
% plot(TRR,'r*');
% hold on;
%% para la síntesis de 5 puntos
% ft4=ft4+(27.634313407652797*pi/180);
% ft2=ft2-(K(4)-(43*(pi/180)));
%% Error de diseño
ED=errordisenio(K,ft2,ft4);
%% Error estructural
ES=errorestructural(FI,ft4);
%% Error por area bajo la curva
[EA,eal,ea2]=errorarea(o,L,m,KR,R1,R2,h);
%% Error de Energías
[EE,ER,EP]=errorenergias(m,g,KR,R1,R2,ft2,ft4);
%% Graficos de las energías de la carga y del resorte
% plot(ER,'g*');
% hold on;
% plot(Ep,'b');
% hold on;
%% Vector de Energías
% EDD(uu,1)=ED;
% EAA(uu,1)=EA;
% ESS(uu,1)=ES;
% EEE(uu,1)=EE;
% EFF(uu,1)=max(abs(EF2));
% eee=eee+1;

```

```

% end
% end
% uu=uu+1;
end
[r2]=polea(KR,R2,R1,m);
%% Graficos de errores para diferentes puntos tomados
% subplot(3,2,1);
% plot(gg,ESS);
% hold on;
% xlabel ('Rango de puntos');
% ylabel ({'Error Estructural'});
% subplot(3,2,2);
% plot(gg,EDD);
% hold on;
% xlabel ('Rango de puntos');
% ylabel ({'Error de Diseño'});
% subplot(3,2,3);
% plot(gg,EAA);
% hold on;
% xlabel ('Rango de puntos');
% ylabel ({'Error por Areas'});
% subplot(3,2,4);
% plot(gg,EEE);
% hold on;
% xlabel ('Rango de puntos');
% ylabel ({'Error de Energías'});
% subplot(3,2,5);
% plot(gg,EFF);
% hold on;
% xlabel ('Rango de puntos');
% ylabel ({'Error de Fuerzas'});
% subplot(2,2,1);
% plot(gg,ESS);
% hold on;
% xlabel ('Rango de puntos');
% ylabel ({'Error Estructural'});
% subplot(2,2,2);
% plot(gg,EAA);
% hold on;
% xlabel ('Rango de puntos');
% ylabel ({'Error por Areas'});
% subplot(2,2,3);
% plot(gg,EEE);
% hold on;
% xlabel ('Rango de puntos');
% ylabel ({'Error de Energías'});
% subplot(2,2,4);
% plot(gg,EFF);
% hold on;
% xlabel ('Rango de puntos');
% ylabel ({'Error de Fuerzas'});
function [t2p,t2pp]=perfilvelocidadsensor(C,i,ant)
vv=0.7;
if C<0
    if i>=1 && i<4

```



```

        y=vv*sin(((pi/2)*i)/(4));
        y2=((y-ant)/(80/1.5));
    end
    if i>=4 && i<76
        y=vv;
        y2=((y-ant)/(80/1.5));
    end
    if i>=76 && i<=80
        h=i-72;
        y=vv*sin(((pi/2)*h)/(4));
        y2=((y-ant)/(80/1.5));
    end
end
end
if C>0
    if i>=1 && i<4
        y=-vv*sin(((pi/2)*i)/(4));
        y2=((y-ant)/(80/1.5));
    end
    if i>=4 && i<76
        y=-vv;
        y2=((y-ant)/(80/1.5));
    end
    if i>=76 && i<=80
        h=i-72;
        y=-vv*sin(((pi/2)*h)/(4));
        y2=((y-ant)/(80/1.5));
    end
end
end
t2p=y;
t2pp=y2;
end

%% Datos sensor
clear all
load Sensor.txt
% load friccion.txt
plot(Sensor);
% plot(friccion);

function [r2]=polea(K,R2,R1,m)
t=1;
g=9.81;
C=((2*m*g*R1)/(K*R2*R2));
for i=80:-0.1:45
    r2(t)=((C*K*R2*R2)/(2*i*g));
    t=t+1;
end

```

Anexo 2. Código de síntesis de 3 puntos de precisión en MATLAB® para el mecanismo cuatro barras.

```
function [X,KT]=trespuntos(m, K, R1, R2, o, h, q)
g=9.81;
z=1;
p=q;
for i=o:(o+h)
    t1=i*(pi/180);
    ff=((sqrt((2*m*g*(t1)*R1)/(K*R2*R2))));
    Fi=ff*(180/pi);
    X(z,1)=ff;
    X1(z)=Fi;
    Y(z)=t1;
    Y1(z)=i;
    z=z+1;
end
plot(Y1,X1);
title('Funcion')
xlabel('TETA')
ylabel('FI')
hold on;
seg=fix(h/2);
ter=h;
TETA=[Y(2);Y(seg);Y(ter)];
FI=[X(2);X(seg);X(ter)];
TETA2=[Y1(2);Y1(seg);Y1(ter)];
FI2=[X1(2);X1(seg);X1(ter)];
plot(TETA2,FI2,'ro');
A=[cos(FI(1)) -cos(TETA(1)) 1
    cos(FI(2)) -cos(TETA(2)) 1
    cos(FI(3)) -cos(TETA(3)) 1];
B=[cos(TETA(1)-FI(1))
    cos(TETA(2)-FI(2))
    cos(TETA(3)-FI(3))];
KT=(inv(A)*B);
```

Anexo 3. Código de síntesis de 4 puntos de precisión en MATLAB® para el mecanismo cuatro barras.

```
function [X,KT]=cuatropuntos(m, K, R1, R2, o, h, q)
g=9.81;
z=1;
v=q;
for i=o:(o+h)
    t1=i*(pi/180);
    ff=((sqrt((2*m*g*R1*(t1))/(K*R2*R2))));
    Fi=ff*(180/pi);
    X(z,1)=ff;
    X1(z)=Fi;
    Y(z)=t1;
    Y1(z)=i;
    z=z+1;
end
plot(Y1,X1);
title('Funcion')
xlabel('TETA')
ylabel('FI')
hold on;
seg=fix(h/3);
ter=fix(h/1.5);
cua=h;
TETA=[Y(2);Y(seg);Y(ter);Y(cua)];
FI=[X(2);X(seg);X(ter);X(cua)];
TETA2=[Y1(2);Y1(seg);Y1(ter);Y1(cua)];
FI2=[X1(2);X1(seg);X1(ter);X1(cua)];
plot(TETA2,FI2,'ro');
A=[cos(FI(1))+cos(FI(2)) -cos(TETA(1))-cos(TETA(2)) 2
    cos(FI(3)) -cos(TETA(3)) 1
    cos(FI(4)) -cos(TETA(4)) 1 ];
B=[cos(TETA(1))-FI(1))+cos(TETA(2))-FI(2))
    cos(TETA(3))-FI(3))
    cos(TETA(4))-FI(4))];
KT=(inv(A)*B);
```

Anexo 4. Código de síntesis de 5 puntos de precisión en MATLAB® para el mecanismo cuatro barras.

```
function [X,KT]=cincopuntos(m, K, R1, R2, o, h, q)
g=9.81;
z=1;
v=q;
for i=o:(o+h)
    t1=i*(pi/180);
    ff=((sqrt((2*m*g*R1*(t1))/(K*R2*R2))));
    ff2=((sqrt((2*m*g*R1*(i))/(K*R2*R2))));
    Fi=ff*(180/pi);
    X(z,1)=ff;
    X1(z)=Fi;
    X2(z,1)=ff2;
    Y(z)=t1;
    Y1(z)=i;
    z=z+1;
end
    plot(Y1,X1);
    title('Funcion')
    xlabel('TETA')
    ylabel('FI')
    hold on;
sec=fix(h/4);
ter=fix(h/2);
cua=fix(h/1.3);
    TETA=[Y(2);Y(sec);Y(ter);Y(cua);Y(h)];
    FI=[X(2);X(sec);X(ter);X(cua);X(h)];
    TETA2=[Y1(2);Y1(sec);Y1(ter);Y1(cua);Y1(h)];
    FI2=[X1(2);X1(sec);X1(ter);X1(cua);X1(h)];
    plot(TETA2,FI2,'ro');
Deltet=(h)*(pi/180);
Xini=o*(pi/180);
Yini=((sqrt((2*m*g*R1*(Xini))/(K*R2*R2))));
Xfin=(o+h)*(pi/180);
Yfin=((sqrt((2*m*g*R1*(Xfin))/(K*R2*R2))));
Delfi=(Yfin-Yini);
f1=((FI(1)-Yini)/(Yfin-Yini))*(Delfi);
t1=((TETA(1)-Xini)/(Xfin-Xini))*(Deltet);
f2=((FI(2)-Yini)/(Yfin-Yini))*(Delfi);
t2=((TETA(2)-Xini)/(Xfin-Xini))*(Deltet);
f3=((FI(3)-Yini)/(Yfin-Yini))*(Delfi);
```

```

t3=((TETA(3)-Xini)/(Xfin-Xini))*(Deltet);
f4=((FI(4)-Yini)/(Yfin-Yini))*(Delfi);
t4=((TETA(4)-Xini)/(Xfin-Xini))*(Deltet);
f5=((FI(5)-Yini)/(Yfin-Yini))*(Delfi);
t5=((TETA(5)-Xini)/(Xfin-Xini))*(Deltet);
Xc=[0.1;0.1;0.1;0.1;0.1];
for j=1:200
    J=[(cos(f1+Xc(5)) (-cos(t1+Xc(4))) (1)
((Xc(2)*sin(t1+Xc(4)))+(sin(t1-f1+Xc(4)-Xc(5)))) ((-Xc(1)*sin(f1+Xc(5)))-
(sin(t1-f1+Xc(4)-Xc(5))))
(cos(f2+Xc(5)) (-cos(t2+Xc(4))) (1)
((Xc(2)*sin(t2+Xc(4)))+(sin(t2-f2+Xc(4)-Xc(5)))) ((-Xc(1)*sin(f2+Xc(5)))-
(sin(t2-f2+Xc(4)-Xc(5))))
(cos(f3+Xc(5)) (-cos(t3+Xc(4))) (1)
((Xc(2)*sin(t3+Xc(4)))+(sin(t3-f3+Xc(4)-Xc(5)))) ((-Xc(1)*sin(f3+Xc(5)))-
(sin(t3-f3+Xc(4)-Xc(5))))
(cos(f4+Xc(5)) (-cos(t4+Xc(4))) (1)
((Xc(2)*sin(t4+Xc(4)))+(sin(t4-f4+Xc(4)-Xc(5)))) ((-Xc(1)*sin(f4+Xc(5)))-
(sin(t4-f4+Xc(4)-Xc(5))))
(cos(f5+Xc(5)) (-cos(t5+Xc(4))) (1)
((Xc(2)*sin(t5+Xc(4)))+(sin(t5-f5+Xc(4)-Xc(5)))) ((-Xc(1)*sin(f5+Xc(5)))-
(sin(t5-f5+Xc(4)-Xc(5))))];
    f=[((Xc(1)*cos(f1+Xc(5)))-(Xc(2)*cos(t1+Xc(4)))+Xc(3)-(cos(t1-
f1+Xc(4)-Xc(5))))
((Xc(1)*cos(f2+Xc(5)))-(Xc(2)*cos(t2+Xc(4)))+Xc(3)-(cos(t2-
f2+Xc(4)-Xc(5))))
((Xc(1)*cos(f3+Xc(5)))-(Xc(2)*cos(t3+Xc(4)))+Xc(3)-(cos(t3-
f3+Xc(4)-Xc(5))))
((Xc(1)*cos(f4+Xc(5)))-(Xc(2)*cos(t4+Xc(4)))+Xc(3)-(cos(t4-
f4+Xc(4)-Xc(5))))
((Xc(1)*cos(f5+Xc(5)))-(Xc(2)*cos(t5+Xc(4)))+Xc(3)-(cos(t5-
f5+Xc(4)-Xc(5))))];
    Xc=Xc-(inv(J)*f);
end
KT=Xc;

```

Anexo 5. Código de síntesis de tres derivadas en MATLAB® para el mecanismo cuatro barras.

```

function [FI,KT]=tderivadas(m, K, r2, r4, o, h, q)
g=9.81;
z=1;
v=q;
for i=o:(o+h)
    t1=i*(pi/180);
    ff=((sqrt((2*m*g*(t1)*(r2))/(K*r4*r4))));
    Fi=ff*(180/pi);
    FI(z,1)=ff;
    X1(z)=Fi;
    TETA(z)=t1;
    Y1(z)=i;
    z=z+1;
end
plot(Y1,X1);
title('Funcion') xlabel('TETA') ylabel('FI')
hold on;
t2=52.35*pi/180;
t4=(sqrt((2*m*g*(t2)*(r2))/(K*r4*r4)));
h4=((1/2)*((2*m*g*r2)/(K*r4*r4))*(((2*m*g*r2*t2)/(K*r4*r4))^(-1/2)));
h4p=((1/2)*((2*m*g*r2)/(K*r4*r4))*(-
1/2)*(((2*m*g*r2)/(K*r4*r4))*(((2*m*g*r2*t2)/(K*r4*r4))^(-3/2))));
h4pp=((1/2)*((2*m*g*r2)/(K*r4*r4))*(-1/2)*(((2*m*g*r2)/(K*r4*r4))*(-
3/2)*(((2*m*g*r2)/(K*r4*r4))*(((2*m*g*r2*t2)/(K*r4*r4))^(-5/2))));
a1=-h4;b1=0; c1=-(1-h4); d1=0;
a2=-h4p;b2=-(h4*h4); c2=h4p; d2=-((1-h4)*(1-h4));
a3=(h4pp-(h4*h4*h4)); b3=3*h4*h4p; c3=-h4pp-((1-h4)*(1-h4)*(1-h4));d3=-3*h4p*(1
h4);
E1=(a1*sin(t4)+b1*cos(t4));D1=c1*cos(t4)+d1*sin(t4);F1=-c1*sin(t4)+d1*cos(t4);
E2=(a2*sin(t4)+b2*cos(t4));D2=c2*cos(t4)+d2*sin(t4);F2=-c2*sin(t4)+d2*cos(t4);
E3=(a3*sin(t4)+b3*cos(t4));D3=c3*cos(t4)+d3*sin(t4);F3=-c3*sin(t4)+d3*cos(t4);
La1=((D2*(E3-E1))+(E2*(D1-D3)));
La2=((E2*(F1-F3))-(D1*E3)+(E1*D3)+(F2*(E3-E1)));
La3=((E1*F3)-(F1*E3));
TT1=((-La2+sqrt((La2*La2)-(4*La1*La3)))/(2*La1));
TT2=((-La2-sqrt((La2*La2)-(4*La1*La3)))/(2*La1));
tt1=atan(TT1);
tt2=atan(TT2);
T2=t2;
A=[sin(T2) E1
    cos(T2) E2];
B=[D1*sin(T2)+F1*cos(T2)
    D2*cos(T2)+F2*cos(T2)];
RR=inv(A)*B;
K2=RR(1);
K1=RR(2);
K3=cos(T2-t4)+K2*cos(T2)-K1*cos(t4);
KT=[K1 K2 K3];

```

Anexo 6. Código de síntesis de aproximación por mínimos cuadrados (estimación lineal) en MATLAB® para el mecanismo cuatro barras.

```

function [FI,KT]=estimacionlineal(m, K, R1, R2, o, h, q)
g=9.81;
z=1;
for i=o:(o+h)
    t1=i*(pi/180);
    ff=((sqrt((2*m*g*(t1)*(R1))/(K*R2*R2))));
    Fi=ff*(180/pi);
    FI(z,1)=ff;
    X1(z)=Fi;
    TETA(z)=t1;
    Y1(z)=i;
    z=z+1;
end
plot(Y1,X1);
title('Funcion') xlabel('TETA') ylabel('FI') hold on;
w=1;
for j=o:q:(o+h)
    T1(w,1)=j*(pi/180);
    FJ(w,1)=((sqrt((2*m*g*(j*(pi/180))*(R1))/(K*R2*R2))));
    w=w+1;
end
AtA=[(sum((cos(FJ)).*(cos(FJ)))) (sum(((cos(FJ)).*(cos(T1))))))
(sum(cos(FJ)))
(sum(((cos(FJ)).*(cos(T1)))) (sum((cos(T1)).*(cos(T1)))) (-
sum(cos(T1)))
(sum(cos(FJ))) (-sum(cos(T1))) (w-1)];
AtAInv=inv(AtA);
AtY=[(sum((cos(FJ)).*(cos((T1-FJ))))))
(-sum((cos(T1)).*(cos((T1-FJ))))))
(sum(cos((T1-FJ))))];
X=AtAInv*AtY;
KT=X;

```

Anexo 7. Código de error de diseño en MATLAB® para el mecanismo cuatro barras.

```
function [E]=errordisen(K,ft2,ft4)
ed=(K(1)*cos(ft4))-(K(2)*cos(ft2))+K(3)-(cos(ft2-ft4));
A=ed'*ed;
B=size(ed);
C=B(1);
ED=sqrt(A/C);
E=ED;
```

Anexo 8. Código de error estructural en MATLAB® para el mecanismo cuatro barras.

```
function [E]=errorestructural(FI,ft4)
es=abs(ft4-FI);
A=es'*es;
B=size(es);
C=B(1);
ED=sqrt(A/C);
E=ED;
```


Anexo 9. Código de error por áreas en MATLAB® para el mecanismo cuatro barras.

```

function [E,ea1,ea2]=errorarea(o,L,m,K,R1,R2,h)
g=9.81;
l1=L(1);
l2=L(2);
l3=L(3);
l4=L(4);
syms t
ff=((sqrt((2*m*g*(t)*R1)/(K*R2*R2))));
T1=o*(pi/180);
T2=(o+h)*(pi/180);
ea1=int(ff,t,T1,T2);
z=1;
p=o;
p2=o+(h-(0.01));
for i=p:0.01:p2
    t2=(i)*(pi/180);
    A=(-2)*l2*l4*sin(t2);
    B=((2)*l1*l4)-(2*l2*l4*cos(t2));
    C=((l1*l1)+(l2*l2)+(l4*l4)-(l3*l3)-(2*l1*l2*cos(t2)));
    t4=(2*(atan((-A+sqrt((A*A)+(B*B)-(C*C)))/(C-B))));
    % t4=(2*(atan((-A-sqrt((A*A)+(B*B)-(C*C)))/(C-B))));
    if t4<0
        t4=t4+(2*pi);
    end
    % t4=t4+(27.634313407652797*pi/180);
    t22=(i+0.01)*(pi/180);
    A2=(-2)*l2*l4*sin(t22);
    B2=((2)*l1*l4)-(2*l2*l4*cos(t22));
    C2=((l1*l1)+(l2*l2)+(l4*l4)-(l3*l3)-(2*l1*l2*cos(t22)));
    t42=(2*(atan((-A2+sqrt((A2*A2)+(B2*B2)-(C2*C2)))/(C2-B2))));
    if t42<0
        t42=t42+(2*pi);
    end
    % t42=t42+(27.634313407652797*pi/180);
    ar=((t22-t2)*(t4));
    at((((t22-t2)*(t42-t4))/2);
    G(z)=((ar+at));
    z=z+1;
end
ea2=sum(G);
E=eval(ea1-ea2);

```

Anexo 10. Código de error por energías en MATLAB® para el mecanismo cuatro barras.

```
function [E,Er,Ep]=errorenergias(m,g,KR,R1,R2,ft2,ft4)
Ep=(m*g*R1*ft2);
Er=(0.5*KR*R2*R2*(ft4.*ft4));
ee=Ep-Er;
A=ee'*ee;
B=size(ee);
C=B(1);
ED=sqrt(A/C);
E=ED;
```

Anexo 11. Código de error por fuerzas en MATLAB® para el mecanismo cuatro barras.

```
function [ef,E]=errorfuerzas(F,FR,W)
ef=((F-FR)/(W))*100;
A=ef'*ef;
B=size(ef);
C=B(1);
ED=sqrt(A/C);
E=ED;
```

Bibliografía

- [1] Wilson C. E., Sadler P. J., *Kinematics and Dynamics of machinery* 2da Edición Harper Collins College Publishers 1993.
- [2] Norton Robert L., *Diseño de Maquinaria: Síntesis y Análisis de máquinas y mecanismos*, 3ª Edición McGraw-Hill Interamericana 2005.
- [3] Sánchez J., *Biomecánica de la marcha humana normal y patológica*, 2ª Edición Instituto de Biomecánica de Valencia 1999.
- [4] Núñez Samper, Mariano y Llanos Alcázar, Luis Fernando *Biomecánica, Medicina y Cirugía del Pie*, 2ª Edición Elsevier 2007.
- [5] Martínez Hidalgo, Carolina, Torres Hernández, Jorge, González Canino, Yaneris *Estudio preliminar para la introducción del Treadmill y el equipo de soporte parcial del peso corporal en el sistema de neurorrehabilitación multifactorial intensiva*, Centro Internacional de Restauración Neurológica (CIREN) la Habana (Cuba), Diciembre 2003.
- [6] Instituto CAREN de Rehabilitación Neurológica. <http://www.neurorrehabilitacion.com/treadmill.htm> Buenos Aires Argentina 2009.
- [7] Mabie, Hamilton H. y Reinholtz, Charles F. *Mecanismos y Dinámica de maquinaria*, 2ª Edición Limusa Wiley 1998
- [8] Beer Ferdinand, Johnston E. Russell, William E. Clausen, *Mecánica Vectorial para Ingenieros Dinámica*, 7a Edición McGraw-Hill 2005.
- [9] Shigley Hedward, Joseph, Uicker, John Joseph, *Theory of Machines and Mechanisms*, 2da Edición McGraw-Hill International Editions 1995.
- [10] Erdman Arthur, Sandor George N., *Diseño de mecanismos análisis y síntesis*, 3ra Edición Prentice Hall 1998.
- [11] Medellín Castillo, Hugo Ivan, *Apuntes de Clase de Síntesis y Dinámica de Mecanismos*, Agosto 2007-Enero 2008, Centro de Investigación y Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, U.A.S.L.P.
- [12] Falres J. Douglas, Burden, Richard L. *Análisis Numérico*, 6ta Edición International Thomson Editores 1998.
- [13] Stanisic, Michael M. y Mitchell, Abigail G. *Design of Function Generators*, Aerospace and Mechanical Engineering Department and Department of Mathematics, University of Notre Dame, January 2006.
- [14] Allen S. Hall Jr. *Kinematics and Linkage Design*, Waveland Press, INC 1961.
- [15] Kimbrell, Jack T. *Kinematics Analysis and Synthesis*, McGraw-Hill College 1991.

- [16] Gonzalez Galvan, Emilio Jorge, *Notas sobre Teoría de Estimación Aplicada a la Robótica*, Agosto 2008-Enero2009, Centro de Investigación y Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, U.A.S.L.P.
- [17] Doughty, Samuel. *Mechanic of Machines*, John Wiley & Sons, Diciembre 2005
- [18] Montserrat Altemir, José Carreón, María Dominguez, Isabel García, María Mendaro, *La rehabilitación de la marcha através de un programa acelerador de la marcha mediante el Sistema de Feedback Neurobid: estudio de un caso*, Revista Española de Neuropsicología 8,1-2: 63-75 (2006), ISSN: 1139-9872.
- [19] V. Arakelian, S. Ghazaryan, *Improvement of balancing accuracy of robotic systems: Application to leg orthosis for rehabilitation devices*, Mechanism and Machine Theory 43 (2008) 565-575, ELSEVIER,
- [20] Shao Jie Wang, Raj S. Sodhi, *Kinematic Synthesis of adjustable moving pivot four-bar mechanisms for multi.phase motion generation*, Department of Mechanical Engineering, New Jersey Institute of Technology, Newark, NJ 07102-1982, U.S.A. *Mech. Mach. Theory* Vol. 31, No. 4, pp. 459-474, 1996 Elsevier Science Ltd.
- [21] Kevin Russell, Raj S Sodhi, *On the design of slider-crank mechanisms. Part II: multi-phase path and function generation*, Elsevier Mechanism and Machine Theory 40 (2005) 301-317.