



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ**

**Facultad de Ingeniería**

**Centro de Investigación y Estudios de Posgrado**

**MODELADO DEL MOVIMIENTO DE UNA  
ARTICULACIÓN HUMANA EN UN  
AMBIENTE VISCOSO**

Tesis que para obtener el grado  
de Maestro en Ingeniería Mecánica presenta

Ing. Jorge Luis González Martínez

Asesor: Dr. Emilio Jorge González Galván

San Luis Potosí, S.L.P.

Agosto de 2011





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
DE SAN LUIS POTOSÍ

20 de enero de 2011

**ING. JORGE LUIS GONZÁLEZ MARTÍNEZ  
P R E S E N T E. –**

En atención a su solicitud de Temario, presentada por el **Dr. Emilio Jorge González Galván** Asesor de la Tesis que desarrollará Usted, con el objeto de obtener el Grado de *Maestría en Ingeniería Mecánica*. Me es grato comunicarle que en la Sesión de Consejo Técnico Consultivo celebrada el día 20 de enero del presente año, fue aprobado el Temario propuesto:

**TEMARIO:**

**“MODELADO DEL MOVIMIENTO DE UNA ARTICULACIÓN HUMANA EN  
UN AMBIENTE VISCOSO”**

INTRODUCCIÓN.

1. GENERALIDADES DEL MOVIMIENTO DE LAS ARTICULACIONES HUMANAS.
2. EL ENFOQUE DE CONTROL PARA TIEMPO MÍNIMO.
3. MODELADO DEL MOVIMIENTO RÁPIDO DE UNA ARTICULACIÓN.
4. VALIDACIÓN EXPERIMENTAL.

CONCLUSIONES.


ANEXOS.

BIBLIOGRAFÍA.

**“MODOS ET CUNCTARUM RERUM MENSURAS AUDEBO”**

**A T E N T A M E N T E**

  
**ING. ARMANDO VIRAMONTES ALDANA  
DIRECTOR**

  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
DE SAN LUIS POTOSÍ  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIRECCION



**FACULTAD  
DE INGENIERÍA**

Av. Manuel Nava 8  
Zona Universitaria • CP 78290  
San Luis Potosí, S.L.P.  
tel. (444) 826 2330 al39  
fax (444) 826 2336  
www.uaslp.mx

/bcb



# Agradecimientos

La presente tesis se la dedico con todo mi amor y cariño a mi esposa, *Gabriela Quintanilla Loreda*, y a mis hijos, *Gabriela y Erick Amaury*.

Una especial mención es para mis queridos padres, *Alejandra Martínez Martínez* y *José Rodolfo González Hernández*; y hermanos, *Enrique, Sandra Josefina, Guadalupe Wendolin, Ana Victoria y Rodolfo*, por todo el cariño y apoyo incondicional que siempre me han proporcionado.

A mi asesor de tesis *Dr. Emilio Jorge González Galván*, por sus consejos y sugerencias durante la asesoría; por su tiempo y dedicación al estar a cargo de un grupo multidisciplinario, generando proyectos de investigación de última generación.

A todo el personal académico que participó en la formación en mis estudios de posgrado.

A mis compañeros, *Gabriel García, Juan Carlos Arrellano, Agustín Marquez, Francisco Colorado, César Itzcoatl, Ana Jáuregui y Enrique Vázquez*, por su amistad y por compartir conmigo sus conocimientos y habilidades.

A mis compañeros del Laboratorio de Robótica, *Fernando, Isela, Marco, Gabriela, Gerardo, Lina* y en especial a *César* por su apoyo invaluable para la realización de los experimentos.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Generalidades del movimiento de las articulaciones humanas</b>	<b>5</b>
1.1. La biomecánica . . . . .	5
1.2. El sistema músculo-esquelético . . . . .	6
1.3. Percepción del movimiento . . . . .	9
1.4. Movimiento coordinado . . . . .	9
1.5. Movimiento balístico . . . . .	12
<b>2. El enfoque de control para tiempo mínimo</b>	<b>15</b>
2.1. Optimización . . . . .	15
2.2. Control óptimo para tiempo mínimo . . . . .	17
2.2.1. Aportación para el problema de ejemplo . . . . .	23
<b>3. Modelado del movimiento rápido de una articulación</b>	<b>31</b>
3.1. Diagrama esquemático . . . . .	32
3.2. Relación funcional . . . . .	34
3.3. Síntesis . . . . .	35
3.4. Suavizado . . . . .	39
<b>4. Validación experimental</b>	<b>47</b>
4.1. Plataforma experimental . . . . .	47
4.2. Pruebas experimentales . . . . .	52
<b>Conclusiones</b>	<b>69</b>

<b>Anexos</b>	<b>72</b>
<b>A. Solución del modelo matemático para tiempo mínimo</b>	<b>73</b>
A.1. Optimización sin filtrado . . . . .	73
A.2. Optimización con un filtro . . . . .	77
<b>B. Graficación de las pruebas experimentales</b>	<b>83</b>
B.1. Programa para graficar los datos experimentales . . . . .	83
<b>Bibliografía</b>	<b>90</b>



# Nomenclatura

	Descripción	Unidades absolutas
$t$	Tiempo	$[T]$
$t_f$	Tiempo final	$[T]$
$\mathbf{x}(t)$	Vector de estado	
$\mathbf{U}(t)$	Política de control	$[1]$
$\mathbf{U}^*(t)$	Política de control óptima	$[1]$
$F(t)$	Fuerza aplicada	$[MLT^{-2}]$
$F_{\text{limite}}(t)$	Fuerza máxima admisible	$[MLT^{-2}]$
$J$	Índice de desempeño	
$H$	Función Hamiltoniana	
$p^T$	Multiplicadores de Lagrange	
$n$	Orden del sistema	
$\text{sgn}()$	Función signo	
$\mathbf{U}^+$	Política de control positiva	$[1]$
$\mathbf{U}^-$	Política de control negativa	$[1]$
$T$	Tiempo mínimo	$[T]$
$\tau$	Tiempo de conmutación	$[T]$
$\theta$	Desplazamiento angular	radianes
$\dot{\theta}$	Velocidad angular	$[T^{-1}]$
$\theta_f$	Posición final angular	radianes
$I$	Momento de inercia de masa	$[ML^2]$
$K$	Constante de resorte	$[MT^{-2}]$
$B$	Constante de amortiguamiento	$[MT^{-1}]$
$M$	Momento aplicado	$[ML^2T^{-2}]$
$M_{\text{limite}}$	Momento máximo admisible	$[ML^2T^{-2}]$
$\bar{I}$	Matriz de inercia modificada	$[T^2]$
$\bar{K}$	Matriz de rigidez modificada	$[1]$
$\bar{B}$	Matriz de amortiguamiento modificada	$[T]$
$\omega_n$	Frecuencia natural	$[T^{-1}]$
$\xi$	Razón de amortiguamiento	$[1]$

	Descripción	Unidades absolutas
$k$	k-ésima Junta sináptica	
$\phi_{k-1}(t)$	Señal presináptica	
$\phi_k(t)$	Señal postsináptica	
$f(t)$	Función ponderadora	
$\omega$	Parámetro del proceso de sinapsis química	
$m$	Cantidad de filtros pasa-bajas	
$\varphi_0(\mathbf{t})$	Señal de entrada	
$\varphi_0^*(\mathbf{t})$	Control óptimo para tiempo mínimo	
$\tau_i$	i-ésimo Tiempo de conmutación	

# Índice de figuras

1.1.	Efecto sobre varias articulaciones del accionamiento de un solo músculo [4]. . . . .	8
1.2.	Extensión del movimiento. La velocidad y la aceleración del movimiento de la mano están escalados proporcionalmente a la distancia a la que está localizada el objetivo [46]. . . . .	11
2.1.	Políticas de control. . . . .	20
2.2.	Gráficas de movimiento en función del tiempo para la política de control $U^+$ del problema de ejemplo. Condiciones iniciales: $x_{10} = 0, x_{20} = -20$ . . . . .	21
2.3.	Gráficas de movimiento en función del tiempo para la política de control $U^-$ del problema de ejemplo. Condiciones finales: $x_{1f} = 450, x_{2f} = 0$ . . . . .	22
2.4.	Gráficas bang-bang. Se muestran las curvas de movimiento con respecto al tiempo para tiempo mínimo del problema de ejemplo. La conmutación se realiza en $t = \tau$ , desde la curva $U^+$ (condiciones iniciales: $x_{10} = 0, x_{20} = -20$ ) en rojo hacia la curva $U^-$ (condiciones finales: $x_{1f} = 450, x_{2f} = 0$ ) en azul, para un tiempo mínimo $T$ . . . . .	23
2.5.	Política de control óptima $U^*$ . La conmutación se realiza en $t = \tau$ , desde $U^+$ (condiciones iniciales: $x_{10} = 0, x_{20} = -20$ ) en rojo hacia $U^-$ (condiciones finales: $x_{1f} = 450, x_{2f} = 0$ ) en azul, para un tiempo mínimo $T$ . . . . .	24
2.6.	Gráfica de Estado para una política de control óptima $U^*$ . Se muestran las curvas de movimiento para tiempo mínimo, independientemente del tiempo, para el problema de ejemplo. La conmutación se realiza en $t = \tau$ , desde $U^+$ (condiciones iniciales: $x_{10} = 0, x_{20} = -20$ ) en rojo hacia $U^-$ (condiciones finales: $x_{1f} = 450, x_{2f} = 0$ ) en azul, para un tiempo mínimo $T$ . . . . .	24
2.7.	Familia de parábolas para una conmutación de $U^+$ (parábolas en rojo) a $U^-$ (parábolas en azul). Las flechas indican el sentido del movimiento. Las líneas gruesas corresponden a la gráfica de estados de la fig. 2.6. . . . .	25
2.8.	Gráficas bang-bang. Se muestran las curvas de movimiento con respecto al tiempo para tiempo mínimo del problema de ejemplo. La conmutación se realiza en $t = \tau$ , desde la curva $U^+$ (condiciones iniciales: $x_{10} = 0, x_{20} = 20$ ) en rojo hacia la curva $U^-$ (condiciones finales: $x_{1f} = 450, x_{2f} = 0$ ) en azul, para un tiempo mínimo $T$ . . . . .	26
2.9.	Política de control óptima $U^*$ . La conmutación se realiza en $t = \tau$ , desde la curva $U^+$ (condiciones iniciales: $x_{10} = 0, x_{20} = 20$ ) en rojo hacia la curva $U^-$ (condiciones finales: $x_{1f} = 450, x_{2f} = 0$ ) en azul, para un tiempo mínimo $T$ . . . . .	26

2.10. Gráficas Bang-Bang. Se muestran las curvas de movimiento con respecto al tiempo para tiempo mínimo del problema de ejemplo con restricciones adicionales. La conmutación se realiza en $t = \tau$ , desde la curva $U^+$ (condiciones iniciales: $x_{10} = 0, x_{20} = 0$ ) en rojo hacia la curva $U^-$ (condiciones finales: $x_{1f} = 450, x_{2f} = 0$ ) en azul, para un tiempo mínimo $T$ . . . . .	27
2.11. Política de control óptima $U^*$ . La conmutación se realiza en $t = \tau$ , desde la curva $U^+$ (condiciones iniciales: $x_{10} = 0, x_{20} = 0$ ) en rojo hacia la curva $U^-$ (condiciones finales: $x_{1f} = 450, x_{2f} = 0$ ) en azul, para un tiempo mínimo $T$ . . . . .	28
2.12. Gráfica de estado para una política de control óptima $U^*$ con un movimiento simétrico. Se muestran las curvas de movimiento para tiempo mínimo del problema de ejemplo con restricciones adicionales. La conmutación se realiza en $t = \tau$ , desde la curva $U^+$ (condiciones iniciales: $x_{10} = 0, x_{20} = 0$ ) en rojo hacia la curva $U^-$ (condiciones finales: $x_{1f} = 450, x_{2f} = 0$ ) en azul, para un tiempo mínimo $T$ . . . . .	29
2.13. Familias de parábolas en el espacio de estados, para una conmutación de $U^+$ (parábolas en rojo) a $U^-$ (parábolas en azul). Las líneas gruesas corresponden al movimiento simétrico de la gráfica de estados de la fig. 2.12. . . . .	29
3.1. Diagrama esquemático de una articulación humana en un ambiente viscoso. Se caracteriza mediante un sistema masa-resorte-amortiguador, donde $I$ representa el momento de inercia de masa, $K$ la constante del resorte y $B$ la constante del amortiguador, sujeto a un torque externo o momento aplicado $M$ , desplazándose un ángulo $\theta$ con respecto del fulcro, desde una posición inicial en reposo (línea continua) hasta una posición final en reposo (línea punteada).	33
3.2. Diagrama esquemático de una articulación humana en un ambiente viscoso. Se indican las diferentes posiciones con respecto del fulcro para cada componente. . . . .	34
3.3. Valores adimensionales de $\frac{\tau}{T}$ para una aplicación de la política de control para tiempo mínimo $U^*$ . En la gráfica se aprecia que la relación $\frac{\tau}{T} > 0.5$ se cumple para todos los valores de $\bar{K}\theta_f$ . La conmutación se produce después de la primera mitad del movimiento. . . . .	40
3.4. Valores adimensionales de $\omega_n T$ para una aplicación de la política de control para tiempo mínimo $U^*$ . . . . .	40
3.5. Gráficas bang-bang para diferentes razones de amortiguamiento $\xi$ . En cada gráfica se muestra la respuesta del sistema denotado por 3.4 para una política de control óptima $U^*$ y diferentes valores de la variable adimensional $\bar{K}\theta$ . La conmutación se realiza de $U^+$ (línea roja) a $U^-$ (línea azul) en $t = \tau$ para un tiempo mínimo $T$ . . . . .	41
3.6. Diagrama esquemático de un sistema sináptico de orden $n$ . La respuesta del sistema a una entrada $\varphi_0$ esta denotada por $\varphi_{k+1}$ y $\varphi_{k+2}$ , donde $k+2$ es el número de juntas sinápticas en el sistema. . . . .	42
3.7. Diagrama esquemático de un sistema sináptico de tercer orden. . . . .	43
3.8. Optimización para tiempo mínimo del sistema sináptico de tercer orden, para $k = 1, \xi = 0.30786, \omega_n = 8.624$ y un parámetro $\omega = 1.48$ , para una posición angular final $\theta_f$ durante el intervalo de tiempo $[0, T]$ . . . . .	45
4.1. Plataforma experimental subamortiguada para la caracterización del movimiento balístico de una articulación humana en un ambiente viscoso. . . . .	48

4.2. Componentes de la plataforma experimental. En cada una de las figuras se muestra la notación, la representación esquemática, el componente físico y su correspondiente valor obtenido de forma experimental. . . . .	48
4.3. Accesorios de la plataforma experimental. . . . .	49
4.4. Elementos que componen el equipo de medición. . . . .	50
4.5. Transmisor fijo. Genera de manera secuencial campos magnéticos y el sensor magnético los detecta prácticamente de manera instantánea. En la figura se muestra el sistema coordenado XYZ del transmisor fijo. . . . .	50
4.6. Sensor magnético. Detecta los campos magnéticos generados por el transmisor fijo para determinar la posición actual del sensor con respecto del transmisor. En la figura se muestra el sistema coordenado XYZ del sensor. . . . .	51
4.7. Diagrama esquemático de la plataforma experimental, donde $\theta_f$ representa el desplazamiento angular de la articulación, $a$ , $b$ y $c$ denotan la localización física del amortiguador, el resorte y el punto de aplicación de la fuerza $F$ , respectivamente. . . . .	51
4.8. Posición de la palanca de la plataforma experimental al inicio y final de la prueba. . . . .	53
4.9. Prueba experimental 1: Movimiento balístico del brazo con una razón de asimetría $\gamma_a = 0.70438$ y una posición de resorte a 0.385 m del fulcro. La configuración de la plataforma experimental es con una frecuencia natural $\omega_n = 8.624$ y una razón de amortiguamiento $\xi = 0$ . El movimiento balístico de las pruebas experimentales, en color azul, del modelado sin filtrado, en color verde, y del modelado sináptico de tercer orden, en color rojo. El porcentaje de error de la asimetría es 5.31 % y del área bajo la curva de velocidad de 27.70 %. . . . .	57
4.10. Prueba experimental 2: Movimiento balístico del brazo con una razón de asimetría $\gamma_a = 0.60124$ y una posición de resorte a 0.225 m del fulcro. La configuración de la plataforma experimental es con una frecuencia natural $\omega_n = 5.04$ y una razón de amortiguamiento $\xi = 0$ . El movimiento balístico de las pruebas experimentales, en color azul, del modelado sin filtrado, en color verde, y del modelado sináptico de tercer orden, en color rojo. El porcentaje de error de la asimetría es 5.70 % y del área bajo la curva de velocidad de 13.82 %. . . . .	58
4.11. Prueba experimental 3: Movimiento balístico del brazo con una razón de asimetría $\gamma_a = 0.59411$ y una posición de resorte a 0.385 m del fulcro. La configuración de la plataforma experimental es con una frecuencia natural $\omega_n = 8.624$ y una razón de amortiguamiento $\xi = 0.3078$ . El movimiento balístico de las pruebas experimentales, en color azul, del modelado sin filtrado, en color verde, y del modelado sináptico de tercer orden, en color rojo. El porcentaje de error de la asimetría es 5.36 % y del área bajo la curva de velocidad de 4.12 %. . . . .	59
4.12. Prueba experimental 4: Movimiento balístico del brazo con una razón de asimetría $\gamma_a = 0.70232$ y una posición de resorte a 0.385 m del fulcro. La configuración de la plataforma experimental es con una frecuencia natural $\omega_n = 8.624$ y una razón de amortiguamiento $\xi = 0.3078$ . El movimiento balístico de las pruebas experimentales, en color azul, del modelado sin filtrado, en color verde, y del modelado sináptico de tercer orden, en color rojo. El porcentaje de error de la asimetría es 17.92 % y del área bajo la curva de velocidad de 31.14 %. . . . .	60

4.13. Prueba experimental 5: Movimiento balístico del brazo con una razón de asimetría $\gamma_a = 0.75065$ y una posición de resorte a 0.225 m del fulcro. La configuración de la plataforma experimental es con una frecuencia natural $\omega_n = 5.04$ y una razón de amortiguamiento $\xi = 0.52678$ . El movimiento balístico de las pruebas experimentales, en color azul, del modelado sin filtrado, en color verde, y del modelado sináptico de tercer orden, en color rojo. El porcentaje de error de la asimetría es 25.14 % y del área bajo la curva de velocidad de 2.39 % . . . . .	61
4.14. Prueba experimental 6: Movimiento balístico del brazo con una razón de asimetría $\gamma_a = 0.71851$ y una posición de resorte a 0.225 m del fulcro. La configuración de la plataforma experimental es con una frecuencia natural $\omega_n = 5.04$ y una razón de amortiguamiento $\xi = 0.52678$ . El movimiento balístico de las pruebas experimentales, en color azul, del modelado sin filtrado, en color verde, y del modelado sináptico de tercer orden, en color rojo. El porcentaje de error de la asimetría es 20.22 % y del área bajo la curva de velocidad de 8.18 % . . . . .	62
4.15. Prueba experimental 7: Movimiento balístico del brazo con una razón de asimetría $\gamma_a = 0.70254$ y una posición de resorte a 0.135 m del fulcro. La configuración de la plataforma experimental es con una frecuencia natural $\omega_n = 3.024$ y una razón de amortiguamiento $\xi = 0.87796$ . El movimiento balístico de las pruebas experimentales, en color azul, del modelado sin filtrado, en color verde, y del modelado sináptico de tercer orden, en color rojo. El porcentaje de error de la asimetría es 14.95 % y del área bajo la curva de velocidad de 20.05 % . . . . .	63
4.16. Prueba experimental 8: Movimiento balístico del brazo con una razón de asimetría $\gamma_a = 0.58956$ y una posición de resorte a 0.135 m del fulcro. La configuración de la plataforma experimental es con una frecuencia natural $\omega_n = 3.024$ y una razón de amortiguamiento $\xi = 0.87796$ . El movimiento balístico de las pruebas experimentales, en color azul, del modelado sin filtrado, en color verde, y del modelado sináptico de tercer orden, en color rojo. El porcentaje de error de la asimetría es 3.31 % y del área bajo la curva de velocidad de 26.93 % . . . . .	64
4.17. Porcentaje de error de la razón de asimetría para el modelado sináptico de tercer orden $\epsilon_b$ y el modelado sin filtrado $\epsilon_c$ para cada prueba experimental. . . . .	65
4.18. Porcentaje de error del área bajo la curva de la velocidad angular para el modelado sináptico de tercer orden $\epsilon_f$ y el modelado sin filtrado $\epsilon_s$ para cada experimento. . . . .	66

# Índice de tablas

4.1. Parámetros $\xi$ y $\omega_n$ para la plataforma experimental. . . . .	52
4.2. Porcentaje de umbral o premovimiento dependiendo de la posición del resorte en la plataforma experimental. . . . .	55
4.3. Parámetros óptimos del modelado sin filtro para el movimiento balístico de una articulación humana. . . . .	55
4.4. Parámetros óptimos del modelado sináptico de tercer orden para el movimiento balístico de una articulación humana. . . . .	56
4.5. Valores de la razón de asimetría para el modelado sináptico de tercer orden $\gamma_b$ y el modelado sin filtrado $\gamma_c$ y sus respectivos porcentajes de error, $\epsilon_b$ y $\epsilon_c$ . . . . .	56
4.6. Valores del área bajo la curva de la velocidad angular para el modelado sináptico de tercer orden $A_f$ y el modelado sin filtrado $A_s$ y sus respectivos porcentajes de error, $\epsilon_f$ y $\epsilon_s$ . . . . .	66





# Introducción

El ser humano constituye un sistema corporal múltiple, unido mediante partes articuladas, moviendo y manteniendo estables estas partes del cuerpo mediante la musculatura del esqueleto. Para cada movimiento corporal se necesita el complejo funcionamiento combinado de muchos movimientos individuales, coordinados alrededor de cada articulación. Pero, aún y cuando los seres humanos son libres de moverse con la rapidez y precisión que deseen, también son capaces de realizar movimientos con una amplitud y rapidez predeterminada.

La movilidad articular se estudia desde dos puntos de vista, la cinemática y la cinética. La cinemática analiza los movimientos de las estructuras rígidas, independiente de las fuerzas que se aplican. La cinética estudia las fuerzas que producen un movimiento, como son las fuerzas musculares, las cargas de reacción entre las diferentes partes del cuerpo y su interacción con las diferentes superficies externas, así como la energía mecánica de las partes.

La estructura cinemática caracteriza la interrelación de los movimientos, separados en el espacio y en el tiempo, y ayuda a identificar aquellas acciones que desempeñan un papel fundamental o de apoyo en la determinación de las capacidades motoras. A partir de aquí es posible determinar los medios para perfeccionar los movimientos y especialmente los medios y métodos para desarrollar la fuerza funcional. Por supuesto, el conocimiento del movimiento será más preciso si se basa en la información cuantitativa y objetiva que se pueda obtener con el análisis del movimiento.

El movimiento rápido o balístico, realizado en el menor tiempo posible, está presente en diversas actividades del ser humano. Por ejemplo, cuando se trata de evitar que se impacte una taza en el suelo, debido a que ésta accidentalmente se cae; cuando se lanza una piedra lo más lejos posible; o bien, cuando un bateador, en un juego de béisbol, trata de impactar la pelota que lanza el pitcher a gran velocidad, etc. En estos movimientos participan diversas articulaciones.

El objetivo de este trabajo de investigación es proponer un modelo matemático que describa el movimiento balístico de una articulación humana en un ambiente viscoso. Este movimiento se realiza de manera

voluntaria desde una posición inicial en reposo a una posición final también en reposo. El movimiento cinemático se realiza en un plano horizontal con solamente un grado de libertad.

El modelado de la articulación humana considera que el sistema muscular cuenta con la capacidad de realizar el movimiento descrito, sin limitación de la fuerza empleada. Únicamente se enfoca en la caracterización del movimiento, sin describir la forma de generación de la fuerza en la articulación.

Como posibles aplicaciones se puede citar el empleo de los resultados obtenidos como una herramienta de análisis. Se pueden comparar los esfuerzos máximos de varios deportistas; documentar los progresos de una terapia, después de una serie de ejercicios de rehabilitación, etc. Incluso una prueba es suficiente para obtener una primera evaluación de la capacidad del esfuerzo máximo de la persona para realizar la prueba. Como un indicativo de la necesidad de una rehabilitación física y/o ejercicio para incrementar su fuerza muscular. Por otro lado, las personas con poca fuerza muscular no serán capaces de realizar este tipo de movimiento.

## **Motivación**

Entender la cinemática del movimiento balístico es fundamental en el desarrollo de las capacidades motoras, considerando que este tipo de movimiento es el más demandante de recursos energéticos durante un intervalo de tiempo muy corto. Por consiguiente, el modelado del movimiento balístico permitirá establecer la relación que existe entre los comandos que envía el cerebro y la ejecución de éstos, para producir este tipo de movimiento en una determinada articulación, sin considerar la forma de generación de la fuerza empleada para realizarlo.

## **Contribuciones**

El presente proyecto generó aportaciones novedosas en el área de la biomecánica y en el área de control óptimo. Específicamente se realiza una aportación matemática donde se establece la formulación algebraica para calcular el tiempo mínimo y el tiempo de conmutación aplicable a un problema clásico de control óptimo.

El modelado obtenido caracteriza, de manera aproximada, el comportamiento del movimiento balístico de la articulación humana en un ambiente viscoso y establece la etapa inicial para la caracterización de este tipo de movimiento.

El trabajo presenta evidencia de la viabilidad de usar teoría de control óptimo para modelar el complejo mecanismo de generación de un movimiento balístico en una articulación humana. Este mecanismo parte de la orden de inicio de movimiento en el cerebro y su resultado final en el que los músculos ejercen su máximo esfuerzo para lograr el movimiento lo más rápidamente posible, acorde con las limitaciones físicas de la persona.

## **Estructura del trabajo**

El capítulo 1 trata sobre las características de que dispone el sistema músculo-esquelético para poder realizar el movimiento, así como de la representación interna que el ser humano capta del mundo exterior a

través de su sistema sensorial. Actuando en conjunto, estos sistemas proporcionan la capacidad de realizar movimientos rápidos o coordinados dependiendo de las necesidades de la actividad a realizar. De esta forma, cada movimiento del ser humano es realizado mediante la ejecución del plan de control generado en el cerebro.

El capítulo 2 proporciona las bases de la síntesis empleada en el desarrollo de este trabajo de investigación. Se basa en la resolución de un ejemplo clásico de optimización para tiempo mínimo, aplicando el principio de mínimo de Pontryagin. Al final de este capítulo se presenta, en forma concisa, la formulación algebraica para calcular el tiempo mínimo y el tiempo de conmutación aplicable al problema clásico de control óptimo para tiempo mínimo.

El capítulo 3 aborda el problema de la caracterización del movimiento balístico de una articulación humana en un ambiente viscoso empleando un procedimiento similar al utilizado en el capítulo 2. Se propone inicialmente un sistema masa-resorte-amortiguador para modelar este movimiento en particular y se obtiene una solución general para este sistema. La solución obtenida está en función de parámetros adimensionales que dependen de las propiedades del sistema y de la aplicación del máximo esfuerzo durante todo el periodo de duración del movimiento. Una característica del movimiento balístico es la conmutación repentina entre la etapa de aceleración y el proceso de desaceleración, que se presenta cuando se alcanza la velocidad máxima, como se muestra en las curvas de velocidad incluidas en este capítulo. De esta forma se produce un movimiento asimétrico cuando se realiza un movimiento balístico. Establecen también las bases para la generación del plan de control, mediante la caracterización del filtrado de las señales neuronales recibidas por el sistema músculo-esquelético para la realización del movimiento balístico. A partir de esto se establece el modelado del movimiento balístico de una articulación humana en un ambiente viscoso, mediante un modelado sináptico de tercer orden.

En el capítulo 4 se muestran los resultados de las pruebas experimentales realizadas para la comprobación del modelo sináptico propuesto. Este modelo caracteriza, de manera aproximada, el comportamiento del movimiento balístico de la articulación humana en un ambiente viscoso, por lo que únicamente establece las bases iniciales para la caracterización de este tipo de movimiento.

En los anexos se incluyen los programas para la solución de optimización para tiempo mínimo del modelo matemático sin filtrado, así como del modelo con un filtro. También se incluye el programa de graficación de los datos experimentales obtenidos en las pruebas.



# Generalidades del movimiento de las articulaciones humanas

## 1.1. La biomecánica

La biomecánica estudia la estructura y función de los sistemas biológicos aplicando los principios y los métodos de la mecánica. Analiza en forma cualitativa y cuantitativa el estudio del movimiento del cuerpo humano, la respuesta a la aplicación de cargas, así como las energías que se producen durante ese movimiento.

La biomecánica está presente en diversos ámbitos [1], aunque tres de ellos son los más destacados:

1. Biomecánica médica. Evalúa las patologías que aquejan al hombre para generar soluciones capaces de evaluarlas, repararlas o paliarlas.
2. Biomecánica deportiva. Analiza la práctica deportiva para mejorar su rendimiento, desarrollar técnicas de entrenamiento y diseñar complementos, materiales y equipamiento de altas prestaciones.
3. Biomecánica ocupacional. Estudia la interacción del cuerpo humano con los elementos con que se relaciona en diversos ámbitos (como el trabajo, el hogar, la conducción de automóviles, el manejo de herramientas, etcétera); para adaptarlos a sus necesidades y capacidades.

Esta disciplina ha mostrado los beneficios del enfoque mecánico con un método de trabajo multidisciplinario. Por ejemplo, interviene en el desarrollo de implantes y órganos artificiales; en el diseño de cinturones de seguridad para automóviles y en la descripción de los objetos de estudio en áreas como la biología, la medicina, etcétera.

La biomecánica del cuerpo humano, un organismo altamente sofisticado y compuesto de una amplia variedad de sistemas, incluye el análisis, en términos de extremidades y articulaciones, de movimientos con diferente amplitud y diferente velocidad.

## 1.2. El sistema músculo-esquelético

El hombre es un ser en movimiento y la movilidad humana solo es posible gracias al trabajo articular producido por el sistema músculo-esquelético. Éste está constituido por los músculos esqueléticos o estriados que se insertan en los huesos, ofreciendo de esta manera diversas posibilidades de movimiento. Son los encargados de mover las articulaciones del aparato locomotor, es decir, son los motores del movimiento.

Una articulación es la unión entre dos o más huesos del esqueleto y sirve para permitir o impedir un movimiento y para transferir fuerzas de un hueso a otro. La transmisión de fuerza de una superficie articular a otra se realiza por contacto directo entre las dos superficies de cartílago, por medio de una película de fluido, que permite un movimiento casi sin fricción.

Un efecto de las fuerzas es alterar las dimensiones o la forma del cuerpo sobre el que actúan; otro consiste en modificar su estado de movimiento. El movimiento de un cuerpo rígido puede considerarse compuesto de un movimiento de traslación, y de rotación. En el caso más general, una fuerza única actuando sobre un cuerpo produce a la vez cambios en su forma y en sus movimientos de traslación y de rotación [2]. Sin embargo, cuando varias fuerza actúan simultáneamente sobre un cuerpo, sus efectos pueden compensarse entre sí, dando como resultado que no haya cambio en su movimiento de traslación ni en el de rotación. Cuando sucede esto, se dice que el cuerpo está en equilibrio.

Si en cada uno de los tres planos del espacio se producen dos tipos de movimiento, de traslación y de rotación, se dice que el movimiento tiene seis grados de libertad. En el esqueleto, el movimiento se produce en las articulaciones y muchos de los movimientos, de las diferentes partes del cuerpo, son fundamentalmente rotacionales. Una adecuada flexibilidad permite a la articulación, moverse de un punto a otro o a diferentes posiciones, en forma segura y eficaz, por lo que los seres humanos tienen más grados de libertad de los realmente necesarios para desempeñar una tarea en particular. Cada grado de libertad necesita un mínimo de dos músculos para moverlos en la dirección de cada tipo de movimiento y con frecuencia se necesitan otros músculos adicionales para proporcionar estabilidad.

Las articulaciones más importantes del cuerpo humano localizadas en los miembros superiores son el hombro, codo y muñeca; en los miembros inferiores son la cadera, rodilla y tobillo; y en el tronco, las cervicales, dorsales y lumbares. El funcionamiento, estructura, tamaño y sistemas de estabilidad articular de las extremidades superiores es diferente al de las extremidades inferiores. En las articulaciones del miembro superior predomina la movilidad frente a la estabilidad; tienen como objetivo principal el movimiento de la mano. Las extremidades inferiores restringen la movilidad y aumentan la estabilidad para soportar el peso del cuerpo.

El sistema óseo, formado por huesos y articulaciones, proporciona los elementos necesarios para una buena postura al estar sentados, parados, agachados, etcétera. Provee estabilidad, soporte estructural y una adecuada protección a las partes vitales. La estabilidad de las articulaciones depende del arreglo o forma en que un hueso se ajusta dentro o alrededor del otro, así como de los músculos que rodean a la articulación. Permite la suficiente flexibilidad o amplitud de movimiento, para las funciones de locomoción y la capacidad de asir o agarrar objetos.

La amplitud del movimiento depende de la mayor o menor movilidad de una articulación. Dicha amplitud está directamente relacionada con los límites anatómicos, y puede verse limitada por diferentes elementos, como por ejemplo, los ligamentos, la longitud y la extensibilidad de los músculos y los tendones, la interposición de partes blandas o los topes óseos. Sin embargo, pueden existir diferencias individuales en las articulaciones, así como diferencias entre el lado derecho y el lado izquierdo del cuerpo. Ambas situaciones pueden manifestarse a través de una limitación del movimiento o, por lo contrario, de un aumento de su amplitud.

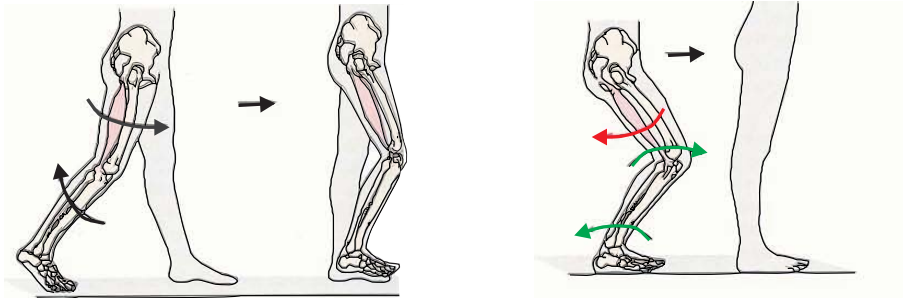
La homeostasia denota a un estado uniforme de los sistemas del cuerpo humano, sin embargo no es algo fijo e inmóvil que permanezca invariable constantemente, en otras palabras, es un estado que puede variar, pero que es relativamente constante [3]. Por ejemplo, en el mantenimiento de la postura, la contracción parcial e ininterrumpida de muchos músculos esqueléticos que hacen posible permanecer de pie, sentarse y otras diversas posiciones del cuerpo. De esta manera, el sistema muscular tiene características que desempeñan funciones claves en el mantenimiento de la homeostasia.

La capacidad del tejido muscular de recibir estímulos y responder a ellos, se denomina excitabilidad. Un estímulo es cualquier cambio en los medios externos e interno de intensidad suficiente para desencadenar un impulso nervioso o potencial de acción. Los músculos esqueléticos tienen la capacidad de contraerse y engrosarse, cuando se recibe un estímulo de intensidad suficiente, sólo se contraen cuando son estimulados y casi siempre actúan en grupo. Esta propiedad se denomina contractibilidad. Muchos de los músculos esqueléticos están dispuestos en forma tal que, mientras uno se contrae, el otro se relaja o estira, tienen la propiedad de extensibilidad. La capacidad de los músculos para recuperar su forma original después de una contracción o extensión, se denomina elasticidad.

Cualquier movimiento es debido principalmente a la contracción de los músculos motores primarios o agonistas que tienen la capacidad de acumular y liberar energía, son elementos de rigidez. La contracción es acompañada por la relajación y extensión de los músculos antagonistas. Una excepción es la contracción del antagonista simultánea con la del agonista cuando necesita mantenerse estable una parte del cuerpo; por ejemplo, la articulación de la rodilla al estar de pie. Cuando la amplitud del movimiento no es muy grande, la extensión de los músculos antagonistas tampoco lo suele ser. Cuanto mejor sea la capacidad de extensión de los músculos antagonistas, mayor será la movilidad de las articulaciones. Y cuanto menor sea su resistencia al movimiento, la ejecución se podrá realizar con mayor facilidad. La movilidad de las articulaciones está limitada, en mayor medida, por los músculos que se sitúan o se insertan cerca de ellas. Son los músculos sinergistas que se contraen simultáneamente con el agonista. Ayudan al agonista a estabilizar una parte del cuerpo y mantenerla firme, para que aumente la eficacia del músculo agonista. Los cambios químicos que se producen en las células musculares para liberar la energía mecánica también producen energía calorífica, son elementos no conservativos o de disipación. La producción de calor es muy importante para mantener la temperatura corporal normal.

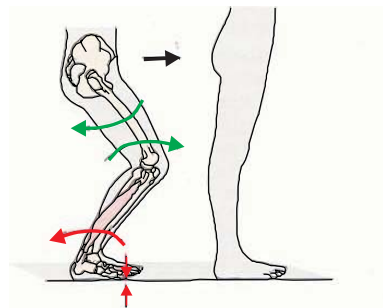
La principal función de los músculos es contraerse, para poder generar movimiento y realizar funciones vitales, no sólo en los deportes ó en las actividades intensas, sino en actividades que conlleven cualquier tipo de movimiento. Los movimientos en ocasiones son controlados por el individuo, son movimientos voluntarios que permiten movimientos de locomoción como caminar, correr, saltar y, en fin, facultan una multitud de actividades voluntarias. Estos movimientos contrastan con los reflejos, que son las repuestas involuntarias

generadas como resultado de un estímulo. Los movimientos involuntarios o viscerales se desempeñan de manera independiente a nuestra voluntad pero son supervisados y controlados por el sistema nervioso central. Son realizados por los músculos viscerales y se encargan de generar presión para el traslado de fluidos y el transporte de sustancias a lo largo del organismo. Por ejemplo, la contracción y la relajación de los músculos del iris que permiten entrar a los ojos la cantidad exacta de luz, la contracción de los músculos del aparato digestivo que facilita la digestión y la evacuación, etcétera. Los músculos controlados por el individuo y por el sistema nervioso, se denominan mixtos, por ejemplo el realizado por los párpados. Las contracciones del corazón que realizan la impulsión de la sangre por las arterias, es un proceso autónomo. La función primordial de los músculos del corazón o cardíacos es contraerse regularmente, sin detenerse, debiendo soportar la fatiga y el cansancio, en caso contrario, el corazón se detendría.



(a) Durante la fase de impulso de la marcha, la rodilla se flexiona y tiende a acortar los músculos isquiotibiales, mientras que cuando la cadera es flexionada tiende a alargarlos (flechas negro).

(b) Cuando se permanece de pie, la cadera y los músculos extensores del tobillo causan cambios en la posición de tres articulaciones (cadera, rodilla y tobillo). La inercia rotacional del tronco resiste la inclinación hacia atrás, por lo que los extensores de la cadera tienden a extender la pierna.



(c) El peso del cuerpo evita el deslizamiento del pie hacia atrás, por lo que la rodilla y el tobillo deben extenderse, a pesar de que el músculo de la cadera no tiene acción directa sobre estas articulaciones. Los extensores del tobillo afectan la aceleración de la rodilla y la cadera cuando el pie está apoyado sobre el terreno.

**Figura 1.1:** Efecto sobre varias articulaciones del accionamiento de un solo músculo [4].

Un solo músculo puede afectar el movimiento de muchas articulaciones. Como se aprecia en la fig 1.1, los músculos producen el torque directamente en las articulaciones (flechas rojas) pero también causan ace-



leraciones en articulaciones distantes (flechas verdes). Al estar de pie, los seres humanos giran de manera natural la cadera, rodilla y extensores del tobillo para minimizar la fatiga [4].

### 1.3. Percepción del movimiento

La percepción del movimiento suele ser la primera etapa en un proceso que también comprende la relación activa que se tiene con el movimiento que se percibe [5], por ejemplo en actividades como batear o atrapar las pelotas de béisbol, jugar tenis, etcétera. En estas situaciones, se percibe el movimiento de los objetos, su forma tridimensional y al mismo tiempo se coordina el movimiento generado por el sistema músculo-esquelético. La percepción del movimiento depende tanto de la velocidad del estímulo como de su entorno. En ocasiones, únicamente se observan los movimientos desde una posición estática, pero en muchas otras se analizan desde una posición en movimiento.

La vista es uno de los sentidos propioceptivos, es decir, uno de los sentidos que se encargan de la localización, la orientación y el movimiento del cuerpo. La forma de captar del sistema sensorial o sensitivo es una representación interna del propio cuerpo y del mundo exterior. Una de las principales funciones de estas representaciones internas es guiar el movimiento. En una tarea tan simple como tomar un vaso de agua, también se requiere de la información visual para establecer una representación interna de la localización y forma del vaso en el espacio. La decisión de ejecutar un movimiento y no otro diferente, depende de la interacción existente entre el motor y el sistema sensorial [4].

El sistema motor está organizado jerárquicamente, cada uno de los niveles está relacionado con diferentes decisiones. El nivel más alto se refiere al propósito del movimiento. El siguiente nivel se refiere a la formación del programa o plan motor, donde se establecen las características espaciales del movimiento cinemático y los ángulos a través de los cuales las juntas se moverán, basadas en la información del sistema sensitivo referentes al ambiente y a la posición del cuerpo en el espacio. El nivel más bajo de esta coordinación jerárquica detalla el movimiento dinámico, donde se especifica la contracción muscular que genera las fuerzas requeridas para rotar las juntas y ejecutar el movimiento planeado [4].

Por consiguiente, el cerebro construye representaciones internas del mundo o del estado del cuerpo e integra la información de diferentes sistemas sensoriales. Esta representación sensorial es el marco de referencia sobre cuál el sistema motor planea, coordina, y ejecuta los programas para completar el movimiento. La tarea de los sistemas motores es lo contrario de la tarea de los sistemas sensoriales, los cuales transforman energía física en señales neuronales. El sistema motor comienza con una representación interna, denominada resultado deseado del movimiento, y produce el movimiento, transformando las señales neuronales en fuerzas de contracción en los músculos.

### 1.4. Movimiento coordinado

El sistema motor genera movimientos reflexivos, rítmicos y voluntarios. Los movimientos rítmicos y reflexivos son producidos por patrones predeterminados de contracción muscular. Son patrones coordinados de contracciones y relajaciones musculares involuntarias generadas por estímulos externos. En oposición a

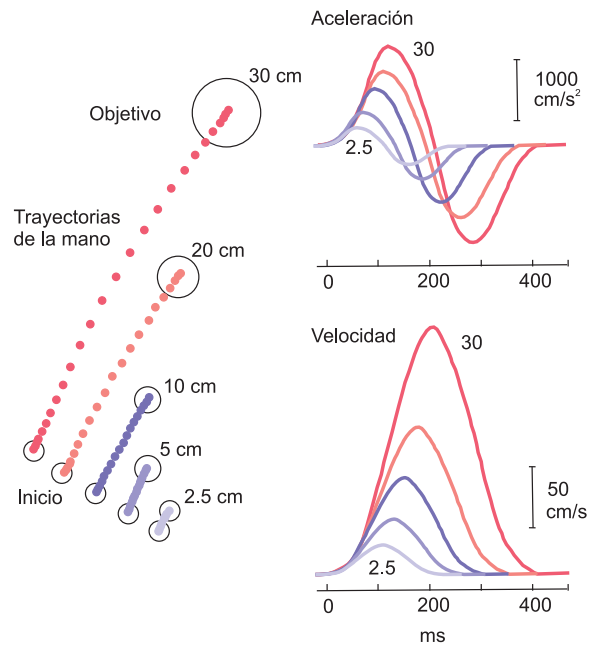
los movimientos reflexivos, los movimientos voluntarios se realizan para cumplir una tarea específica. Un ejemplo es cuando se presiona el pedal del freno mientras se observa que la luz en el semáforo cambia de luz verde a luz roja, o también, cuando se atrapa una pelota en el aire. El sistema motor del ser humano ejecuta los programas para cada una de estas tareas con facilidad. En contraste con los movimiento reflexivos, el movimiento voluntario es altamente adaptable y mejora en rapidez y precisión con la práctica. Esta adaptabilidad puede ser un reflejo de un proceso de optimización, por ejemplo, cuando se mueve una taza con café no solamente se controla el movimiento de la taza sino también el movimiento de su contenido. Para que los comandos motores apropiados para mover la taza puedan ser enviados al brazo, debe existir una conexión interactiva del sistema nervioso sensorial con las partes del cerebro que controlan el movimiento. La suavidad obtenida mediante la optimización parece ser un principio organizativo no sólo para realizar los movimientos de la mano, sino también para el control de los objetos con propiedades dinámicas [6]. Poder realizar estos procesos de movimiento de forma controlada y con la fuerza muscular óptima, es la base del movimiento coordinado.

Un problema central en el control motor es entender como los muchos grados de libertad biomecánicos se coordinan para lograr un objetivo común. Las capacidades de coordinación son sumamente complejas e influyen en la calidad del sistema motor y en toda la actividad que implique movimiento dentro de la actividad humana. Están representadas por elementos sensorio-motrices que se manifiestan en una mayor o menor capacidad del individuo para el control y la regulación del movimiento. Un aspecto especial de la coordinación es que los objetivos se alcanzan repetidamente de una manera confiable y con movimientos raramente reproducibles en detalle. Esta variabilidad es generada por diferentes personas e incluso por el mismo sujeto. La coordinación motriz, basada en el control óptimo de la tarea [7], afirma que la redundancia en los grados de libertad es parte de la solución para limitar la variabilidad. Esta redundancia permite un desempeño motor adaptable y flexible con todos los grados de libertad coordinados para contribuir a la tarea.

Un músculo cuando se contrae, no lo hace siempre con la misma intensidad, no ejerce la misma fuerza cuando se levanta un vaso de agua que cuando se levanta un saco de cemento. La intensidad de la contracción se adapta a la carga de trabajo. La contracción muscular consiste en estimular un numero creciente de fibras musculares o unidades motoras, acorde con la carga de trabajo. Al estimular a la vez diferentes unidades, la fuerza individual de cada una se suma a la de las demás, y el resultado es un aumento gradual de la fuerza generada por el músculo. Este proceso no es aleatorio de manera que, cuando el trabajo muscular es poco intenso, las unidades que primero intervienen son las de características lentas y a medida que la exigencia aumenta, van participando cada vez en mayor número las fibras rápidas. Por consiguiente, el músculo puede desarrollar distintos grados de tensión, por la contracción de un número variable de fibras musculares. Por ejemplo, el movimiento al pararse de una silla requiere la aplicación de un esfuerzo mayor que el requerido para realizar otras actividades rutinarias [8] [9].

La respuesta biomecánica del ser humano cuando se mueve la mano entre dos puntos predeterminados [10], es la tendencia a realizar trayectorias rectas con un perfil de velocidad en forma de campana. La forma de ésta no cambia con la amplitud o duración del movimiento. La trayectoria depende solamente de la posición inicial y final de la mano. En otras palabras, solo depende de las condiciones de frontera y es independiente de las condiciones del sistema.

Se han estudiado los efectos de la activación muscular y las propiedades del músculo en el movimiento



**Figura 1.2:** Extensión del movimiento. La velocidad y la aceleración del movimiento de la mano están escalados proporcionalmente a la distancia a la que está localizada el objetivo [46].

de la articulación del codo [11], sujeta a las siguientes condiciones:

1. Manteniendo una posición constante de la articulación del codo bajo la aplicación de diferentes cargas.
2. Realizando un movimiento pasivo del brazo, sin activación muscular, con una velocidad constante.
3. Movimientos voluntarios con o sin carga adicional viscosa. La carga viscosa fue generada mediante un transductor de velocidad (tacómetro) oponiéndose a la velocidad del movimiento.

Una teoría conocida como el principio de minimum jerk [12], donde el término jerk se refiere a la tercera derivada del vector de posición, establece un punto de referencia para el movimiento del brazo multiarticulado observando que la suavidad del movimiento parece ser un principio organizativo de coordinación, con un perfil de velocidad en forma de campana. La función objetivo es la integral del cuadrado de la magnitud del jerk con respecto al tiempo. La optimización de la función objetivo resulta en trayectorias de minimum jerk, las cuales son polinomios de orden cinco dependientes del tiempo para  $x(t)$  y  $y(t)$ .

La teoría de optimización para obtener el control óptimo de movimientos que no se realizan de manera rápida o empleando una fuerza excesiva [12], se basa en la maximización de la suavidad de la trayectoria de la mano y del par de torsión, sin restricciones en las variables de control, de una posición inicial a una posición final en un tiempo prescrito.

Sin embargo, poco se sabe sobre los movimientos que involucran interacciones mecánicas con el medio ambiente. Por ejemplo, un esquiador puede ajustar la rigidez de sus piernas, de acuerdo a las características que presenta el terreno y las condiciones de la nieve.

## 1.5. Movimiento balístico

El movimiento balístico es cuando se realiza un movimiento tan rápido como sea posible. El sistema motor del ser humano realiza exactamente eso, generalmente al aire libre, pero también puede ser realizado estando inmerso en el agua. Durante la realización del movimiento balístico es necesario que el sujeto genere una gran fuerza en un corto límite de tiempo y lo realice con rapidez. Esta necesidad viene dictada por las condiciones de la actividad, por las características biomecánicas del sistema músculo-esquelético, y por la amplitud del movimiento. Por ejemplo, el boxeo exige movimientos rápidos sin resistencia así como la capacidad de repetirlos muchas veces sin perder fuerza, mientras que en el lanzamiento de pesos se requieren movimientos rápidos y aislados, contra una resistencia específica.

Algunos otros ejemplos de movimiento balístico, donde se requiere aplicar el máximo esfuerzo son los siguientes

1. Béisbol. El lanzamiento, es un movimiento rápido del brazo que realiza el pitcher para enviar la pelota hacia el plato para ser recibida por el catcher. La bola rápida es el tipo más común de lanzamiento, lanzando a velocidades de 152.9 - 162.4 km/h. Mientras, el bateador intenta golpear lo más fuertemente posible la misma enviándola hacia el terreno de juego.
2. Lanzamiento de jabalina. Es una prueba de atletismo, donde se lanza una jabalina, hecha de metal o fibra de vidrio, lo más lejos posible. El objetivo de efectuar un buen lanzamiento técnico es el de que la jabalina tenga la mayor velocidad posible en el momento de ser lanzada.
3. Lanzamiento de peso. El lanzamiento de peso o lanzamiento de bala, es una prueba de atletismo, que consiste en propulsar una sólida bola de acero a través del aire a la máxima distancia posible. La pesa o bala debe ser lanzada con un solo brazo.

Cuando la duración del movimiento se reduce, la necesidad de incrementar el máximo esfuerzo aumenta, lo que representa una cualidad vital durante situaciones de emergencia, tales como esquivar un auto que dobla de golpe en una esquina, o agacharse para evitar ser golpeado por una pelota. Los movimientos explosivos del cuerpo en el salto vertical son frecuentemente realizados en actividades deportivas, por ejemplo, en el baloncesto, el voleibol, etcétera. También es importante el movimiento explosivo del cuerpo en la dirección horizontal durante el salto [13]. Los resultados de un deportista en el salto de longitud están determinados sobre todo por la capacidad de pasar de un movimiento cíclico cuando corre, a un esfuerzo máximo cuando salta. Aunque la mayoría de las habilidades y eventos atléticos dependen de una variedad de cualidades físicas, el esfuerzo máximo se considera como el más importante. Seleccionar un programa motor específico para realizar el movimiento voluntario con un esfuerzo máximo es determinante para lograr el objetivo deseado. Por ejemplo, cuando necesita acelerar un corredor o ciclista para tratar de superar un oponente.

Se ha concluido [14] que las características principales del movimiento rápido balístico voluntario del brazo humano de dos grados de libertad durante el movimiento hacia un objetivo determinado son la línea recta y una velocidad con perfil en forma de campana. Un estudio experimental del movimiento rápido balístico de la articulación del brazo entre dos puntos [15] propone un modelo matemático lineal para la articulación y modela el movimiento de un punto a otro como un sistema masa-resorte-amortiguador. Considerando una ecuación equivalente del movimiento de la extremidad sin un par externo con un control que tiene dos conmutaciones. La solución en tiempo óptimo consiste en una secuencia de control con una tasa máxima de

cambio constante mientras se ajusta la sincronización de los interruptores en el patrón de control, o bien, se modela la posición del brazo empleando cinco parámetros [16], para movimientos de un punto a otro, con dos sistemas dinámicos concurrentes acoplados mediante las restricciones cinemáticas. Los cinco parámetros del modelo únicamente controlan en su totalidad el perfil de la gráfica de velocidad del movimiento.

Como se mostrará después en este documento, la simetría del perfil de velocidad en forma de campana no se preserva cuando se realiza el movimiento balístico. Una característica del movimiento balístico es la asimetría que se presenta cuando se alcanza la velocidad máxima, como se muestra en las curvas de velocidad de la figura 3.5. Esta asimetría se produce durante la segunda mitad del movimiento entre la etapa de aceleración y el proceso de desaceleración.



# El enfoque de control para tiempo mínimo

## 2.1. Optimización

La teoría de control óptimo permite resolver problemas dinámicos donde el comportamiento de un sistema puede ser controlado mediante una señal de control. El problema fundamental de la optimización consiste en determinar, para un sistema en particular, cuál de todas las configuraciones posibles produce que el sistema se comporte de la mejor manera posible. Para evaluar el desempeño de un sistema cuantitativamente, se selecciona un índice de desempeño. Por ejemplo, la frase “transferir el sistema desde un punto A al punto B lo más rápidamente posible”, claramente indica que el tiempo es el índice de desempeño. La selección del índice de desempeño es una expresión matemática que define los requerimientos y cualidades deseadas del sistema en términos matemáticos. La mayoría de los problemas se limitan o pueden limitarse a las siguientes categorías de problemas de control [17] que se definen por el formato de sus índices de desempeño:

1. Problemas del tiempo mínimo. Transfieren un sistema desde un estado inicial a un estado final, en un tiempo mínimo.
2. Problemas del consumo mínimo de energía. Transfieren un sistema desde un estado inicial a un estado final, con un mínimo de gasto de energía.
3. Problemas de esfuerzo mínimo. Implica que se minimice el esfuerzo que se utiliza para alcanzar el estado final.
4. Problemas de seguimiento. Mantienen el estado del sistema tan cerca como sea posible de un estado deseado.
5. Problemas de control terminal. Describe la situación en la que el sistema se transfiere a un estado final tan cerca como sea posible de algún estado deseado.
6. Índice de desempeño cuadrático. En general, es una combinación de control terminal, control de esfuerzo mínimo y seguimiento.

La optimización define una función objetivo que modele la meta u objetivo del movimiento. La función objetivo asigna un número real a cada posible trayectoria del movimiento y establece la relación entre las salidas del sistema (por ejemplo, las posiciones); y las entradas al sistema (por ejemplo, la actividad neuronal). Los métodos de cálculo de variaciones pueden aplicarse para encontrar, en un conjunto infinito de posibles trayectorias, una que reduzca al mínimo la función objetivo sujeta a las restricciones dinámicas impuestas en la ecuación diferencial y a las condiciones de frontera (por ejemplo, el inicio y fin del movimiento). Existen diferentes técnicas de optimización como los métodos analíticos, los métodos gráficos, los métodos experimentales y los métodos numéricos [18].

La teoría de control óptimo sintetiza el análisis y diseño de sistemas dinámicos complicados, determinando la “mejor” manera para controlar tales sistemas. Determina las señales de control para que un proceso cumpla satisfactoriamente con las restricciones físicas y, al mismo tiempo, maximice el resultado o minimice el costo en función de un índice de desempeño. Algunas de las diferentes facetas de la teoría del control óptimo son la programación dinámica, el principio mínimo de Pontryagin y las técnicas numéricas para la optimización de la respuesta. Una característica de los principios de optimización radica en su habilidad para transformar un criterio de desempeño conciso en pronósticos detallados relacionados con el comportamiento de un determinado sistema. Los modelos de control óptimo explican, entre otras, las observaciones del comportamiento en el movimiento de sistemas mecánicos o biológicos, en múltiples niveles de análisis, por ejemplo, las trayectorias de miembros, el par de torsión en articulaciones, las fuerzas de interacción, etc. [19].

En control motor, las teorías de mínimos son a menudo técnicas de ingeniería inversa que se adaptan a determinados conjuntos de datos experimentales. Por consiguiente, su función es vista como puramente descriptiva. Debido a que el sistema sensoriomotor implica la combinación de procesos que interactúan continuamente para mejorar u optimizar el desempeño de su comportamiento, la optimización proporciona un punto de partida natural en el análisis de las funciones sensoriomotoras [20]. En la biología evolutiva, la optimización no es sólo para predecir el comportamiento, sino también para explicar el resultado de la evolución o adaptación óptima. Los índices de desempeño que están relacionadas con la biología evolutiva son, la energía metabólica que se requiere para realizar un movimiento y el tiempo que se tarda para llevarlo a cabo [21].

Para una adecuada formulación de un problema de control óptimo es necesaria una descripción o modelo matemático del proceso a ser controlado; un establecimiento de las restricciones físicas en el comportamiento del sistema; una especificación del criterio o índice de desempeño, el cual dependerá del tipo de optimización a realizar; las entradas de control óptimas que propicien que el proceso satisfaga las restricciones físicas; y la maximización de la respuesta o la minimización del costo definido en el criterio de desempeño.

El control óptimo se determina en un sistema que se comporta de una manera específica durante el intervalo de control  $[t_o, t_f]$ . El estado de un sistema se define como la cantidad mínima de información necesaria, que resume todo lo acontecido en el sistema, hasta un momento determinado. Conociendo la entrada a partir de ese instante, se puede determinar cualquier variable del sistema en cualquier instante posterior. El valor del estado en distintos instantes varía en función de las condiciones iniciales con las que empieza a evolucionar el proceso, y de la entrada que recibe el sistema. Las limitaciones físicas dan lugar a restricciones en los valores de las variables de control al igual que en las variables de estado.



## 2.2. Control óptimo para tiempo mínimo

Una condición necesaria para lograr la eficacia del movimiento rápido o balístico es desarrollar la velocidad con el máximo esfuerzo durante un intervalo de tiempo corto. Ésta característica, propia del movimiento balístico, es también una condición necesaria en la teoría de control óptimo para tiempo mínimo. Este enfoque no está presente en ninguna de las otras categorías de control óptimo.

Dos características típicas e importantes de los problemas de tiempo mínimo son [22]:

1. Para ciertos valores de las condiciones iniciales el control óptimo para tiempo mínimo puede no existir.
2. El control óptimo, si existe, requiere de la aplicación de su máximo esfuerzo durante todo el periodo de operación.

Al aplicar la teoría de optimización para tiempo mínimo, es necesario restringir el valor del control aplicado, de manera que este no sea mayor que su valor máximo admisible. Es necesario imponer esta restricción para evitar la predicción absurda, que considera que el tiempo óptimo de control debe estar compuesto de un control positivo infinitamente corto e infinitamente grande seguido de un control negativo infinitamente corto e infinitamente grande, teniendo como resultado un movimiento del brazo infinitamente rápido. Muchas teorías de optimización en biología requieren restricciones similares para evitar predecir organismos infinitamente fuertes, infinitamente fecundos e infinitamente longevos [21].

El problema de control óptimo consiste en determinar el vector de control que maximice o minimice la función objetivo para obtener una respuesta óptima, para un determinado criterio de optimización seleccionado. El objetivo de los problemas de tiempo mínimo es la transferencia de un sistema desde un estado inicial arbitrario a un estado final objetivo, que puede estar en movimiento, en el menor tiempo posible aplicando el máximo esfuerzo durante todo el intervalo de la duración del movimiento. Las condiciones iniciales y finales se consideran como preestablecidas.

Para establecer un método de solución, se considera un problema clásico en la teoría de control óptimo para tiempo mínimo, basado en un método matemático denominado principio mínimo de Pontryagin [22] [23]:

**Ejemplo.** Considere un sistema lineal definido por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1(t) &= \mathbf{x}_2(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) &= \mathbf{U}(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde la entrada es la política de control  $\mathbf{U}(t)$ , restringida por  $|\mathbf{U}(t)| = 1$ . El problema es encontrar el valor de la entrada  $\mathbf{U}$  que lleve al sistema desde un estado inicial ( $\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}_2(0) = \mathbf{x}_{20}$ ) a un estado final ( $\mathbf{x}_1(t_f) = \mathbf{x}_{1f}$ ,  $\mathbf{x}_2(t_f) = \mathbf{0}$ ) empleando un tiempo mínimo. La política de control óptima para alcanzar este objetivo se denota por  $\mathbf{U}^*$ .

Para los sistemas dinámicos, la mayoría de los modelos matemáticos que resultan útiles para describir el proceso de control es el conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = f_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{u}_j(t), t) \quad (2.2)$$

En cada instante  $t$  el sistema físico puede ser descrito mediante un vector de trayectorias de estado  $\mathbf{x}_i(t) \in R^n$  y un vector de parámetros de control  $\mathbf{u}_j(t) \in R^m$ . La relación funcional entre el vector de control y el vector de estado se denomina ecuación de estado. Si para un sistema de  $n$ -ésimo orden se necesitan  $n$  variables de estado, entonces para el sistema lineal autónomo denotado por 2.1, se tiene que

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\mathbf{U}] \quad (2.3)$$

donde las variables involucradas y sus unidades son:

Variable	Unidades absolutas
$\mathbf{x}_1$	$[T^2]$
$\mathbf{x}_2$	$[T]$
$\mathbf{U}$	$[1]$

Después de la descripción o modelo matemático del proceso a ser controlado, el siguiente paso es definir las restricciones físicas para el sistema. Al aplicar la teoría de optimización para tiempo mínimo, es necesario restringir el valor del control aplicado, de manera que este no sea mayor que su valor máximo admisible. Para este ejemplo, la política de control está restringida por  $|\mathbf{U}(t)| = 1$  durante el intervalo  $0 \leq t \leq t_f$ , donde  $t_f$  representa el tiempo empleado. En otras palabras, la fuerza aplicada  $\mathbf{F}(t)$ , no puede ser mayor que la fuerza máxima admisible  $\mathbf{F}_{\text{limite}}(t)$ .

$$\mathbf{U}(t) = \frac{\mathbf{F}(t)}{|\mathbf{F}_{\text{limite}}(t)|} \quad (2.4)$$

Si un sistema puede ser transferido desde un estado inicial a un estado objetivo mediante la aplicación sucesiva de políticas de control admisibles, entonces es factible la existencia de una política de control óptima. Un control admisible es el que satisface las restricciones de control durante el intervalo respectivo. De modo semejante, a una trayectoria de estado que satisface las limitaciones de la variable de estado durante el intervalo de control se le puede llamar trayectoria admisible. La política de control óptima  $\mathbf{U}^*$  puede ser encontrada mediante la determinación de la política de control admisible que cause que el sistema alcance el estado objetivo más rápidamente. El problema es encontrar la política de control óptima  $\mathbf{U}^*(t)$  que lleve el sistema a  $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_{\text{lf}}$  en un tiempo mínimo  $t^*$ , es decir, cuando  $t_f$  es minimizado.

Para evaluar el desempeño de un sistema cuantitativamente, se selecciona una medida escalar, denominada índice de desempeño, que defina los requerimientos del sistema en términos matemáticos. El índice de desempeño para tiempo mínimo se denota por

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt \quad (2.5)$$

El sistema descrito mediante las ecuaciones de estado 2.3 y el índice de desempeño para tiempo mínimo estan relacionados mediante la función Hamiltoniana

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{U}, t) = F(\mathbf{x}, \mathbf{U}, t) + p^T f(\mathbf{x}, \mathbf{U}, t) \quad (2.6)$$

donde  $p^T$  son los multiplicadores de Lagrange,  $F(\mathbf{x}, \mathbf{U}, t)$  esta relacionado con el índice de desempeño y  $f(\mathbf{x}, \mathbf{U}, t)$  con las ecuaciones de estado. Cuando se minimiza la función Hamiltoniana  $H$ , se considera que el índice de desempeño se minimiza, y por lo tanto, el comportamiento del sistema se está optimizando [22].

La función Hamiltoniana para el sistema que se está analizando en función de los multiplicadores de Lagrange,  $p_1$  y  $p_2$ , es

$$H = 1 + p^T (A\mathbf{x} + B\mathbf{U}) = 1 + p_1 x_2 + p_2 U \quad (2.7)$$

La condicion necesaria para que  $H = 1 + p_1 x_2 + p_2 U$  sea un minimum global es

$$1 + p_1^* x_2^* + p_2^* U^* \leq 1 + p_1 x_2 + p_2 U \quad (2.8)$$

la cual se cumple para los siguientes casos

1. Si  $x_2^* > 0$  y  $p_1^* < 0$  entonces  $p_2^* > 0$  y  $U^* < 0$
2. Si  $x_2^* < 0$  y  $p_1^* > 0$  entonces  $p_2^* < 0$  y  $U^* > 0$

La política de control admisible  $\mathbf{U}^*$  es

$$U^*(t) = \begin{cases} -1 & p_2^*(t) > 0 \\ +1 & p_2^*(t) < 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

donde  $\mathbf{U}^*$  conmuta su valor de acuerdo al valor de  $p_2^*$ . Si el orden del sistema esta determinado por  $n$  ecuaciones de estado, entonces el sistema puede conmutar máximo  $n - 1$  veces [24] [23].

Si no hay un periodo en el cual  $\mathbf{U}^*$  sea cero entonces la política de control se denomina control bang-bang [22]. El concepto bang-bang es particularmente intuitivo, por ejemplo, en las carreras de autos, los pilotos están muy cerca de una política de control de tipo bang-bang, debido a que el automóvil está sujeto a continuos cambios en su velocidad, ocasionados por el uso frecuente del freno y el acelerador, logrando con esto, llegar a la meta en un tiempo mínimo, tomando en consideración las características del sistema.

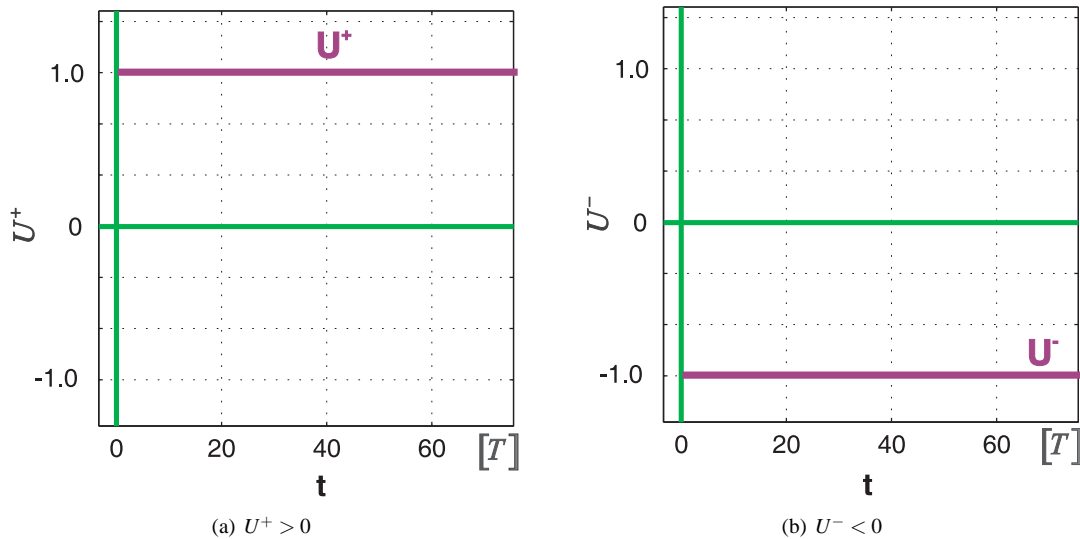
En este ejemplo, la función de conmutación se define como

$$U^*(t) = \text{sgn}(-p_2^*) \quad (2.10)$$

Como el sistema es de segundo orden,  $n = 2$ , el sistema puede conmutar máximo  $n - 1$  veces. La política de control óptima  $U^*$  es de tipo bang-bang. En otras palabras, el sistema puede ser transferido desde un estado inicial a un estado objetivo mediante la aplicación sucesiva de dos políticas de control admisibles. Para conocer el desempeño del sistema físico en  $t \in [t_0, t_1]$  es suficiente con determinar los parámetros de control admisibles  $u_m(t) \in U$ , donde  $U$  es la región de control admisible.

Las políticas de control son  $U^+$  (fig. 2.1(a)) y  $U^-$  (fig. 2.1(b)). Para el presente ejemplo se tiene la siguiente alternativa:

1. La posición inicial es cero y la posición final tiene un valor positivo. El movimiento inicia desde un estado inicial con una política de control  $U^+ > 0$  a un estado final con una política de control  $U^- < 0$ .
2. La posición inicial es cero y la posición final tiene un valor negativo. El movimiento inicia desde un estado inicial con una política de control  $U^- < 0$  a un estado final con una política de control  $U^+ > 0$ .

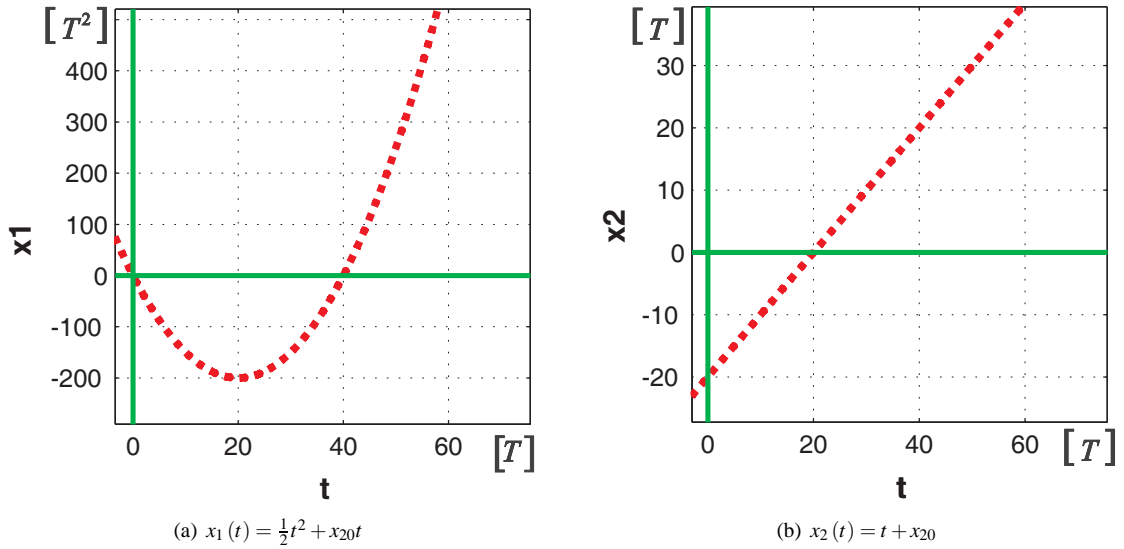


**Figura 2.1:** Políticas de control.

A continuación se establece el método de solución para tiempo mínimo del problema de ejemplo para un valor positivo de la posición final. El método de solución para tiempo mínimo para un valor negativo de la posición final es similar.

El proceso inicia obteniendo una solución analítica de la ecuación diferencial o ecuaciones de estado que describen al sistema. Resolviendo las ecuaciones de estado 2.3 para las condiciones iniciales,  $\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{x}_2(0) = \mathbf{x}_{20}$ , y una política de control  $U^+$  (fig. 2.1(a)), la solución del sistema 2.3 es única y el comportamiento del sistema queda completamente determinado para  $0 \leq t \leq \tau$ .

$$\begin{aligned}
0 &\leq t \leq \tau \\
0 &< u^+ \leq +1 \\
x_1(t) &= \frac{1}{2}t^2 + x_{20}t \\
x_2(t) &= t + x_{20}
\end{aligned}
\tag{2.11}$$

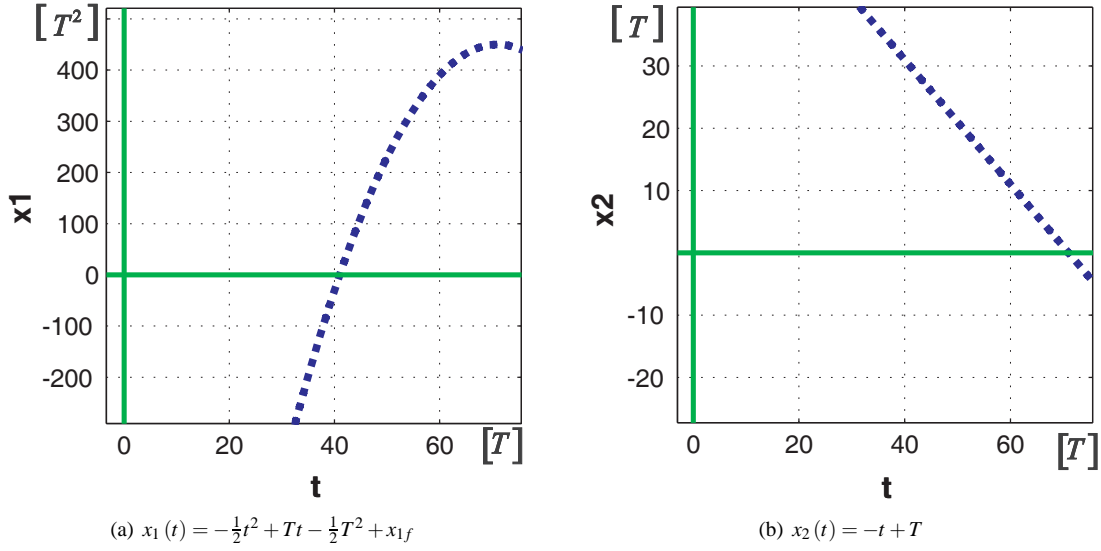


**Figura 2.2:** Gráficas de movimiento en función del tiempo para la política de control  $U^+$  del problema de ejemplo. Condiciones iniciales:  $x_{10} = 0, x_{20} = -20$ .

Para que una política de control  $\mathbf{U}(t)$  en  $t \in [0, T]$  y sus correspondientes trayectorias de estado admisibles satisfagan una solución óptima para un tiempo mínimo  $T$ , es necesario que exista continuidad entre las diferentes trayectorias de estado admisibles [23]. Por lo tanto, para un estado final  $\mathbf{x}_1(t_f) = \mathbf{x}_{1f}, \mathbf{x}_2(t_f) = \mathbf{0}$  y una política de control  $\mathbf{U}^-$  (fig. 2.1(b)), la solución del sistema 2.3 es única y el comportamiento del sistema queda completamente determinado para  $\tau \leq t \leq T$ .

$$\begin{aligned}
\tau &\leq t \leq T \\
-1 &\leq u^- \leq 0 \\
x_1(t) &= -\frac{1}{2}t^2 + Tt - \frac{1}{2}T^2 + x_{1f} \\
x_2(t) &= -t + T
\end{aligned}
\tag{2.12}$$

Aplicando la restricción para tiempo mínimo y considerando que se tienen dos ecuaciones de movimiento para cada uno de los estados del sistema, inicial y final, se deduce que existe un estado común donde el sistema



**Figura 2.3:** Gráficas de movimiento en función del tiempo para la política de control  $U^-$  del problema de ejemplo. Condiciones finales:  $x_{1f} = 450$ ,  $x_{2f} = 0$ .

puede ser transferido desde un estado inicial a un estado final mediante la aplicación sucesiva de únicamente dos políticas de control admisibles. El estado común donde se realiza la conmutación se produce en  $t = \tau$  desde las curvas de movimiento de  $U^+$  (fig. 2.2) hacia las curvas de movimiento de  $U^-$  (fig. 2.3), entonces

$$x_2(\tau)_{U^+} = x_2(\tau)_{U^-} \quad (2.13)$$

$$\tau = \frac{1}{2}(T - x_{20}) \quad (2.14)$$

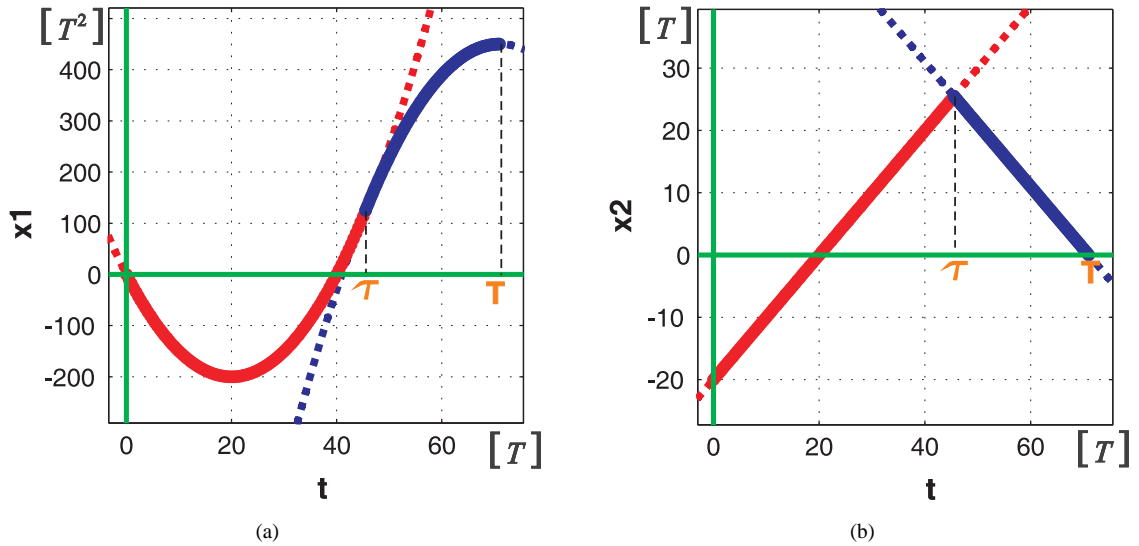
y

$$x_1(\tau)_{U^+} = x_1(\tau)_{U^-} \quad (2.15)$$

$$\tau^2 - (T - x_{20})\tau + \frac{1}{2}T^2 + x_{1f} = 0 \quad (2.16)$$

La figura 2.4 muestra la conmutación que se realiza desde las curvas de movimiento inicial hacia las curvas de movimiento final. Las ecuaciones 2.14 y 2.16 representan las condiciones de continuidad de movimiento. Las variables de estado  $x_1$  y  $x_2$  no pueden presentar discontinuidades.

Las ecuaciones 2.14 y 2.16 establecen la relación funcional que existe entre las políticas de control admisibles  $U^+$  y  $U^-$ . Estas políticas de control forman en su conjunto a la política de control óptima para tiempo mínimo  $U^*$ .



**Figura 2.4:** Gráficas bang-bang. Se muestran las curvas de movimiento con respecto al tiempo para tiempo mínimo del problema de ejemplo. La conmutación se realiza en  $t = \tau$ , desde la curva  $U^+$  (condiciones iniciales:  $x_{10} = 0, x_{20} = -20$ ) en rojo hacia la curva  $U^-$  (condiciones finales:  $x_{1f} = 450, x_{2f} = 0$ ) en azul, para un tiempo mínimo  $T$ .

La política de control óptima  $U^*$ , de tipo bang-bang, aplicable al sistema (fig. 2.5), desde un estado inicial con  $U^+ > 0$  a un estado final con  $U^- < 0$  es

$$U^* = \begin{cases} U^+ & 0 < t \leq \tau \\ U^- & \tau < t \leq T \end{cases} \quad (2.17)$$

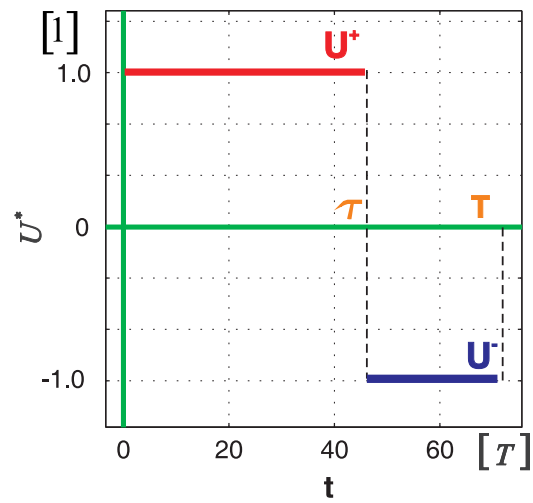
La solución general del sistema de ecuaciones (2.14 y 2.16) para una conmutación de  $U^+$  a  $U^-$  (ver fig. 2.6) en función de  $x_1$  y  $x_2$  independientemente del tiempo  $t$  es

$$\begin{array}{ll} \text{curva inicial } U^+ & \text{curva de conmutación } U^- \\ x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_{20}^2 & x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + x_{1f} \end{array} \quad (2.18)$$

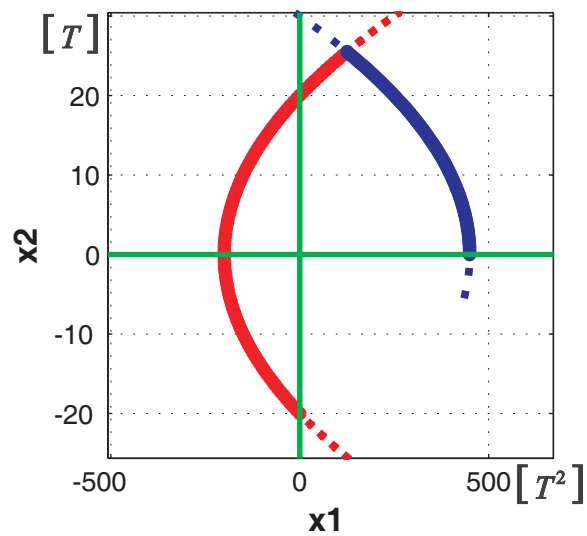
Las trayectorias correspondientes a estas ecuaciones representan, para la curva inicial  $U^+$ , a una familia de parábolas extendiéndose en la dirección positiva del eje horizontal, y para la curva de conmutación  $U^-$ , a una familia de parábolas extendiéndose en la dirección negativa del eje horizontal (fig. 2.7).

### 2.2.1. Aportación para el problema de ejemplo

Considerando que  $x_{20} < 0$  (fig. 2.4(b)) para  $U^+$  y  $x_{1f} > 0$  (fig. 2.4(a)) para  $U^-$  se puede deducir que el sistema se mueve inicialmente en sentido contrario. A partir del análisis de la fig. 2.4(a) se puede apreciar

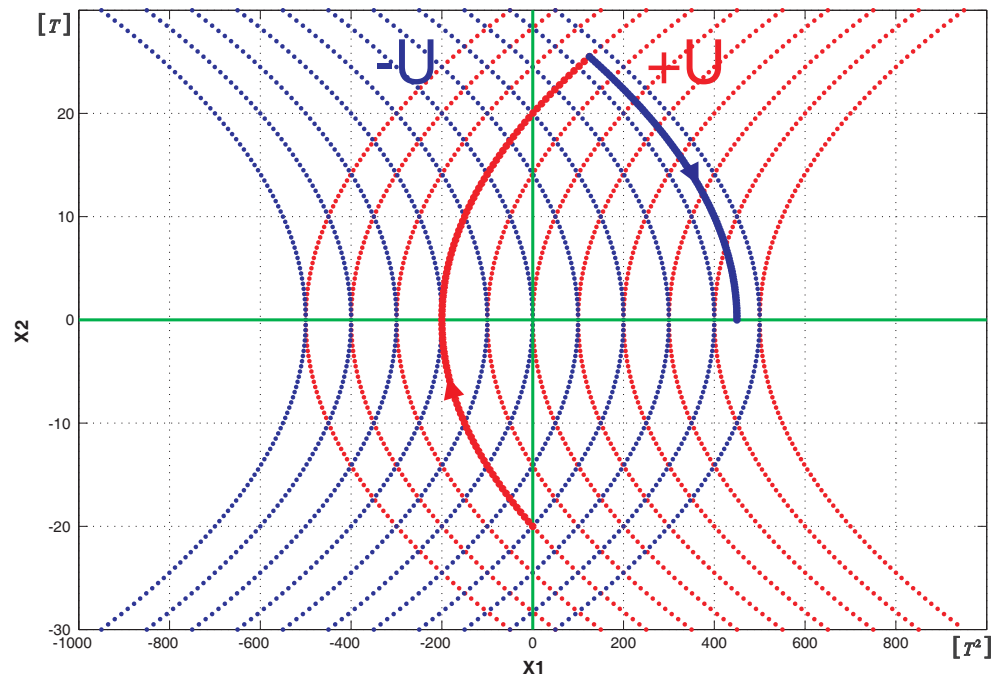


**Figura 2.5:** Política de control óptima  $U^*$ . La conmutación se realiza en  $t = \tau$ , desde  $U^+$  (condiciones iniciales:  $x_{10} = 0, x_{20} = -20$ ) en rojo hacia  $U^-$  (condiciones finales:  $x_{1f} = 450, x_{2f} = 0$ ) en azul, para un tiempo mínimo  $T$ .



**Figura 2.6:** Gráfica de Estado para una política de control óptima  $U^*$ . Se muestran las curvas de movimiento para tiempo mínimo, independientemente del tiempo, para el problema de ejemplo. La conmutación se realiza en  $t = \tau$ , desde  $U^+$  (condiciones iniciales:  $x_{10} = 0, x_{20} = -20$ ) en rojo hacia  $U^-$  (condiciones finales:  $x_{1f} = 450, x_{2f} = 0$ ) en azul, para un tiempo mínimo  $T$ .





**Figura 2.7:** Familia de parábolas para una conmutación de  $U^+$  (parábolas en rojo) a  $U^-$  (parábolas en azul). Las flechas indican el sentido del movimiento. Las líneas gruesas corresponden a la gráfica de estados de la fig. 2.6.

que el sistema tiene que trasladarse primero hasta una posición más alejada de su posición objetivo. Después, a partir de esta posición, el sistema se trasladará hacia su posición final  $x_{1f}$ .

Las condiciones iniciales más adecuadas para trasladarse desde el origen hasta una posición objetivo positiva empleando un tiempo mínimo son iniciar con  $x_{20} > 0$ , fig. 2.8, o bien, con  $x_{20} = 0$ , fig. 2.10. Para determinar el valor del tiempo mínimo  $T$  y del tiempo de conmutación  $\tau$  para el movimiento realizado en el sentido positivo de  $x_1$ , se considera que el valor de la posición únicamente se incrementa<sup>1</sup>.

Por consiguiente, a partir de la ecuación 2.16,  $0 \leq x_{20} \leq \sqrt{2x_{1f}}$ ,  $x_{1f} > 0$  y de la ecuación 2.14,  $x_{20} \leq T$ , se obtiene,

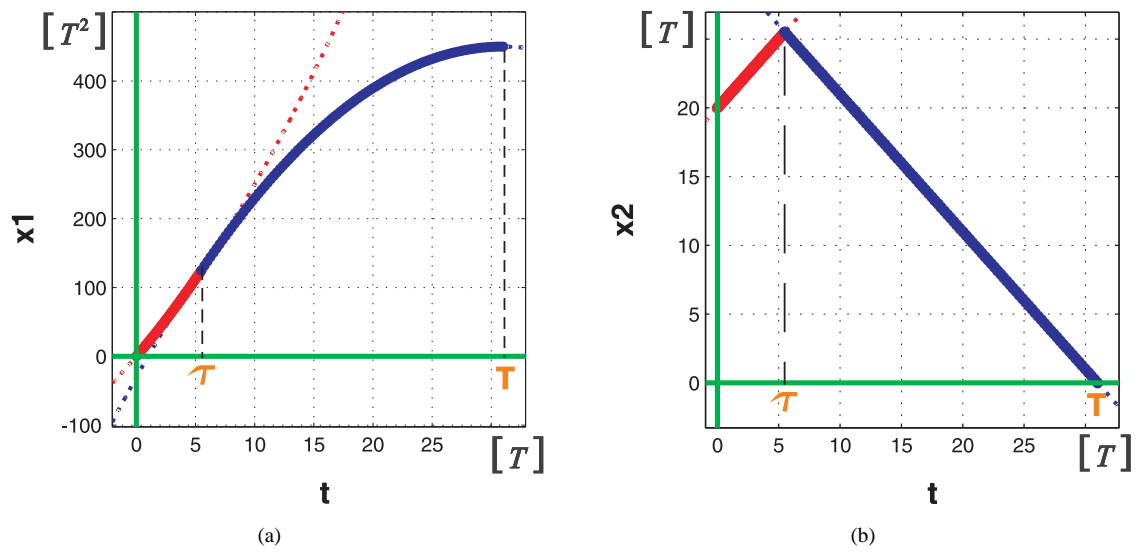
$$T = -x_{20} + 2\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{1f}}$$

[ Tiempo mínimo ]

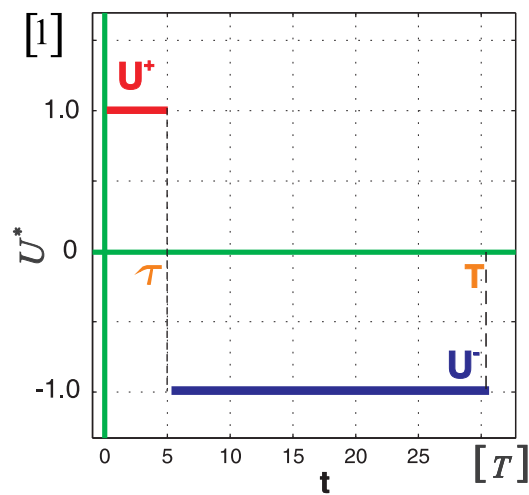
(2.19)

y

<sup>1</sup>Esta restricción no se considera, de manera explícita o clara, en la literatura especializada sobre control óptimo [24] [22] [25] [26] [27] [28].



**Figura 2.8:** Gráficas bang-bang. Se muestran las curvas de movimiento con respecto al tiempo para tiempo mínimo del problema de ejemplo. La conmutación se realiza en  $t = \tau$ , desde la curva  $U^+$  (condiciones iniciales:  $x_{10} = 0$ ,  $x_{20} = 20$ ) en rojo hacia la curva  $U^-$  (condiciones finales:  $x_{1f} = 450$ ,  $x_{2f} = 0$ ) en azul, para un tiempo mínimo  $T$ .



**Figura 2.9:** Política de control óptima  $U^*$ . La conmutación se realiza en  $t = \tau$ , desde la curva  $U^+$  (condiciones iniciales:  $x_{10} = 0$ ,  $x_{20} = 20$ ) en rojo hacia la curva  $U^-$  (condiciones finales:  $x_{1f} = 450$ ,  $x_{2f} = 0$ ) en azul, para un tiempo mínimo  $T$ .

$$\tau = -x_{20} + \sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{1f}}$$

[ Tiempo de conmutación ]

(2.20)

Un caso especial se presenta cuando el movimiento inicia desde una posición en reposo, donde  $x_{20} = 0$ , como se ilustra en la fig. 2.10(a). En otras palabras, se presenta un **movimiento simétrico** (fig. 2.10(b) y fig. 2.12). Las ecuaciones 2.21 y 2.22 denotan el tiempo mínimo y tiempo de conmutación, respectivamente, para este tipo de movimiento.

$$T = 2\sqrt{x_{1f}}$$

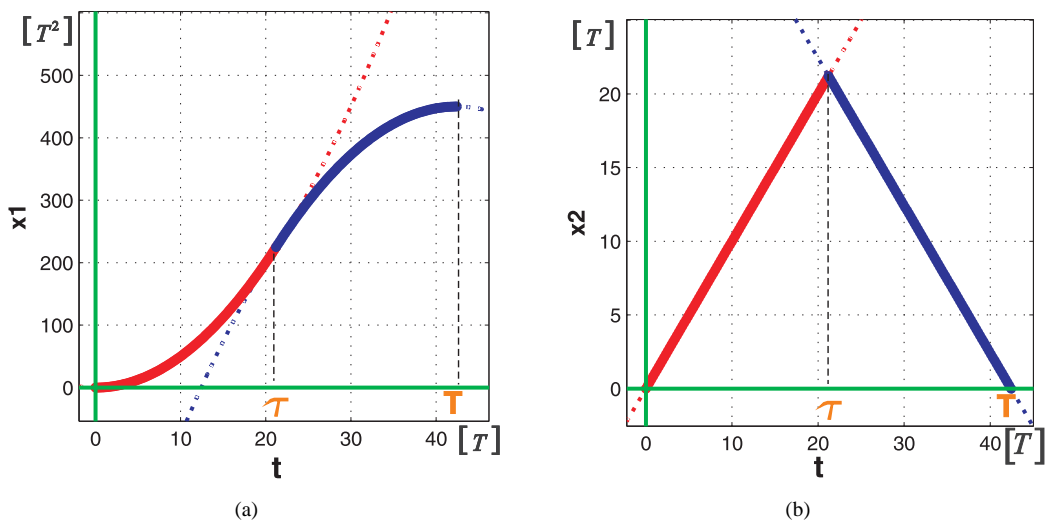
(2.21)

y

$$\tau = \sqrt{x_{1f}}$$

(2.22)

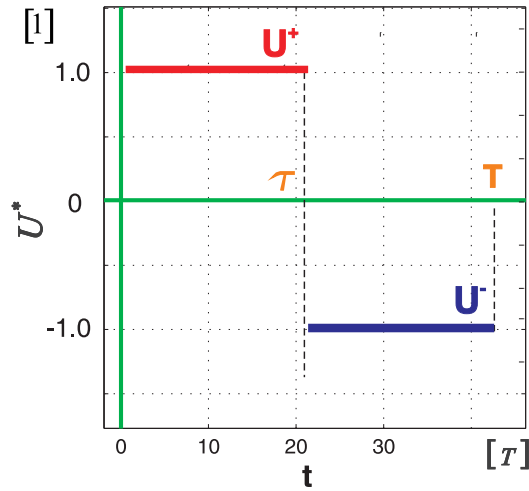
por lo tanto,  $\frac{\tau}{T} = 0.5$ .



**Figura 2.10:** Gráficas Bang-Bang. Se muestran las curvas de movimiento con respecto al tiempo para tiempo mínimo del problema de ejemplo con restricciones adicionales. La conmutación se realiza en  $t = \tau$ , desde la curva  $U^+$  (condiciones iniciales:  $x_{10} = 0, x_{20} = 0$ ) en rojo hacia la curva  $U^-$  (condiciones finales:  $x_{1f} = 450, x_{2f} = 0$ ) en azul, para un tiempo mínimo  $T$ .

La política de control óptima  $U^*$  (fig. 2.11) de tipo bang-bang aplicable al sistema, desde un estado inicial con  $U^+ > 0$  a un estado final con  $U^- < 0$  es

$$\mathbf{U}^* = \begin{cases} U^+ & 0 < t \leq \tau \\ U^- & \tau < t \leq T \end{cases} \quad (2.23)$$



**Figura 2.11:** Política de control óptima  $U^*$ . La conmutación se realiza en  $t = \tau$ , desde la curva  $U^+$  (condiciones iniciales:  $x_{10} = 0$ ,  $x_{20} = 0$ ) en rojo hacia la curva  $U^-$  (condiciones finales:  $x_{1f} = 450$ ,  $x_{2f} = 0$ ) en azul, para un tiempo mínimo  $T$ .

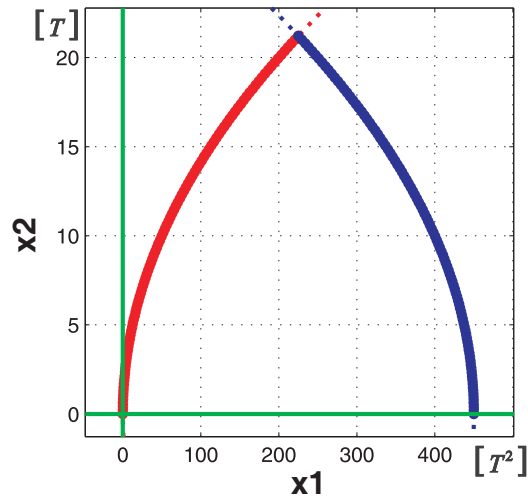
La solución general para el movimiento simétrico para una conmutación de  $U^+$  a  $U^-$  (ver fig. 2.12) en función de  $x_1$  y  $x_2$  independientemente del tiempo  $t$  es

$$\begin{array}{ll} \text{curva inicial } U^+ & \text{curva de conmutación } U^- \\ x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 & x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + x_{1f} \end{array} \quad (2.24)$$

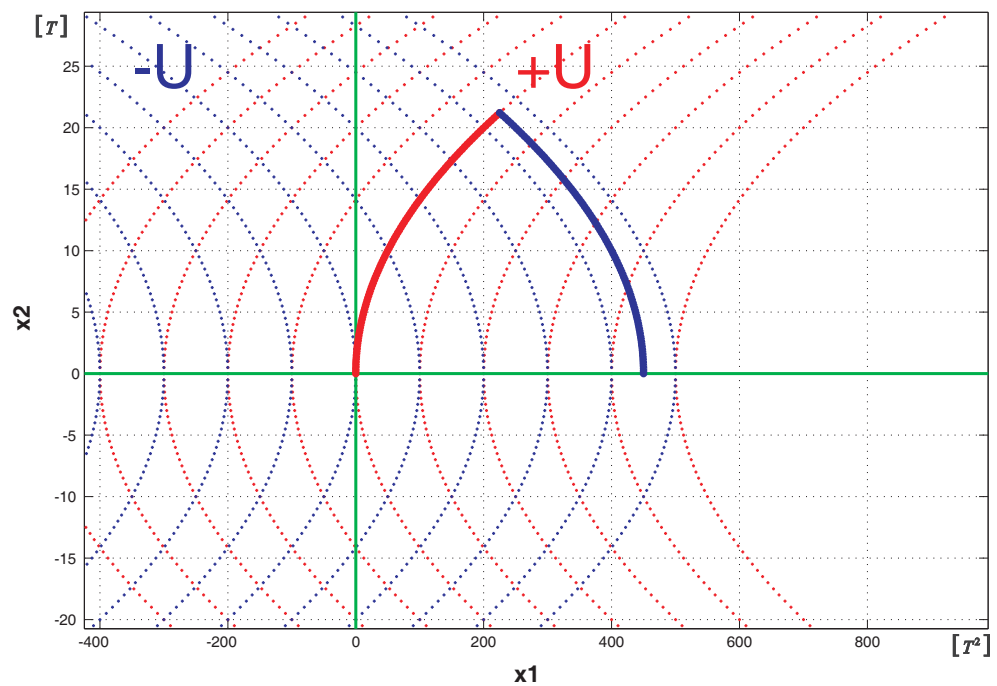
Las trayectorias correspondientes a estas ecuaciones representan, para la curva inicial  $U^+$ , a una parábola con vértice en el origen extendiéndose en la dirección positiva del eje horizontal, y para la curva de conmutación  $U^-$ , a una familia de parábolas extendiéndose en la dirección negativa del eje horizontal (fig. 2.13).

En resumen, la política de control óptima  $\mathbf{U}^*$ , de tipo bang-bang, aplicable al sistema definido previamente, desde un estado inicial ( $x_1(0) = 0$  y  $x_2(0) = x_{20}$ ) a un estado final ( $x_1(T) = x_{1f}$  y  $x_2(T) = 0$ ), está determinada por los valores de las condiciones iniciales y finales, donde  $\sqrt{2x_{1f}} > x_{20} \geq 0$ . Si las condiciones iniciales se localizan en la curva de conmutación, el sistema no tendrá un cambio de curva para lograr su objetivo. En la mayoría de los casos, las condiciones iniciales no coinciden con la curva de conmutación, lo que significa que el sistema deberá trasladarse hacia la curva de conmutación correspondiente y el instante en el cual se realiza la conmutación de  $U^+$  a  $U^-$ , se denomina tiempo de conmutación y el tiempo total es denominado tiempo mínimo, en este ejemplo se denotan por  $\tau$  y  $T$ , respectivamente.

El ejemplo clásico de control óptimo desarrollado en el presente capítulo servirá como base para la formulación del problema de movimiento en tiempo mínimo de una articulación humana.



**Figura 2.12:** Gráfica de estado para una política de control óptima  $U^*$  con un movimiento simétrico. Se muestran las curvas de movimiento para tiempo mínimo del problema de ejemplo con restricciones adicionales. La conmutación se realiza en  $t = \tau$ , desde la curva  $U^+$  (condiciones iniciales:  $x_{10} = 0, x_{20} = 0$ ) en rojo hacia la curva  $U^-$  (condiciones finales:  $x_{1f} = 450, x_{2f} = 0$ ) en azul, para un tiempo mínimo  $T$ .



**Figura 2.13:** Familias de parábolas en el espacio de estados, para una conmutación de  $U^+$  (parábolas en rojo) a  $U^-$  (parábolas en azul). Las líneas gruesas corresponden al movimiento simétrico de la gráfica de estados de la fig. 2.12.



## Modelado del movimiento rápido de una articulación

Cuando se estudia un sistema dinámico, al final es necesaria la caracterización o modelado de su desempeño. El término modelado se refiere a la elaboración de representaciones matemáticas que describen el comportamiento dinámico de un sistema. A esta descripción matemática se le llama modelo matemático. Un modelo matemático nos ayuda a abstraer la complejidad de un sistema, y lo resume en fórmulas simples. Un sistema complejo requiere de una gran cantidad de elementos necesarios para su descripción y funcionamiento. Entre más elementos, más complejo puede ser el sistema y la interacción entre cada uno de sus componentes.

Cualquier diseño de un sistema debe empezar a partir de una predicción de su funcionamiento, antes de que el sistema pueda diseñarse en detalle o construirse físicamente. Esta predicción, en términos de una relación funcional, se basa en una descripción matemática de las características dinámicas del sistema. Para modelar un sistema se necesitan tomar en cuenta las propiedades de las variables y su interacción, debido a la incertidumbre y complejidad entre las variables involucradas. Cualquier modelo matemático (incluyendo un modelo físico) puede ser definido como una representación simplificada, generalmente lineal, de ciertos aspectos de un sistema real. Al establecer este modelo, frecuentemente se encuentran dificultades para que, de una forma completa y precisa, se describa el sistema dinámico en detalle.

Cuando se intenta construir un modelo, debe establecerse un equilibrio entre su simplicidad y la exactitud de los resultados del análisis. Diferentes modelos pueden ser desarrollados para representar un mismo problema. Debe tomarse en cuenta también que cualquier modelo tiene un rango limitado de validez y que no debe ser aplicado fuera de este rango [20].

Por síntesis se entiende a la aplicación de un procedimiento explícito para encontrar cómo un sistema funciona de una manera específica. En general, tal procedimiento es completamente matemático desde el principio hasta el fin del proceso de diseño. Las características deseadas del sistema se postulan al principio, y después, se usan diferentes técnicas matemáticas para sintetizar un sistema que tenga esas características.

Es importante notar que los resultados obtenidos en el análisis son válidos en la medida en que el modelo se aproxime al sistema físico dado [29].

Un procedimiento para realizar el modelado de un sistema puede resumirse como sigue [30]:

1. Diagrama esquemático. Para comprender y entender el problema, con frecuencia es útil dibujar un diagrama esquemático del sistema y definir las variables involucradas.
2. Relación funcional. Determinar el modelo o relación funcional utilizando leyes físicas, escribiendo las ecuaciones para cada componente y combinándolos de acuerdo con el diagrama del sistema para obtener un modelo matemático. Se debe tener en cuenta que los modelos pueden ser de diversas clases (aritméticos, algebraicos, geométricos, trigonométricos, lógicos, etc.), para esto es necesario manejar adecuadamente el lenguaje simbólico.
3. Síntesis. Establecer adecuadamente las restricciones o limitaciones del sistema y obtener la solución apoyándose en teorías, de ser posible conocidas. Construir soluciones prácticas y sencillas, escogiendo los métodos más apropiados para encontrar dichas soluciones. Si es posible, analizar un ejemplo específico que involucre una situación similar. Hay problemas que tienen más de una solución. También es necesario realizar una interpretación de los resultados obtenidos.
4. Pruebas experimentales. Para verificar la validez del modelo o predicción del desempeño del sistema, se compara con los resultados obtenidos a partir de pruebas experimentales. Si el modelo matemático se aleja de los resultados de las pruebas, debe modificarse el modelo.

### **3.1. Diagrama esquemático**

Algunos componentes del esqueleto del organismo humano pueden considerarse como un sistema compuesto de palancas. Una palanca gira alrededor de un punto fijo llamado eje o fulcro. Puesto que una palanca puede tener cualquier forma, muchos huesos largos en el cuerpo pueden visualizarse como una barra rígida que transmite y modifica la fuerza y el movimiento.

La palanca está sometida a dos fuerzas: el esfuerzo y la resistencia ejercidas respectivamente por los músculos agonistas y antagonistas. El esfuerzo intenta mover la palanca, mientras que la resistencia pretende frenar el movimiento. En el cuerpo, el esfuerzo lo realiza la contracción muscular. El modelo presentado en este documento no pretende explicar el mecanismo de generación de fuerza.

Una propiedad importante de los músculos se presenta cuando es estimulado eléctricamente. El músculo actúa como un filtro pasa-bajas, en otras palabras, el músculo responde selectivamente a las señales de baja frecuencia e ignora las de frecuencia más alta. La transformación de patrones de actividad neuronal en movimiento, o de manera general, en desempeño, es realizada por el sistema músculo-esquelético.

Los movimientos voluntarios del cuerpo son controlados por el individuo y son realizados por los músculos esqueléticos. Los músculos esqueléticos sólo se contraen cuando son estimulados y están dispuestos en tal forma que mientras uno se contrae, otro se relaja o estira. La capacidad de contraerse o relajarse se denomina

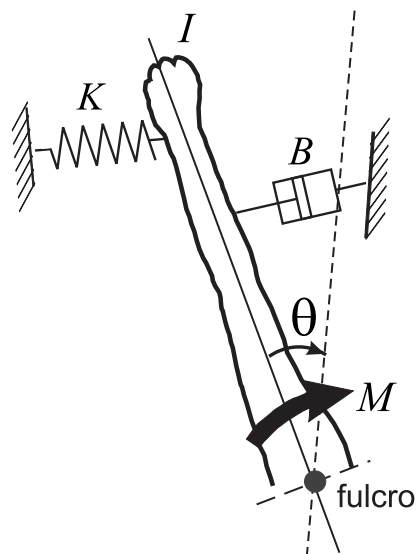


contractibilidad. Debido a esta propiedad, los músculos pueden considerarse como elementos de rigidez. Los elementos de rigidez almacenan y liberan energía en un sistema.

Si se activa un músculo con un par de estímulos lo suficientemente continuos como para que el segundo llegue antes de que el músculo éste relajado por completo, el esfuerzo total desarrollado después por el segundo estímulo será mayor que el desarrollado como respuesta a un estímulo individual. Éste aumento en el esfuerzo desarrollado se denomina sumación. El desarrollo del esfuerzo máximo durante el movimiento balístico es una condición indispensable.

La mayor parte de los sistemas físicos constan de algún tipo de amortiguamiento. Los elementos de amortiguamiento no tienen inercia, ni medios de almacenar o liberar energía. El movimiento mecánico impartido a estos elementos se convierte en calor o sonido. Son elementos no conservativos o disipativos porque el sistema no puede recuperar esta energía. Algunos tipos comunes de amortiguamiento son: amortiguamiento viscoso, amortiguamiento seco, amortiguamiento magnético, etcétera. Tal amortiguamiento no sólo retarda el movimiento, sino que dado el caso, causa que se detenga.

Los músculos pueden ser considerados con una propiedad de amortiguamiento, debido a la producción de calor que se genera durante el movimiento, o bien, por la disposición de los músculos, que causan una limitación y reducción en su movimiento. Este amortiguamiento es más evidente cuando los músculos dejan de contraerse. Por ejemplo, si el brazo está en una posición horizontal y súbitamente los músculos se relajan, el brazo modificará su estado hasta una posición de reposo vertical.



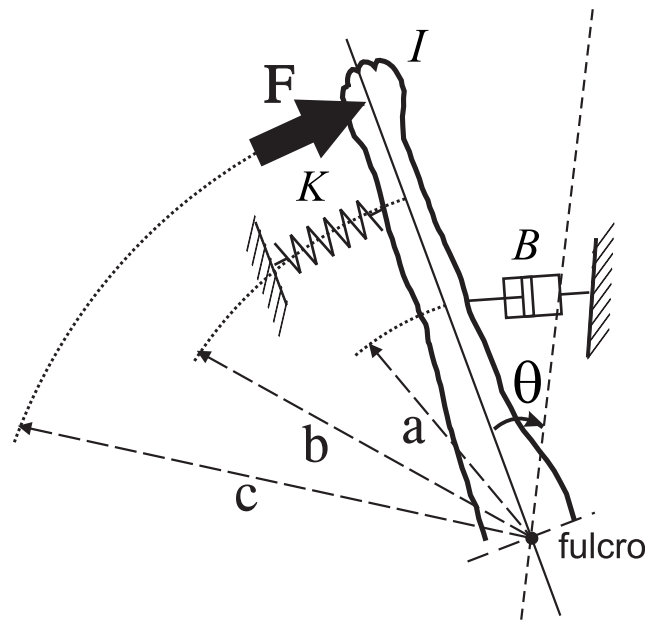
**Figura 3.1:** Diagrama esquemático de una articulación humana en un ambiente viscoso. Se caracteriza mediante un sistema masa-resorte-amortiguador, donde  $I$  representa el momento de inercia de masa,  $K$  la constante del resorte y  $B$  la constante del amortiguador, sujeto a un torque externo o momento aplicado  $M$ , desplazándose un ángulo  $\theta$  con respecto del fulcro, desde una posición inicial en reposo (línea continua) hasta una posición final en reposo (línea punteada).

Muchos sistemas, en la práctica, pueden ser modelados como un sistema masa-resorte-amortiguador; siempre y cuando las restricciones sean establecidas apropiadamente. Para los sistemas físicos, la mayoría de los modelos matemáticos que resultan útiles se describen en términos de ecuaciones diferenciales lineales. La propiedad más importante de los sistemas lineales consiste en que se les puede aplicar el principio de superposición. Este principio establece que la respuesta producida por la aplicación de dos funciones de excitación diferentes o entradas, es la suma de dos respuestas individuales. Como resultado del principio de superposición, las complicadas soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales se pueden obtener de la suma de soluciones simples.

El diagrama esquemático ilustrado en la fig. 3.1 describe una articulación humana en un ambiente viscoso como un sistema masa-resorte-amortiguador de un grado de libertad. El término grado de libertad es el que describe el número mínimo de coordenadas independientes requeridas para especificar ese movimiento. La configuración del sistema puede especificarse por una coordenada  $\theta$ , donde el desplazamiento angular se mide desde una posición inicial.

### 3.2. Relación funcional

El análisis se inicia obteniendo, a partir del diagrama esquemático mostrado en la fig. 3.2, un modelo matemático del sistema. Para cada uno de los componentes que forman parte del sistema se obtiene su modelo matemático. Combinando estos modelos en una sola ecuación se obtiene



**Figura 3.2:** Diagrama esquemático de una articulación humana en un ambiente viscoso. Se indican las diferentes posiciones con respecto del fulcro para cada componente.

$$I \ddot{\theta} + Ba^2 \dot{\theta} + Kb^2 \theta = Fc \quad (3.1)$$

El modelo matemático descrito por esta ecuación, describe el modelo completo del sistema masa-resorte-amortiguador, desde un estado inicial  $\theta(0) = 0$  y  $\dot{\theta}(0) = 0$  a un estado final  $\theta(T) = \theta_f$  y  $\dot{\theta}(T) = 0$ . Sólo es válido para pequeños desplazamientos angulares de  $\theta$ . Las variables involucradas se describen a continuación, incluyendo sus unidades:

	Descripción	Unidades absolutas
$\theta$	Desplazamiento angular	[radianes]
$I$	Inercia	[ $ML^2$ ]
$B$	Coefficiente de amortiguamiento	[ $MT^{-1}$ ]
$K$	Coefficiente de resorte	[ $MT^{-2}$ ]
$F$	Fuerza	[ $MLT^{-2}$ ]
$a, b, c$	Longitud	[ $L$ ]

Una cantidad cuya unidad absoluta es la unidad se denomina cantidad adimensional. La cantidad adimensional  $\theta$  se expresa en radianes.

### 3.3. Síntesis

Después de obtener un procedimiento de solución y establecer el modelo matemático del sistema dinámico, el siguiente paso es definir las restricciones físicas del sistema.

El momento aplicado al sistema de la fig. 3.2 se denota por  $M$ , donde  $M = Fc$  y el momento máximo admisible está denotado por  $|M_{\text{limite}}|$ . Para aplicar la teoría de optimización para tiempo mínimo, es necesario restringir el valor del momento aplicado, de manera que este no sea mayor que el momento máximo admisible.

La política de control o entrada para el sistema en un tiempo  $t$  es

$$\mathbf{U}(t) = \frac{M}{|M_{\text{limite}}|} \quad (3.2)$$

donde la política de control  $\mathbf{U}(t)$  está restringida por  $|\mathbf{U}(t)| \leq 1$ .

Aplicando esta restricción al sistema masa-resorte-amortiguador descrito por la ecuación diferencial 3.1 se obtiene

$$\bar{I} \ddot{\theta} + \bar{B} \dot{\theta} + \bar{K} \theta = \mathbf{U}(t) \quad (3.3)$$

donde

	Descripción	Unidades absolutas
$\theta$	Desplazamiento angular	[radianes]
$\bar{I}$	Matriz de Inercia modificada	[ $T^2$ ]
$\bar{B}$	Matriz de amortiguamiento modificada	[ $T$ ]
$\bar{K}$	Matriz de rigidez modificada	[1]
$\mathbf{U}(t)$	Política de control para tiempo mínimo	[1]

para  $\bar{I} = \frac{I}{|M_{limite}|}$ ,  $\bar{B} = \frac{Ba^2}{|M_{limite}|}$  y  $\bar{K} = \frac{Kb^2}{|M_{limite}|}$ . La ecuación diferencial 3.3 es adimensional por la aplicación de la restricción 3.2.

El sistema denotado por la ecuación 3.3 es un sistema de segundo orden. En consecuencia, el sistema puede conmutar su estado solamente una vez. La política de control consta de dos entradas de control, denotadas por  $U^+ > 0$  para las condiciones iniciales y  $U^- < 0$  para las condiciones finales.

Al establecer adecuadamente las restricciones o limitaciones de un sistema, se tiene un control total sobre éste y es posible modificar su desempeño.

Un modelo matemático del sistema descrito por la ecuación 3.3 en función de la razón de amortiguamiento  $\xi$  y de la frecuencia natural del sistema  $\omega_n$  es

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_n \dot{\theta} + \omega_n^2 \theta = \frac{\mathbf{U}(t)}{\bar{I}} \quad (3.4)$$

donde

	Descripción	Unidades absolutas
$\omega_n$	Frecuencia natural	[ $T^{-1}$ ]
$\xi$	Razón de amortiguamiento	[1]

para  $2\xi\omega_n = \frac{\bar{B}}{\bar{I}}$  y  $\omega_n^2 = \frac{\bar{K}}{\bar{I}}$ . Por consiguiente

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\bar{K}}{\bar{I}}} \quad (3.5)$$

y

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{\bar{B}}{\sqrt{\bar{K}\bar{I}}} \quad (3.6)$$

Existen cuatro diferentes tipos de movimiento que dependen de la razón de amortiguamiento  $\xi$ :

1. Movimiento libre no amortiguado:  $\xi = 0$
2. Movimiento sobreamortiguado:  $\xi > 1$

3. Movimiento críticamente amortiguado:  $\xi = 1$
4. Movimiento subamortiguado:  $0 < \xi < 1$

en el problema que se está analizando se considera un movimiento subamortiguado.

La solución general para el modelo matemático denotado por la ecuación diferencial 3.4 es

$$\theta = \frac{\mathbf{U}(t)}{I\omega_n^2} + e^{-\xi\omega_n t} \left[ c_1 \sin \left( \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t \right) + c_2 \cos \left( \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t \right) \right] \quad (3.7)$$

y su primer derivada

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & \omega_n e^{-\xi\omega_n t} \cos \left( \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t \right) \left( c_1 \sqrt{1-\xi^2} - c_2 \xi \right) \\ & - \omega_n e^{-\xi\omega_n t} \sin \left( \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t \right) \left( \xi c_1 + c_2 \sqrt{1-\xi^2} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Expresando la solución general para  $\theta$  y  $\dot{\theta}$  mediante un cambio de variable, se obtiene

$$\theta = \frac{\mathbf{U}(t)}{I\omega_n^2} + e^{-\xi\omega_n R t'} \left[ c_1 \sin(t') + c_2 \cos(t') \right] \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & -\omega_n e^{-\xi\omega_n R t'} \left( \xi c_1 + c_2 \sqrt{1-\xi^2} \right) \sin(t') \\ & + \omega_n e^{-\xi\omega_n R t'} \left( c_1 \sqrt{1-\xi^2} - c_2 \xi \right) \cos(t') \end{aligned} \quad (3.10)$$

para  $t = R t'$  y  $R = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$ .

Aplicando las condiciones iniciales en la solución general para  $\theta$  y  $\dot{\theta}$  para una política de control  $U^+ > 0$ , se obtiene

$$\theta_{U^+} = \frac{\mathbf{U}(t)}{I\omega_n^2} - \frac{\mathbf{U}(t)}{I\omega_n^2} e^{-\xi\omega_n R t'} \left[ \xi\omega_n R \sin(t') + \cos(t') \right] \quad (3.11)$$

$$\dot{\theta}_{U^+} = \frac{\mathbf{U}(t)}{I} R e^{-\xi\omega_n R t'} \sin(t') \quad (3.12)$$

para un estado inicial  $\theta(0) = 0$  y  $\dot{\theta}(0) = 0$ .

Aplicando las condiciones finales en la solución general para  $\theta$  y  $\dot{\theta}$  para una política de control  $U^- < 0$ , se obtiene

$$\theta_{U^-} = -\frac{\mathbf{U}(t)}{\bar{I}\omega_n^2} + \left( \theta_f + \frac{\mathbf{U}(t)}{\bar{I}\omega_n^2} \right) e^{\xi\omega_n R(T'-t')} [\cos(T'-t') - \xi\omega_n R \sin(T'-t')] \quad (3.13)$$

$$\dot{\theta}_{U^-} = \omega_n^2 R \left( \theta_f + \frac{\mathbf{U}(t)}{\bar{I}\omega_n^2} \right) e^{\xi\omega_n R(T'-t')} \sin(T'-t') \quad (3.14)$$

para un estado final  $\theta(T) = \theta_f$  y  $\dot{\theta}(T) = 0$ .

Para los estados del sistema, inicial y final, se tienen dos ecuaciones de movimiento. Aplicando la restricción para tiempo mínimo se deduce que existe un estado común para las ecuaciones de movimiento. El estado común define el punto donde se produce la conmutación. Si la conmutación se produce en  $t = \tau$  desde las curvas de movimiento de  $U^+ < 0$  hacia las curvas de movimiento de  $U^- < 0$ , entonces

$$\dot{\theta}(\tau)_{U^+} = \dot{\theta}(\tau)_{U^-} \quad (3.15)$$

$$\theta(\tau)_{U^+} = \theta(\tau)_{U^-} \quad (3.16)$$

Estas igualdades establecen la relación funcional que existe entre las políticas de control admisibles  $U^+$  y  $U^-$ . Estas políticas de control forman en su conjunto a la política de control óptima para tiempo mínimo  $U^*$ .

La política de control óptima  $U^*$ , de tipo bang-bang, aplicable al sistema de la fig. 3.1, desde un estado inicial con  $U^+ > 0$  a un estado final con  $U^- < 0$  es

$$U^* = \begin{cases} U^+ & 0 < t \leq \tau \\ U^- & \tau < t \leq T \end{cases} \quad (3.17)$$

La relación funcional que existe entre las políticas de control  $U^+$  y  $U^-$  está expresada por el siguiente sistema de ecuaciones

$$\mathbf{U}(t) R e^{-Q\tau'} \sin(\tau') = R (\bar{K}\theta_f + \mathbf{U}(t)) e^{Q(T'-\tau')} \sin(T'-\tau') \quad (3.18)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t) - \mathbf{U}(t) e^{-Q\tau'} [Q \sin(\tau') + \cos(\tau')] = \\ -\mathbf{U}(t) + (\bar{K}\theta_f + \mathbf{U}(t)) e^{Q(T'-\tau')} [\cos(T'-\tau') - Q \sin(T'-\tau')] \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde  $Q = \xi\omega_n R$  y  $R = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$ . Estas ecuaciones representan las condiciones de continuidad del movimiento.

El siguiente paso es determinar una solución general para el sistema de ecuaciones, denotado por 3.18 y 3.19. Una etapa previa consiste en realizar un análisis detallado de las ecuaciones y de las variables involucradas. Como el modelo matemático está en función de  $\xi$  y de  $\omega_n$ , una solución puede ser determinada en

función de los parámetros adimensionales  $\xi$  y  $\bar{K}\theta$ . Estos parámetros del sistema se hacen variar para producir varias soluciones. Las soluciones obtenidas se sustituyen en el sistema de ecuaciones para verificar si se cumple con las condiciones de continuidad del movimiento.

Un método abierto y ampliamente utilizado para determinar las soluciones para un sistema de ecuaciones es el método de Newton-Raphson. Un método abierto se basa en fórmulas que requieren de un solo valor o de un par de ellos pero que no necesariamente encierran la raíz. En algunas ocasiones divergen o se alejan de la raíz a medida que crece el número de iteraciones. Sin embargo, en general son muy eficientes cuando convergen. Aplicando éste método para determinar la solución al sistema de ecuaciones y sustituyendo las raíces encontradas en las ecuaciones originales, los resultados finales no son los esperados.

Como método alternativo de solución se emplea un método que usa intervalos. Los métodos que usan intervalos necesitan de dos valores iniciales para la raíz. Para converger a la respuesta correcta, la raíz deberá estar localizada dentro del intervalo. Si es necesario, se deberán emplear diferentes estrategias para determinar la intersección de las curvas y el valor de las raíces, además de reducir sistemáticamente el tamaño del intervalo. Los resultados obtenidos al sustituir el valor de las raíces encontradas en las ecuaciones 3.18 y 3.19 en todos los casos fue de un error cercano a cero, por ejemplo,  $3 \times 10^{-7}$ . Por lo tanto, estas soluciones cumplen satisfactoriamente con las condiciones de continuidad del movimiento para tiempo mínimo.

En las figuras 3.3 y 3.4, se muestran los valores adimensionales, de  $\bar{K}\theta_f$ ,  $\frac{\tau}{T}$  y  $\omega_n T$ , para diferentes valores de la razón de amortiguamiento  $\xi$  aplicando en cada caso una política de control óptima  $\mathbf{U}^*$ . A partir de la figura 3.3 se puede concluir que, para cualquier valor de  $\bar{K}\theta_f$ , la conmutación se produce después de que ha transcurrido la primera mitad del movimiento. Este efecto se puede apreciar más claramente en la fig. 3.5.

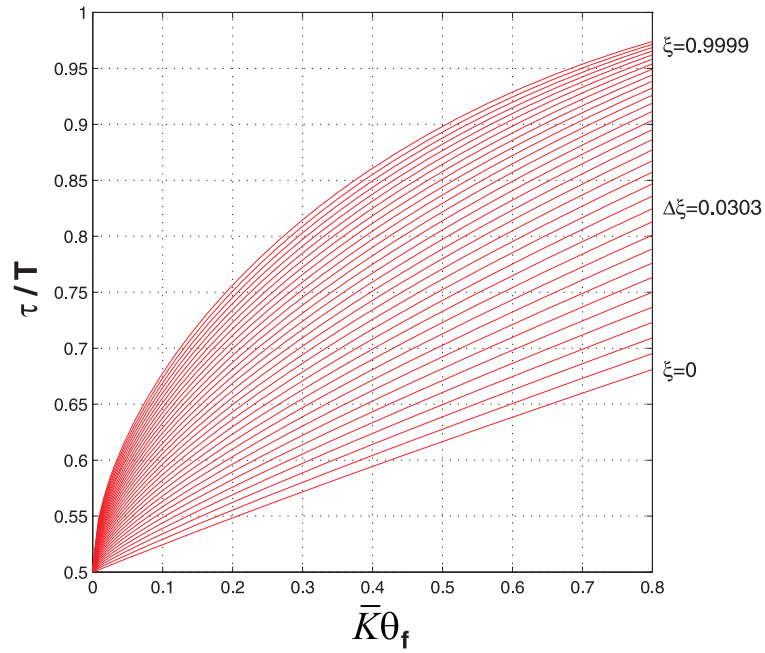
### 3.4. Suavizado

El sistema sensoriomotor del cuerpo humano generalmente realiza sus movimientos de una manera suave y controlada. Esto implica la combinación de diferentes procesos que interactúan continuamente para mejorar y optimizar el desempeño de su comportamiento. En las gráficas de la fig. 3.5 se puede apreciar que la conmutación de las curvas de  $\mathbf{U}^+$  a  $\mathbf{U}^-$ , no se realiza de una manera suave, presentando además un movimiento asimétrico.

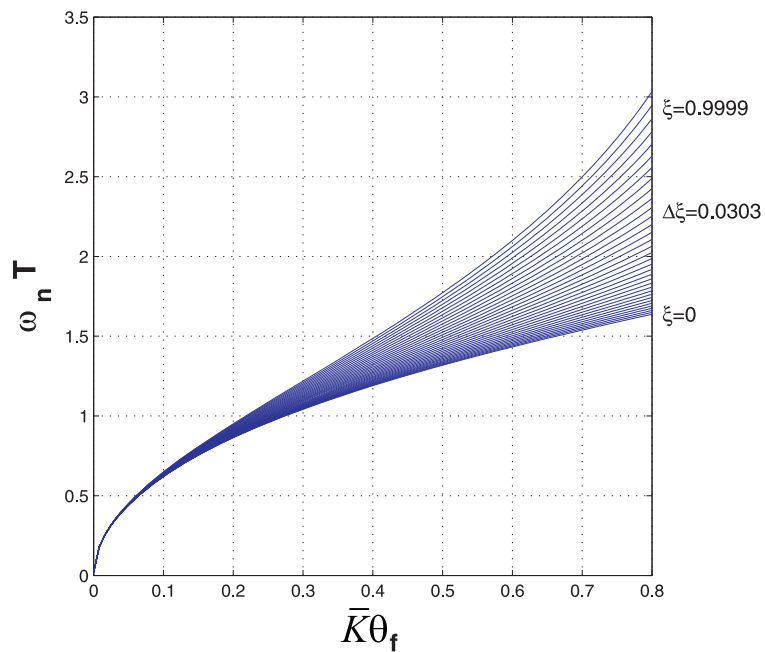
La transformación de patrones o señales de actividad cerebral en movimiento es realizada por el sistema músculo-esquelético. Durante esta transformación se produce un proceso de filtrado, denominado sinapsis química. En este proceso, se filtran las señales de baja frecuencia y se ignoran las de frecuencia más elevada [31]. Las señales de actividad cerebral se denominan potencial de acción.

Para sintetizar el análisis y diseño del sistema dinámico y establecer la relación entre las salidas del mismo (por ejemplo, la posición final de la articulación) y las entradas (por ejemplo, las señales del cerebro), es necesario considerarlo como un filtro pasa-bajas. Un modelo matemático para un sistema de filtrado de primer orden es denotado por la siguiente ecuación [21]

$$\phi_k(t) = \int_0^t f(\tau) \phi_{k-1}(t-\tau) d\tau \quad (3.20)$$

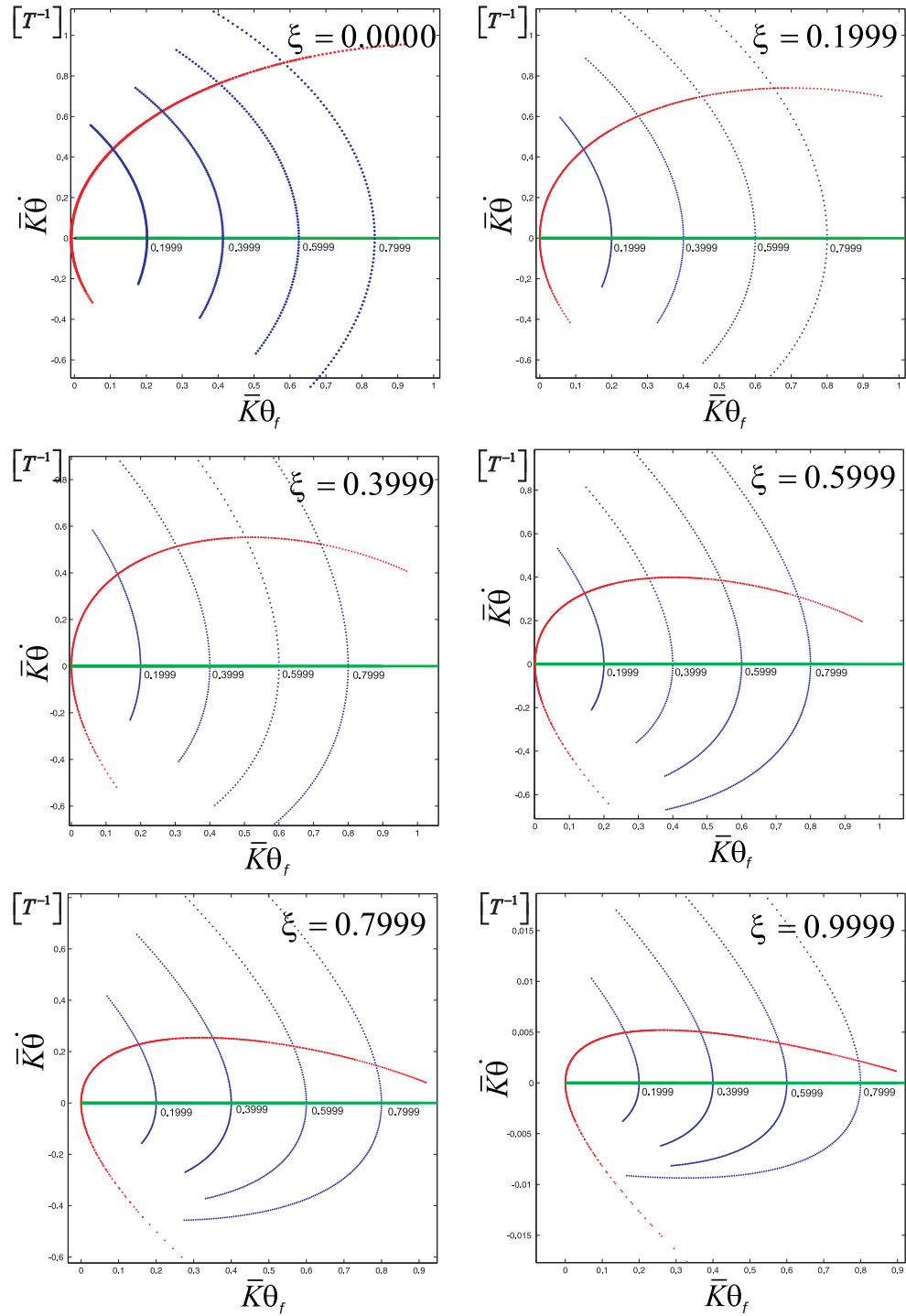


**Figura 3.3:** Valores adimensionales de  $\frac{\tau}{T}$  para una aplicación de la política de control para tiempo mínimo  $U^*$ . En la gráfica se aprecia que la relación  $\frac{\tau}{T} > 0.5$  se cumple para todos los valores de  $\bar{K}\theta_f$ . La conmutación se produce después de la primera mitad del movimiento.



**Figura 3.4:** Valores adimensionales de  $\omega_n T$  para una aplicación de la política de control para tiempo mínimo  $U^*$ .





**Figura 3.5:** Gráficas bang-bang para diferentes razones de amortiguamiento  $\xi$ . En cada gráfica se muestra la respuesta del sistema denotado por 3.4 para una política de control óptima  $U^*$  y diferentes valores de la variable adimensional  $\bar{K}\theta$ . La conmutación se realiza de  $U^+$  (línea roja) a  $U^-$  (línea azul) en  $t = \tau$  para un tiempo mínimo  $T$ .

donde  $k$  representa la  $k$ -ésima junta sináptica,  $\phi_{k-1}(t)$  es la señal presináptica,  $\phi_k(t)$  es la señal post-sináptica y  $f(t)$  es una función ponderadora.

Como  $f(t)$  es una función ponderadora que decrece exponencialmente con el tiempo, la ecuación 3.20 se transforma en

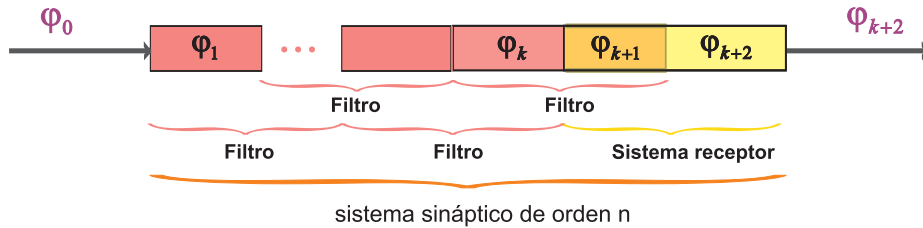
$$\phi_k(t) = -\ln(\alpha) \int_0^t \alpha^\tau \phi_{k-1}(\tau-t) d\tau \quad (3.21)$$

donde  $\alpha \in (0, 1)$ . El sistema filtrado, denotado por la ecuación 3.20, puede ser representado como un sistema sináptico cuyo desempeño es controlado por la siguiente ecuación diferencial de primer orden [21]

$$\phi_k(t) + \omega^{-1} \dot{\phi}_k(t) = \phi_{k-1}(t) \quad (3.22)$$

donde  $k$  representa la  $k$ -ésima junta sináptica,  $\phi_{k-1}(t)$  es la señal presináptica,  $\phi_k(t)$  es la señal post-sináptica y  $\omega \equiv -\ln(\alpha)$ , que representa el proceso de sinapsis química realizado durante la transformación de las señales neuronales.

Para obtener un sistema sináptico de orden  $n$ , donde  $n = k + 2$ , se requiere insertar  $k$  juntas sinápticas entre la señal de entrada y el sistema receptor, como se ilustra en la fig. 3.6. Las  $k + 2$  juntas representan los diferentes canales de transmisión empleados para transportar la señal de entrada o potencial de acción  $\phi_0$  hasta su destino final,  $\phi_{k+2}$ .



**Figura 3.6:** Diagrama esquemático de un sistema sináptico de orden  $n$ . La respuesta del sistema a una entrada  $\phi_0$  esta denotada por  $\phi_{k+1}$  y  $\phi_{k+2}$ , donde  $k + 2$  es el número de juntas sinápticas en el sistema.

El sistema lineal sináptico de  $n$ -ésimo orden puede ser representado mediante la siguiente ecuación de estado

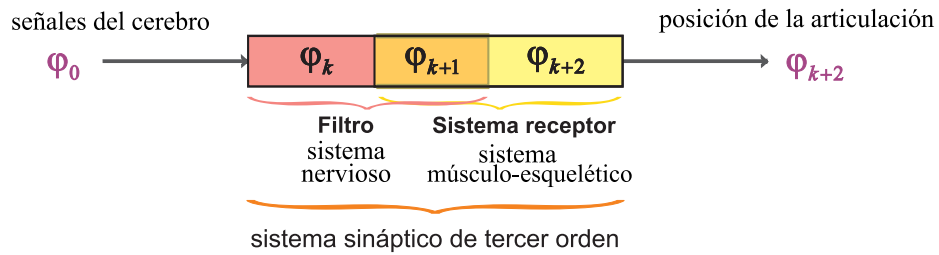
$$\dot{\phi}_k(t) = [\phi_{k-1}(t) - \phi_k(t)] \omega \quad (3.23)$$

para  $k = 1, 2, \dots, m$ , donde  $m$  representa la cantidad de filtros del sistema.

La respuesta del sistema receptor está representada en la fig. 3.6 por  $\phi_{k+1}$  y  $\phi_{k+2}$ , de manera que el desempeño final del sistema dependerá del sistema receptor presente [21] [31].

En un sistema sináptico de  $n$ -ésimo orden, es difícil de entender la relación que existe entre la entrada y la salida, así como las características de la dinámica del sistema. Para sistemas de orden superior ( $n > 3$ ) una solución analítica no es fácilmente determinada, situación que ha sido reportada en otros trabajos [22] [29] [32] [33].

Si se caracteriza el movimiento rápido de la articulación humana en un ambiente viscoso empleando únicamente una junta interactuando entre la secuencia de control del cerebro y la articulación del sistema músculo esquelético, se obtiene un sistema sináptico de tercer orden como se muestra en la fig. 3.7.



**Figura 3.7:** Diagrama esquemático de un sistema sináptico de tercer orden.

El sistema sináptico de tercer orden está sujeto a las siguientes condiciones y restricciones:

1. La velocidad inicial es cero  $\dot{\theta}(0) = 0$  para una posición inicial  $\theta(0) = 0$ ;
2. La velocidad final es cero  $\dot{\theta}(T) = 0$  para una posición final  $\theta(T) = \theta_f$
3. La posición final únicamente se puede incrementar  $\theta_f > 0$ ;
4. El sistema tiene  $k + 1$  puntos de conmutación.
5. El control óptimo para tiempo mínimo  $\phi_0^*$ , si existe, es la aplicación del máximo esfuerzo  $\phi_k$  durante todo el intervalo de control  $t \in [0, T]$ ;

Expresando el sistema sináptico de tercer orden, en función de la variable  $\phi = \theta$ , se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_k &= (\phi_0 - \phi_k) \omega \\ \dot{\phi}_{k+1} &= (\phi_k - 2\xi\omega_n\phi_{k+1} - \omega_n^2\phi_{k+2}) \omega \\ \dot{\phi}_{k+2} &= \phi_{k+1} \omega\end{aligned}\tag{3.24}$$

donde el parámetro  $\omega$  denota el proceso sináptico realizado durante el movimiento balístico de la articulación humana en un ambiente viscoso. La respuesta del sistema para una entrada  $\phi_0 = \frac{U}{T}$  es  $\phi_{k+2} = \theta$  y  $\phi_{k+1} = \dot{\theta}$ .

Para el sistema denotado por las ecuaciones de estado (3.24), se tiene que las variables involucradas y sus unidades son:

	Unidades absolutas
$\varphi_0$	$[T^{-(k+2)}]$
$\varphi_k$	$[T^{-(k+1)}]$
$\varphi_{k+1}$	$[T^{-k}]$
$\varphi_{k+2}$	$[radianes]$

La ecuación (3.24) en función de la variable  $\phi = \bar{K}\theta$  es similar. La respuesta de este sistema a una entrada  $\phi_0 = \frac{\bar{K}}{T}U$  es  $\phi_{k+2} = \bar{K}\theta$  y  $\phi_{k+1} = \bar{K}\dot{\theta}$ . La ecuación (3.24) representa la propuesta de modelado para el movimiento rápido o balístico de una articulación humana en un ambiente viscoso, en función de la variable  $\phi = \theta$ , la razón de amortiguamiento  $\xi$ , la frecuencia natural  $\omega_n$  y el proceso sináptico  $\omega$ , para una entrada  $\phi_0 = \frac{U}{T}$ .

Después de obtener la descripción matemática del sistema, los métodos numéricos se aplican para encontrar, en un conjunto infinito de posibles soluciones, la política de control óptima  $\phi_0^*$  sujeta a las restricciones dinámicas del sistema y a las condiciones de frontera (por ejemplo, el inicio y fin del movimiento).

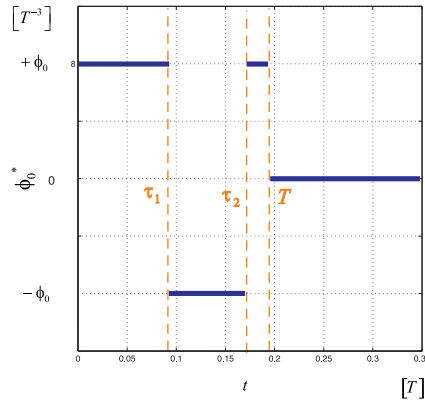
$$\phi_0^*(t) = \begin{cases} +1 & 0 < t \leq \tau_1 \\ -1 & \tau_1 < t \leq \tau_2 \\ +1 & \tau_2 < t \leq T \end{cases} \quad (3.25)$$

donde  $\varphi_0^+ > 0$ ,  $\varphi_0^- < 0$ ,  $\tau_1$  es el tiempo de conmutación de  $\phi_0^+$  a  $\phi_0^-$ ,  $\tau_2$  es el tiempo de conmutación de  $\phi_0^-$  a  $\phi_0^+$  y  $T$  es el tiempo mínimo para una política de control óptima  $\phi_0^*(t)$  en el intervalo  $t \in [0, T]$ , como se ilustra en la fig. 3.8.

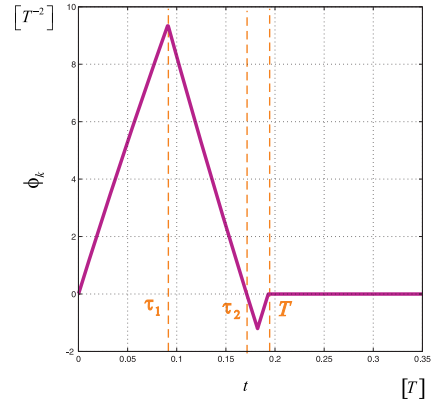
Para determinar la respuesta para tiempo mínimo del sistema sináptico de tercer orden, denotado por la ecuación (3.24), para  $k = 1$ , se emplea

1. El método de Runge-Kutta, para la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales;
2. Un método numérico que usa intervalos, para reducir sistemáticamente el tamaño del intervalo y converger a una política de control óptima (fig. 3.8(a)); y
3. Un método gráfico, para visualizar las variables de estado (figs. 3.8(b), 3.8(c) y 3.8(d)) y verificar las condiciones de continuidad del movimiento.

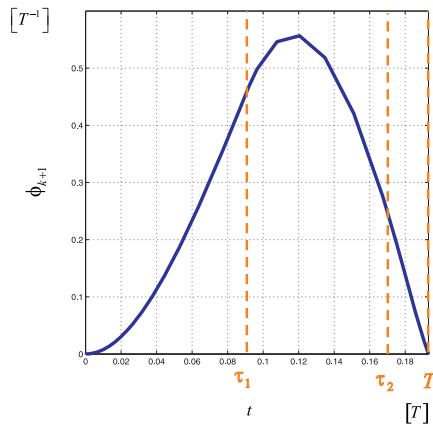
En resumen, la política de control óptima para tiempo mínimo en un sistema sináptico de tercer orden, donde  $k = 1$ , está en función de la razón de amortiguamiento  $\xi$ , la frecuencia natural  $\omega_n$  y el parámetro  $\omega$ . Esto implica que se deben variar estos parámetros, los  $k + 1$  tiempos de conmutación y el tiempo de finalización del movimiento, hasta que se determinen los valores óptimos para un tiempo mínimo  $T$ . Estos valores son únicos y dependen también de la posición final  $\theta_f$ .



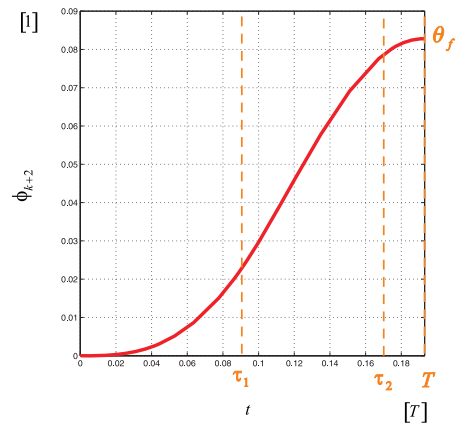
(a) Política de control óptima  $\phi_0^*$  para  $\frac{\tau_1}{T} = 0.47192$  y  $\frac{\tau_2}{T} = 0.94379$ .



(b) Respuesta óptima  $\phi_k$ . Representa la entrada al sistema receptor



(c) Respuesta óptima  $\phi_{k+1}$ . Representa el perfil de velocidad del sistema receptor.



(d) Respuesta óptima  $\phi_{k+2}$ . Representa la curva de posición del sistema receptor.

**Figura 3.8:** Optimización para tiempo mínimo del sistema sináptico de tercer orden, para  $k = 1$ ,  $\xi = 0.30786$ ,  $\omega_n = 8.624$  y un parámetro  $\omega = 1.48$ , para una posición angular final  $\theta_f$  durante el intervalo de tiempo  $[0, T]$ .



## Validación experimental

Las pruebas experimentales se utilizan para estudiar el desempeño de procesos y sistemas. El diseño de un sistema experimental que satisfaga una tarea específica consiste en desarrollar un modelo físico que lo describa, aplicando las leyes físicas. Una vez obtenido el modelo, se puede formular el análisis de manera tal que los parámetros de éste se hacen variar para producir la solución deseada.

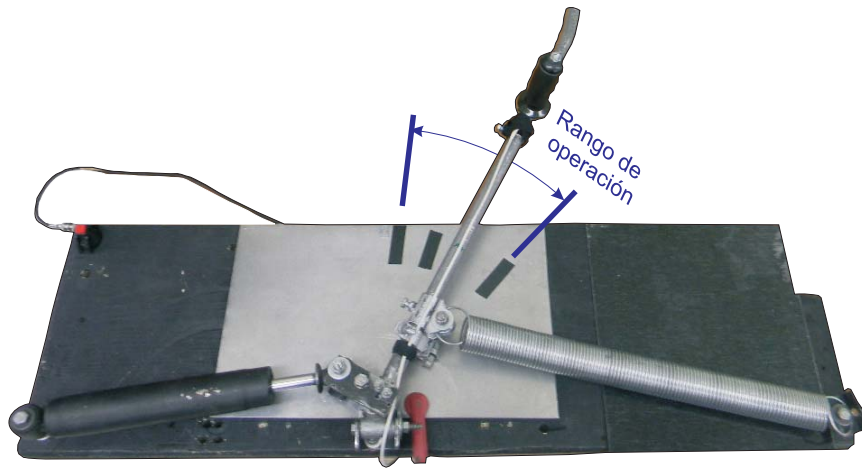
En este procedimiento, se somete el sistema experimental a un conjunto de entradas, de preferencia conocidas, y se miden una o más respuestas observables. Los resultados experimentales se comparan e interpretan para verificar su aplicación en la tarea especificada. Tal sistema puede incluir parámetros desconocidos, los cuales pueden evaluarse previamente mediante un procedimiento de modelado experimental. El objetivo es desarrollar un proceso que sea afectado en forma mínima por fuentes de variabilidad externas. Muchas veces también es útil presentar los resultados de varios experimentos en términos de un modelo empírico.

Una vez que se han analizado los datos, se deben obtener conclusiones prácticas acerca de los resultados y recomendar un curso de acción. Los métodos gráficos suelen ser útiles en esta etapa, en particular para presentar los resultados.

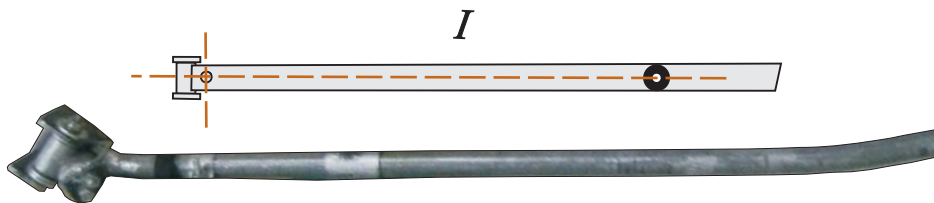
### 4.1. Plataforma experimental

Para caracterizar el movimiento de la articulación humana en un ambiente viscoso, se construyó una plataforma experimental subamortiguada como la mostrada en la fig. 4.1. Los componentes básicos son, una palanca (a), un resorte (b) y un amortiguador (c), como se muestra en la fig. 4.2.

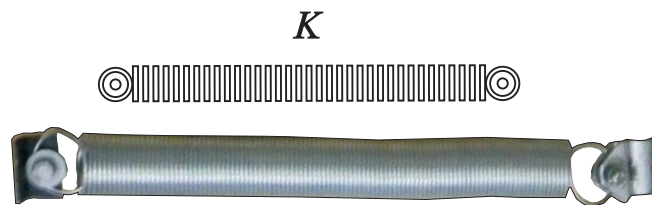
Las curvas del movimiento que describe la palanca en la plataforma experimental son las mismas que las descritas por la articulación humana, en el mismo sistema, durante la realización de la prueba. Por consiguiente, cuando el sistema músculo-esquelético realiza el movimiento balístico en la plataforma experimental subamortiguada, se obtiene la respuesta óptima para tiempo mínimo de la palanca, y de la articulación humana, en un ambiente viscoso.



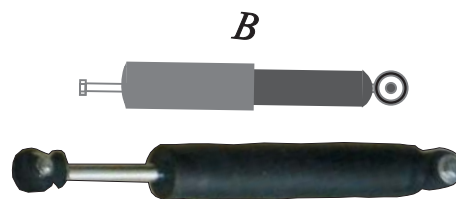
**Figura 4.1:** Plataforma experimental subamortiguada para la caracterización del movimiento balístico de una articulación humana en un ambiente viscoso.



(a) Momento de Inercia de masa  $I = 0.3071 \text{ kg m}^2$ .



(b) Constante del resorte  $K = 154.1 \text{ N / m}$ .



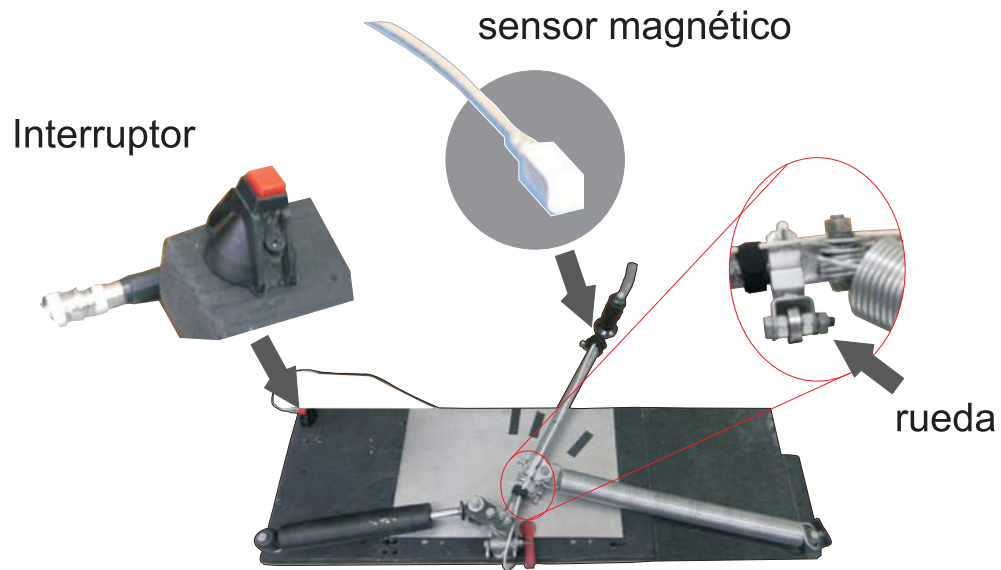
(c) Constante del amortiguador  $B = 4076.7 \text{ N s / m}$ .

**Figura 4.2:** Componentes de la plataforma experimental. En cada una de las figuras se muestra la notación, la representación esquemática, el componente físico y su correspondiente valor obtenido de forma experimental.



En la fig. 4.3 se muestra la localización de los accesorios necesarios para la realización del experimento:

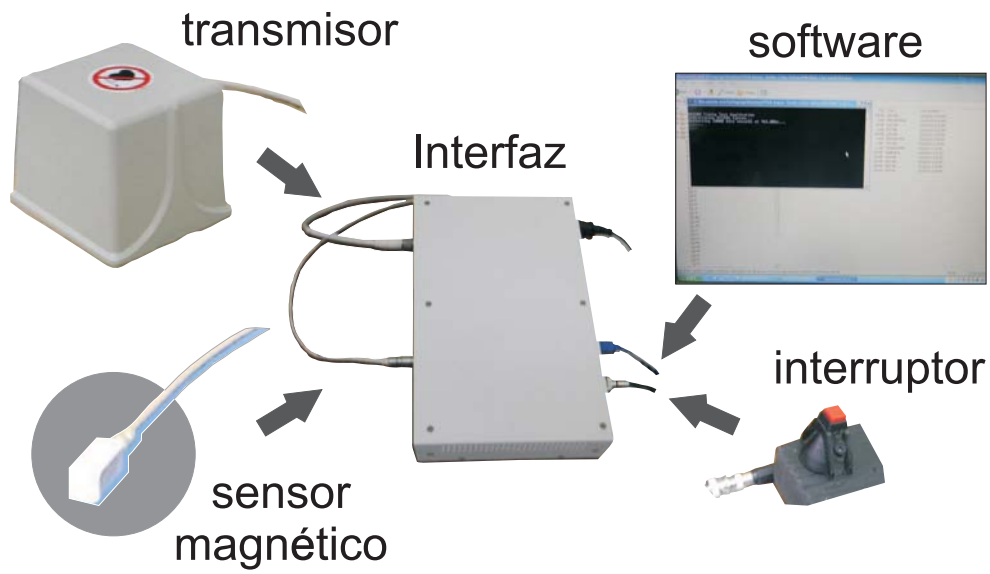
1. Interruptor. El interruptor se acciona para iniciar o finalizar la toma de datos.
2. Sensor magnético. Forma parte del sistema de medición 3D Guidance trakSTAR. Se utiliza para determinar la posición de la articulación durante la prueba.
3. Rueda. Se elimina la variación que presenta el brazo al tratar de realizar el movimiento en un plano horizontal mediante una rueda colocada en el brazo de palanca. De este modo se garantiza que el movimiento se realiza en un plano con estas características.



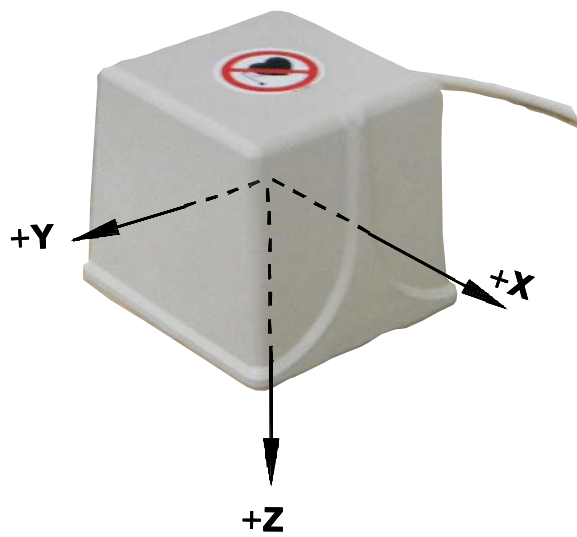
**Figura 4.3:** Accesorios de la plataforma experimental.

El equipo de medición 3D Guidance trakSTAR mostrado en la fig. 4.4 consta de

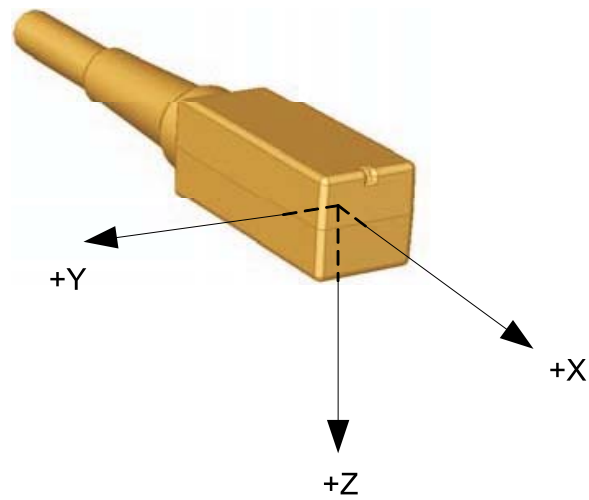
1. Transmisor fijo. De manera secuencial genera campos magnéticos y el sensor magnético, de manera prácticamente instantánea, los detecta. De esta manera se puede determinar la posición actual del sensor con respecto del transmisor fijo.
2. Sensor magnético. Un sensor con seis grados de libertad proporciona la posición actual en tres dimensiones y la orientación del sensor con respecto al transmisor fijo.
3. Interfaz electrónica. Recibe la información enviada por el transmisor fijo y el sensor magnético, la procesa y envía al software de captura.
4. Software de captura. Recibe la posición del sensor con respecto del transmisor y la guarda en un archivo de texto.
5. Interruptor. Se acciona manualmente para iniciar o finalizar la toma de datos.



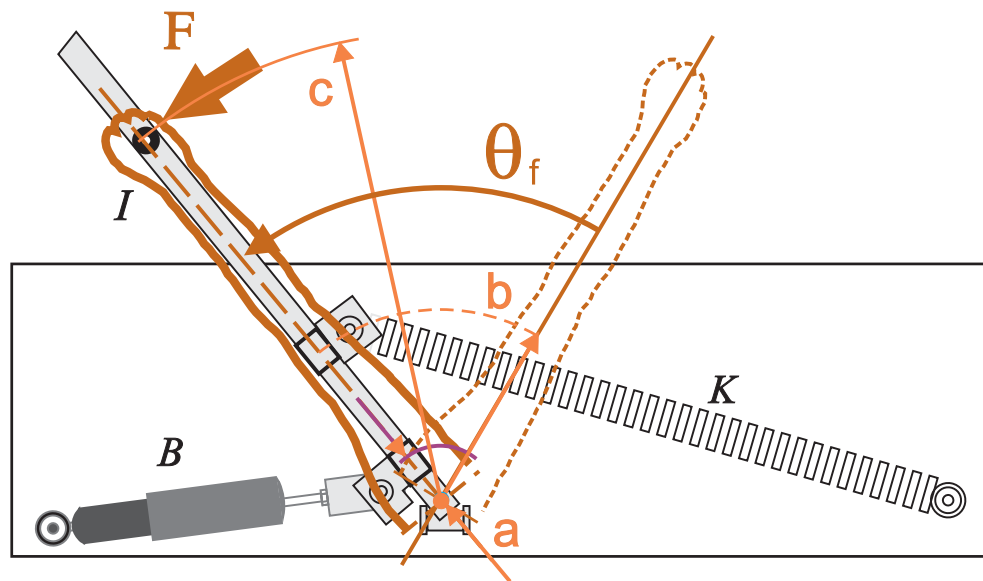
**Figura 4.4:** Elementos que componen el equipo de medición.



**Figura 4.5:** Transmisor fijo. Genera de manera secuencial campos magnéticos y el sensor magnético los detecta prácticamente de manera instantánea. En la figura se muestra el sistema coordenado XYZ del transmisor fijo.



**Figura 4.6:** Sensor magnético. Detecta los campos magnéticos generados por el transmisor fijo para determinar la posición actual del sensor con respecto del transmisor. En la figura se muestra el sistema coordenado XYZ del sensor.



**Figura 4.7:** Diagrama esquemático de la plataforma experimental, donde  $\theta_f$  representa el desplazamiento angular de la articulación,  $a$ ,  $b$  y  $c$  denotan la localización física del amortiguador, el resorte y el punto de aplicación de la fuerza  $F$ , respectivamente.

Un diagrama esquemático de la plataforma experimental se muestra en la figura 4.7. La razón de amortiguamiento  $\xi$  (ecuación 4.1), y la frecuencia natural  $\omega_n$  (ecuación 4.2), son parámetros de la plataforma experimental, que dependen de la localización física del resorte y del amortiguador para poder realizar un movimiento subamortiguado.

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{Ba^2}{\sqrt{Kb^2I}} \quad (4.1)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{Kb^2}{I}} \quad (4.2)$$

En la tabla 4.1 se muestran los parámetros  $\xi$  y  $\omega_n$  para tres diferentes posiciones del resorte, en presencia o no de amortiguamiento. Estas configuraciones fueron empleadas para la realización de las pruebas experimentales.

Posición del Amortiguador $a(m)$	Posición del Resorte $b(m)$	Frecuencia natural $\omega_n (s^{-1})$	Razón de amortiguamiento $\xi$	Tipo de movimiento
0	0.225	5.040	0	libre no amortiguado
0	0.385	8.624	0	libre no amortiguado
0.02	0.135	3.024	0.87796	subamortiguado
0.02	0.225	5.040	0.52678	subamortiguado
0.02	0.385	8.624	0.30786	subamortiguado

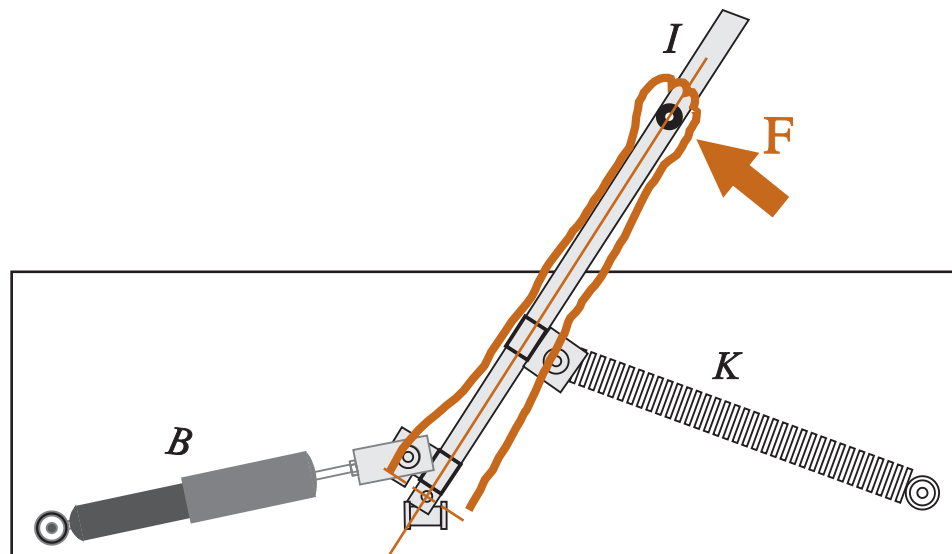
**Tabla 4.1:** Parámetros  $\xi$  y  $\omega_n$  para la plataforma experimental.

## 4.2. Pruebas experimentales

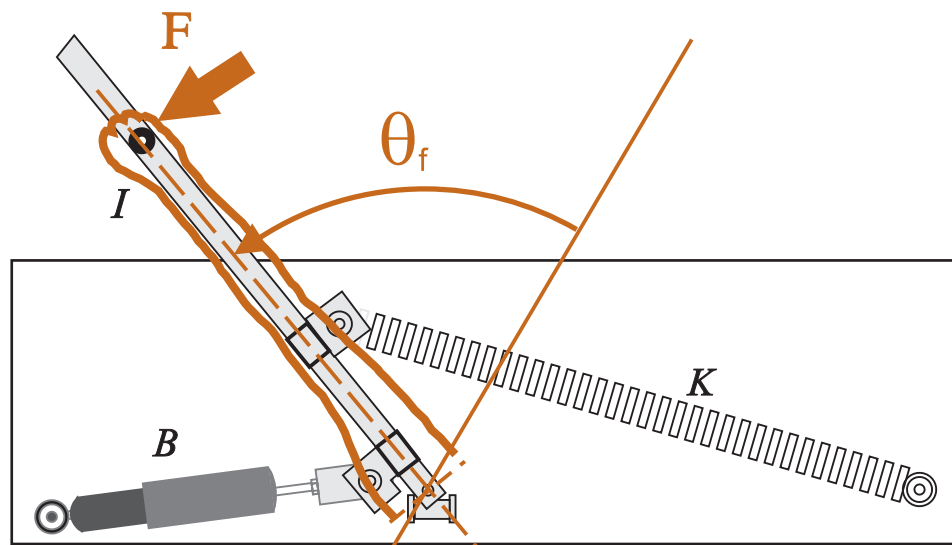
La función de la plataforma experimental es obtener la respuesta del sistema subamortiguado,  $\varphi_{k+2} = \theta$  que denota la posición angular y  $\varphi_{k+1} = \dot{\theta}$  que denota la velocidad angular, mientras se realiza el movimiento balístico voluntario por el sistema músculo-esquelético del brazo.

Las características principales que se deben cumplir en cada una de las pruebas ilustradas en la fig. 4.8, son:

1. el inicio de la prueba es a partir del reposo, desde una posición predeterminada (a);
2. la condición final del movimiento es de reposo, para un desplazamiento angular  $\theta_f$  (b);
3. el movimiento de la posición inicial a la posición final debe realizarse “lo más rápidamente posible”;
4. debe emplearse siempre el máximo esfuerzo, mientras se mueve rápidamente la articulación;



(a) Posición inicial en reposo.



(b) Posición final en reposo.

**Figura 4.8:** Posición de la palanca de la plataforma experimental al inicio y final de la prueba.

5. el sujeto de prueba debe tener la capacidad de realizar el movimiento requerido, sin limitación de la fuerza empleada, durante la duración de la prueba.

#### Sujetos

Ocho adultos diestros (cinco hombres y 3 mujeres) accedieron a participar en este estudio experimental. No reportaron problemas músculo-esqueléticos o neurológicos. La edad de los participantes estaba entre los 25 y los 43 años de edad, siendo el promedio 31 años.

#### Tarea

Los sujetos se sentaron frente a la plataforma experimental (fig. 4.7). Se colocó el brazo extendido encima de la palanca, sujetando un mango, colocado específicamente para este propósito. La aplicación del esfuerzo máximo se realiza en este punto. La articulación del brazo es seleccionada para este estudio por su localización y su capacidad muscular para la aplicación de fuerza. Las pruebas se realizaron con el brazo derecho.

Los sujetos fueron verbalmente instruidos para alcanzar la posición objetivo “lo más rápidamente posible”, desde una posición inicial en reposo a una posición final, también en reposo. La precisión de la posición inicial o final no es relevante para los fines de este estudio. La posición final se marcó físicamente en la plataforma experimental de manera que los sujetos de estudio tuvieran una referencia visual del fin de la prueba.

A los sujetos se les permitió practicar en varias ocasiones para familiarizarse con la tarea a realizar. Los sujetos realizaron un total de 4 pruebas (1 posiciones objetivo  $\times$  3 tipos de amortiguamiento y sin amortiguamiento).

#### Colección de datos

La posición de la palanca es monitoreada constantemente utilizando un sensor electromagnético 3DGuidance trakSTAR localizado en la palanca. El dato de la posición del sensor y del tiempo transcurrido es reportado a una computadora mediante un transmisor fijo y una interfaz con conexión USB.

La información colectada permite determinar la posición angular del movimiento del brazo  $\varphi_{k+2} = \theta$  con respecto del fulcro y su velocidad angular  $\varphi_{k+1} = \dot{\theta}$ . El movimiento se restringe a un grado de libertad en un plano horizontal mediante una rueda colocada en el brazo de palanca como se ilustra en la figura 4.3.

#### Resultados

Se seleccionan dos pruebas experimentales por cada uno de los diferentes valores de  $\xi$  muestreados, para  $\xi = 0$ ,  $\xi = 0.30786$ ,  $\xi = 0.52678$  y  $\xi = 0.87796$ . La respuesta de la plataforma experimental subamortiguada al movimiento balístico realizado por el sujeto de prueba se muestra en las figuras 4.9 a la 4.16, en color azul.

Estudios experimentales que analizan el mecanismo de iniciación y ejecución del movimiento balístico concluyen que existe un tiempo de premovimiento del sistema músculo-esquelético de aproximadamente 40 - 50 ms [34]. En este lapso de tiempo, la contracción muscular de un número creciente de unidades motoras se realiza de manera gradual y se genera un aumento de la fuerza en la articulación. De esta manera, el sistema músculo-esquelético acumula la fuerza muscular necesaria para poder realizar el movimiento balístico. La magnitud de la fuerza requerida dependerá de las restricciones o limitaciones del movimiento a realizar y, por consecuencia, de distintos tiempos de premovimiento.

Con base en lo anterior, la fuerza muscular necesaria para realizar el movimiento balístico, en la plataforma experimental, dependerá de la posición del resorte con respecto del fulcro. Para cada una de las pruebas se utiliza una configuración específica de la plataforma experimental, como se indica en la tabla 4.1, donde conforme se aumenta el brazo de palanca de la posición del resorte, también se incrementa la fuerza necesaria para poder realizar el movimiento. De esta manera, el tiempo de premovimiento aumenta conforme la posición del resorte se aleja del fulcro. En la tabla 4.2 se muestra el porcentaje de umbral o premovimiento con respecto del tiempo total empleado en el análisis de las pruebas. La parte sombreada de las figuras 4.9 a la 4.16 muestra el umbral o intervalo de tiempo correspondiente.

Posición del resorte (m)	Porcentaje de umbral
0.135	15%
0.225	25%
0.385	35%

**Tabla 4.2:** Porcentaje de umbral o premovimiento dependiendo de la posición del resorte en la plataforma experimental.

Para establecer este porcentaje de umbral se considera que el tiempo de premovimiento no debe exceder los 40 - 50 ms, así como también un mismo valor de umbral para cada posición del resorte, independientemente del sujeto de prueba. El modelado del sistema para el movimiento balístico de la articulación humana se considera a partir de la finalización del premovimiento o umbral de activación muscular. La duración del movimiento desde esta condición de inicio hasta que la articulación reduce su velocidad angular a cero, se considera como el tiempo mínimo. El desplazamiento angular correspondiente a este tiempo se denota por  $\theta_f$  y su velocidad angular máxima por  $\dot{\theta}_{max}$ .

#### Análisis y discusión de resultados

El análisis de las pruebas experimentales inicia con la determinación de los parámetros óptimos para tiempo mínimo del modelado sin filtrado, ecuación 3.4, mostrados en la tabla 4.3 .

Pruebas experimentales			Parámetros del modelado sin filtrado			Respuesta óptima		
Experimento	Figura	Umbral	$\xi$	$\omega_n (s^{-1})$	$\bar{I}$	$\theta_f (rad)$	$\dot{\theta}_{max} (rads^{-1})$	$T (s)$
1	4.9	35%	0.0000	0.5745	0.006562	0.3813	2.5164	0.057489
2	4.10	25%	0.0000	0.6045	0.013602	0.29639	1.7063	0.076762
3	4.11	35%	0.30786	0.5970	0.002942	0.47432	4.0973	0.042459
4	4.12	35%	0.30786	0.66695	0.004847	0.5724	4.3763	0.066831
5	4.13	25%	0.52678	0.6679	0.012142	0.41168	1.8761	0.08026
6	4.14	25%	0.52678	0.6868	0.016122	0.40275	1.7026	0.094054
7	4.15	15%	0.87796	1.2838	0.017596	0.31742	1.5939	0.09194
8	4.16	15%	0.87796	1.3098	0.01060	0.47631	2.6197	0.08917

**Tabla 4.3:** Parámetros óptimos del modelado sin filtro para el movimiento balístico de una articulación humana.

Los parámetros óptimos respectivos para el modelado sináptico de tercer orden, ecuación 3.24, se muestran en la tabla 4.4 .

Pruebas experimentales			Parámetros del modelado sináptico de tercer orden				Respuesta óptima		
Experimento	Figura	Umbral	$\xi$	$\omega_n (s^{-1})$	$\omega$	$\bar{I}$	$\theta_f (rad)$	$\dot{\theta}_{max} (rads^{-1})$	$T (s)$
1	4.9	35%	0.0000	9.7120	5.02	0.003798	0.38562	2.5523	0.0576
2	4.10	25%	0.0000	8.3120	4.35	0.007458	0.29819	1.7283	0.0766
3	4.11	35%	0.30786	11.3780	5.28	0.0011088	0.47575	4.1114	0.0421
4	4.12	35%	0.30786	10.0000	3.80	0.0013258	0.57163	4.3483	0.0661
5	4.13	25%	0.52678	5.0500	5.28	0.007558	0.41178	1.8758	0.0801
6	4.14	25%	0.52678	4.6050	4.92	0.009838	0.40386	1.7023	0.0933
7	4.15	15%	0.87796	5.0150	4.20	0.006338	0.31581	1.594	0.0911
8	4.16	15%	0.87796	5.5657	3.94	0.0032702	0.47451	2.6185	0.0893

**Tabla 4.4:** Parámetros óptimos del modelado sináptico de tercer orden para el movimiento balístico de una articulación humana.

Después de realizar el proceso de optimización del modelado sin filtrado y del modelado sináptico de tercer orden, se comparan con los resultados experimentales, para verificar e interpretar su aplicación en la tarea especificada. En las figuras 4.9 a la 4.16, la respuesta óptima para tiempo mínimo del modelado sin filtrado y del modelado sináptico de tercer orden se muestran en color verde y color rojo, respectivamente.

En todas las pruebas experimentales el porcentaje de umbral o premovimiento no excede 40 - 50 ms.

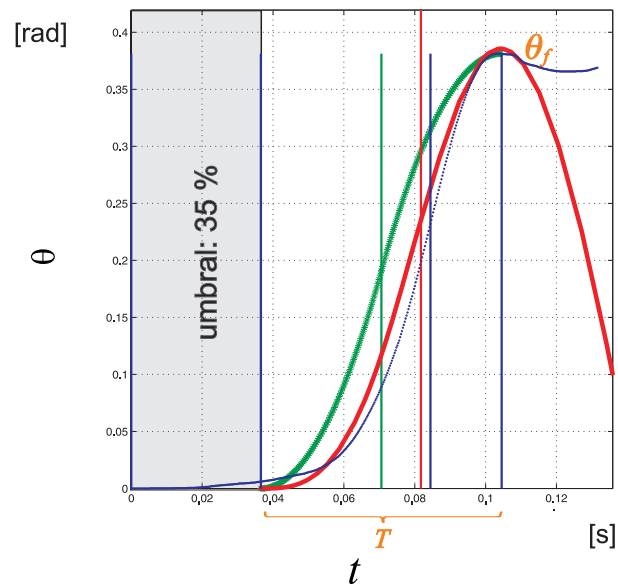
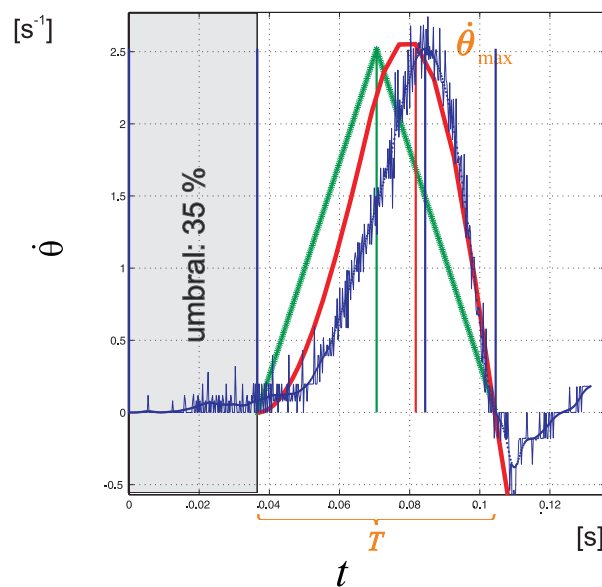
En las curvas de velocidad angular  $\dot{\theta}$  con respecto al tiempo, se aprecia que el tiempo necesario para incrementar la velocidad angular desde la posición inicial en reposo hasta una velocidad máxima  $\dot{\theta}_{max}$  es mayor que el tiempo empleado para reducirla hasta una velocidad angular igual a cero. Por lo tanto, para realizar el movimiento rápido o balístico en un tiempo mínimo, es necesario aplicar durante la mayor parte del tiempo el máximo momento en la dirección del movimiento. Esta asimetría se presenta después de la primera mitad del movimiento, produciéndose de esta manera un movimiento asimétrico.

La razón que existe entre el tiempo o instante cuando se produce la velocidad máxima y el tiempo mínimo  $T$ , se denomina razón de asimetría y se denota por  $\gamma$ . En la tabla 4.5 se indica el porcentaje de error de la razón de asimetría del modelado sin filtrado  $\epsilon_c$  y del modelado sináptico de tercer orden  $\epsilon_b$  con respecto de los resultados experimentales.

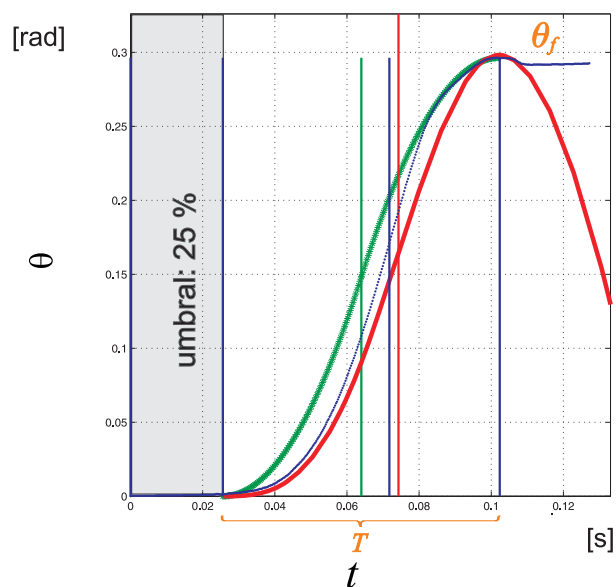
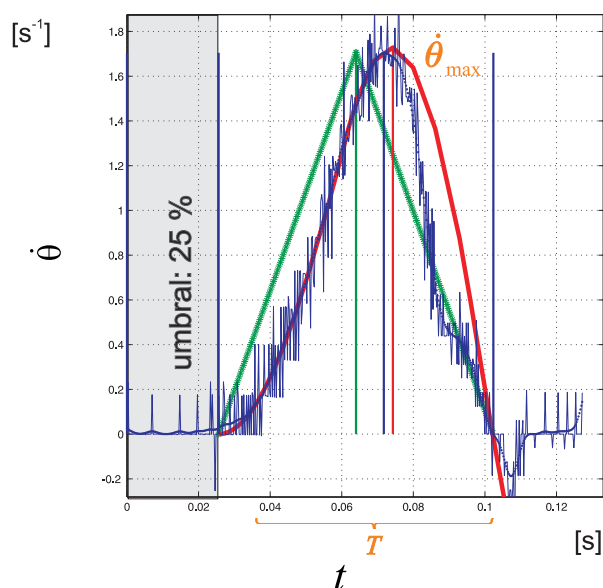
Pruebas experimentales			Modelado sináptico de tercer orden		Modelado sin filtrado	
Experimento	$\xi$	$\gamma_a$	$\gamma_b$	$\epsilon_b$	$\gamma_c$	$\epsilon_c$
1	0	0.70438	0.66701	5.31 %	0.50004	29.01 %
2	0	0.60124	0.63553	5.70 %	0.50029	16.79 %
3	0.30786	0.59411	0.62594	5.36 %	0.50333	15.28 %
4	0.30786	0.70232	0.57647	17.92 %	0.50578	27.98 %
5	0.52678	0.75065	0.56196	25.14 %	0.51300	31.66 %
6	0.52678	0.71851	0.57322	20.22 %	0.51537	28.27 %
7	0.87796	0.70254	0.59748	14.95 %	0.54429	22.53 %
8	0.87796	0.58956	0.57007	3.31 %	0.54296	7.90 %

**Tabla 4.5:** Valores de la razón de asimetría para el modelado sináptico de tercer orden  $\gamma_b$  y el modelado sin filtrado  $\gamma_c$  y sus respectivos porcentajes de error,  $\epsilon_b$  y  $\epsilon_c$ .

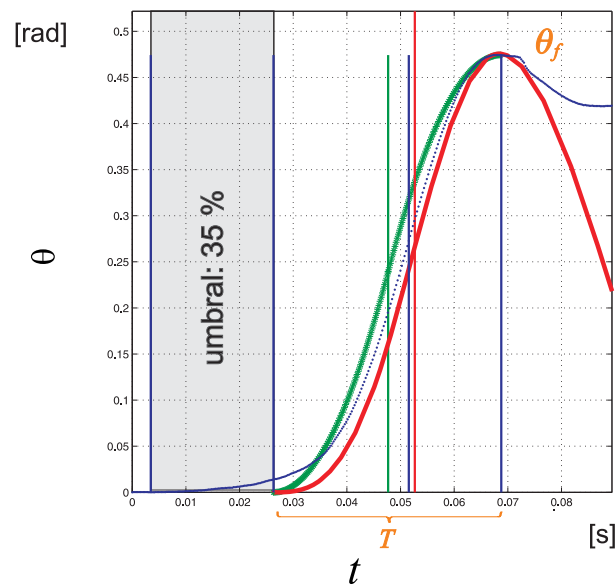
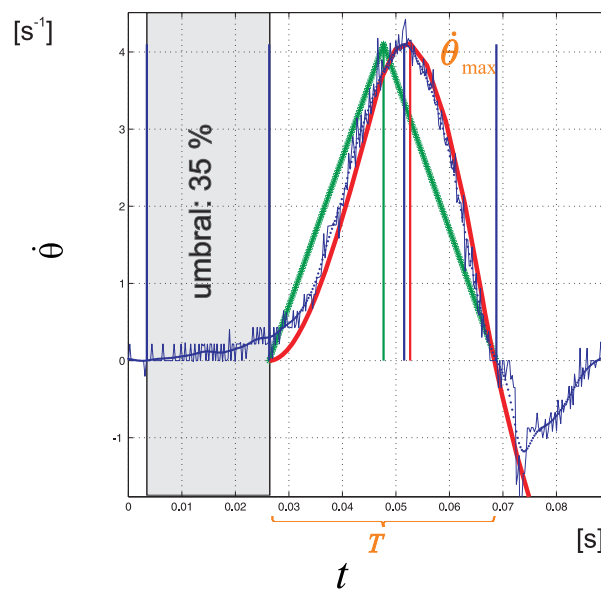


(a) Curvas de posición angular  $\theta$  con respecto del tiempo.(b) Curvas de velocidad angular  $\dot{\theta}$  con respecto del tiempo.

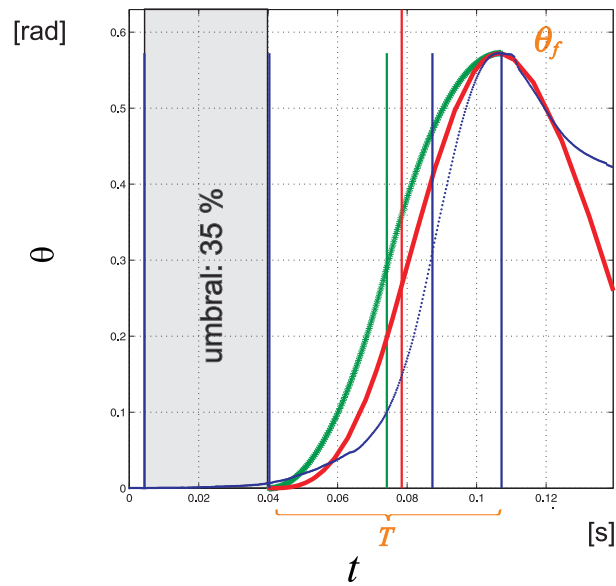
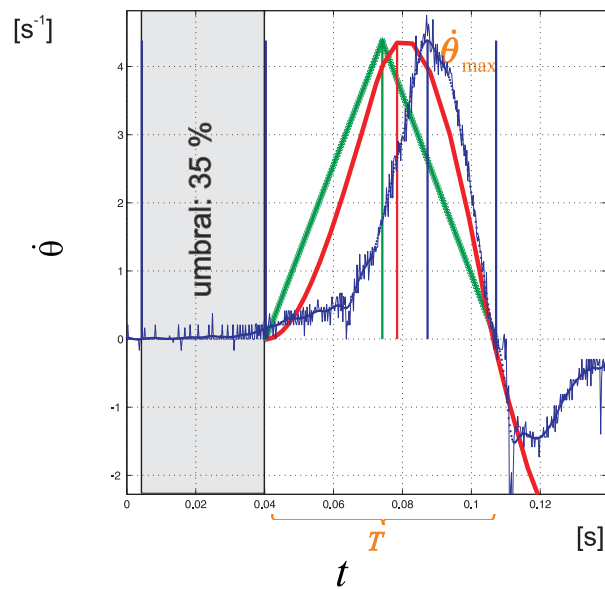
**Figura 4.9:** Prueba experimental 1: Movimiento balístico del brazo con una razón de asimetría  $\gamma_t = 0.70438$  y una posición de resorte a 0.385 m del fulcro. La configuración de la plataforma experimental es con una frecuencia natural  $\omega_n = 8.624$  y una razón de amortiguamiento  $\xi = 0$ . El movimiento balístico de las pruebas experimentales, en color azul, del modelado sin filtrado, en color verde, y del modelado sináptico de tercer orden, en color rojo. El porcentaje de error de la asimetría es 5.31% y del área bajo la curva de velocidad de 27.70%.

(a) Curvas de posición angular  $\theta$  con respecto del tiempo.(b) Curvas de velocidad angular  $\dot{\theta}$  con respecto del tiempo.

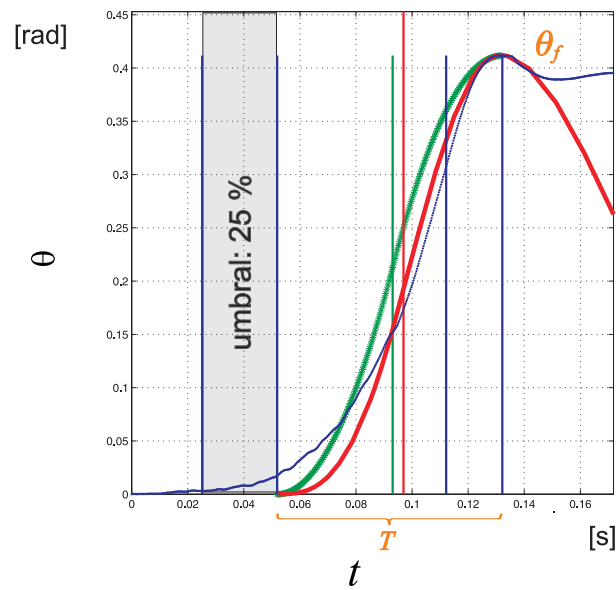
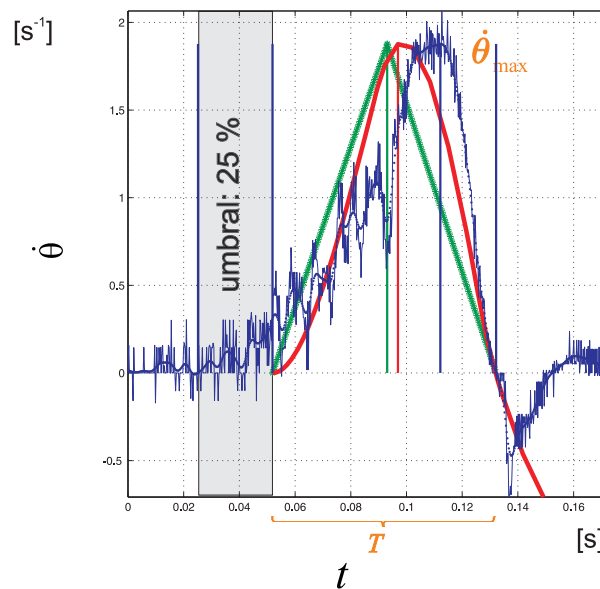
**Figura 4.10:** Prueba experimental 2: Movimiento balístico del brazo con una razón de asimetría  $\gamma_t = 0.60124$  y una posición de resorte a 0.225 m del fulcro. La configuración de la plataforma experimental es con una frecuencia natural  $\omega_n = 5.04$  y una razón de amortiguamiento  $\xi = 0$ . El movimiento balístico de las pruebas experimentales, en color azul, del modelado sin filtrado, en color verde, y del modelado sináptico de tercer orden, en color rojo. El porcentaje de error de la asimetría es 5.70% y del área bajo la curva de velocidad de 13.82%.

(a) Curvas de posición angular  $\theta$  con respecto del tiempo.(b) Curvas de velocidad angular  $\dot{\theta}$  con respecto del tiempo.

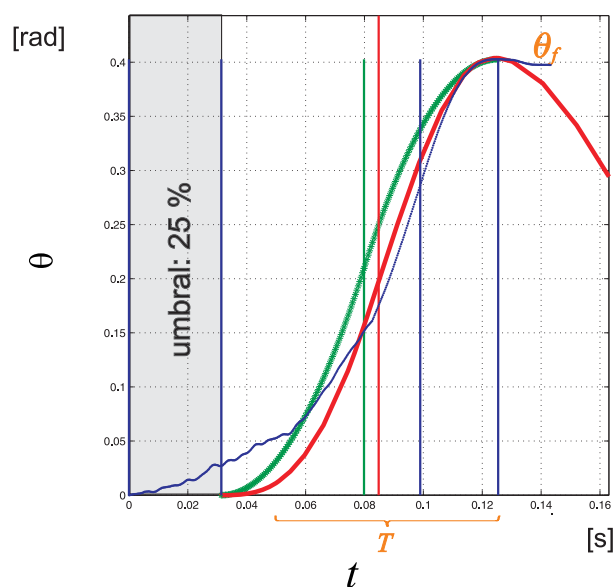
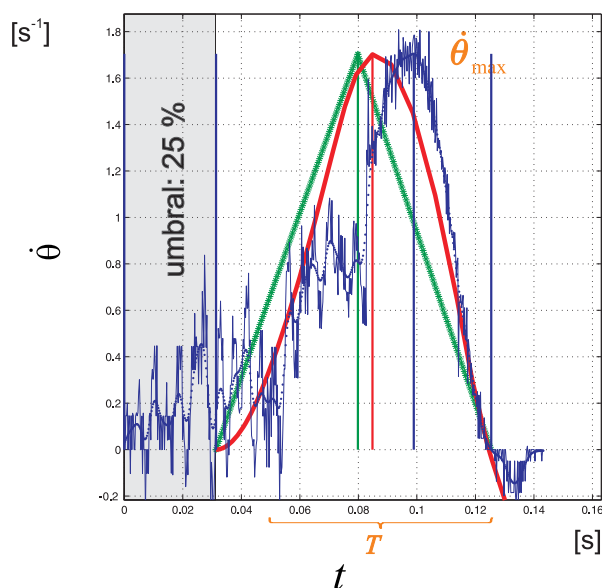
**Figura 4.11:** Prueba experimental 3: Movimiento balístico del brazo con una razón de asimetría  $\gamma_d = 0.59411$  y una posición de resorte a 0.385 m del fulcro. La configuración de la plataforma experimental es con una frecuencia natural  $\omega_n = 8.624$  y una razón de amortiguamiento  $\xi = 0.3078$ . El movimiento balístico de las pruebas experimentales, en color azul, del modelado sin filtrado, en color verde, y del modelado sináptico de tercer orden, en color rojo. El porcentaje de error de la asimetría es 5.36% y del área bajo la curva de velocidad de 4.12%.

(a) Curvas de posición angular  $\theta$  con respecto del tiempo.(b) Curvas de velocidad angular  $\dot{\theta}$  con respecto del tiempo.

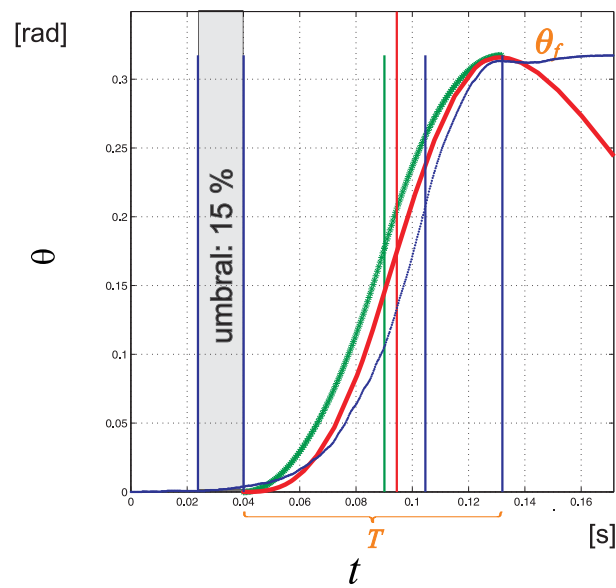
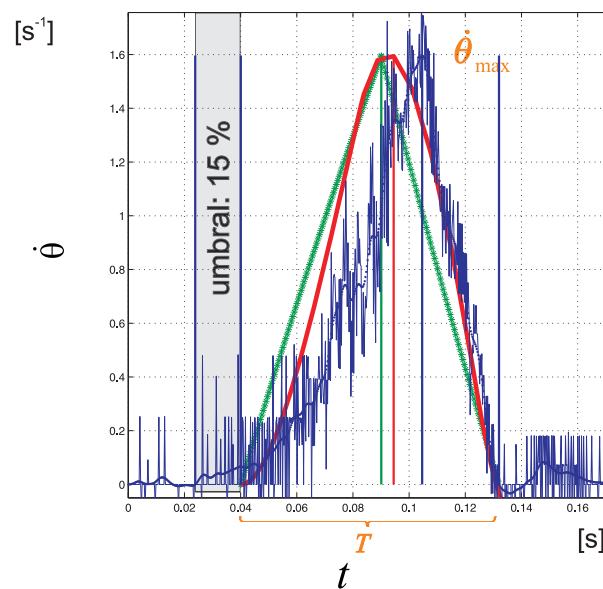
**Figura 4.12:** Prueba experimental 4: Movimiento balístico del brazo con una razón de asimetría  $\gamma_t = 0.70232$  y una posición de resorte a 0.385 m del fulcro. La configuración de la plataforma experimental es con una frecuencia natural  $\omega_n = 8.624$  y una razón de amortiguamiento  $\xi = 0.3078$ . El movimiento balístico de las pruebas experimentales, en color azul, del modelado sin filtrado, en color verde, y del modelado sináptico de tercer orden, en color rojo. El porcentaje de error de la asimetría es 17.92% y del área bajo la curva de velocidad de 31.14%.

(a) Curvas de posición angular  $\theta$  con respecto del tiempo.(b) Curvas de velocidad angular  $\dot{\theta}$  con respecto del tiempo.

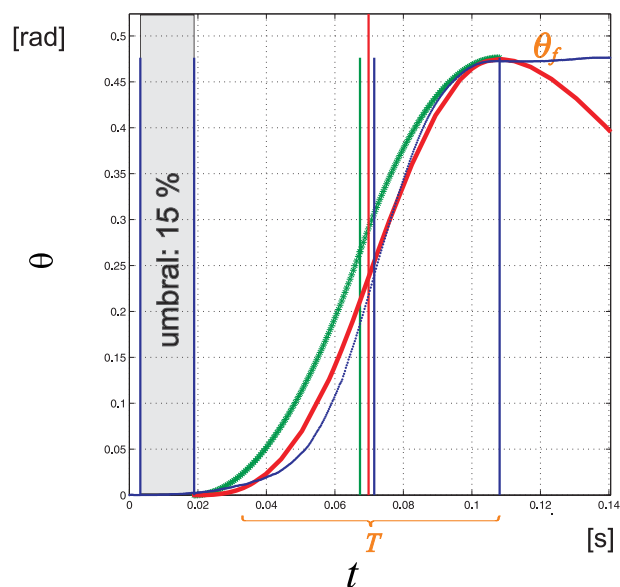
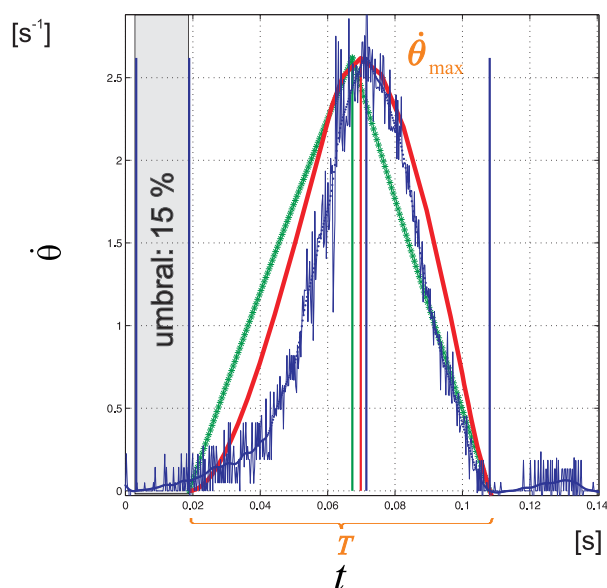
**Figura 4.13:** Prueba experimental 5: Movimiento balístico del brazo con una razón de asimetría  $\gamma_d = 0.75065$  y una posición de resorte a 0.225 m del fulcro. La configuración de la plataforma experimental es con una frecuencia natural  $\omega_n = 5.04$  y una razón de amortiguamiento  $\xi = 0.52678$ . El movimiento balístico de las pruebas experimentales, en color azul, del modelado sin filtrado, en color verde, y del modelado sináptico de tercer orden, en color rojo. El porcentaje de error de la asimetría es 25.14% y del área bajo la curva de velocidad de 2.39%.

(a) Curvas de posición angular  $\theta$  con respecto del tiempo.(b) Curvas de velocidad angular  $\dot{\theta}$  con respecto del tiempo.

**Figura 4.14:** Prueba experimental 6: Movimiento balístico del brazo con una razón de asimetría  $\gamma_t = 0.71851$  y una posición de resorte a 0.225 m del fulcro. La configuración de la plataforma experimental es con una frecuencia natural  $\omega_n = 5.04$  y una razón de amortiguamiento  $\xi = 0.52678$ . El movimiento balístico de las pruebas experimentales, en color azul, del modelado sin filtrado, en color verde, y del modelado sináptico de tercer orden, en color rojo. El porcentaje de error de la asimetría es 20.22% y del área bajo la curva de velocidad de 8.18%.

(a) Curvas de posición angular  $\theta$  con respecto del tiempo.(b) Curvas de velocidad angular  $\dot{\theta}$  con respecto del tiempo.

**Figura 4.15:** Prueba experimental 7: Movimiento balístico del brazo con una razón de asimetría  $\gamma_t = 0.70254$  y una posición de resorte a 0.135 m del fulcro. La configuración de la plataforma experimental es con una frecuencia natural  $\omega_n = 3.024$  y una razón de amortiguamiento  $\xi = 0.87796$ . El movimiento balístico de las pruebas experimentales, en color azul, del modelado sin filtrado, en color verde, y del modelado sináptico de tercer orden, en color rojo. El porcentaje de error de la asimetría es 14.95% y del área bajo la curva de velocidad de 20.05%.

(a) Curvas de posición angular  $\theta$  con respecto del tiempo.(b) Curvas de velocidad angular  $\dot{\theta}$  con respecto del tiempo.

**Figura 4.16:** Prueba experimental 8: Movimiento balístico del brazo con una razón de asimetría  $\gamma_t = 0.58956$  y una posición de resorte a 0.135 m del fulcro. La configuración de la plataforma experimental es con una frecuencia natural  $\omega_n = 3.024$  y una razón de amortiguamiento  $\xi = 0.87796$ . El movimiento balístico de las pruebas experimentales, en color azul, del modelado sin filtrado, en color verde, y del modelado sináptico de tercer orden, en color rojo. El porcentaje de error de la asimetría es 3.31% y del área bajo la curva de velocidad de 26.93%.



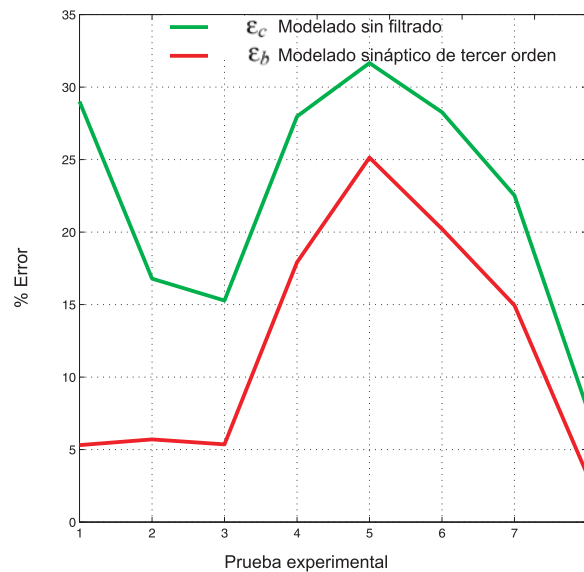
El porcentaje de error de la razón de asimetría del modelado sin filtrado y del modelado sináptico de tercer orden, en función de la razón de asimetría experimental  $\gamma_a$ , se obtiene a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\varepsilon_c = \left| \frac{\gamma_c - \gamma_a}{\gamma_a} \right| \quad (4.3)$$

y

$$\varepsilon_b = \left| \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a} \right| \quad (4.4)$$

donde  $\varepsilon_c$  y  $\gamma_c$  representan el porcentaje de error y la razón de asimetría del modelado sin filtrado,  $\varepsilon_b$  y  $\gamma_b$  denotan el porcentaje de error y la razón de asimetría del modelado sináptico de tercer orden, respectivamente.

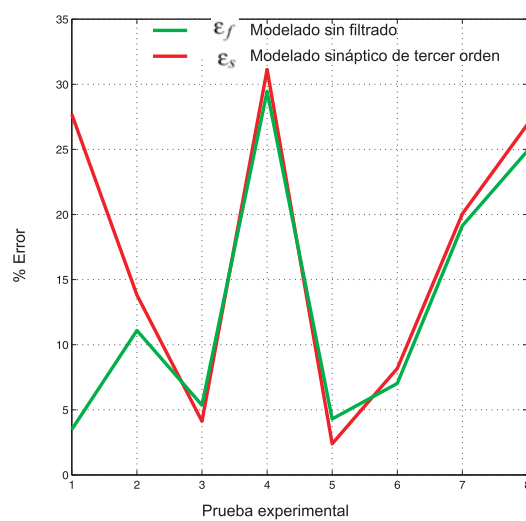


**Figura 4.17:** Porcentaje de error de la razón de asimetría para el modelado sináptico de tercer orden  $\varepsilon_b$  y el modelado sin filtrado  $\varepsilon_c$  para cada prueba experimental.

Para complementar la interpretación de las gráficas se considera el porcentaje de error del área bajo la curva de velocidad angular para el modelo sináptico de tercer orden  $\varepsilon_f$  y el modelado sin filtrado  $\varepsilon_s$ , como se indica en la tabla 4.6.

Experimento	Área bajo la curva de velocidad angular			% Error	
	Plataforma experimental $A_e$	Modelado sináptico de tercer orden $A_f$	Modelado sin filtrado $A_s$	Modelado sináptico de tercer orden $\epsilon_f$	Modelado sin filtrado $\epsilon_s$
1	0.074965	0.054199	0.72356%	27.70%	3.48%
2	0.058961	0.067109	0.065502%	13.82%	11.09%
3	0.091948	0.088159	0.087024%	4.12%	5.36%
4	0.11295	0.14812	0.14624%	31.14%	29.47%
5	0.078702	0.076821	0.075326%	2.39%	4.29%
6	0.074872	0.080993	0.080132%	8.18%	7.03%
7	0.061858	0.074258	0.0737%	20.05%	19.14%
8	0.094038	0.11936	0.11744%	26.93%	24.89%

**Tabla 4.6:** Valores del área bajo la curva de la velocidad angular para el modelado sináptico de tercer orden  $A_f$  y el modelado sin filtrado  $A_s$  y sus respectivos porcentajes de error,  $\epsilon_f$  y  $\epsilon_s$ .



**Figura 4.18:** Porcentaje de error del área bajo la curva de la velocidad angular para el modelado sináptico de tercer orden  $\epsilon_f$  y el modelado sin filtrado  $\epsilon_s$  para cada experimento.

El porcentaje de error del área bajo la curva de la velocidad angular para el modelado sin filtrado y del modelado sináptico de tercer orden, en función del área bajo la curva de la velocidad angular de las pruebas experimentales  $A_e$ , se obtiene a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\varepsilon_f = \left| \frac{A_f - A_e}{A_e} \right| \quad (4.5)$$

y

$$\varepsilon_s = \left| \frac{A_s - A_e}{A_e} \right| \quad (4.6)$$

donde  $\varepsilon_f$  denota el porcentaje de error del área bajo la curva de velocidad angular  $A_f$  del modelado sináptico de tercer orden y  $\varepsilon_s$  denota el correspondiente error para el área bajo la curva de velocidad angular  $A_s$  para el modelado sin filtrado.

Con base en los resultados obtenidos del porcentaje de error con respecto a la asimetría de la prueba experimental, mostrados en la figura 4.17, se puede afirmar que el error del modelado sin filtrado disminuye por el filtrado de la señal de entrada, como se indica en la tabla 4.5. Por consiguiente, el sistema sináptico de tercer orden puede caracterizar de manera más aproximada el movimiento balístico de la articulación humana en un ambiente viscoso, que el modelado sin filtrado. En lo que respecta al área bajo la curva, no existe una diferencia apreciable entre los errores correspondientes al caso en que no existe filtrado y el caso del sistema sináptico, como se muestra en la figura 4.18. Sin embargo, es claro que en el caso que existe el filtrado, la curva es suave, situación que refleja de manera más fiel el comportamiento al mover la articulación.



# Conclusiones

Con base en lo anteriormente descrito, este trabajo de investigación establece un punto de partida para la caracterización del movimiento balístico de una articulación humana en un ambiente viscoso mediante la optimización para tiempo mínimo de un sistema sináptico de tercer orden. La importancia de este resultado radica en que el tipo particular de movimiento estudiado, que involucra un complejo proceso del sistema neuromotor, puede modelarse usando una herramienta matemática como lo es la teoría de control óptimo. En este caso, el sistema neuromotor no conoce de modelos matemáticos ni está programado como un robot para seguir esta formulación y sin embargo, describe un comportamiento afín al descrito por esta teoría matemática.

De acuerdo con la evidencia obtenida, un sistema sináptico de mayor orden podría ser la respuesta para aproximar más la curva de velocidad y de posición al resultado experimental. Esto incluye a la asimetría que se presenta en la curva de velocidad. La limitante principal es determinar la solución de un sistema sináptico de orden mayor a tres que satisfaga las características de optimización para tiempo mínimo.

Para el problema de ejemplo se tiene la siguiente contribución, con respecto al estado presente en la literatura consultada sobre este tema:

1. Se obtiene de manera algebraica, el valor del tiempo mínimo  $T^*$  y del tiempo de conmutación  $\tau$  descritas por las ecuaciones 2.19 y 2.20, respectivamente.

Con respecto al movimiento balístico se obtuvieron los siguientes resultados

1. Se establece la respuesta óptima para tiempo mínimo del movimiento balístico de un sistema subamortiguado de segundo orden, sin filtrado, en función de las variables adimensionales  $\xi$  y  $\bar{K}\theta_f$  como se muestra en las figuras 3.3 y 3.4. Esta sección del trabajo de investigación fue aceptada en el 17o. Congreso Internacional de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Mecánica SOMIM.
2. Se muestra el movimiento asimétrico que se presenta cuando se realiza el movimiento balístico desde una posición en reposo a otra también en reposo, para diferentes valores de  $\bar{K}\theta$ , en la figura 3.5.

En referencia al trabajo de investigación, se obtuvieron los siguientes resultados en función del modelado sináptico de tercer orden

1. Establecer las bases iniciales de la relación funcional entre la señal del cerebro y una articulación para realizar el movimiento balístico desde una posición inicial en reposo hasta una posición final, también en reposo.
2. Representar de manera aproximada, el comportamiento del movimiento balístico de la articulación humana en un ambiente viscoso.
3. Verificar la asimetría presente en el movimiento rápido o balístico, en las pruebas experimentales, en el modelado sin filtrado y en el modelado sináptico de tercer orden, como se puede apreciar en las figuras 4.9 a la 4.16, inciso (b).

### Trabajo a futuro

Se considera que los siguientes aspectos pueden ser desarrollados en futuros trabajos relacionados a este tema:

Continuar con el trabajo de investigación mediante un modelado sináptico de cuarto orden para aproximar más la curva de velocidad y de posición al resultado experimental, tomando en consideración la activación muscular inicial.

Modificar, si se considera necesario, el modelo matemático propuesto tomando en cuenta la fuerza diferente que ejercen los músculos agonistas y antagonistas; los músculos esqueléticos casi siempre actúan en grupo. Sintetizar la solución mediante el procedimiento empleado en esta investigación.

Modificar el dispositivo experimental, o crear otro, para realizar pruebas en otras articulaciones. Realizar una clasificación de las articulaciones a partir de los resultados obtenidos.

Incluir dentro del análisis experimental el estudio del umbral o tiempo de premovimiento.







## Solución del modelo matemático para tiempo mínimo

### A.1. Optimización sin filtrado

Programa en MatLAB para determinar la solución del sistema de ecuaciones 3.18 y 3.19, en función del valor de las variables adimensionales  $\bar{K}\theta$  y  $\xi$ .

```

clc; clear all; tic;
% APLICACION DE LA TEORIA DE CONTROL OPTIMO PARA TIEMPO MINIMO
% CALCULO DEL TIEMPO DE CONMUTACION / TIEMPO MINIMO (ADIMENSIONAL)
% APLICABLE A UN SISTEMA SUBAMORTIGUADO DE 2do ORDEN
%  $D_2(\theta) + 2\xi\omega_n D_1(\theta) + \omega_n^2 \theta = U/I$ 
% PARA UN SISTEMA SUBAMORTIGUADO:  $0 \leq \xi < 1$ 
%% Inicializacion de variables -----
tic; format long; V=0; gg=1; inicial=0; final=0;
val1=0; val2=0; interseccion=0;
%% Variables Adimensionales -----
K_theta=0.19474; %  $0 < K_\theta \leq 1.8$ 
xi=0.8779; %  $0 \leq \xi < 1$ 
if le(K_theta,0) || gt(K_theta,1.8)
    error('0 < K_theta <= 0.8')
end
if lt(xi,0) || ge(xi,1.0)
    error('0 < xi < 1.0')
end
Q=xi/sqrt(1-xi^2); % Constante
%% Metodo de intervalos de dos curvas: Convergencia de la Iteracion ---
% Dividir en n intervalos: T

```



```

        V=exp(-Q*tau)*sin(tau);
        if (gt(tau/T,0.80) && lt(tau/T,0.90))
            V=1.5*V;
        elseif ge(tau/T,0.90)
            V=2.5*V;
        else
            V=1.10*V;
        end
    end
end
% Maximo POSICION
P=-1+(K_theta+1)*exp(Q*(T-T))*(cos(T-T)-Q*sin(T-T));
if lt((K_theta+1)*exp(Q*(T-tau))*(-cos(T-tau)...
    -Q*sin(T-tau)),(K_theta+1)*exp(Q*(T-T))...
    *(-cos(T-T)-Q*sin(T-T))) % Minimo ACELERACION
    A=(K_theta+1)*exp(Q*(T-tau))*(-cos(T-tau)...
    -Q*sin(T-tau));
else
    A=(K_theta+1)*exp(Q*(T-T))*(-cos(T-T)-Q*sin(T-T));
end

grafica_add=tau*0.30;
for j=0-grafica_add:tau/100:tau+grafica_add
%     % POSICION
    eqA=1-exp(-Q*j)*(Q*sin(j)+cos(j));
%     % VELOCIDAD
    eqC=exp(-Q*j)*sin(j);
%     % ACELERACION
    eqE=exp(-Q*j)*(cos(j)-Q*sin(j));
    axis square
    % POSICION - VELOCIDAD
    plot(eqA,eqC,'r. '); hold on; grid off;
    axis square
end
if (gt(tau/T,0.80) && lt(tau/T,0.90))
    M=200;
elseif ge(tau/T,0.90)
    M=300;
else
    M=100;
end
for k=tau-grafica_add*0.8:tau/M:T+grafica_add*1.4
%     % POSICION
    eqB=-1+(K_theta+1)*exp(Q*(T-k))*(cos(T-k)...
    -Q*sin(T-k));

```

```

%
% VELOCIDAD
eqD=(K_theta+1)*exp(Q*(T-k))*sin(T-k);
% ACELERACION
eqF=(K_theta+1)*exp(Q*(T-k))...
    *(-cos(T-k)-Q*sin(T-k));
% POSICION - VELOCIDAD
plot(eqB,eqD,'b. '); hold on; grid off
end
line([0,1.50*P],[0,0],'Color','g','LineWidth',3)

end
% Condiciones iniciales
clc; disp('SISTEMA SUBAMORTIGUADO');
disp('Posicion inicial: 0'), disp('Posicion final: theta')
disp('Velocidad inicial: 0'), disp('Velocidad final: 0')
disp(['coeficiente de amortiguamiento: ' num2str(xi)]);
disp(['K_theta: ' num2str(K_theta)]);
disp(['Tiempo minimo T: ' num2str(T_ok)]);
disp(['Tiempo de conmutación tau: ' num2str(tau_ok)]),
disp(['Razón gamma = tau / T : ' num2str(tau_ok/T_ok)]),
disp(['wnT: ' num2str(wnT_ok)]);
disp(['eq1-eq2: ' num2str(eq1-eq2)]),
disp(['eq3-eq4: ' num2str(eq3-eq4)]),
if tau==0, break, end;
end
end
vall1=eq1;val2=eq2;
end
inicial=final;
end
if (i==n) && (interseccion==0)
interseccion=1;
disp('No hay interseccion');
end
end
end

toc % tic operations toc: elapsed time
format short

```

## A.2. Optimización con un filtro

Programas en MatLAB para obtener la solución para tiempo mínimo del modelado sináptico de tercer orden. El programa está en función de los parámetros del sistema  $\xi$ ,  $\omega_n$  y  $\omega$ , que denotan, respectivamente, a la razón de amortiguamiento, la frecuencia natural del sistema y  $\omega$ , que representa el proceso de sinapsis química. La razón del segundo intervalo de tiempo  $t_b$  entre el primer intervalo de tiempo  $t_a$  es  $\gamma_1$  y la razón del tercer intervalo de tiempo  $t_c$  entre el primer intervalo de tiempo  $t_a$  es  $\gamma_2$ . Son variables adimensionales que se emplean para determinar finalmente los valores óptimos de la primera conmutación  $\tau_1$ , la segunda conmutación  $\tau_2$  y el tiempo mínimo  $T$ , aplicables a la política de control óptima  $\mathbf{phi}_0^*$ , ecuación 3.25. Los valores óptimos se obtienen a partir de la figure 3, cuando el valor graficado es aproximadamente igual a cero en el tiempo  $t = T$ .

LowPass\_primero.m

```

clc
clear all
tic
%% SISTEMA SINAPTICO DE TERCER ORDEN
% APLICACION DE LA TEORIA DE CONTROL OPTIMO PARA TIEMPO MINIMO
% CALCULO DEL TIEMPO DE CONMUTACION 1/ TIEMPO MINIMO,
% TIEMPO DE CONMUTACION 2/ TIEMPO MINIMO Y TIEMPO MINIMO
% PARA UN SISTEMA SUBAMORTIGUADO: 0 <= \xi < 1
%% Inicializacion de variables -----
T=0.0100; T_min=100; iter_i=0; iter=0;opt=1; mm=0;
if ne(iter_i,0)
    T=T_ant;
    T_min=T_min_ant+(mm+3)*0.09;
end
while T<T_min
    switch iter
        case 1
            T=T+0.0100;
        case 2
            T=T+0.0010;
        case 3
            T=T+0.0001;
        end
    %% Variables del sistema: xi, wn, w -----
    xi=0.0000; % razon de amortiguamiento: 0 <= xi < 1
    wn=60.0; % frecuencia natural
    w=0.9948; % parametro de sinapsis
    gamma1=0.9996; % gamma1=tb/ta
    gamma2=0.02546; % gamma2=tc/ta
    %% CONDICIONES INICIALES

```

```

% n=1 Filtros pasa-bajas; m=n+2 Ecuaciones de Estado
K_Theta0=[0,0,0];
% Rango de evaluacion del sistema
t0=0; tf=T*3; tspan=[t0,tf]; te=tf/3; % te tiempo optimo estimado
% te=0.09 % te tiempo optimo estimado
%% METODO DE RUNGE-KUTTA
OPTIONS = [];
[t,K_Theta]=ode23(@LowPass_segundo,tspan,K_Theta0,OPTIONS,te,gamma1,...
    gamma2,xi,wn,w);
Result=[t,K_Theta];
[C1,I1]=min(K_Theta); K_Theta_min=min(C1); [C2,I2]=max(K_Theta);...
    K_Theta_max=max(C2);
if t(I2(3))>T
    T_min=t(I2(3));
    T_min_ant=T_min;
    T_ant=T;
else
    if iter<3
        T=T_ant;
        T_min=T_min_ant;
        opt=opt+1;
    end
end
switch opt
case 1
    iter=1;
case 2
    iter=2;
case 3
    iter=3;
end
iter_i=1;
end
%% RESULTADOS para TIEMPO MINIMO
% PUNTOS DE CONMUTACION
ta=T/(1+gamma1+gamma2); tb=gamma1*ta; tc=gamma2*ta;
tau1=ta; tau2=ta+tb; tau3=ta+tb+tc;
gamma_1=tau1/tau3; gamma_2=tau2/tau3;

p=size(Result);
for l=1:p(1)
    if Result(l,1)<T
        a(l,1)=Result(l,3);
        b(l,1)=Result(l,2);
    else

```

```

    l=p(1);
end
end

KAlpha1=max(b); KAlpha2=min(b); KOmega=max(a); KTheta=C2(3);

display('PARÁMETROS DEL SISTEMA FILTRADO')
disp(['Razón de amortiguamiento: ',num2str(xi)]);
disp(['Frecuencia natural: ',num2str(wn)]);
disp(['Parámetro de filtrado: ',num2str(w)]);
display(' ')
display('CONTROL OPTIMO PARA TIEMPO MINIMO')
disp(['Tiempo de conmutación 1: ',num2str(tau1)]);
disp(['Tiempo de conmutación 2: ',num2str(tau2)]);
disp(['Tiempo mínimo: ',num2str(tau3)]);
disp(['gamma_1: ',num2str(gamma_1)]);
disp(['gamma_2: ',num2str(gamma_2)]);
disp(['Respuesta del filtrado: \phi_(k) máxima = ',num2str(KAlpha1)]);
disp(['Respuesta del filtrado: \phi_(k) mínima = ',num2str(KAlpha2)]);
disp(['Respuesta del sistema filtrado: \phi_(k+1) máxima = ',num2str(KOmega)]);
disp(['Respuesta del sistema filtrado: \phi_(k+2) = ',num2str(KTheta)]);

%% GENERACION DE GRAFICAS
%% Grafica de movimiento
figure(1)
    plot(t,K_Theta(:,3),'r','LineWidth',4)
    xlabel(' t '); ylabel('K \theta')
hold on
grid off
axis square
xlim([0 T]); ylim([0 KTheta*1.10])
% Linea horizontal
line([0,tf],[0,0],'Color','g','LineWidth',2);
% Linea vertical
line([T,T],[K_Theta_min,-3*K_Theta_min],'Color','k','LineWidth',2);

%% Grafica de movimiento
figure(2)
    plot(t,K_Theta(:,2),'b','LineWidth',4)
    xlabel(' t '); ylabel('K d(\theta)/dt')
hold on
grid off
axis square
xlim([0 T]); ylim([0 KOmega*1.10])

```

```
% Linea horizontal
line([0,tf],[0,0],'Color','g','LineWidth',2);
% Linea vertical
line([T,T],[K_Theta_min,-3*K_Theta_min],'Color','k','LineWidth',2);

%% Grafica de movimiento
figure(3)
plot(t,K_Theta(:,1),'m','LineWidth',4)
xlabel(' t '); ylabel('K d^2(\theta)/dt^2')
hold on
grid off
axis square
xlim([0 T]); ylim([KAlpha2*1.10 KAlpha1*1.10]);
% Linea horizontal
line([0,tf],[0,0],'Color','g','LineWidth',2);
% Linea vertical
line([T,T],[K_Theta_min,-3*K_Theta_min],'Color','k','LineWidth',2);

%% Grafica de estados
figure(4)
plot(K_Theta(:,3),K_Theta(:,2),'b','LineWidth',4)
xlabel(' K \theta '); ylabel('K d(\theta)/dt')
hold on
grid off
axis square
xlim([0 KTheta*1.01]); ylim([0 KOmega*1.10])
% Linea horizontal
line([0,KTheta],[0,0],'Color','g','LineWidth',2);
% Linea vertical
line([KTheta,KTheta],[-3*KTheta,6*KTheta],'Color','k','LineWidth',2);

toc
```

### LowPass\_segundo.m

```
function[K_Thetap]=LowPass_segundo(t,K_Theta,T,gamma1,gamma2,xi,wn,w)
phi0=0; % Inicializacion del escalon: phi0

%% Tiempos de conmutacion: tau1, tau2, tau3
n=1; % n Filtros pasa-bajas
```



```
m=n+2; % m Ecuaciones de Estado
ta=T/(1+gamma1+gamma2); tb=gamma1*ta; tc=gamma2*ta;

%% PUNTOS DE CONMUTACION
tau1=ta; tau2=ta+tb; tau3=ta+tb+tc;

%% HEAVISIDE FUNCTION %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if t>0
  if t>0 && t<=tau1 && m>=1, phi0=+1; end
  if t>tau1 && t<=tau2 && m>=2, phi0=-1; end
  if t>tau2 && t<=tau3 && m>=3, phi0=+1; end
end

%% JUNTA SINAPTICA
K_Thetap=[(phi0*wn^2-K_Theta(1))*w; (K_Theta(1)-2*xi*wn*K_Theta(2)...
  -K_Theta(3)*wn^2)*w; (K_Theta(2))*w];
```



# Graficación de las pruebas experimentales

## B.1. Programa para graficar los datos experimentales

Programa en MatLAB para graficar la respuesta de la plataforma experimental. Se obtienen a partir de los datos de las pruebas experimentales, las gráficas con respecto al tiempo de la posición angular y la velocidad angular.

ValidacionExperimental.m

```
clc
clear all

load GetSynchronousRecordSample.dat
data=GetSynchronousRecordSample;

p=size(data); R=400;
% Extracción de datos de las pruebas
[x,y,z,t]=datossensor(p,data);
p=size([x,y,z,t]);

%% Delimitar prueba
down=0;up=p(1);M=[];

for i=1+down:1:up
    M(i-down,1)=x(i);
    M(i-down,2)=y(i);
```

```
M(i-down,3)=z(i);
M(i-down,4)=t(i);
end
p=size(M);x=[];y=[];z=[];t=[];
for i=1:1:p(1)
    x(i,1)=M(i,1);
    y(i,1)=M(i,2);
    z(i,1)=M(i,3);
    t(i,1)=M(i,4);
end
p=size([x,y,z,t]);p=size(M);
%%
n=p(1);
deltaX=eye(n,1);deltaY=eye(n,1);deltaZ=eye(n,1);
deltaX(1,1)=0;deltaY(1,1)=0;deltaZ(1,1)=0;
for i=1:1:n-1
    deltaX(i+1)=x(i+1)-x(i);
    deltaXv(i+1)=x(i+1)-x(i);
    deltaX(i+1)=deltaX(i+1)+deltaX(i);
    deltaY(i+1)=y(i+1)-y(i);
    deltaYv(i+1)=y(i+1)-y(i);
    deltaY(i+1)=deltaY(i+1)+deltaY(i);
    deltaZ(i+1)=z(i+1)-z(i);
    deltaZv(i+1)=z(i+1)-z(i);
    deltaZ(i+1)=deltaZ(i+1)+deltaZ(i);
end

[CX,IX] = max(abs(deltaX));
[CY,IY] = max(abs(deltaY));
[CZ,IZ] = max(abs(deltaZ));
j=1;
for i=1:1:n-1
    Xa(j,1)=abs(deltaX(i));
    Ya(j,1)=abs(deltaY(i));
    Za(j,1)=abs(deltaZ(i));
    ta(j,1)=t(i);
    Xa(j+1,1)=abs(deltaX(i+1));
    Ya(j+1,1)=abs(deltaY(i+1));
    Za(j+1,1)=abs(deltaZ(i+1));
    ta(j+1,1)=t(i+1);
    j=j+1;
end

q=size(Xa);
XYZa=[Xa Ya Za];
```

```

%% Rotacion del plano
q=size(Xa); puntos=fix(q(1)/5);

XYZi=[Xa(puntos) Ya(puntos) Za(puntos);
      Xa(2*puntos) Ya(2*puntos) Za(2*puntos);
      Xa(3*puntos) Ya(3*puntos) Za(3*puntos)];

phi=atan((CZ)/sqrt(CX^2+CY^2));

Rt=[1 cos(phi) -sin(phi);
    0 sin(phi)  cos(phi),
    0 0        0    ]; % Rx
for i=1:1:q
    c=Rt*[Xa(i); Ya(i); Za(i)];
    XYZz(i,:)=c(1) c(2) c(3)];
end

%% Fulcro
q=size(XYZz); puntos=fix(q(1)/11);
% Pendiente de la secante
m1=(XYZz(q(1),2)-XYZz(1,2))/(XYZz(q(1),1)-XYZz(1,1));
% Punto intermedio
XYZb(1,1)=sqrt((XYZz(q(1),1)-XYZz(1,1))^2+(XYZz(q(1),2)-XYZz(1,2))^2)...
    *cos(atan(m1))/2;
XYZb(1,2)=sqrt((XYZz(q(1),1)-XYZz(1,1))^2+(XYZz(q(1),2)-XYZz(1,2))^2)...
    *sin(atan(m1))/2;
% Minimizar la distancia de la secante al arco
for i=1:1:q-1
    Rc(i,1)=sqrt((XYZz(i,1)-XYZb(1,1))^2+(XYZz(i,2)-XYZb(1,2))^2);
end

[CRc,IRc] = min(Rc);
XYZc(1,1)=XYZz(IRc,1);
XYZc(1,2)=XYZz(IRc,2);

% Coordenadas del fulcro (verificar localizacion)
XYZo(1,1)=XYZc(1,1)-R*sin(atan(-1/m1));
XYZo(1,2)=XYZc(1,2)-R*cos(atan(-1/m1));

% Theta
for i=1:1:q(1)
    theta(i,1)=atan((XYZz(i,2)-XYZo(1,2))/(XYZz(i,1)-XYZo(1,1)));
end

```

---

```

deltaTheta_rad=abs(theta(1,1)-theta(q(1),1)); % radianes
deltaTheta_degree=round(180*deltaTheta_rad/pi); % grados
theta=abs(theta-theta(1,1));

% Delta t
for i=1:1:n-1
    deltat(i,1)=t(i+1)-fix(t(i+1))-(t(i)-fix(t(i)));
end
deltat(i+1,1)=deltat(i);

tf(1,1)=0;
for i=1:1:n-1
    tf(i+1,1)=deltat(i,1)+deltat(i+1,1)+tf(i,1);
end

% Omega
omega(1,1)=0;
for i=1:1:n-1
    omega(i+1,1)=(theta(i+1)-theta(i))/(deltat(i+1)*10);
end

% Ajuste de la curva: eliminación del ruido magnetico
omega_XYZ_s=smooth(omega);
for i=1:500
    omega_XYZ_s=smooth(omega_XYZ_s,'loess');
end
for i=1:50
    omega_XYZ_s=smooth(omega_XYZ_s,'lowess');
end

[Comega_max,Iomega_max] =max(omega_XYZ_s);
omega_max=Comega_max;

% Tiempo minimo
rr=size(omega_XYZ_s); rromega=1;
for r=Iomega_max:rr(1)
    if omega_XYZ_s(r)<0 && rromega==1
        rromega=0;
        Tminimo=tf(r)-(tf(r)-tf(r-1))*omega_XYZ_s(r)/(omega_XYZ_s(r)...
            -omega_XYZ_s(r-1));
    end
end

% alpha
deltaomega_X(1,1)=0;deltaomega_Y(1,1)=0;deltaomega_Z(1,1)=0;

```

```

for i=1:1:n-1
    deltaomega_XYZ_s(i+1,1)=omega_XYZ_s(i+1,1)-omega_XYZ_s(i,1);
    deltaomega_XYZ_sv(i+1,1)=omega_XYZ_s(i+1,1)-omega_XYZ_s(i,1);
    deltaomega_XYZ_s(i+1,1)=deltaomega_XYZ_s(i+1,1)+deltaomega_XYZ_s(i,1);
end

%% DERIVADA DE LA GRAFICA AJUSTADA DE VELOCIDAD: sin ruido magnetico
k=0;
for i=1:n-1
    j=-1;
    if k==n
        i=n;
    else
        if (i+j+4)<n
            A=omega_XYZ_s(i+j+2,1)- omega_XYZ_s(i+j+1,1);
            B=omega_XYZ_s(i+j+3,1)- omega_XYZ_s(i+j+2,1);
            C=omega_XYZ_s(i+j+3,1)- omega_XYZ_s(i+j+2,1);
            D=omega_XYZ_s(i+j+4,1)- omega_XYZ_s(i+j+3,1);
            E=omega_XYZ_s(i+j+4,1)- omega_XYZ_s(i+j+2,1);
            F=omega_XYZ_s(i+j+4,1)- omega_XYZ_s(i+j+2,1);

            %% POSITIVA
            if ge(A,0) && ge(B,0) && ge(C,0) && ge(D,0) && ge(E,0) && ge(F,0)
                alpha(i+1,1)=abs(omega_XYZ_s(i+3,1)-omega_XYZ_s(i,1))/(deltat(i,1)*10);
            end
            if ge(A,0) && ge(B,0) && ge(C,0) && le(D,0)
                alpha(i+1,1)=abs(omega_XYZ_s(i+2,1)-omega_XYZ_s(i,1))/(deltat(i,1)*10);
            end
            %% NEGATIVA
            if le(A,0) && le(B,0) && le(C,0) && le(D,0) && le(E,0) && le(F,0)
                alpha(i+1,1)=-abs(omega_XYZ_s(i+3,1)-omega_XYZ_s(i,1))/(deltat(i,1)*10);
            end
            if le(A,0) && le(B,0) && le(C,0) && ge(D,0)
                alpha(i+1,1)=-abs(omega_XYZ_s(i+2,1)-omega_XYZ_s(i,1))/(deltat(i,1)*10);
            end
            %% MAXIMO
            if gt(A,0) && lt(B,0) && lt(D,0) && lt(E,0)
                alpha(i+1,1)=0;
            end
            %% MINIMO
            if lt(A,0) && gt(B,0) && gt(D,0) && gt(E,0)
                alpha(i+1,1)=0;
            end
        else
            if i~=n

```

```

A=omega_XYZ_s(i+j+2,1)- omega_XYZ_s(i+j+1,1)/(deltat(i,1)*10);
B=omega_XYZ_s(i+j+3,1)- omega_XYZ_s(i+j+2,1)/(deltat(i,1)*10);
C=omega_XYZ_s(i+j+3,1)- omega_XYZ_s(i+j+2,1)/(deltat(i,1)*10);
if ge(A,0)
    %% POSITIVA
    alpha(i+1,1)=abs(omega_XYZ_s(i+1,1)-omega_XYZ_s(i,1))/(deltat(i,1)*10);
    alpha(i+2,1)=abs(omega_XYZ_s(i+2,1)-omega_XYZ_s(i+1,1))/(deltat(i,1)*10);
    alpha(i+3,1)=abs(omega_XYZ_s(i+3,1)-omega_XYZ_s(i+2,1))/(deltat(i,1)*10);
else
    %% NEGATIVA
    alpha(i+1,1)=-abs(omega_XYZ_s(i+1,1)-omega_XYZ_s(i,1))/(deltat(i,1)*10);
    alpha(i+2,1)=-abs(omega_XYZ_s(i+2,1)-omega_XYZ_s(i+1,1))/(deltat(i,1)*10);
    alpha(i+3,1)=-abs(omega_XYZ_s(i+3,1)-omega_XYZ_s(i+2,1))/(deltat(i,1)*10);
end
k=n;
end
end
end
end

%% GRAFICAS DE MOVIMIENTO = f(Theta,t)
% TIEMPO - POSICION
figure(1)
plot(tf,theta,'r.','lineWidth',2)
grid on
axis square
hold on
% TIEMPO - VELOCIDAD
figure(2)
plot(tf,omega)
grid on
axis square
hold on
plot(tf,omega_XYZ_s,'b.','lineWidth',2)
% TIEMPO - ACELERACION
figure(3)
plot(tf,alpha,'m.','lineWidth',2)
grid on
axis square
hold on
% POSICION - VELOCIDAD
figure(4)
plot(theta,omega)
grid on
axis square

```



```

hold on
plot(theta,omega_XYZ_s,'b.','lineWidth',2)

%% MOMENTO APLICADO (SISTEMA RECEPTOR). Curvas sin ruido magnetico
K=154.0918;B=4.0767E03;I=0.3071;
% posicion del resorte dr
dr=0.385; % dr; (1) 0.135 (2) 0.225 (3) 0.385
% posicion del amortiguador da
da=0.00; % da_max=0.02, da=0.00 sin amortiguador
% Momento aplicado
Ma=eye(n,1);
for i=1:n
    Ma(i)=I*alpha(i)+B*da^2*omega_XYZ_s(i)+K*dr^2*theta(i);
end

% Ajuste de la curva de Momento aplicado
Ma_s=smooth(Ma);
for i=1:15
    Ma_s=smooth(Ma_s);
end

Ma_max_s=max(abs(Ma_s));

Kt=K*dr^2/Ma_max_s;
It=I/Ma_max_s;
wn=sqrt(Kt/It);
xi=0.5*(B*da^2/sqrt(K*dr^2*I));

display('PARÁMETROS DEL SISTEMA EQUIVALENTE')
disp(['Razón de amortiguamiento: ',num2str(xi)]);
disp(['Frecuencia natural: ',num2str(wn)]);
disp(['K / M_limite: ',num2str(Kt)]);
disp(['I / M_limite: ',num2str(It)]);
disp(['Posición angular final: ',num2str(max(theta))]);
disp(['Velocidad angular maxima: ',num2str(omega_max)]);
disp(['Tiempo mínimo: ',num2str(Tminimo)]);
disp(['M_limite: ',num2str(Ma_max_s)]);

```

datossensor.m

```
function [x,y,z,t]= datossensor(p,A)
```

```
j=1;
for i=1:1:p

x(j,1)=A(i,2);
y(j,1)=A(i,3);
z(j,1)=A(i,4);
t(j,1)=A(i,1)*0.1;
j=j+1;

end
```

# Bibliografía

- [1] Estrada, J., Villegas, A., Biomecánica, Universidad del Valle de México, Campus Tlalpan, Available: [http://www.tlalpan.uvmnet.edu/ooid/download/Ergonomia%20Biomec%C3%A1nica\\_04\\_ING\\_IIS\\_PIT-E.pdf](http://www.tlalpan.uvmnet.edu/ooid/download/Ergonomia%20Biomec%C3%A1nica_04_ING_IIS_PIT-E.pdf)
- [2] Sears, F., Zemansky, M., Física general, España:Aguilar s.a. de ediciones, 1981.
- [3] Parker, C., Anatomía y fisiología. 7th. Edición, México: Nueva Editorial Interamericana, 1970
- [4] Kandel, Eric R., Schwartz, James H., Jessell, Thomas M., Principles of neural science, United States of America: McGraw-Hill Companies, 2000.
- [5] Goldstein, E.B., Sensación y Percepción, 5th. Edición, México: International Thomson Editores 1999.
- [6] F.A. Mussa-Ivaldi, J. L. Patton, V. Chib, D. Sha, C. D. Mah and J. B. Dingwell, *Multijoint arm control: beyond reaching*, July 2009, Available: [http://www.smpp.northwestern.edu/smpp\\_pub/Mussa-IvaldiEtAl.2003IEEE-EMBSCancun.pdf](http://www.smpp.northwestern.edu/smpp_pub/Mussa-IvaldiEtAl.2003IEEE-EMBSCancun.pdf)
- [7] Emanuel Todorov and Michael I. Jordan, *Optimal feedback control as a theory of motor coordination*, Nature Neuroscience, Vol. 5 No. 11, pp. 1226-1235, November 2002.
- [8] Yoshioka *et al*, *Computation of the kinematics and the minimum peak joint moments of sit-to-stand movements*, Biomedical Engineering Online 2007, BioMed Central Ltd., Available: <http://www.biomedical-engineering-online.com/content/6/1/26>
- [9] Yoshioka *et al*, *Biomechanical analysis of the relation between movement time and joint moment development during a sit-to-stand task*, Biomedical Engineering Online 2009, BioMed Central Ltd., Available: <http://www.biomedical-engineering-online.com/content/8/1/27>
- [10] Neville Hogan, *An organizing principle for a class of voluntary movements*, The Journal of Neuroscience, Vol. 4 No. 11, pp. 2745-2754, November 1984.
- [11] Laman, J. M., *Movement and the mechanical properties of the intact human elbow joint*, Submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of doctor of philosophy at the Massachusetts Institute of Technology, June 1980.
- [12] Tamar Flash and Neville Hogan, *The Coordination of Arm Movements: An Experimentally Confirmed Mathematical Model*, The Journal of Neuroscience, Vol. 5 No. 7, pp. 1688-1703, July 1985.

- [13] Nagano *et al*, *Optimal coordination of maximal-effort horizontal and vertical jump motions -a computer simulation study*, Biomedical Engineering Online 2007, BioMed Central Ltd., Available: <http://www.biomedical-engineering-online.com/content/6/1/20>
- [14] Amir Karniel and Gideon F. Inbar, *A model for learning human reaching-movements*, presented at 18th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, Amsterdam, The Netherlands, November 1996.
- [15] Mark B. Shapiro and Robert V. Kenyon, *Time-optimal control of fast point-to-point movement*, 2004, Available: <http://acmc.conference.googlepages.com/2004shapiro>.
- [16] Just, A., Petreska, B., et al, *Point-to-Point Unconstrained Gestures: Modeling Wrist and Elbow trajectories*, Biological Cybernetics manuscript, Available: [http://www.robotcub.org/misc/papers/09\\_Just\\_etal.pdf](http://www.robotcub.org/misc/papers/09_Just_etal.pdf)
- [17] Umez-Eronini, E., *Dinámica de Sistemas y Control*, México: Thomson Learning, Inc., 2001.
- [18] Andreas, A., Wu-Sheng L., *Practical Optimization. Algorithms and Engineering Applications*. New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2007
- [19] Emanuel Todorov, *Optimality principles in sensorimotor control*, Nature Neuroscience, Vol. 7 No. 9, pp. 907-915, September 2004.
- [20] D. Edwards and M. Hamson, *Guide to Mathematical Modelling*, 2nd. Ed., Great Britain: PALGRAVE, 2001.
- [21] Engelbrecht, S. E., *Minimum Principles in Motor Control*, Journal of Mathematical Psychology 45, 497-542, 2001.
- [22] Donald E. Kirk, *Optimal Control Theory. An introduction*, Dover Publications Inc., 2004
- [23] Pontryagin, L. S. *et all*, *The Mathematical Theory of Optimal Process*, New York: Interscience Division of John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- [24] S. Barnett and R. G. Cameron, *Introduction to Mathematical Control Theory*, 2nd. Great Britain: OXFORD University Press, 1993.
- [25] L. C. Young, *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, New York: Chelsea Publishing Company, 1980
- [26] T. Glad and L. Ljung, *Control Theory. Multivariable and Nonlinear Methods*, New York: Taylor & Francis, 2000
- [27] A. E. Bryson Jr. And Ju-Chi Ho, *Applied Optimal Control. Optimization, Estimation and Control*, Revised Printing, New York: Taylor and Francis, 1975
- [28] Sagan, H., *Introduction to the Calculus of Variations*, New York: Dover Publications, Inc., 1969.
- [29] Ogata, K., *Dinámica de sistemas*, Prentice-Hall hispanoamericana, S.A, 1ra. Ed. 1992.
- [30] L. Leithold, *EC7 El Cálculo*, 7th. Ed., México: OXFORD University Press, 1998.

- [31] Pooock, G., Richards, C. D., Fisiología humana. La base de la medicina. 2nd Edición, Barcelona: Oxford University Press 2005.
- [32] Jazar, R. N., Theory of Applied Robotics: Kinematics, Dynamics, and Control, Part III, Pages 607-640, New York: Springer Science+Business Media, LLC. 2007.
- [33] Cristianini, E., Martinon, P., *Initialization of the Shooting Method via the Hamilton-Jacobi-Bellman Approach*, J Optim Theory Appl 146: 321–346, 2010.
- [34] B. Conrad *et al.*, *Premovement Silent Period in Fast Movement Initiation* Experimental Brain Research 51, 310-313, Springer-Verlag, 1983.
- [35] *What do we plan or control when we perform a voluntary movement?*, Available: <http://people.bu.edu/glg/mcl/EFC/EFC.pdf>
- [36] Djordje Mitrovic, Stefan Klanke, and Sethu Vijayakumar, *Adaptive Optimal Control for Redundantly Actuated Arms*, in Proceedings of the 10th International Conference on Simulation of Adaptive Behaviour (SAB '08), Osaka, Japan, 2008.
- [37] Daniel M. Wolpert and Zoubin Ghahramani, *Computational principles of movement neuroscience*, Nature Neuroscience, Vol. 3 Supplement, pp. 1212-1217, November 2000.
- [38] Emmanuel Guigon, Pierre Baraduc and Michel Desmurget, *Constant effort computation as a determinant of motor behavior*, July 2009, Available: <http://acmc.conference.googlepages.com/2003Guigon.pdf>
- [39] Stephen H. Scott, *Optimal strategies for movement: success with variability*, Nature Neuroscience, Vol. 5 No. 11, pp. 1110-1111, November 2002.
- [40] Stefan Schaal, *Arm and Hand Movement Control*, Schaal S (2002) Arm and hand movement control In Arbib MA (ed) The handbook of brain theory and neural networks, 2nd Edition. MIT Press, Cambridge, MA, pp 110-113.
- [41] Emmanuel Guigon, *Contrôle moteur et planification: 1. Les problèmes de l'organisation du mouvement, 2. Organisation anatomo-physiologique du contrôle moteur, 3. Contrôle moteur computationnel, 4. Modèles de contrôle moteur, 5. Transformations sensorimotrices, 6. Planification*, July 2009, Available: <http://e.guigon.free.fr/teaching.html>
- [42] W. Bolton, Ingeniería de Control, 2nd. Ed., México: Editorial Alfaomega, 2001.
- [43] J. N. Reddy and M. L. Rasmussen, Análisis matemático avanzado, México: Editorial LIMUSA, 1989
- [44] Hsu, H. P., Análisis de Fourier, México: Fondo Educativo Interamericano, 1973.
- [45] Spiegel, M. R., Serie Schaumn: Transformadas de Laplace, México: Editorial McGraw-Hill, 1985.
- [28] Balachandran, B. & Magrab, E. B., Vibraciones, México: CENGAGE Learning, 2008.
- [46] Haaser, N.B., LaSalle, J. R. & Sullivan, J. A., Análisis Matemático 2 Curso Intermedio, México: Editorial Trillas, 1977.
- [47] Cho, Hyungsuck, Optomechatronics, Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2006

- [48] Balasubramaniam, R., Wing, A. M., Daffertshofer, A., *Keeping with the beat: movement trajectories contribute to movement timing*, *Exp Brain Res* (2004) 159: pp. 129–134, September 2004, Available: [http://aix1.uottawa.ca/~rbalasub/ramesh\\_ebr04.pdf](http://aix1.uottawa.ca/~rbalasub/ramesh_ebr04.pdf)
- [49] Tortora, G., Anagnostakos, N., *Principios de anatomía y fisiología*, 5th edición, México: HARLA, 1989
- [50] Yamasaki *et al*, *Interaction torque contributes to planar reaching at slow speed*, *Biomedical Engineering Online* 2008, BioMed Central Ltd., Available: (<http://www.biomedical-engineering-online.com/content/7/1/27>)
- [51] Shrirao *et al*, *Neural network committees for finger joint angle estimation from surface EMG signals*, *Biomedical Engineering Online* 2009, BioMed Central Ltd., Available: <http://www.biomedical-engineering-online.com/content/8/1/2>
- [52] Prasad, S., *Human movement analysis: ballistic dynamics, and edge continuity for pose estimation*, Dissertation submitted to the Faculty of the Graduate School of the University of Maryland, College Park in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy 2007, Available: <http://drum.lib.umd.edu/bitstream/1903/7610/1/umi-umd-4880.pdf>
- [53] Feng, C., Woch, A., Plamondon, R., *A Comparative Study of Two Velocity Profile Models for Rapid Stroke Analysis*, Laboratoire Scribens, École Polytechnique de Montréal, Montréal, Québec, Canada H3C 3A7, Available: [http://nguyendangbinh.org/Proceedings/ICPR/2002/DATA/12\\_2\\_6.PDF](http://nguyendangbinh.org/Proceedings/ICPR/2002/DATA/12_2_6.PDF)
- [54] Lan, N., Crago, P., *Optimal control of antagonistic muscle stiffness during voluntary movements*, *Biological Cybernetics* 71, 123-135, Springer-Verlag, 1994, Available: <http://e.guigon.free.fr/rsc/article/LanCrago94.pdf>
- [55] Ostry, D., Cooke, J., Munhat, K., *Velocity curves of human arm and speech movements*, *Experimental Brain Research* 68:3-46, Springer-Verlag, 1987, Available: <http://e.guigon.free.fr/rsc/article/OstryEtAl87.pdf>
- [56] Atkeson, C., Hollerbach, J., *Kinematic Features of Unrestrained Vertical Arm Movements*, *The Journal of Neuroscience* Vol. 5 No. 9 pp. 2318-2330, September 1985, Available: <http://www.jneurosci.org/cgi/reprint/5/9/2318.pdf>
- [57] Stefan Schaal, *Arm and Hand Movement Control*, Schaal S (2002) Arm and hand movement control In Arbib MA (ed) *The handbook of brain theory and neural networks*, 2nd Edition. MIT Press, Cambridge, MA, pp 110-113.