



Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Facultad de Ingeniería
Centro de Investigación y Estudios de Posgrado

Análisis Teórico y experimental del desempeño de hélices coaxiales

T E S I S

Que para obtener el grado de:

Maestro en Ingeniería Mecánica con Orientación Terminal en Termofluidos

Presenta:

Ing. Adrián Silva Saldierna

Asesora:

Dra. Geydy Luz Gutiérrez Urueta

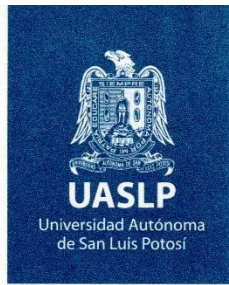
Co-Asesora

Dra. Cintia Monreal Jiménez

San Luis Potosí, S. L. P.

Febrero de 2021





6 de agosto de 2020

**ING. ADRIAN SILVA SALDIERNA
P R E S E N T E.**

En atención a su solicitud de Temario, presentada por la **Dra. Geydy Luz Gutiérrez Urueta** y la **M.I. Cintia Monreal Jiménez**, Asesor y Co-asesor de la Tesis que desarrollará Usted, con el objeto de obtener el Grado de **Maestro en Ingeniería Mecánica con Orientación Terminal en Termofluidos**, me es grato comunicarle que en la Sesión del H. Consejo Técnico Consultivo celebrada el día 6 de agosto del presente, fue aprobado el Temario propuesto:

TEMARIO:

"Análisis teórico y experimental del desempeño de hélices coaxiales"

- Introducción.
 - 1. Estado del arte: hélices coaxiales.
 - 2. Teoría de la cantidad de movimiento y del elemento del álabe.
 - 3. Instalación y procedimiento experimental para el análisis paramétrico de hélices coaxiales.
 - 4. Análisis y comparación de resultados teóricos y experimentales.
- Conclusiones.
Referencias.

"MODOS ET CUNCTARUM RERUM MENSURAS AUDEBO"

A T E N T A M E N T E

**DR. EMILIO JORGE GONZÁLEZ GALVÁN
DIRECTOR.**



www.uaslp.mx

Copia. Archivo
*etn.

Av. Manuel Nava 8
Zona Universitaria • CP 78290
San Luis Potosí, S.L.P.
tel. (444) 826 2330 al39
fax (444) 826 2336

"1945-2020: 75 años de formación de profesionales en la Facultad de Ingeniería"

Para mi familia

Agradecimientos

A mis asesoras Dra. Gedy Luz Gutiérrez Urueta y Dra. Cintia Monreal Jiménez por su ayuda, tiempo y paciencia para la realización de esta tesis.

Al Dr. Fidencio Tapia Rodríguez por su apoyo entregado tanto en conocimientos como material de trabajo.

A mis sinodales, el Dr. De Lange y el Dr. Romero por sus valiosas aportaciones.

A mi familia y amigos que me motivaron y que siempre confiaron en mí.

Resumen

El creciente interés por el empleo de sistemas de propulsión de hélice coaxial para vehículos aéreos se debe a la capacidad de proporcionar mayores beneficios en comparación al sistema de hélice sencillo. En el proceso de diseño existen cuestiones de desempeño aún no estudiadas a profundidad. Este trabajo presenta el estudio teórico y experimental de hélices coaxiales con los siguientes rangos de parámetros geométricos y de operación: $4 \text{ in} < D_{\text{inf}} < 7 \text{ in.}$; $4 \text{ in} < D_{\text{sup}} < 7 \text{ in.}$; $3.8 \text{ in} < \text{paso} < 5 \text{ in}$ por revolución; $0 \text{ rad/s} < \omega < 1256 \text{ rad/s}$. La distancia de las hélices coaxiales experimentadas tiene un valor fijo de 6.5 cm. Se obtuvieron 1450 puntos experimentales con el fin de analizar la influencia de estas variables operacionales sobre el empuje generado y posteriormente su optimización mediante la selección los parámetros más influyentes. Se describe las teorías sobre las que se sustenta el modelo y la manera como se combinan para obtener las variables respuesta. Estas se denominan teoría del elemento del álabe y cantidad de movimiento. Así mismo, se expone el modelo y se incluye ejemplos de cálculo con sus respectivas variables de entrada y salida. Se utiliza posteriormente el análisis de varianza (ANOVA, por sus siglas en inglés) para determinar el efecto que tiene la hélice inferior y superior en el empuje generado por el sistema de hélices coaxiales. Los principales resultados del ANOVA son la obtención de los tipos de hélices que aumentan o disminuyen el empuje generado. Sobre la base de estos resultados se construyen las gráficas representativas de este trabajo, ilustrando el comportamiento del empuje y potencia de pares de hélices seleccionadas contra la velocidad. Dichos resultados incluyen la comparación teórico-experimental, tanto del sistema de hélices sencillo como el coaxial, del empuje y potencia para distintos diámetros y pasos como función de la velocidad. Para el caso de sistemas coaxiales se reporta el empuje individual de las hélices y el total producido, además de la distinción cuando son de igual diámetro o diámetros distintos. Además de esto se añade el efecto de girar las hélices en ambos sentidos y en sentidos opuestos. En cuanto al modelado se trabajó con un modelo tradicional y sobre éste se adiciona consideraciones con mayor grado de complejidad. Se presenta finalmente una simulación con un conjunto de hélices como aplicación directa de las derivaciones de esta tesis y un análisis de semejanza para hélices de mayor tamaño. Los resultados son de gran interés para empresas cuya finalidad es volar artefactos capaces de transportar carga y a la vez mejorar la tecnología para llevar una persona de manera autónoma. Se busca que estos sistemas sean parte de una alternativa viable para abordar el rápido crecimiento de las actividades de aviación civil, y el impacto ambiental asociado.

Contenido

Agradecimientos.....	i
Resumen	iii
Lista de figuras	vii
Lista de tablas.....	xi
Nomenclatura	xiii
Introducción	1
Objetivo General	2
Estructura de la tesis.....	2
Capítulo 1 Estado del arte: hélices coaxiales	5
Capítulo 2 Teoría de la cantidad de movimiento y del elemento del álabe.....	13
2.1. Teoría de cantidad de movimiento para flujo axial	13
2.2. Teoría del elemento de álabe.....	16
2.3. Hélice coaxial.....	26
Capítulo 3 Instalación y procedimiento experimental para el análisis paramétrico de hélices coaxiales ...	32
3.1. Plataforma experimental.....	32
3.2. Calibración	34
3.3. Procedimiento experimental.....	35
Capítulo 4 Análisis y comparación de resultados teóricos y experimentales.....	38
4.1. Análisis estadístico	38
4.2. Sistema sencillo o mono-hélice	45
4.3. Sistema coaxial.....	49
4.3.1 Sistema coaxial con diámetros iguales	49
4.3.2 Sistema coaxial con mismo diámetro según dirección de giro.....	56
4.3.3 Sistema coaxial con diámetros distintos.....	59
4.3.1 Sistema coaxial con distinto diámetro según dirección de giro.....	67
4.3.2 Sistema de hélices sencillo vs coaxial	71

4.3.3	Coeficiente de empuje	72
4.4.	Simulación de hélices comerciales	76
4.5.	Análisis de semejanza	82
Conclusiones	87
Contribuciones	87
Trabajo a futuro	88
Referencias.	89

Lista de figuras

Figura 1.1. Avión Piper Navajo propulsado por dos hélices de tres aspas.....	5
Figura 1.2. (a) Corte transversal del aspa de una hélice. (b) Descripción del aspa de una hélice	5
Figura 1.3. Sistema coaxial. D = diámetro de aspas, h = separación entre hélices	6
Figura 1.4. (a) Avión de pasajeros Tupolev Tu-114, propulsado por cuatro motores con hélices coaxiales. (b) Hélices coaxiales en un avión P-51 Mustang modificado	6
Figura 1.5. Modelo de flujo idealizado para teoría de cantidad de movimiento de Froude y Rankine.....	7
Figura 1.6. Velocidades y fuerzas de la teoría de elemento de alabe.	8
Figura 1.7. Helicóptero diseñado por Henry Bright	9
Figura 2.1. Características de flujo del rotor en movimiento axial	14
Figura 2.2. Aerodinámica de una sección de álabe o aspa.	16
Figura 2.3. Fuerzas, velocidades y vistas de los componenetes que intervienen en la teoría de elemento de álabe.	17
Figura 2.4. Datos de entrada.....	19
Figura 2.5. Radio BR del aspa, la parte sombreada se considera que no genera sustentación.	24
Figura 2.6. Línea de corriente generada por una sección de aspa	26
Figura 2.7. Ejemplo de la interacción de la estela de la hélice superior con la inferior.	27
Figura 2.8. Diagrama de flujo del programa utilizado para calcular las ecuaciones de la teoría del elemento de álabe y de cantidad de movimiento para el sistema sencillo.	29
Figura 2.9. Diagrama de flujo del programa utilizado para calcular las ecuaciones de la teoría del elemento de álabe y de cantidad de movimiento para el sistema coaxial.	30
Figura 3.1. Diagrama esquemático del banco de pruebas	32
Figura 3.2. Equipos e instrumentos de medición utilizados en la plataforma experimental	33
Figura 3.3. Sistema de adquisición de datos.....	34
Figura 3.4. Calibración de la celda de carga utilizando un peso de 50 g.....	35
Figura 4.1. Empuje vs velocidad. Comparación de resultados teórico-experimentales para varios diámetros. Sistema de hélice sencillo.....	45
Figura 4.2. Geometría considerada en el modelado de las hélices	46
Figura 4.3. Potencia vs velocidad. Comparación de resultados teórico-experimentales para varios diámetros. Sistema de hélice sencillo.....	46
Figura 4.4. Potencia vs empuje. Comparación de resultados teórico-experimentales para varios diámetros. Sistema de hélice sencillo.....	47

Figura 4.5. Empuje contra velocidad de rotación para la totalidad de hélices simuladas	48
Figura 4.6. Comparación del modelo modificado contra resultados experimentales y modelo BEMT.....	50
Figura 4.7. Comparación de datos teóricos y experimentales para el sistema 5030-5030.	51
Figura 4.8. Empuje vs. velocidad de rotación para sistema coaxial con hélices del mismo diámetro	52
Figura 4.9.. Resultados experimentales para la potencia contra empuje producido para sistema coaxial con hélices del mismo diámetro.....	53
Figura 4.10. Comparación del modelo matemático con los experimentos para sistema coaxial con hélices del mismo diámetro.....	54
Figura 4.11. Distribución de la generación de empuje y potencia transmitida entre las hélices superior e inferior del sistema coaxial.....	55
Figura 4.12. Resultados en sentido co-rotatorio y contra rotatorio para el conjunto 5045-5045	56
Figura 4.13. Resultados en sentido co-rotatorio y contra rotatorio para el conjunto 6042-6042	57
Figura 4.14. Resultados en sentido co-rotatorio y contra rotatorio para el conjunto 7056-7056	58
Figura 4.15. Empuje vs potencia para varios conjuntos operando en sentido contra-rotatorio.....	59
Figura 4.16. Sistema coaxial con hélice superior de mayor diámetro.....	60
Figura 4.17. Comparación de empuje teórico y experimental para hélice superior e inferior del conjunto 5040-7039.....	61
Figura 4.18. Comparación de empuje teórico y experimental para hélice superior e inferior del conjunto 4050-5050.....	62
Figura 4.19. Comparación de empuje teórico y experimental para hélice superior e inferior del conjunto 6030-7056.....	63
Figura 4.20. Intercambio del paso para sistema coaxial con hélices del mismo diámetro y paso diferente.	64
Figura 4.21. Intercambio de diámetros para sistema coaxial.	64
Figura 4.22. Intercambio de diámetros para sistemas coaxiales.....	66
Figura 4.23. Resultados en sentido co-rotatorio y contra rotatorio para el conjunto 5045-6042	67
Figura 4.24. Resultados en sentido co-rotatorio y contra rotatorio para el conjunto 5045-7056	68
Figura 4.25. Resultados en sentido co-rotatorio y contra rotatorio para el conjunto 7056-6042	69
Figura 4.26. Empuje vs potencia para conjuntos coaxiales de diámetro diferente operando en sentido opuesto	70
Figura 4.27. Comparación del sistema mono-hélice y coaxial.....	71
Figura 4.28. Comparación de coeficiente de empuje teórico y experimental para hélice superior e inferior del conjunto 5040-7030.....	73

Figura 4.29. Comparación de coeficiente de empuje teórico y experimental para hélice superior e inferior del conjunto 4050-5050.....	74
Figura 4.30. Comparación de coeficiente de empuje teórico y experimental para hélice superior e inferior del conjunto 4050-5050.....	75
Figura 4.31. Empuje de hélices disponibles comercialmente a 60% de velocidad	76
Figura 4.32. Modelado de hélices comerciales.	78
Figura 4.33. Modelado de hélices comercialmente disponibles.....	82
Figura 4.34. Semejanza de caudal entre la hélice 22x7.2 y 7056.....	83
Figura 4.35. Semejanza de presión entre la hélice 22x7.2 y 7056.	83
Figura 4.36. Semejanza de potencia entre la hélice 22x7.2 y 6030.....	84

Lista de tablas

Tabla 2.1. Resultados del empuje para las diez divisiones del aspa con perfil NACA 0012.	25
Tabla 2.2. Resultados finales de los cálculos de empuje.	25
Tabla 2.3. Resultados del torque para las diez divisiones del aspa con perfil NACA 0012.	25
Tabla 2.4. Resultados finales para los cálculos del torque y potencia.	26
Tabla 3.1. Características de las hélices disponibles	35
Tabla 3.2. Valores de incertidumbre para los dispositivos de medición utilizados.	36
Tabla 4.1. Factores y niveles considerados para el ANOVA	39
Tabla 4.2. ANOVA de dos factores: Hélice superior y hélice inferior	39
Tabla 4.3. Comparaciones por parejas de Tukey para la hélice superior	41
Tabla 4.4. Comparaciones por parejas de Tukey para el empuje	42
Tabla 4.5. Comparaciones por parejas de Tukey para el empuje	44

Nomenclatura

a	velocidad del sonido (m/s)	P_0	potencia necesaria (W)
a_{lcs}	pendiente de la curva de sustentación del perfil (1/rad)	P_{tot}	potencia total (W)
A_d	área del disco rotor (m ²)	$P_{totcoax}$	potencia total coaxial
A_3	Área transversal en estela completamente formada (m ²)	Q	torque (N m)
b	número de aspas	Q_0	torque necesario (N m)
c	cuerda del aspa (m)	Q_{i75}	torque inducido en 75% aspa (N m)
c_0	longitud de cuerda al inicio del aspa (m)	Q_i	torque inducido (N m)
c_1	longitud de cuerda al final del aspa (m)	Q_{ic}	torque inducido corregido (N m)
C_d	coeficiente arrastre	R	radio de la hélice (m)
c_{dx}	coeficiente de arrastre en una sección del aspa	T	empuje (N)
C_i	coeficiente de inducción perpendicular	T_c	empuje corregido (N)
C'_i	coeficiente de inducción tangencial	T_{coax}	empuje coaxial (N)
C_l	coeficiente sustentación	U	magnitud de la velocidad de entrada del aire (m/s)
c_{lx}	coeficiente de sustentación en una sección del aspa	u_p	velocidad perpendicular al disco rotor (m/s)
c_Q	coeficiente de torque	u_T	velocidad tangencial al disco rotor (m/s)
c_T	coeficiente de empuje	\dot{V}	flujo volumétrico (m ³ /s)
c_{Tc}	coeficiente de empuje corregido	v_0	velocidad de entrada del aire (m/s)
c_x	longitud de cuerda en una sección x del aspa (m)	v_2	velocidad de flujo inducido (m/s)
D	arrastre producido por el perfil (N)	v_3	velocidad de flujo inducido en la estela completamente desarrollada
F	Factor de pérdidas en la punta	v_i	velocidad inducida (m/s)
F_x	fuerza paralela al disco rotor (N)	v_{ix}	velocidad inducida en la sección de aspa (m/s)
F_z	fuerza normal al disco rotor (N)	v_f	velocidad inducida lejana al disco rotor (m/s)
L	sustentación producida por el perfil (N)	v_r	velocidad de rotación (m/s)
\dot{m}	flujo másico (kg/s)	x	posición relativa sobre el aspa

P potencia (W)

P_i potencia inducida (W)

x_0 relación del radio sin aspa contra el radio total

X_t variación en la longitud de cuerda

Letras griegas

α ángulo de ataque aerodinámico (rad)

α_x ángulo de ataque en la posición x (rad)

α_{zll} ángulo donde el perfil no produce empuje (rad)

β paso de la hélice (m/rev)

θ ángulo de avance (rad)

θ_x ángulo de avance en la posición x (rad)

ρ densidad del aire (kg/m^3)

ϕ ángulo de entrada del flujo (rad)

ϕ_x ángulo de entrada de flujo en la posición x (rad)

σ_x solidez local

δ_0 primer coeficiente de la parábola que forma la curva de C_d contra C_l

δ_1 segundo coeficiente de la parábola que forma la curva de C_d contra C_l

δ_2 tercer coeficiente de la parábola que forma la curva de C_d contra C_l

ω Velocidad angular (rad/s)

Introducción

Una de las tendencias tecnológicas que vivimos actualmente es la movilidad urbana aérea (denominado por la NASA Urban Air Mobility) en la cual se pretende tener vehículos voladores capaces de cruzar la ciudad volando en aproximadamente 20 minutos. Empresas tan grandes como Boeing, Bell Helicopter, Airbus, y hasta Audi o Porsche se han incorporado a la carrera por producir un vehículo que cumpla con estas condiciones. Incluso la empresa Uber ha creado todo un departamento tecnológico que está desarrollando en conjunto con empresas aeronáuticas el nuevo taxi aéreo urbano masivo.

La gran mayoría de estas aeronaves utilizan hélices como medio de propulsión y en muchas ocasiones se selecciona la opción de hélices coaxiales. El interés por el uso de sistemas de propulsión de hélice coaxial para vehículos aéreos ha aumentado en años recientes debido a la capacidad de proporcionar mayores prestaciones que el sistema de hélice sencillo, sobre todo por ocupar un menor espacio. Empresas mexicanas como AKXO® promueven una nueva aeronave que utiliza esta opción, resultando en el proceso de diseño toda una serie de interrogantes tales como la optimización de relación de diámetros de las dos hélices, los pasos de cada una de las hélices, la separación entre ellas, la velocidad de giro de cada una, entre muchas otras variables.

En la bibliografía se han encontrado muchos estudios sobre las ventajas de utilizar un sistema de hélices coaxiales en diferentes configuraciones. Sin embargo, no se ha realizado investigación suficiente para determinar el efecto que tiene el diámetro y paso de las hélices sobre el sistema coaxial. La mayoría de los estudios apuntan a utilizar hélices cuyo paso se puede ajustar durante el vuelo, no siendo esto posible en vehículos donde se pretende disminuir la complejidad del sistema de propulsión. Por esta razón la empresa AKXO® busca optimizar la selección de las variables involucradas para volar aparatos que puedan llevar carga dentro de la ciudad y posteriormente mejorar la tecnología para a llevar una persona de manera autónoma. Como caso de interés se plantea el despegue de la aeronave, al ser ésta la situación crítica y de suficiente complejidad para su estudio teórico y experimental.

Los resultados son de importancia para la industria aeronáutica en general, la cual ha mostrado recientemente un nuevo interés en los vehículos impulsados por hélices en sistemas coaxiales. Se busca que estos sistemas sean una alternativa viable para abordar el rápido crecimiento de las actividades de aviación civil, y el impacto ambiental asociado. De hecho, la contribución de los aviones a las emisiones globales de nitratos, bióxido de carbono y ruido está impulsando el desarrollo de tecnologías y vehículos innovadores. Como ejemplo se encuentra también los promovidos por la empresa Boeing, que pretende el desarrollo de vehículos individuales aéreos pilotados de forma remota que serán propulsados por energía eléctrica,

capaces de realizar despegues y aterrizajes verticales, y serán utilizados para viajes cortos dentro de las ciudades.

Por lo anterior, el presente trabajo de tesis se centra en analizar la influencia del diámetro de hélices y su paso sobre el empuje generado, bajo diferentes configuraciones de operación. La finalidad es obtener la configuración que entregue el mejor empuje y a su vez analizar el sistema de hélices sencillo. Cabe destacar que los resultados de este trabajo serán usados por la empresa interesada, lo que constituye una aplicación directa y contribución a la mejora tecnológica de prototipos reales.

Objetivo General

Analizar el desempeño de hélices coaxiales de forma teórica y experimental bajo diferentes condiciones de operación para optimización de empuje generado.

Objetivos Específicos

- Revisar la literatura pertinente para actualización del estado del arte.
- Modelar el empuje generado por las hélices y potencia para evaluar el efecto del paso de la hélice y el diámetro sobre el empuje de hélices mono-axiales y co-axiales.
- Experimentar hélices seleccionadas para varias condiciones geométricas y de operación.
- Comparar resultados teóricos y experimentales.
- Obtener condiciones de operación para maximizar desempeño en términos de empuje y potencia hélices.

Estructura de la tesis

Este trabajo tiene la siguiente estructura:

- El capítulo 1 presenta investigaciones significativas y aspectos generales sobre hélices coaxiales.
- En el capítulo 2 se presenta el modelo utilizado para analizar la respuesta del empuje generado por la hélice asumiendo las condiciones descritas en el resumen.

- En el capítulo 3 se explica la instalación experimental para ensayar varias combinaciones de hélices coaxiales. Se describe además el procedimiento para llevar a cabo una variedad de experimentos con el fin de obtener datos de variables de salida, y compararlos con el modelo numérico.
- El capítulo 4 presenta los resultados obtenidos del empuje generado y potencia en función de velocidad angular, diámetro de hélices y paso. Además de los resultados de simulación para las hélices disponibles para el prototipo.

Capítulo 1 Estado del arte: hélices coaxiales

Una hélice es un aparato que convierte energía mecánica en una fuerza llamada empuje. El empuje es la fuerza de sustentación aerodinámica producida por las aspas, equivalente a la fuerza producida por un ala, consecuencia de la compleja interacción entre el movimiento frontal de la hélice, su velocidad rotacional y su geometría. La hélice es utilizada para impulsar el vehículo sobre el cual se encuentra acoplada (Ej. Fig. 1.1). Contiene una o más superficies de sustentación llamadas aspas, que giran rápidamente utilizando un motor [1].



Figura 1.1. Avión Piper Navajo propulsado por dos hélices de tres aspas [2]

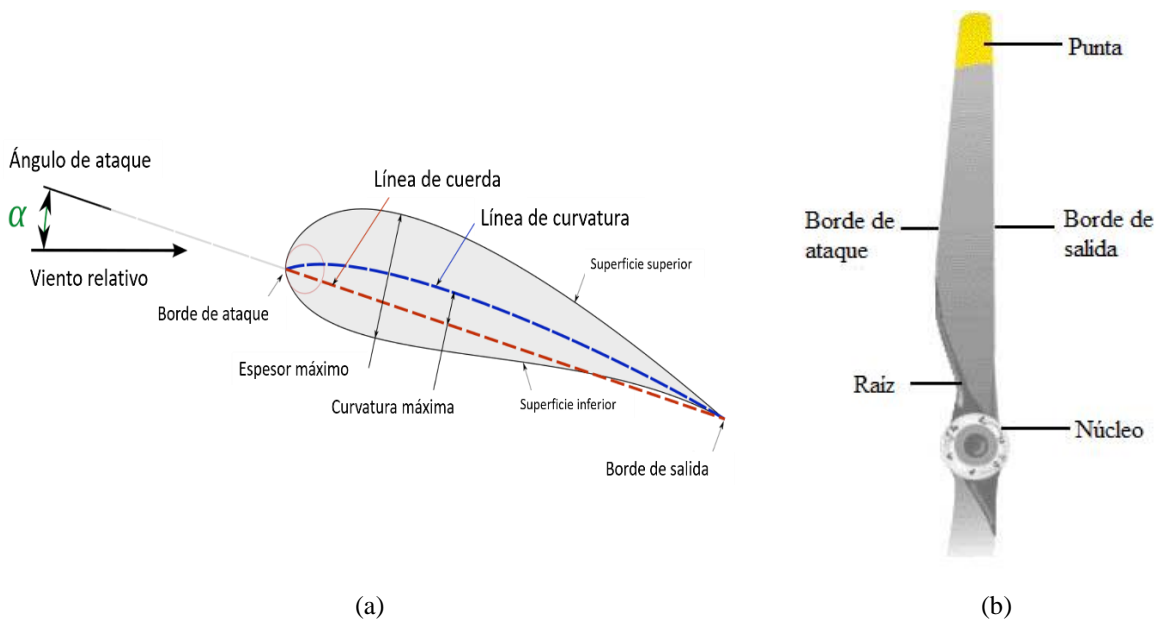


Figura 1.2. (a) Corte transversal del asa de una hélice [3]. (b) Descripción del asa de una hélice [4]

Si se hace un corte de sección transversal en el aspa de una hélice (Fig. 1.2) se observa que están compuestas por perfiles de álabe, los cuales tienen características comunes como: la cuerda (distancia entre borde de ataque y borde de salida), ángulo de aspa (ángulo formado entre la cuerda y el plano perpendicular al eje de rotación), ángulo de ataque (ángulo formado entre la cuerda y la dirección relativa del fluido) y curvatura (asimetría entre las dos superficies de un álabe) [5].

El sistema de hélices coaxiales (Fig. 1.3) consiste en un par de hélices concéntricas, una hélice superior y una hélice inferior, separadas por una distancia medida entre rotores. Estas giran en sentido opuesto con el fin de minimizar el efecto que genera el torque sobre el vehículo. La Fig. 1.4 presenta ejemplos del uso de este tipo de hélices.

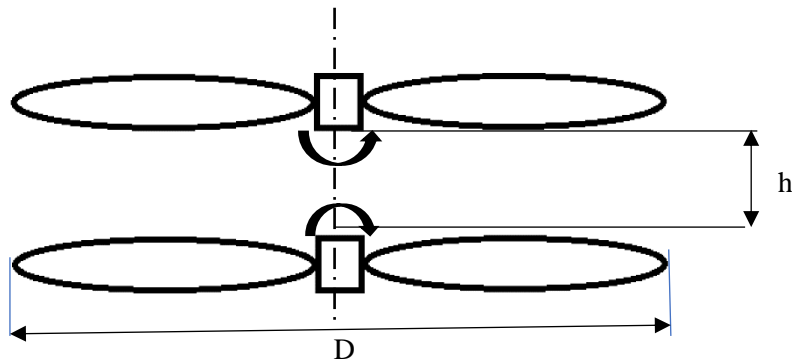


Figura 1.3. Sistema coaxial. D = diámetro de aspas, h = separación entre hélices



(a)



(b)

Figura 1.4. (a) Avión de pasajeros Tupolev Tu-114, propulsado por cuatro motores con hélices coaxiales. (b) Hélices coaxiales en un avión P-51 Mustang modificado [3]

Existen varias teorías utilizadas para calcular el empuje de las hélices: la teoría de cantidad de movimiento de Froude y Rankine, la teoría del elemento de álabe, la teoría de vórtice de hélice y el método de malla de

vórtices. El desarrollo de la teoría de hélices inició con el trabajo de Rankine [6] y Froude [7], cuyo interés se centró en propulsión marítima; sin embargo los principios fundamentales resultan los mismos para agua y aire. Estos desarrollaron las relaciones fundamentales de cantidad de movimiento que gobiernan un aparato de propulsión que trabaja en el seno de un fluido.

Tal como se muestra en la Fig. 1.5, la hélice se considera un disco infinitesimal que no ofrece resistencia al aire que la atraviesa, el disco tiene carga uniforme con flujo uniforme e imparte una aceleración uniforme al aire que la atraviesa, la hélice no genera rotación en el fluido, y se asume flujo no viscoso e incompresible.

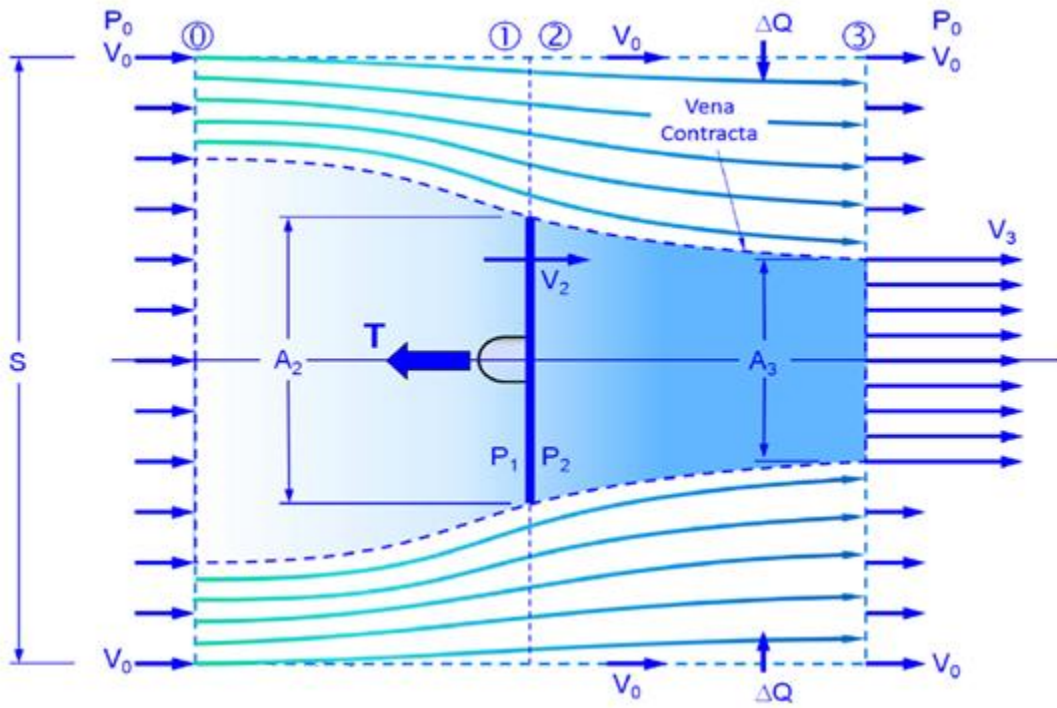


Figura 1.5. Modelo de flujo idealizado para teoría de cantidad de movimiento de Froude y Rankine [1]

Más adelante Drzewiecki [8] presentó una teoría de elemento de álabes donde las aspas fueron tratadas como superficies de sustentación individuales que se mueven de forma helicoidal a través de un medio estático. Las fuerzas, velocidades y otras consideraciones se muestran en la Figura 1.6.

De acuerdo a Wald [9] los hermanos Wright fueron los primeros en combinar la teoría de elemento de álabes y la teoría de cantidad de movimiento. También según Wald [10] la teoría moderna de hélices es análoga a la teoría de alas, ya que el asa de la hélice es considerada una superficie de sustentación sobre la cual existe una circulación asociada con la vorticidad y un sistema de estelas que es continuamente expulsada del borde de salida de la hélice.

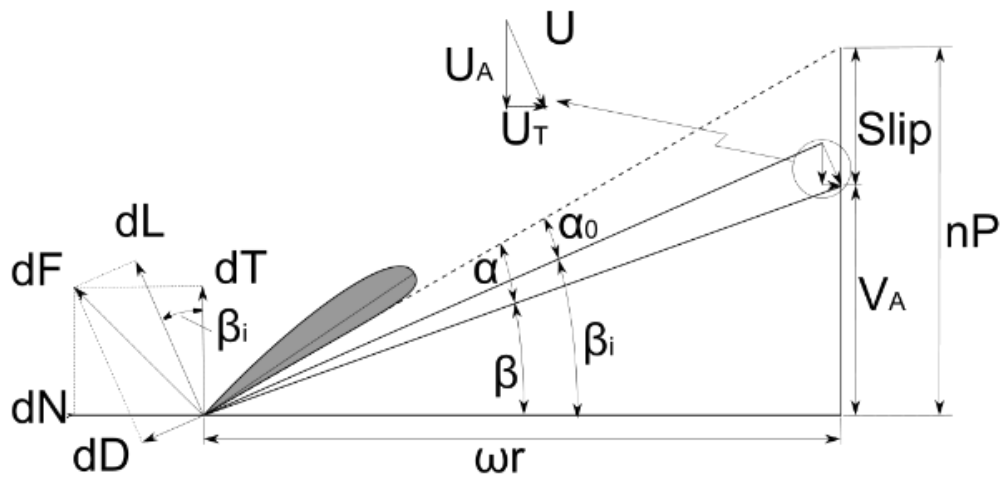


Figura 1.6. Velocidades y fuerzas de la teoría de elemento de alabe. dT = Empuje, dL = Sustentación, dF Fuerza, dN =Torque/radio, dD =arrastre, U =velocidad inducida, U_A =velocidad inducida axial, U_T =velocidad inducida tangencial, V_A =velocidad de traslación, nP =velocidad de no deslizamiento, ωr =velocidad local de giro, α =ángulo de ataque, β =ángulo de entrada del flujo [3]

En 1919 Betz [11] demostró que los vórtices desprendidos forman un sistema de estelas de forma helicoidal que se mueven sin deformarse hacia atrás de la hélice. Esto para hélices con poca carga y pérdida de energía mínima. Prandtl, continuando el trabajo de Betz [11], encontró una solución aproximada para el flujo alrededor los vórtices helicoidales, la cual es buena para relaciones de avance (relación entre la velocidad del fluido libre y la velocidad en la punta de la hélice) pequeñas.

Goldstein [12] resolvió el problema del campo potencial y la distribución de circulación para el sistema de vórtices helicoidales para relaciones de avance pequeñas. Theodorsen [13] elaboró la teoría de hélices con carga ideal distribuida, basada en el análisis de vórtices helicoidales desprendidos, junto al empuje y torque implicados debido a la forma y velocidad de desplazamiento de la hélice.

En 1859 la Oficina Británica de Patentes otorgó la primera patente para un helicóptero a Henry Bright por su diseño coaxial (Fig 1.7). Aunque después la tendencia fue hacer helicópteros con un rotor principal y un rotor de cola, fue hasta que se presentó demanda por vehículos aéreos no tripulados que existió más interés en los sistemas coaxiales. Esto, unido a la necesidad por despegue y aterrizaje vertical combinadas con otras características de vuelo.

Durante la década de 1950 el National Advisory Committee for Aeronautics (NACA por sus siglas en inglés) realizó los primeros estudios de sistemas con múltiples rotores a escala completa y pequeña escala [14–16]. Se ha realizado un número muy pequeño de experimentos con hélices coaxiales los cuales son resumidos por Coleman [17], Ramasamy [18] y Barbely et al [19] e incluyen resultados de análisis estáticos y

dinámicos hasta el año 2016, así como desarrollo de modelos numéricos validados con resultados experimentales. Ramasamy [18] concluye que las hélices coaxiales trabajan 9% mejor que las hélices individuales en solidez equivalente (relación entre el número de aspas, la longitud de la cuerda y el radio de la hélice), y consumen un 20% más de potencia. La hélice superior afecta el desempeño de la hélice inferior, haciendo que requiera mayor potencia para generar el mismo empuje de acuerdo con la distancia entre ellas. La hélice inferior interfiere con la hélice superior cuando la distancia entre hélices era menor a 0.75 veces el diámetro. El rendimiento promedio del sistema coaxial es independiente de la separación cuando la relación h/D (distancia entre núcleos/diámetro de aspas) es mayor a 0.15. El empuje generado por cada rotor varía de acuerdo con la distancia entre hélices. De acuerdo con la literatura revisada, se han utilizado diferentes configuraciones de hélices con diferente número de aspas, a varias velocidades y con diferente distancia entre hélices que va de 0.014 hasta 1.5 h/D . Todos con resultados favorables a la utilización de un sistema de hélice coaxial.

Coleman [17] publicó un resumen de las investigaciones experimentales y analíticas realizadas con hélices coaxiales. A partir de este punto los helicópteros coaxiales se convirtieron en las máquinas que conocemos hoy en día, aunque el desarrollo se ha concentrado en utilizar un rotor principal y uno de cola, o también rotores en tándem.

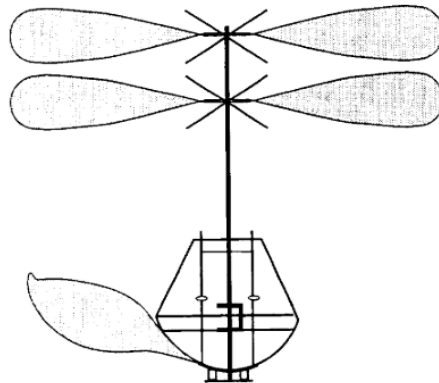


Figura 1.7. Helicóptero diseñado por Henry Bright [20]

El reporte de Coleman [17] resume que en los experimentos se ha observado que la turbulencia provocada por el rotor superior se contrae hacia adentro y se mueve hacia abajo más rápido que si el rotor superior estuviera solo. La contracción de la turbulencia del rotor superior permite que la parte exterior del rotor inferior reciba aire limpio, teniendo como consecuencia que el área de disco efectiva del sistema coaxial aumenta mientras que disminuye la carga sobre el disco y la potencia inducida. Otro beneficio de la

interacción de ambos rotores es que los vórtices formados en la punta de la hélice pueden influir en el desempeño del sistema, utilizando 5% menos potencia para obtener el mismo empuje que un sistema de hélices simple. En la parte de análisis teórico, indica que para una primera aproximación se puede modelar el sistema coaxial como si fuera un sistema simple con solidez equivalente. Se ha observado que la interferencia que provoca el rotor inferior en el superior disminuye al incrementar la separación. También se han utilizado vórtices anulares y resultados empíricos para modelar los efectos de la corriente de aire hacia arriba, causados por la turbulencia generada por la hélice superior, en la región externa de la hélice inferior. El uso de modelos de turbulencia libre provee visualización computacional del flujo de la compleja estructura de la turbulencia. Coleman referencia a Andrew [21] quien obtuvo teóricamente que el mejor desempeño de un sistema coaxial se encuentre con separaciones $h/D = 0.05$ (h = separación entre hélices y D = diámetro de las hélices) sin obtener beneficios al aumentar la separación. También encontró que existe un compromiso entre la disminución del radio del rotor superior y el aumento del desempeño de la hélice inferior, obteniendo los mejores resultados al reducir 8% el radio de la hélice superior. El número de Reynolds varía en los trabajos revisados. Sin embargo, siempre se realizaron pruebas de hélices sencillas a solidez equivalente utilizando el mismo número de Reynolds que en la prueba coaxial, todas mostraron un aumento en el desempeño del sistema coaxial. De estos resultados se concluye que es necesario realizar pruebas del sistema coaxial a diferentes números de Reynolds y que se deben realizar estudios experimentales de los campos de velocidad inducidos por el sistema coaxial para lograr avanzar en la sofisticación de los modelos teóricos disponibles.

Kim y Brown [22] realizaron cálculos utilizando el modelo de transporte de vorticidad desarrollado por Brown [23] para predecir la aerodinámica del sistema coaxial. El método está basado en una solución dependiente del tiempo de la forma de vorticidad-velocidad de las ecuaciones de Navier-Stokes en un sistema de coordenadas cartesianas alrededor del sistema. Asume que el medio es no viscoso, por lo que obtiene el arrastre generado por las aspas con un calculado por separado y considera que las aspas son rígidas.

En Rajmohan et al. [24] utilizaron el software de código abierto OpenFOAM que utiliza el método de volúmenes finitos para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes. Utilizando el método de vórtices con partículas viscosas (VPM) resuelven la forma incompresible de vorticidad-velocidad de las ecuaciones de Navier-Stokes, la forma de vorticidad-velocidad es utilizada para resolver flujos dominados por vorticidad debido a que solamente es necesario resolverla para regiones con vorticidad y no requiere esfuerzo adicional para generar el mallado. Su trabajo consiste en resolver con CFD para el dominio cercano a la superficie de la hélice y el método de partículas viscosas para el dominio lejano a la superficie del aspa. Para un sistema

coaxial se realiza la simulación CFD independiente para cada hélice y mediante el VPM se hace la simulación simultanea para la turbulencia generada.

La mayoría de los trabajos desarrollados sobre hélices, como se puede percibir en los párrafos anteriores, se concentra en sistemas de un solo rotor analizando la geometría, el ángulo y el número de aspas. La principal razón de mantener el sistema de un solo rotor es evitar el costo extra, la complejidad y el peso que conlleva un sistema de múltiples rotores. También se han encontrado estudios sobre los beneficios de utilizar un sistema de hélices coaxiales en diferentes configuraciones. Sin embargo, existe poca investigación para determinar el efecto que tiene el paso y el diámetro de hélices en el sistema coaxial.

Capítulo 2 Teoría de la cantidad de movimiento y del elemento del álabe

El modelo matemático utilizado para el análisis del sistema de hélices coaxiales considera la integración de las llamadas teoría del elemento de álabe y teoría de cantidad de movimiento.

La teoría de elemento de álabe es la base de muchos análisis aerodinámicos reportados sobre hélices [1], [5] – [27]. Permite la estimación de cargas en el aspa y a la vez relaciona el desempeño de la hélice y otras características con sus parámetros de diseño. La mayor ventaja de su uso es que se pueden variar parámetros como el avance, diámetro, velocidad en la punta de la hélice, etc.

La teoría de cantidad de movimiento permite relacionar la velocidad del aire con el empuje. Constituye un análisis global que provee resultados útiles, pero no puede ser usada por sí sola en la optimización de hélices. Se utilizará ambos enfoques, bajo diferentes condiciones de operación, para cada hélice analizada.

Como se mencionó previamente, el caso de estudio se enfocará al despegue de la aeronave. Ésta es la situación inicial crítica debido a que representa el punto donde se debe vencer la inercia del vehículo mediante la fuerza de empuje generada por las hélices. La complejidad de la frase anterior constituirá el problema a resolver. A continuación, se ofrece la descripción de ambas teorías y su integración posterior.

2.1. Teoría de cantidad de movimiento para flujo axial

Las hélices son modeladas como un disco infinitamente delgado (rotor o disco en la Fig. 2.1), que induce una velocidad constante en todo el círculo que proyecta la hélice al rotar. La velocidad de entrada al disco o del aire libre es v_o y la velocidad de salida dependerá de las condiciones de vuelo. En el punto 2 la velocidad será igual a la velocidad inducida por el disco v_i más la velocidad del aire libre.

Para el caso de una hélice, se considera que el aire tiene velocidad inicial v_o igual a cero y por lo tanto se encuentra en condición de vuelo estático (Fig. 2.1a). La velocidad de salida inmediatamente después (punto 2) será entonces v_i . Para el caso de hélices coaxiales, la inferior recibe aire a una velocidad diferente de cero y se considera que está en ascenso (Fig. 2.1b). La velocidad de salida, punto 2, será la contribución de v_o y v_i .

Se asume que el flujo es estable, no viscoso e incompresible, con una estela bien definida entre el campo de flujo generado por el disco actuador y el flujo externo. Se utiliza las leyes de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía [26].

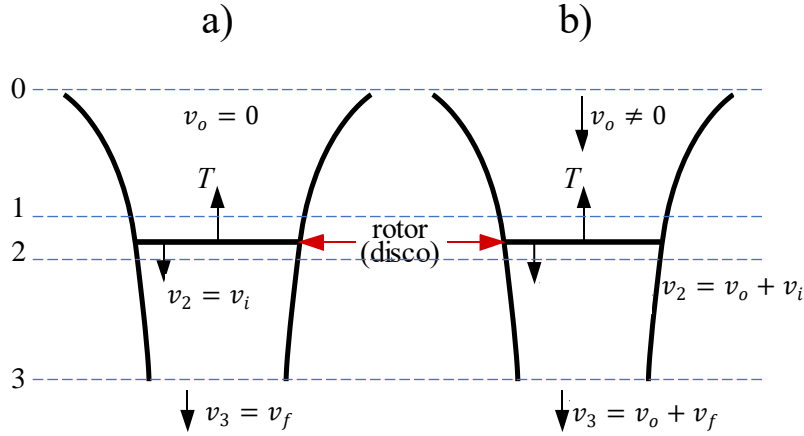


Figura 2.1. Características de flujo del rotor en movimiento axial: (a) vuelo estático; (b) ascenso. Basada en [26].

Tomando en cuenta que \dot{m} es un flujo másico constante y A_d el área del disco del rotor, el flujo másico que pasa a través del rotor es:

$$\dot{m} = \rho A_d v_2 = \rho A_d (v_o + v_i) \quad (1)$$

El cambio en la cantidad de movimiento entre la zona anterior al rotor y la zona lejana después del rotor (puntos 0 y 3 en la Fig. 2.1) equivale a la carga o empuje (Thrust en inglés) del rotor:

$$T = \dot{m}(v_3 - v_o) = \dot{m}(v_o + v_f - v_o) = \dot{m}v_f \quad (2)$$

Donde v_3 es la velocidad del flujo inducido en la estela completamente desarrollada.

El trabajo realizado por unidad de tiempo por el empuje en la hélice del aire debe ser igual al incremento de la energía cinética en la estela por unidad de tiempo.

$$\begin{aligned} T v_2 &= \frac{1}{2} \dot{m} v_3^2 - \frac{1}{2} \dot{m} v_o^2 = \frac{1}{2} \dot{m} [(v_o + v_f)^2 - v_o^2] \\ &= \frac{1}{2} \dot{m} [v_o^2 + 2v_o v_f + v_f^2 - v_o^2] = \frac{1}{2} \dot{m} (2v_o v_f + v_f^2) \end{aligned} \quad (3)$$

Sustituyendo la ecuación (2) en (3):

$$T v_2 = \frac{1}{2} \dot{m} (2v_o v_f + v_f^2)$$

$$\begin{aligned}
\dot{m}v_f(v_o + v_i) &= \frac{1}{2}\dot{m}(2v_ov_f + v_f^2) \\
v_f(v_o + v_i) &= \frac{1}{2}(2v_ov_f + v_f^2) \\
v_f(v_o + v_i) &= \left(v_o + \frac{v_f}{2}\right)v_f \\
(v_o + v_i) &= \left(v_o + \frac{v_f}{2}\right) \rightarrow \frac{v_f}{2} = v_i \\
v_f &= 2v_i \tag{4}
\end{aligned}$$

El análisis se enfoca en la situación donde se debe vencer la inercia del vehículo mediante la fuerza de empuje generada por las hélices. Este es un momento crítico para el vuelo y constituye la condición de vuelo estático. Por lo tanto, para $v_o=0$, dado que el flujo másico y la densidad son constantes, se obtendrá el área de la sección transversal del flujo lejos del rotor (punto 3):

$$\begin{aligned}
\rho v_2 A_d &= \rho v_3 A_3 \\
\rho v_i A_d &= \rho 2v_i A_3 \\
A_3 &= \frac{A_d}{2} \tag{5}
\end{aligned}$$

La teoría de cantidad de movimiento relaciona el empuje del rotor y la velocidad inducida combinando las Eqs. (2) y (4):

$$T = \dot{m}v_f = \rho A_d v_i 2v_i = 2\rho A_d v_i^2 \tag{6}$$

Se obtiene entonces la velocidad inducida v_i por el rotor en vuelo estático, la cual dependerá del empuje, T:

$$v_i = \sqrt{\frac{T}{2\rho A_d}} \tag{7}$$

Por lo tanto, la potencia inducida será:

$$P = T v_i = T \sqrt{\frac{T}{2\rho A_d}} \tag{8}$$

Consecuentemente, la teoría de cantidad de movimiento otorga la potencia necesaria por unidad de empuje para un rotor en vuelo estático (Eq. 9).

$$\frac{P}{T} = v_i = \sqrt{\frac{T}{2\rho A_d}} \tag{9}$$

2.2. Teoría del elemento de álabe

Esta teoría calcula las fuerzas en el aspa debido a su movimiento a través del aire y por consiguiente las fuerzas y desempeño de la hélice completa. Se asume que en cada sección el aspa actúa como un álabe bidimensional para producir fuerzas aerodinámicas, con la influencia de la estela y el resto de la hélice contenido en un ángulo de ataque inducido en la sección del álabe.

La solución requiere un estimado de la velocidad inducida por la estela en el disco rotor. En este trabajo, dicha velocidad es provista por la teoría de cantidad de movimiento (sección 2.1), método muchas veces respaldado en la literatura [12,29–31,42].

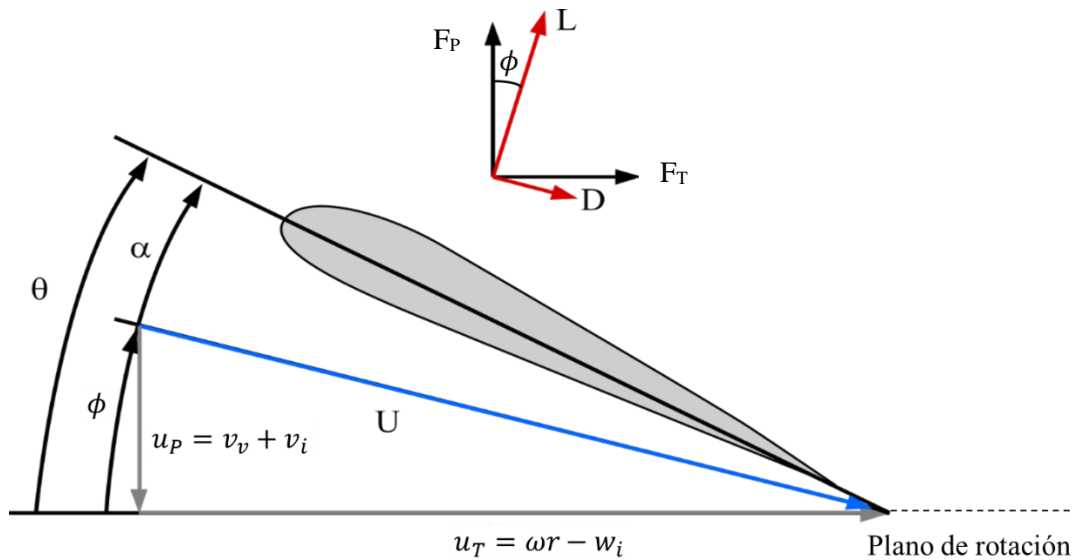


Figura 2.2. Aerodinámica de una sección de álabe o aspa. Basada en [43]

La Fig. 2.2 define la geometría, velocidades y fuerzas en una sección del aspa. Esta tiene un ángulo de avance θ medido del plano de rotación al plano creado por la cuerda de la sección. La velocidad del aire U que llega al aspa tiene componentes u_T y u_p que son tangentes y perpendiculares al plano del disco, respectivamente [43]. La Fig. 2.3 presenta varias vistas que ayudan a visualizar dichas componentes.

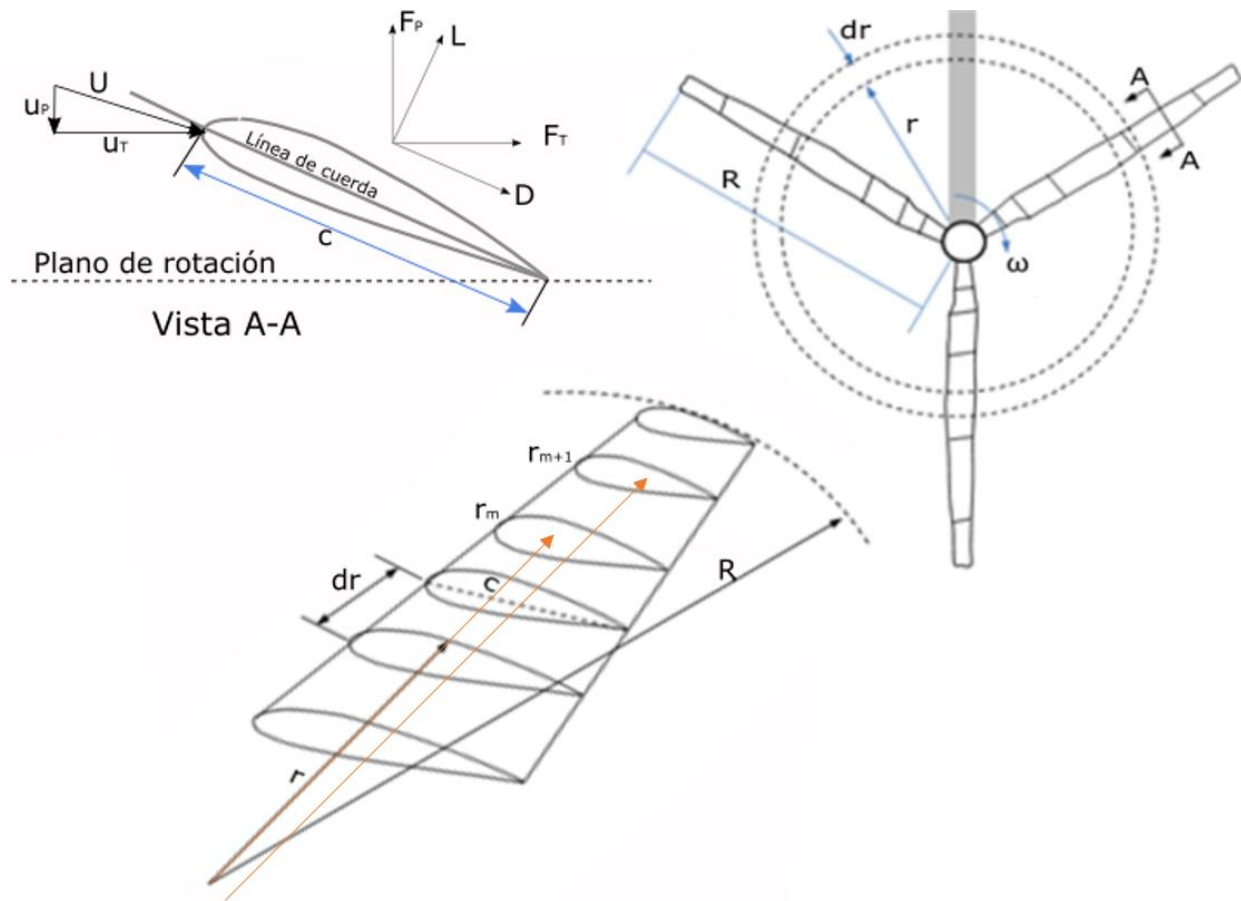


Figura 2.3. Fuerzas, velocidades y vistas de los componentes que intervienen en la teoría de elemento de álabe. Basado en [44].

Donde C_i' es el coeficiente de inducción para obtener la componente tangencial de la velocidad de la estela que se obtiene a partir de la relación entre las fuerzas de arrastre que actúan sobre el aspa y un factor por pérdidas en la punta. Para conocer ambos coeficientes primero es necesario conocer los parámetros nombrados a continuación. El ángulo de ataque aerodinámico del aspa es $\alpha = \theta - \phi$. El flujo de aire en la sección del aspa produce fuerzas de sustentación y arrastre, L y D (Figs. 2.2 y 2.3), que son normal y paralela a la resultante de la velocidad, respectivamente. Las fuerzas, en términos de los coeficientes de arrastre D y sustentación L , por unidad de longitud, se expresan en las Eqs. (12) y (13).

$$L = \frac{1}{2} \rho U^2 c C_l \quad (10)$$

$$D = \frac{1}{2} \rho U^2 c C_d \quad (11)$$

Donde ρ es la densidad del aire y c es la cuerda del aspa. En general los coeficientes C_l y C_d son funciones complicadas del ángulo de ataque y otros parámetros.

El coeficiente de sustentación del elemento del álabe se puede aproximar de la siguiente forma:

$$C_l = a_{lcs}\alpha = a_{lcs}(\theta - \phi) \quad (12)$$

Donde a_{lcs} es la pendiente de la curva de sustentación, obtenida de las referencias [45] [46], la cual es una medida de cuán rápido el aspa genera fuerza de sustentación con cambios en el ángulo de ataque, para ángulos menores a donde el perfil de álabe sufre de separación de flujo. Mientras que el coeficiente de arrastre se obtiene con los coeficientes δ de la parábola que genera la curva de la gráfica de C_l contra C_d [47].

$$C_d = \delta_0 + \delta_1 C_l + \delta_2 C_l^2 \quad (13)$$

Las fuerzas que actúan sobre el aspa analizada son F_T y F_P por lo cual se aplica la siguiente matriz de rotación a las ecuaciones (12) y (13):

$$\begin{bmatrix} F_T \\ F_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ L \end{bmatrix} \quad (14)$$

Donde se obtiene

$$F_T = D \cos(\phi) - L \text{sen}(\phi) \quad (15)$$

$$F_P = D \text{sen}(\phi) + L \cos(\phi)$$

Usando las Eqs. (12) y (13), los diferenciales de empuje (T), torque (Q) y potencia (P) del aspa de la hélice son obtenidas mediante las Eqs. (18-20).

$$dT = bF_P dr = \frac{1}{2}b\rho U^2 (C_l \cos(\phi) + C_d \text{sen}(\phi))c_x dr \quad (16)$$

$$dQ = bF_T r dr = \frac{1}{2}b\rho U^2 (C_d \cos(\phi_x) - C_l \text{sen}(\phi))c_x r dr \quad (17)$$

$$dP = \omega dQ \quad (18)$$

Donde b es el número aspas y c_x (Eq. 21) la longitud de la cuerda en la sección. El término c_x es función de c_1 y c_0 (cuerda en la punta y en la base del aspa) y la posición donde inicia el cambio de la cuerda en la hélice, X_t , para cuando la cuerda varía linealmente su longitud. Se pueden utilizar otras ecuaciones para

modelar el cambio de la longitud de la cuerda. La variable $x=r/R$ es la posición relativa de la sección sobre el aspa.

$$c_x = \begin{cases} c_0, & x \leq X_t \\ \frac{c_1 - c_0}{1 - X_t}(x - 1) + c_1, & x > X_t \end{cases} \quad (19)$$

Consideraciones del modelo

- Flujo estable, no viscoso e incompresible
- El aparato se mueve perpendicularmente al plano de giro de las hélices
- El movimiento del perfil se considera bidimensional y estacionario
- Las fuerzas aerodinámicas se obtienen de las curvas del perfil ([45] [46]) considerado como bidimensional

Para el proceso de cómputo se utilizó de forma preliminar una hoja de cálculo, dividida en 3 secciones: la entrada de datos (geometría y condiciones de operación de la hélice), cálculo de empuje y de potencia. El modelo fue posteriormente implementado en Matlab; no obstante, con fines de visualización de variables de entrada se muestra como ejemplo la Fig. 2.4. En la entrada de datos y condiciones de operación es necesario establecer, para cada tipo de perfil aerodinámico utilizado:

- Número de aspas de la hélice, b .
- Radio, R
- Longitud de la cuerda al inicio de la hélice, c_0 .
- Pendiente de la curva de sustentación, a_{lcs} .
- Velocidad de giro de la hélice, ω .
- Posición donde inicia la variación en la longitud de la cuerda, X_t .
- Densidad del aire, ρ .
- Velocidad local del sonido, a .
- Paso de la hélice, β .
- Ángulo al cual el perfil produce cero sustentación, α_{zll} .
- Longitud de la cuerda en la punta, c_1 .
- Relación del radio sin aspa contra el radio total, x_0 .

Datos de entrada		
DATA		UNITS
Airfoil:	NACA 0012	
b=	3	N/A
R=	0.0635	meters
c0=	0.00762	meters
a(lift curve slope)=	5.73	per radian
Vr	31924	rpm
w(angular speed)=	3343.073	rad/s
Xt	1	taper init
density=	1.225	kg/m^3
a(speed of sound)=	343	m/s
pitch	0.1397	meters
alfa zll =	0	degrees
Thrust req'd	20	Newtons
Power Available=	1.5	HP
c1=	0.004763	meters
x0(cutout)=	0.1	N/A
Vv=	0	m/s
Vv=	0	km/h
Vv=	0	knots
delta 0=	0.0098	
delta 1=	0.0115	
delta 2=	0.014	

Figura 2.4. Datos de entrada

- Velocidad de entrada del aire, v_0 .
- Coeficientes δ de la parábola que forma la curva de C_{dx} contra C_{lx} .

Estableciendo x como la posición sobre el aspa, las variables respuesta son las siguientes:

- Ángulo de avance de la sección de aspa θ_x (Eq. 25)
- Velocidad inducida por la sección de aspa v_{ix}
- Ángulo de entrada del aire a la sección de aspa ϕ_x
- Ángulo de ataque de la sección de aspa α_x
- Coeficiente de sustentación de la sección de aspa C_{lx}
- Empuje producido por la sección de aspa dT_x
- Empuje producido por la hélice T_x
- Coeficiente de empuje c_T
- Coeficiente de arrastre de la sección de aspa C_{dx}
- Torque necesario para vencer la inercia de la hélice, por la sección de aspa dQ_{0x}
- Torque necesario total para vencer la inercia de la hélice Q_0
- Torque inducido, transferido de la hélice al aire, por la sección de aspa dQ_{ix}
- Torque inducido total, transferido de la hélice al aire, por la hélice Q_i
- Coeficiente de torque c_Q
- Potencia inducida por la sección de aspa P_{ix}
- Potencia necesaria por la sección de aspa P_{0x}
- Potencia inducida P_i
- Potencia necesaria P_0
- Potencia total P_{tot}

Para obtener las variables respuesta a partir de los datos de entrada (Fig. 2.4), debe ejecutarse el procedimiento descrito en las Eqs. (22)-(46) con base a las teorías anteriormente descritas. Se añaden los aportes de Stahlhut [48] y Moriarty [49]:

1. La inclusión de velocidades en el plano de rotación o componentes de la velocidad de remolino (swirl velocity en inglés)
2. Modificación de la función de pérdidas de Prandtl en la punta para ángulo grande.

La denominada BEMT (Blade Element Momentum Theory) sin la consideración de ángulo pequeño ya ha sido utilizada ya ha sido utilizada para el modelado de hélices y generadores eólicos, tomando ciertas consideraciones para simplificar la solución numérica. El método presentado por Stahlhut [48] y Moriarty [49] realizan un enfoque más amplio, incluyendo validación con trabajos previos.

Las velocidades que actúan sobre el álabe que representa una sección de aspa son u_t y w_i (Fig 2.2). La velocidad dentro del plano de rotación, u_t , es la diferencia entre la velocidad de rotación tangencial de la sección de aspa, ωr , y la velocidad de remolino inducida (induced swirl velocity), w_i . Todos los componentes de velocidad siendo definidos con relación al borde de ataque del álabe.

La velocidad inducida se obtendrá de la combinación de la teoría de cantidad de movimiento con la del elemento de álabe. Usando las Eqs. (2) y (4) el empuje generado por una sección anular del disco rotor es:

$$dT_x = (2\pi r dr \rho(v_0 + v_{ix})) 2v_{ix} = 4\pi\rho(v_0 + v_{ix})v_{ix}r dr \quad (20)$$

De la Eq. (11) el ángulo de entrada del flujo de aire es:

$$\phi_x = \tan^{-1}\left(\frac{(v_0 + v_{ix})}{\omega r}\right) \quad (21)$$

Combinando las Eqs. (18) y (22), y despejando para la velocidad axial [27]:

$$v_{ix} = \left(\frac{v_0}{2} + a_{lcs} b c_x \frac{\omega}{16\pi}\right) \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{(2(\theta_x x R \omega - v_0))}{(4v_0^2) \left(a_{lcs} b c_x \frac{\omega}{\pi}\right) + v_0 + a_{lcs} b c_x \frac{\omega}{16\pi}}}\right) \quad (22)$$

Donde:

ω = velocidad angular

θ_x = ángulo de la hélice en la posición x

$$\theta_x = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{2\pi x R}\right) - \alpha_{zll} \quad (23)$$

Una vez conocida la velocidad inducida, se puede conocer el ángulo de flujo de entrada ϕ_x para cada elemento del álabe, Eq. (26):

$$\phi_x = \tan^{-1}\left(\frac{v_0 + v_{ix}}{\omega R x (1 - C'_{ix})}\right) \quad (24)$$

Con lo cual ahora es posible conocer el ángulo de ataque de la sección de álabe, α_x (Eq. (27)).

$$\alpha_x = \theta_x - \phi_x \quad (25)$$

Para calcular el empuje generado es necesario conocer el coeficiente de sustentación de la sección de álabe. Para ello se usan a las curvas de las características de sustentación y arrastre del álabe que compone al aspa [50,51] de las cuales se obtiene a_{lcs} , que es la pendiente de la curva de sustentación contra ángulo de ataque α_x . Y utilizando la regla de Prandtl-Glauert que ayuda a resolver problemas de flujo compresible con métodos de flujos incompresibles [52], relacionando el coeficiente de sustentación en flujo incompresible $a_{lcs}\alpha_x$ [50] con el coeficiente de sustentación en flujo compresible C_{lx} mediante el factor de Prandtl-Glauert

$$\sqrt{1 - \left(\omega x \frac{R}{a}\right)^2} :$$

$$C_{lx} = \frac{a_{lcs} \alpha_x}{\sqrt{1 - \left(\omega x \frac{R}{a}\right)^2}} \quad (26)$$

Donde a_{lcs} es la pendiente de la curva del coeficiente de sustentación del perfil, α_x es el ángulo de ataque de la sección de hélice y a es la velocidad del sonido local.

Una vez que se conoce el ángulo de entrada de aire y velocidad inducida v_{ix} que actúan en la sección, se hace el cálculo del factor de pérdidas en la punta, F , que afecta a la sección de aspa [49].

$$F_x = \frac{2}{\pi} \cos^{-1}(\exp(-f_x)) \quad (27)$$

Donde

$$f_x = \frac{b}{2r} \frac{R-r}{\sin(\phi_x)} \quad (28)$$

$$C_{ix} = 1 + \frac{4F_x \sin^2(\phi_x)}{\sigma_x [C_{lx} \sin(\phi_x) + C_{dx} \cos(\phi_x)]} \quad (29)$$

$$C'_{ix} = -1 + \frac{4F_x \sin(\phi_x) \cos(\phi_x)}{\sigma_x (C_{lx} \sin(\phi_x) - C_{dx} \cos(\phi_x))} \quad (30)$$

Donde σ_x es la solidez local en cada sección del aspa.

$$\sigma_x = \frac{bc_x}{2\pi r} \quad (31)$$

Una vez conocidos ambos coeficientes se vuelve a calcular el ángulo de entrada del aire, pero ahora utilizando ambas componentes de la velocidad inducida.

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{v_0 + v_i}{\omega r - w_i} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{v_0(1 + C_i)}{\omega r(1 - C'_i)} \right) \quad (32)$$

Y también se calcula de nuevo la resultante de la velocidad que actúa sobre cada sección del aspa.

$$U_x = \sqrt{u_p^2 + u_T^2} = \sqrt{(v_o + v_{ix})^2 + [\omega r(1 - C_i')]^2} \quad (33)$$

Una vez conocidas las velocidades inducidas por la hélice se calcula el empuje en cada sección del aspa, y se integra a lo largo del radio que ocupa esa sección.

$$T_x = \int_{r_m}^{r_{m+1}} \frac{1}{2} \rho \left[(\omega r(1 - C_{ix}'))^2 + (v_o + v_{ix})^2 \right] (C_{lx} \cos(\phi_x) + C_{dx} \text{sen}(\phi_x)) c_x dr \quad (34)$$

Posteriormente para calcular el empuje en cada aspa completa se realiza la sumatoria de todos los T_x desde $m=1$ hasta $m=n$ número de secciones. Para obtener el empuje total de la hélice se multiplica por b número de aspas:

$$T = b \sum_{m=1}^{m=n} T_x \quad (35)$$

El coeficiente de empuje para la hélice es [27][26]:

$$c_T = \frac{T}{\pi R^2 \rho (\omega R)^2} \quad (36)$$

Una vez obtenido el coeficiente de empuje generado por la hélice se realizan correcciones de acuerdo con las pérdidas en la punta y la raíz del aspa [27,53].

El empuje corregido sería calculado de forma similar. Es decir, primero se calcula el empuje en cada sección del aspa siempre y cuando el radio de esa sección cumpla con lo siguiente $X_0 < x_m$ y $x_{m+1} < B$:

$$T_{cx} = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{1}{2} \rho \left[(\omega R x(1 - C_{ix}'))^2 + (v_o + v_{ix})^2 \right] (C_{lx} \cos(\phi_x) + C_{dx} \text{sen}(\phi_x)) c_x R dx \quad (37)$$

Donde $x_m = r_m/R$ y $x_{m+1} = r_{m+1}/R$

Una vez obtenido el empuje corregido en cada sección, se realiza la sumatoria correspondiente (para las secciones que están entre X_0 y B) y se multiplica por el número de aspas.

$$T_c = b \sum_m T_{cx} \quad (38)$$

Donde B es un factor de corrección por pérdidas en la punta; los elementos fuera del radio BR (Fig. 2.5) se asume que generan arrastre, pero no sustentación.

$$B = 1 - \frac{\sqrt{2c_T}}{b} \quad (39)$$

El coeficiente de empuje corregido es

$$c_{Tc} = \frac{T_c}{\pi R^2 \rho (\omega R)^2} \quad (40)$$

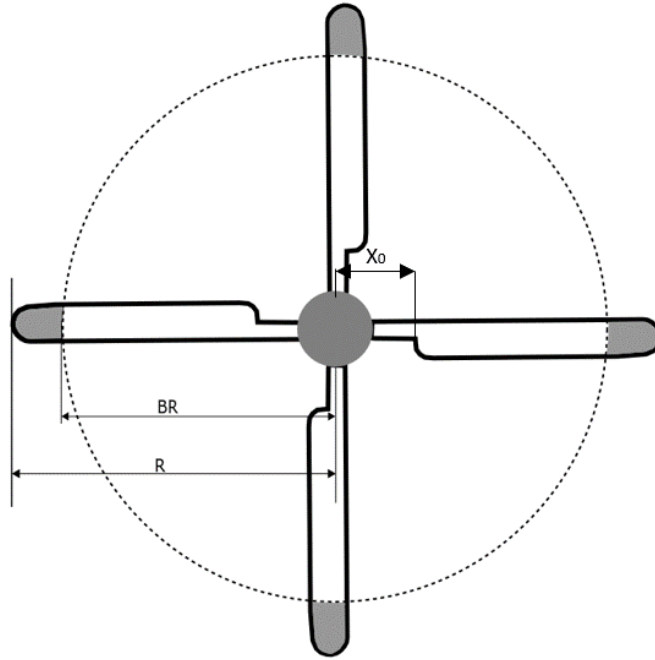


Figura 2.5. Radio BR del asa, la parte sombreada se considera que no genera sustentación.

Para estimar el torque generado, primero es necesario obtener el coeficiente de arrastre de la sección de ala, a partir de los coeficientes δ de la parábola que genera la curva de la gráfica de C_l contra C_d [27].

$$C_{dx} = \delta_0 + \delta_1 C_{lx} + \delta_2 C_{lx}^2 \quad (41)$$

A continuación, se calcula el torque producido en la hélice para después obtener la potencia producida:

$$Q_{ox} = \int_{r_m}^{r_{m+1}} \frac{1}{2} \rho (\omega r (1 - C_{i_x}'))^2 c_x (C_{dx} \cos(\phi_x)) r dr \quad (42)$$

Se realiza la sumatoria correspondiente y se multiplica por el número de aspas para obtener el torque producido total.

$$Q_o = b \sum_{m=1}^{m=n} Q_{ox} \quad (43)$$

Mientras que el torque inducido por la hélice se produce en la sección que genera empuje (sin considerar la punta ni el núcleo). Primero se calcula el empuje en cada sección del asa siempre y cuando el radio de esa sección cumpla con lo siguiente $X_0 R < r_m$ y $r_{m+1} < BR$:

$$Q_{icx} = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{1}{2} \rho \left[(\omega R x (1 - C'_{ix}))^2 + (v_o + v_{ix})^2 \right] (C_{lx} \text{sen}(\phi_x)) c_x R^2 x dx \quad (44)$$

Donde $x_m = r_m/R$ y $x_{m+1} = r_{m+1}/R$

Con el torque corregido en cada sección, se realiza la sumatoria correspondiente (para las secciones que están entre X_0 y B) y se multiplica por el número de aspas.

$$Q_{ic} = b \sum_m Q_{icx} \quad (45)$$

La potencia inducida se obtiene con el torque inducido, el cual es el torque que se transfiere del aspa al aire. Representa la potencia transferida del aspa al aire (Eq. 42).

$$P_{ic} = Q_{ic} \omega \quad (46)$$

La potencia P_0 es la necesaria para vencer el arrastre:

$$P_0 = Q_0 \omega \quad (47)$$

La potencia total resulta de la suma de las potencias inducida y requerida. Ambas deben ser superadas por el motor de la hélice.

$$P_{totc} = P_{ic} + P_0 \quad (48)$$

Las Tablas 2.1-2.4 presentan un ejemplo de resultados de las variables respuesta. La variable “solidity” se define en la Eq. (31) como σ_x

x(r/R)=		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
c(x)=	meters	0.00762	0.00762	0.00762	0.00762	0.00762	0.00762	0.00762	0.00762	0.00762	0.00762
theta(x)=	deg	74.06069	60.2650499	49.4100978	41.1973519	35.002853	30.2664733	26.574275	23.63784568	21.25829531	19.2972366
vi(x)=	m/s	14.82539	20.5112313	23.4254982	25.0477076	26.0115578	26.6183389	27.019969	27.29737638	27.49599407	27.642584
inflow ang	rad	0.609632	0.45004099	0.35247046	0.28684231	0.24032615	0.20601753	0.1798656	0.15937213	0.142933993	0.12948583
AOA (x)=	rad	0.682971	0.60178255	0.50989843	0.43218712	0.37058888	0.32223208	0.283943	0.253186105	0.228093254	0.20731449
AOA (x)=	deg	39.13135	34.4796005	29.2150279	24.762498	21.2331787	18.4625381	16.2687355	14.50649527	13.06878076	11.8782451
Cl (x)=		3.920939	3.47493802	2.97342058	2.55599567	2.23308633	1.98858297	1.80520106	1.669798316	1.573717115	1.51236952
dT=	Newtons	1.571034	5.56932279	10.7224539	16.3860936	22.3687058	28.6841213	35.4418999	42.8192768	51.07484086	60.5972969

Tabla 2.1. Resultados del empuje para las diez divisiones del aspa con perfil NACA 0012.

Thrust=	Newtons	24.49364
Ct=		0.035025

Tabla 2.2. Resultados finales de los cálculos de empuje.

Cd (x)=		0.270124	0.21881451	0.16777156	0.13065754	0.10529394	0.08803118	0.07618232	0.06803785	0.062569945	0.05921391
dQ0=	N.m	0.000687	0.00445385	0.01152527	0.02127568	0.03348748	0.04837927	0.06648404	0.088631807	0.1160546	0.15065821
Q0=	N.m	0.046631									
dQi=	N.m	0.006082	0.03183158	0.07199658	0.11938571	0.17068117	0.22514936	0.2833589	0.346669326	0.417213914	0.49825219

Tabla 2.3. Resultados del torque para las diez divisiones del aspa con perfil NACA 0012.

Qi=	N.m	0.192149
Power ind=	HP	0.861085
Power pro=	HP	0.208968
Power tot=	HP	1.070054

Tabla 2.4. Resultados finales para los cálculos del torque y potencia.

2.3. Hélice coaxial

Para los cálculos en los que se introduce una segunda hélice, se supone que ésta interactúa con la velocidad inducida por la primera hélice. Se puede considerar que al desplazarse a través del aire cada una de las secciones de las aspas de la hélice superior generan líneas de corriente (streamlines), Fig. 2.6, que se desprenden del álabe y que se desplazan hacia atrás de la hélice; es decir forma una estela de aire cuya velocidad es:

$$v_{wake} = \sqrt{(v_0 + v_{i_x})^2 + (w_{i_x})^2} = \sqrt{(v_0 + v_{i_x})^2 + (\omega r C'_{i_x})^2} \quad (49)$$

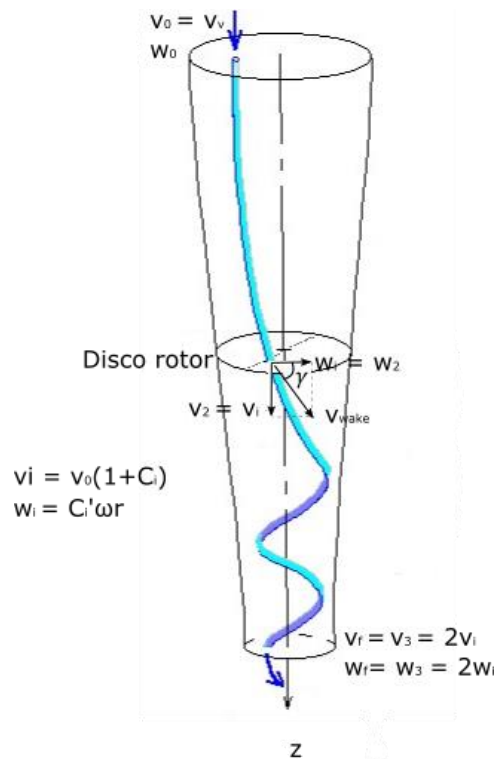


Figura 2.6. Línea de corriente generada por una sección de aspa

Después se utiliza un promedio de la velocidad inducida por cada sección de las aspas la hélice superior para ser introducido como la velocidad de entrada del aire para la hélice inferior (Fig. 2.7).

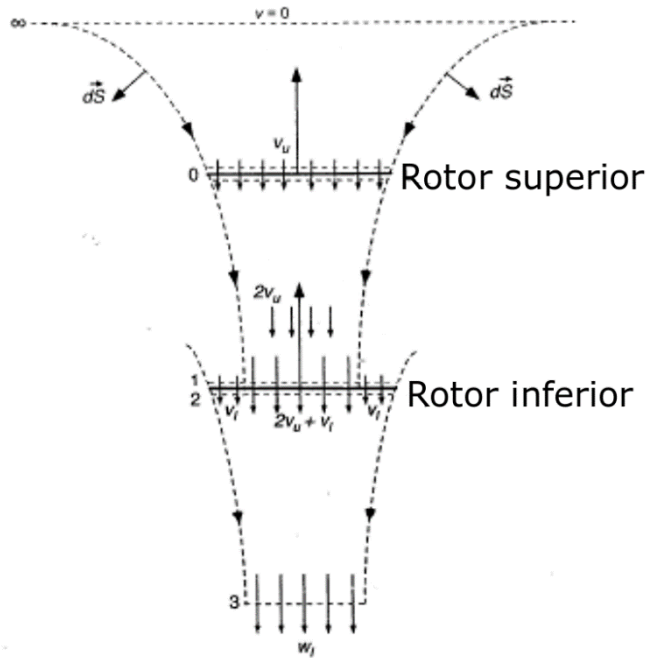


Figura 2.7. Ejemplo de la interacción de la estela de la hélice superior con la inferior.

El vector de velocidad en cada punto de las líneas de flujo se puede separar en sus componentes ortogonales (Fig. 2.6), siendo la velocidad inducida vertical, v_i , la componente axial y la velocidad inducida tangencial, w_i , la componente tangencial. Con ello se determina la magnitud de la velocidad de la estela mediante la teoría de cantidad de movimiento, que utiliza la ley de conservación de masa, energía y cantidad de movimiento.

La conservación de cantidad de movimiento arroja que $dT = \dot{m}v_3$ y que $dQ = \dot{m}w_3$ donde \dot{m} es el flujo másico que pasa a través del disco anular, y v_3 y w_3 son las velocidades inducidas axial y tangencial en la estela. Al aplicar también la conservación de energía se obtiene que $v_3 = 2v_2 = 2v_i$ y que $w_3 = 2w_2 = 2w_i$. Siendo v_3 y w_3 las componentes de la velocidad de la estela completamente desarrollada.

Para el sistema coaxial se hace la consideración, tomada de la teoría de cantidad de movimiento, que la estela formada por el disco rotor aumenta de velocidad al disminuir el área de sección transversal del campo de flujo detrás de la hélice. En este punto la estela se considera completamente desarrollada a una distancia de 2 diámetros del disco rotor y tiene un valor de $2v_{wake}$.

Dependiendo de la separación entre las hélices, h , se calcula la velocidad de la estela de la hélice superior que actúa sobre la inferior. De esto se obtienen los componentes y se agregan a los cálculos de la hélice inferior:

$$U_{x_{inf}} = \sqrt{u_P^2 + u_T^2} = \sqrt{(2v_{i_{sup}} + v_{i_{x_{inf}}})^2 + [\omega r - w_{i_{x_{inf}}} + 2w_{i_{x_{sup}}}]^2} \quad (50)$$

$$\phi_{x_{inf}} = \tan^{-1}\left(\frac{u_P^2}{u_T^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2v_{i_{sup}} + v_{i_{x_{inf}}}}{\omega r - w_{i_{inf}} + 2w_{i_{sup}}}\right) \quad (51)$$

Donde la velocidad que actúa sobre una sección de perfil de álabe de la hélice inferior es $U_{x_{inf}}$, la componente de la velocidad perpendicular de la estela generada por la hélice superior es $v_{i_{sup}}$, la velocidad inducida perpendicular generada por la sección de hélice inferior es $v_{i_{x_{inf}}}$, la velocidad inducida tangencial generada por la sección de hélice inferior es $w_{i_{x_{inf}}}$ y la componente de la velocidad inducida tangencial generada por la hélice superior es $w_{i_{sup}}$. Mientras que el ángulo de entrada de aire a una sección de hélice inferior es $\phi_{x_{inf}}$.

Las Eqs. (52) y (53) son la velocidad y el ángulo de entrada, respectivamente, de aire para cada una de las secciones de aspa de la hélice inferior. Para calcular las velocidades inducidas por la hélice inferior se utiliza el mismo procedimiento de las Eqs. (23) a (33).

Una vez obtenida la velocidad inducida por la hélice inferior se procede con los mismos cálculos que describen las Eqs. (34) a (48) para obtener el empuje, torque y potencia en cada sección de aspa de la hélice inferior. Se finaliza con los resultados para el sistema coaxial:

Potencia total coaxial

$$P_{coaxial} = P_{totc,sup} + P_{totc,inf} \quad (52)$$

Empuje coaxial

$$T_{coaxial} = T_{c,sup} + T_{c,inf} \quad (53)$$

En las Figs. 2.8 y 2.9 se muestra la sucesión de pasos del código escrito para implementar el modelo matemático para los sistemas de hélices sencillas y hélices coaxiales, respectivamente. Primero se alimentan los datos de entrada descritos en la Fig. 2.4 para después dividir la hélice en secciones, y realizar los cálculos explicados en las Eqs. (22-50).

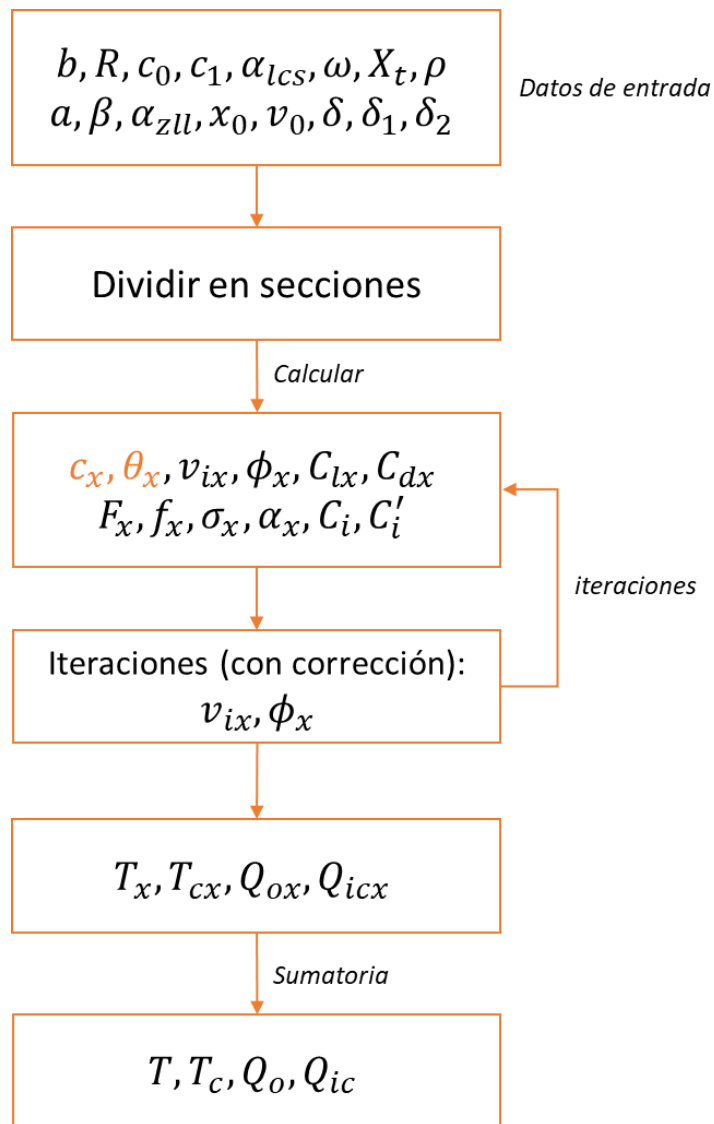


Figura 2.8. Diagrama de flujo del programa utilizado para calcular las ecuaciones de la teoría del elemento de álabes y de cantidad de movimiento para el sistema sencillo.

La diferencia con los cálculos para el sistema coaxial es que se guardan los datos de las velocidades inducidas por la hélice superior para introducirlas como la velocidad de entrada para la hélice inferior.

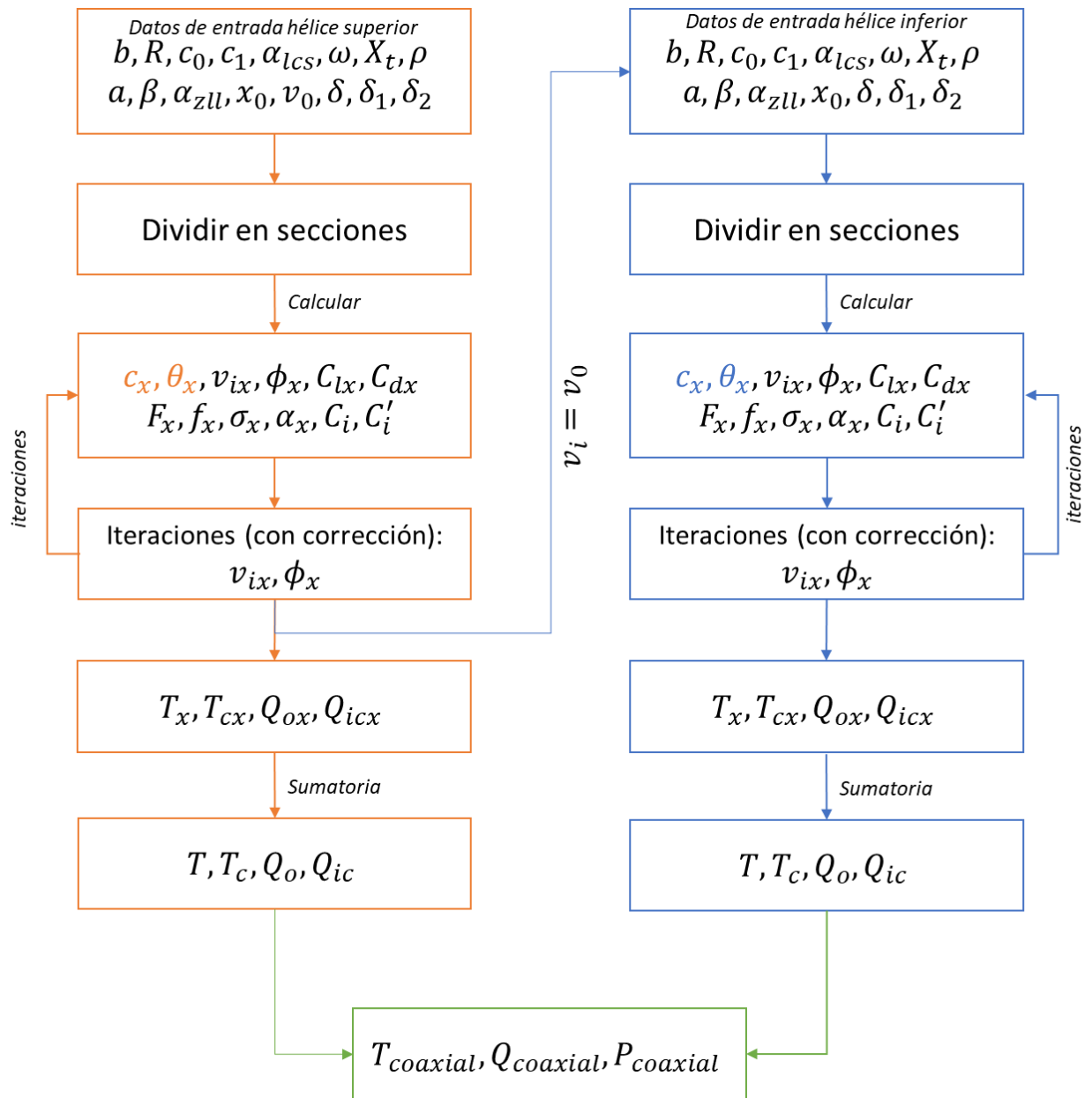


Figura 2.9. Diagrama de flujo del programa utilizado para calcular las ecuaciones de la teoría del elemento de álabes y de cantidad de movimiento para el sistema coaxial.

La comparación de resultados del modelo descrito contra datos experimentales y de la literatura se ofrecen en la sección de resultados de este trabajo, capítulo 4.

Capítulo 3 Instalación y procedimiento experimental para el análisis paramétrico de hélices coaxiales

Uno de los objetivos de este trabajo es modelar el empuje de la hélice bajo la influencia de diversos parámetros operacionales. El capítulo 2 contiene la descripción de este modelo. Asimismo, se llevaron a cabo una variedad de experimentos para obtener datos de entrada para diferentes condiciones de funcionamiento y comparar estos resultados con los teóricos. A continuación, se ofrece los detalles de la plataforma y procedimiento experimental.

3.1. Plataforma experimental

Para investigar el comportamiento de las hélices se construyó un banco de pruebas, sobre el cual se acoplaron los motores, celdas de carga y hélices.

El equipo utilizado fue facilitado en gran parte por TGBG Diseño e Ingeniería, empresa mexicana desarrolladora de tecnología aeronáutica mediante el proyecto AKXO [54]. La Figura 3.1 muestra el diagrama de la instalación experimental.

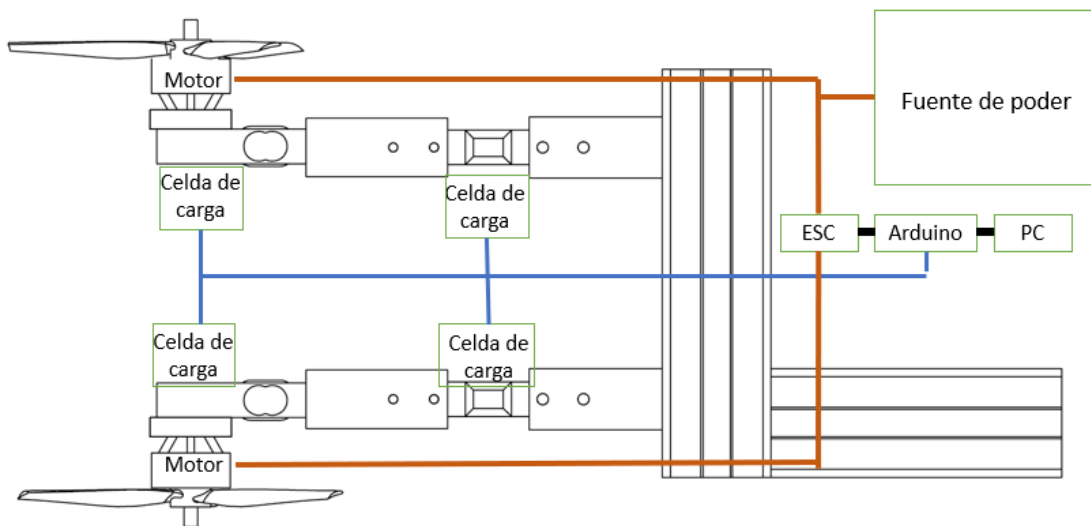


Figura 3.1. Diagrama esquemático del banco de pruebas

Los equipos utilizados e instrumentos de medición (Fig. 3.2) se listan a continuación:

- Hélices de distintos diámetros

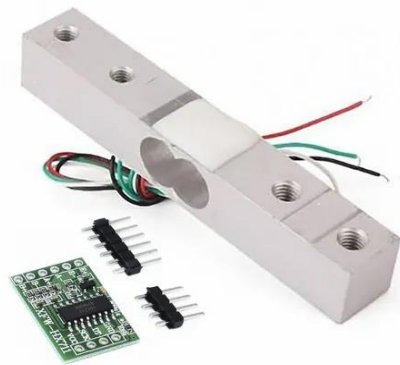
- Motor T- F80
- Fuente de poder
- Computadora
- Multímetro
- Tacómetro láser
- Celdas de carga
- Arduino



(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.2. Equipos e instrumentos de medición utilizados en la plataforma experimental: (a) Motor T-F80; (b) Fuente de poder; (c) Celda de carga; (d) Tacómetro [55].

El diámetro de las hélices varía entre 4 y 7 in (sección 3.3). Cada hélice se instala sobre el motor T- F80, que a su vez se encuentra montado sobre el banco de pruebas con dos celdas de carga. Los datos generados por la celda de carga son leídos utilizando el Arduino que se encuentra conectado a la computadora, como

se muestra en la Fig. 3.3. Además, se mide la corriente que consume cada motor utilizando un multímetro y la velocidad a la que se encuentra girando cada motor por medio de un tacómetro láser.

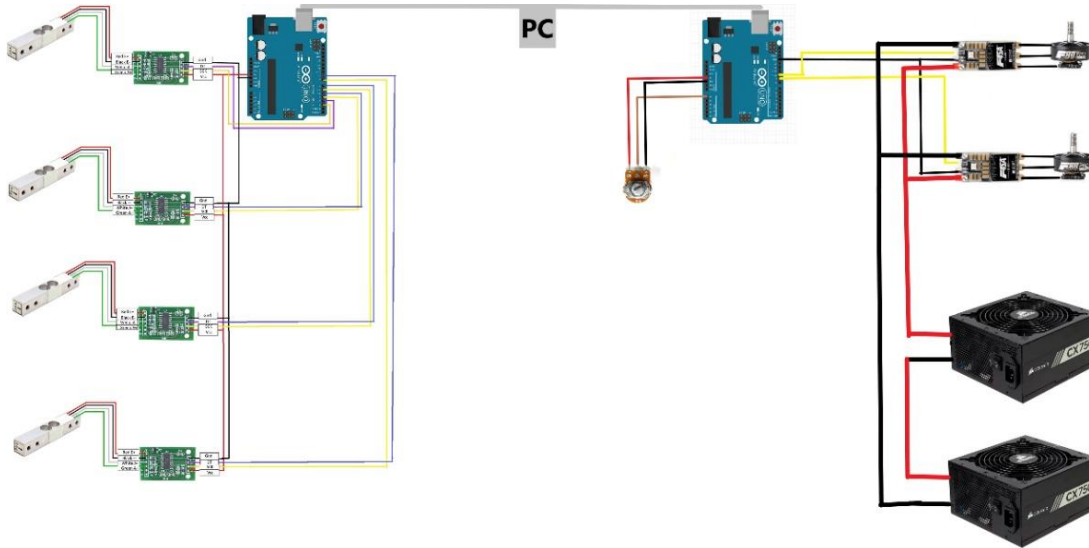


Figura 3.3. Sistema de adquisición de datos

Los datos de corriente, empuje, torque y velocidad del motor se almacenan y analizan con el propósito de comparar el comportamiento individual de cada hélice y del sistema modificado.

3.2. Calibración

Para obtener datos correctos, las celdas de carga son calibradas siguiendo el procedimiento propuesto por el fabricante. Éste consiste en montar una celda de carga en cantiléver y ejecutar el software de calibración para obtener la primera medida sin colocar ningún peso sobre ella. Después se aplica un peso conocido, se toma la lectura del sensor y se obtiene la pendiente entre ambos datos (sin peso y con peso). Dicha pendiente se conoce como el factor de calibración de la celda. El factor de calibración se obtiene de manera individual para cada celda de carga y se agrega al código para la obtención de datos.

Una vez obtenido el factor de calibración se realiza la operación nuevamente, pero con otro peso (Figura 3.4). Se verifica que éste siga calibrado colocando las pesas y verificando la lectura.

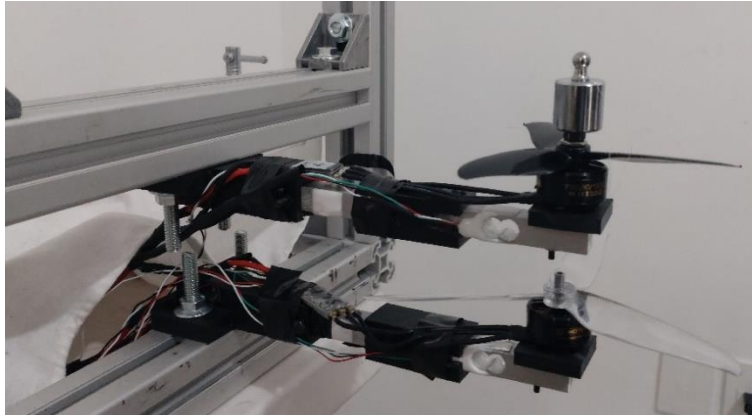


Figura 3.4. Calibración de la celda de carga utilizando un peso de 50 g.

Todos los experimentos fueron realizados en intervalos de aumento de la velocidad de los motores. Posteriormente se disminuye la velocidad del motor para verificar que, al retirar la carga, la última lectura sea cero.

3.3. Procedimiento experimental

Para observar los efectos de la configuración del sistema de hélices coaxiales sobre el empuje, se varió el diámetro de hélice y paso de estas utilizando varias hélices alineadas para operar coaxialmente, pero con motores separados. La variación de estos parámetros experimentales se muestra en la Tabla 3.1, de acuerdo con la hélice utilizada.

Hélice	D (in)	Paso (in/rev)	c0	c1
4045	4	4.5	0.012	0.016
4050	4	5	0.012	0.016
5030	5	3	0.015	0.0115
5040	5	4	0.016	0.011
5050	5	5	0.012	0.0145
6030	6	3	0.0155	0.011
6045	6	4.5	0.015	0.016
6050	6	5	0.013	0.014
7039	7	3.9	0.02	0.015
7056	7	5.6	0.014	0.011

Tabla 3.1. Características de las hélices disponibles

La separación entre las hélices cumple con la relación $h/d=0.27$ (h =separación entre hélice superior e inferior, d =diámetro de la hélice más grande) del motor coaxial T-Motor X-605 con hélices de 22 in. Con esto, la separación entre el plano de giro de las hélices utilizadas será de 0.05 m.

Una vez que el equipo se encuentra montado y calibrado se envía la señal al controlador del motor para que arranque. El controlador utiliza PWM con pulsos de 1 ms (detenido) a 2 ms (velocidad máxima). Para determinar la velocidad del motor, se realizan incrementos de 0.1 ms en el sistema. En cada incremento se toman las lecturas de la velocidad de rotación y corriente eléctrica en cada motor, empuje y torque generados. Una vez que se alcanza la velocidad máxima, se reduce la velocidad con los mismos pasos y se vuelven a tomar las lecturas hasta alcanzar la velocidad mínima. Luego se toma un tiempo para esperar a que los motores disipen calor antes de continuar con el experimento.

Para la incertidumbre de las lecturas de datos realizadas se toma en cuenta el sesgo especificado por el fabricante y la aleatoriedad de cada componente. Para esto se considera el valor del porcentaje a escala completa (%FS) que proporciona el fabricante (tabla 3.2) y se multiplica por el rango de medición del dispositivo para obtener la incertidumbre que genera sobre las mediciones.

Instrumento de medición	de Rango	%FS	Incertidumbre
Celda de carga	10 kg	± 0.1	10 g
Tacómetro	99999 RPM	± 0.05	50 RPM
Amperímetro	200 A	± 2	0.4 A

Tabla 3.2. Valores de incertidumbre para los dispositivos de medición utilizados

Para reducir la incertidumbre en las medidas, se realiza un promedio con mediciones obtenidas en un rango de 2 segundos. En ese intervalo de tiempo se obtienen un número suficiente de mediciones (>50) para lograr que la muestra tenga una distribución normal. Al tener un mayor número de mediciones, el promedio de la muestra se parece más al promedio de la población.

Los experimentos fueron realizados inicialmente con las hélices en el sistema de propulsión sencillo y posteriormente el coaxial.

Capítulo 4 Análisis y comparación de resultados teóricos y experimentales

Se ofrecen a continuación los resultados de la comparación teórico-experimental para sistema de hélice sencillo y coaxial. Asimismo, se incluye el estudio estadístico de los resultados para determinar la interacción de las variables y correlacionarlas experimentalmente. Dicho estudio contribuirá a la selección de hélices o pares de hélices para su análisis y comparación.

4.1. Análisis estadístico

El análisis de varianza (ANOVA, por sus siglas en inglés) es una prueba para la hipótesis de que las medias de dos o más poblaciones son iguales. El estudio ANOVA es muy útil porque evalúa el efecto, o la importancia, de uno o más factores al comparar las medias de la variable respuesta en los diferentes niveles de cada factor. En el caso de esta investigación (Tabla 4.2) los factores serían “Hélice superior” y “Hélice inferior”, mientras que los niveles serían los diferentes modelos que existen “4045”, “6030”, “7038”, etc. Por lo tanto, el estudio ANOVA permitirá saber el efecto que tiene la hélice inferior y superior en el empuje generado por el sistema de hélices coaxiales.

La hipótesis nula (H_0) establece que todas las medias de la población son iguales mientras que la hipótesis alternativa (H_1) establece que al menos una es diferente. En este caso, el ANOVA puede indicar si un modelo específico de hélice aumenta o disminuye el empuje generado. También da información sobre si existe o no diferencia en el empuje generado entre un par de hélices específico y otro. Esto permite conocer la combinación que generará el mayor empuje. Además, con el mismo estudio se puede analizar la interacción entre las hélices superior e inferior.

La Tabla 4.2 enumera los resultados otorgados directamente de la herramienta Minitab®. Las fuentes de la variación en la media del empuje pueden ser debido a la “Hélice superior”, la “Hélice inferior” o la interacción entre ambas. Los diferentes niveles de cada factor son fijos, es decir que no variaron durante la medición del empuje. En total son 10 niveles o modelos diferentes de hélices.

Información del factor

Factor	Tipo	Niveles	Valores
Hélice superior	Fijo	10	4045, 4050, 5030, 5040, 5050, 6030, 6045, 6050, 7038, 7056
Hélice inferior	Fijo	10	4045, 4050, 5030, 5040, 5050, 6030, 6045, 6050, 7038, 7056

Tabla 4.1. Factores y niveles considerados para el ANOVA

Hipótesis del ANOVA

Para la hélice superior:

H_0 : No hay efecto debido h

En la Tabla 4.3 se muestra información de los grados de libertad total (GL) que representan la cantidad de información en los datos y está determinado por el número de observaciones de la muestra. También las sumas ajustadas de los cuadrados (SC ajust) que son medidas de variación para los diferentes componentes del modelo. Los cuadrados medios ajustados (MC ajust) miden qué tanta variación explica un término o modelo asumiendo que todos los demás términos están en el modelo. Los valores F que son el estadístico de prueba usado para determinar si el término está asociado con la respuesta, Minitab utiliza el valor F para calcular el valor p, que se usa para tomar una decisión acerca de la significancia estadística de los términos fuente y del modelo. El valor p es una probabilidad que mide la evidencia en contra de la hipótesis nula. Un valor F suficientemente grande indica que el término o modelo es significativo.

Análisis de Varianza

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
Hélice superior	9	204.628	22.7365	62230.36	0.000
Hélice inferior	9	536.253	59.5837	163082.11	0.000
Hélice superior*Hélice inferior	81	17.810	0.2199	601.80	0.000
Error	300	0.110	0.0004		
Total	399	758.801			

Tabla 4.2. ANOVA de dos factores: Hélice superior y hélice inferior

Para determinar si cualquiera de las diferencias entre las medias es estadísticamente significativa, se debe comparar el valor p con el nivel de significancia para evaluar la hipótesis nula. Recordemos que la hipótesis nula indica que las medias de la población son iguales. Para este trabajo de investigación, el nivel de

significancia utilizado es de $\alpha=0.05$. Es decir, se corre un riesgo del 5% de llegar a la conclusión de que existe una diferencia entre las medias cuando en realidad no hay tal diferencia.

Si el valor $p \leq \alpha$: Las diferencias entre algunas de las medias son estadísticamente significativas. Es decir, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que no todas las medias de población son iguales.

Si el valor $p \geq \alpha$: Las diferencias entre las medias no son estadísticamente significativas. Es decir, si el valor p es mayor que el nivel de significancia, no se cuenta con suficiente evidencia para rechazar la hipótesis de que las medias de la población son iguales.

Hipótesis del ANOVA

Para la hélice superior:

H_0 : No hay efecto debido a la hélice superior sobre el empuje promedio.

H_1 : Existe efecto de algún modelo de la hélice superior sobre el empuje promedio.

Como el “Valor p ” es menor al nivel de significación ($\alpha = 0.05$), se rechaza la hipótesis nula.

Conclusión: Con un nivel de confianza del 95%, se puede afirmar estadísticamente que existe efecto de algún modelo de hélice superior sobre el empuje promedio. Es decir, existen diferencias significativas en el empuje promedio al utilizar diferentes modelos de hélices superior.

Para la hélice inferior:

H_0 : No hay efecto debido a la hélice inferior sobre el empuje promedio.

H_1 : Existe efecto de algún modelo de la hélice inferior sobre el empuje promedio.

Como el “Valor p ” es menor al nivel de significación ($\alpha = 0.05$), se rechaza la hipótesis nula.

Conclusión: Con un nivel de confianza del 95%, se puede afirmar estadísticamente que existe efecto de algún modelo de hélice inferior sobre el empuje promedio. Es decir, existen diferencias significativas en el empuje promedio al utilizar diferentes modelos de hélices inferior.

Para la interacción entre la hélice superior y la hélice inferior:

H_0 : No hay interacción entre los diferentes modelos de hélices superior y los diferentes modelos de hélices inferior que influya en el empuje promedio.

H_1 : Existe interacción entre los diferentes modelos de hélices superior y los diferentes modelos de hélices inferior que influye en el empuje promedio.

Como el “Valor p ” es menor al nivel de significación ($\alpha = 0.05$), se rechaza la hipótesis nula.

Conclusión: Con un nivel de confianza del 95%, se puede afirmar estadísticamente que existe interacción entre los diferentes modelos de hélices superior y los diferentes modelos de hélices inferior que influya en el empuje promedio. Es decir, existen diferencias significativas en el empuje promedio al utilizar diferentes parejas de modelos de hélices superior e inferior.

Comparaciones por parejas de Tukey para el empuje

El método de Tukey para comparaciones múltiples se utiliza en ANOVA para crear intervalos de confianza para todas las diferencias en parejas entre las medias de los niveles de los factores. Es decir, este método permite agrupar los diferentes niveles de un factor dependiendo de si la media de la respuesta que generan (considerando su combinación con todos niveles de los otros factores) es estadísticamente igual o diferente.

Para la hélice superior:

En la Tabla 4.4 se agrupan los diferentes modelos de las hélices superiores dependiendo de si la media del empuje generado, considerando su combinación con todos los modelos de las hélices inferiores, es estadísticamente igual o diferente. Se utilizan letras para dividir los grupos., por ejemplo el modelo 7038 es diferente a cualquiera de los otros modelos utilizados de hélice superior. Sin embargo, con un intervalo de confianza del 95% no hay diferencia significativa en el empuje generado al utilizar el modelo 4045 o el 4050 en la hélice superior.

Agrupar información utilizando el método de Tukey y una confianza de 95%

Hélice superior	N	Media	Agrupación
7038	40	4.71243	A
7056	40	4.49108	B
6045	40	4.06525	C
6050	40	3.98530	D
5050	40	3.45566	E
6030	40	3.06933	F
5040	40	3.00930	G
4050	40	2.77092	H
4045	40	2.76297	H
5030	40	2.72177	I

Las medias que no comparten una letra son significativamente diferentes.

Tabla 4.3. Comparaciones por parejas de Tukey para la hélice superior

Conclusión: con una confianza del 95% se puede afirmar estadísticamente que no hay una diferencia significativa en el empuje promedio generado entre los modelos de hélice 4050 y la 4045 para la hélice superior.

Para la hélice inferior:

Agrupar información utilizando el método de Tukey y una confianza de 95%

Hélice inferior	N	Media	Agrupación
7038	40	5.35232	A
7056	40	5.24647	B
6050	40	4.41546	C
6045	40	4.36102	D
5050	40	3.23925	E
5040	40	2.71636	F
4045	40	2.58982	G
6030	40	2.45494	H
4050	40	2.44581	H
5030	40	2.22255	I

Las medias que no comparten una letra son significativamente diferentes.

Tabla 4.4. Comparaciones por parejas de Tukey para el empuje

Conclusión: con una confianza del 95% se puede afirmar estadísticamente que no hay una diferencia significativa en el empuje promedio generado entre los modelos de hélice 4050 y la 6030 para la hélice inferior.

Para la hélice superior y hélice inferior:

Agrupar información utilizando el método de Tukey y una confianza de 95%

Hélice superior*	Hélice inferior	N	Media	Agrupación
7038	7038	4	6.47655	A
7038	7056	4	6.23130	B
7056	7056	4	6.19205	B
7056	7038	4	6.07433	C
6045	7038	4	5.91738	D
6050	7038	4	5.91738	D
6050	7056	4	5.84871	E
6030	7056	4	5.80947	E F
6045	7056	4	5.80947	E F

7038 6050	4	5.76042	F	G
5050 7038	4	5.71136		G
7038 6045	4	5.59365		H
7056 6050	4	5.49554		I
7056 6045	4	5.47592		I
6045 6050	4	5.17182		J
6050 6045	4	5.12277		J
5050 7056	4	5.12277		J
6045 6045	4	4.96581		K
5040 7038	4	4.80884		L
6030 7038	4	4.74998		M
5040 7056	4	4.70093		M N
4045 7038	4	4.69113		N
5030 7038	4	4.59302		O
4050 7038	4	4.58322		O
4045 7056	4	4.58321		O
4050 7056	4	4.52435		P
5050 6050	4	4.43607		Q
5050 6045	4	4.30854		R
7038 5050	4	4.24692		S
7056 5050	4	4.11510		T
6050 6050	4	4.11234		T
5040 6050	4	4.05348		U
7038 4045	4	4.02405		U
5040 6045	4	3.93576		V
7038 4050	4	3.90633		V
6030 6045	4	3.88671		V
7038 5040	4	3.86709		X V
6030 6050	4	3.85728		X V
4045 6050	4	3.81804		Y X
6045 5050	4	3.81804		Y X
6050 5050	4	3.81804		Y X
7056 4045	4	3.81803		Y X
5030 6045	4	3.77880		Y
5030 6050	4	3.77880		Y
4050 6045	4	3.70032		Z
4050 6050	4	3.67089		Z
7056 4050	4	3.66107		Z
5030 7056	4	3.64244		AA Z
7038 6030	4	3.59241		AA
7056 5040	4	3.59241		AA
7038 5030	4	3.42564		AB
7056 5030	4	3.28143		AC
6045 4045	4	3.26867		AC
5050 5050	4	3.23925		AD AC
6045 5040	4	3.22944		AD AC
6050 4045	4	3.20981		AE AD
7056 6030	4	3.20491		AE AD

6050 5040	4	3.16077																				AE	
6050 4050	4	3.04305																					AF
6045 4050	4	2.99400																					AG AF
6050 6030	4	2.97438																					AG
6045 6030	4	2.88609																					AH
4045 6045	4	2.84194																					AH
5040 5050	4	2.73894																					AI
6030 5050	4	2.71931																					AI
6050 5030	4	2.64574																					AJ
5050 5040	4	2.63501																					AK AJ
6045 5030	4	2.59178																					AK AJ
4045 5050	4	2.58198																					AL AK
5030 5050	4	2.58198																					AL AK
4050 5050	4	2.53293																					AL
5050 4045	4	2.45444																					AM
5050 6030	4	2.38578																					AN
5040 5040	4	2.27787																					AO
6030 5040	4	2.24529																					AP AO
5050 4050	4	2.21901																					AP
4045 5040	4	2.09148																					AQ
5050 5030	4	2.04440																					AQ AR
5040 6030	4	2.04243																					AQ AR
5030 5040	4	2.04242																					AQ AR
4050 5040	4	2.02182																					AR AS
5040 4045	4	1.96394																					AS AT
6030 6030	4	1.92471																					AT
6030 4045	4	1.92470																					AT
4045 6030	4	1.86585																					AU
5040 4050	4	1.85604																					AU AV
5030 6030	4	1.84623																					AU AV
4050 6030	4	1.82661																					AU AV AW
6030 5030	4	1.79829																					AV AW AX
4045 4045	4	1.78736																					AW AX
6030 4050	4	1.77756																					AW AX
4045 4050	4	1.75401																					AX AY
5030 4045	4	1.74812																					AX AY
5040 5030	4	1.71477																					AY
4050 4045	4	1.69907																					AY
5030 4050	4	1.64022																					AZ
4045 5030	4	1.61471																					AZ BA
4050 4050	4	1.60686																					AZ BA
5030 5030	4	1.56566																					BA BB
4050 5030	4	1.54310																					BB

Las medias que no comparten una letra son significativamente diferentes.

Tabla 4.5. Comparaciones por parejas de Tukey para el empuje

4.2. Sistema sencillo o mono-hélice

Las Figs. 4.1, 4.2 y 4.3 presentan los resultados de empuje y potencia en función de la velocidad angular. Los resultados teóricos (nombrados BEMT) se muestran en línea sólida y los experimentales en línea punteada, para varios modelos de hélices. Los números en las leyendas indican el diámetro y paso de la hélice. Por ejemplo:

5045:

Diámetro: 5 in

Paso: 4.5 in.

En la Fig. 4.1 se puede observar, tanto teórica como experimentalmente, que a mayor diámetro de la hélice aumenta el empuje generado. Para los casos ilustrados, la hélice 7056 muestra un empuje mayor comparado al producido por las hélices 5045 y 6042 (de menor diámetro).

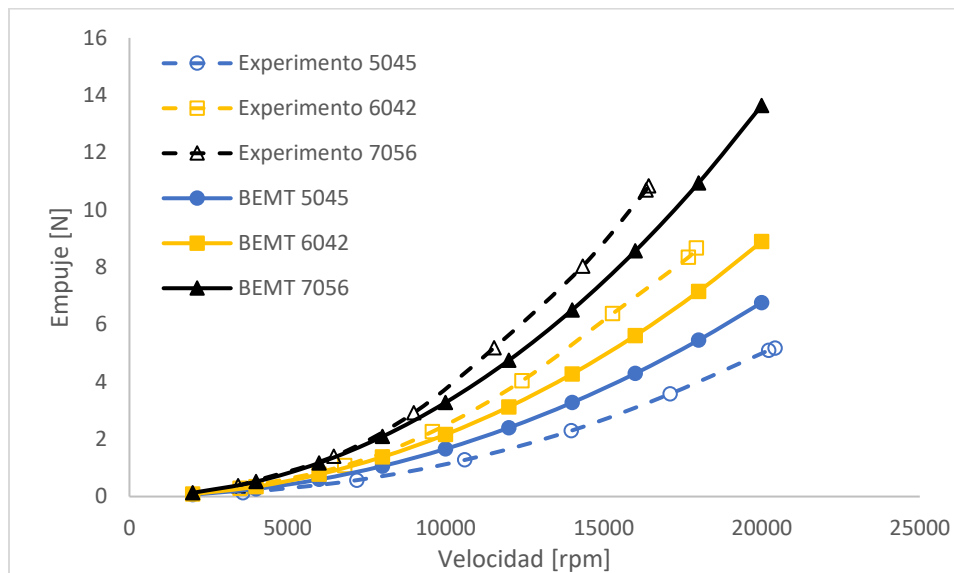


Figura 4.1. Empuje vs velocidad. Comparación de resultados teórico-experimentales para varios diámetros. Sistema de hélice sencillo

La diferencia manifestada entre resultados numéricos y experimentales, en los puntos máximos de empuje para cada caso, es de: 20% para la hélice 7056 a 16000 rpm, 17.53% para la hélice 6042 a 18000 rpm y 24% para la hélice 5045 a 20000. En todos los casos se observa que el modelo subestima los resultados experimentales, excepto para el caso de la hélice 5035 (en azul). Lo anterior puede deberse a la geometría

de la hélice. Se tomó como caso general para el modelado una geometría como mostrada en la Fig. 4.2. La 5045 tiene muy poco giro en el aspa (blade twist) a diferencia de los otros modelos.

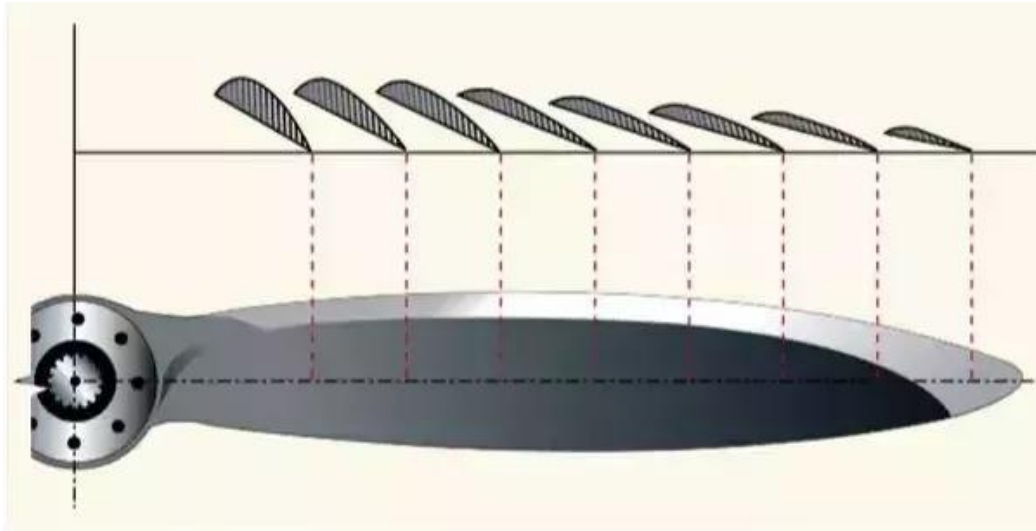


Figura 4.2. Geometría considerada en el modelado de las hélices [56].

En la Fig. 4.3 se representa la potencia transferida por la hélice al aire (Eq. (50)) vs. la velocidad angular de la hélice. Se observa un comportamiento similar en ambas gráficas, con una tendencia de los datos numéricos reproducida por los experimentos, y el incremento de potencia con la velocidad. Las diferencias en este caso son de 23% para la hélice 7056, 35% para la hélice 6042 y 24% para la hélice 5045.

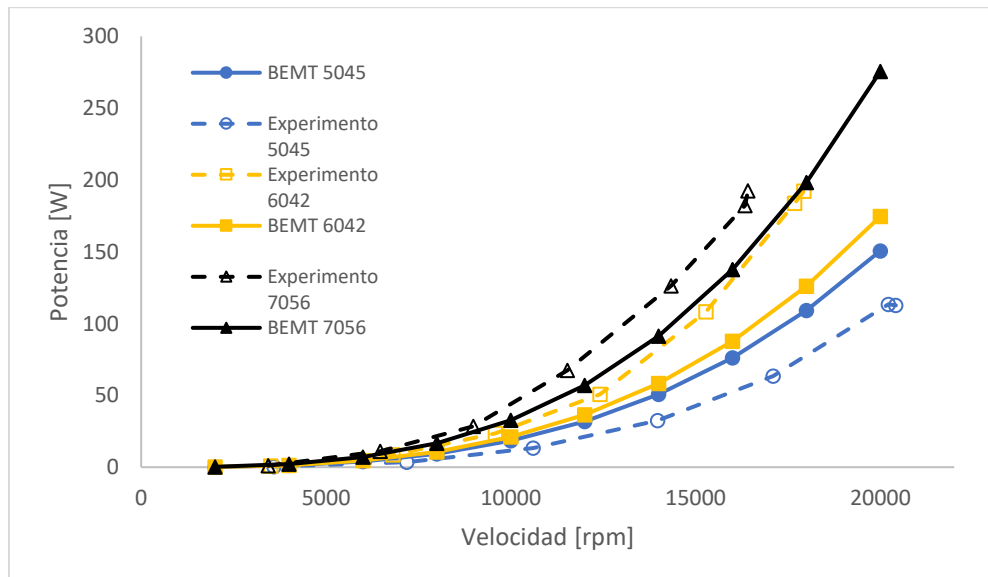


Figura 4.3. Potencia vs velocidad. Comparación de resultados teórico-experimentales para varios diámetros. Sistema de hélice sencillo.

La Fig. 4.4 expone el empuje como función de la potencia. Se observa que las hélices de mayor diámetro aprovechan mejor la potencia disponible y producen un mayor empuje. El comportamiento del modelo es bastante similar al de los experimentos teniendo diferencias de 6% para las hélices 7056 y 5045, y hasta 9% para la hélice 6042. La diferencia entre la longitud de las líneas de datos corresponde a la velocidad alcanzada de rotación de cada hélice.

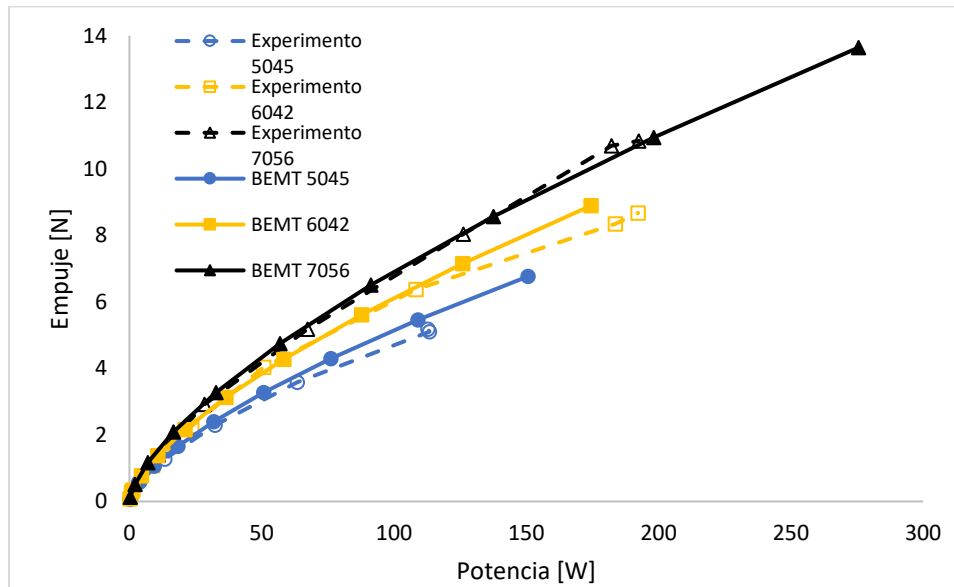
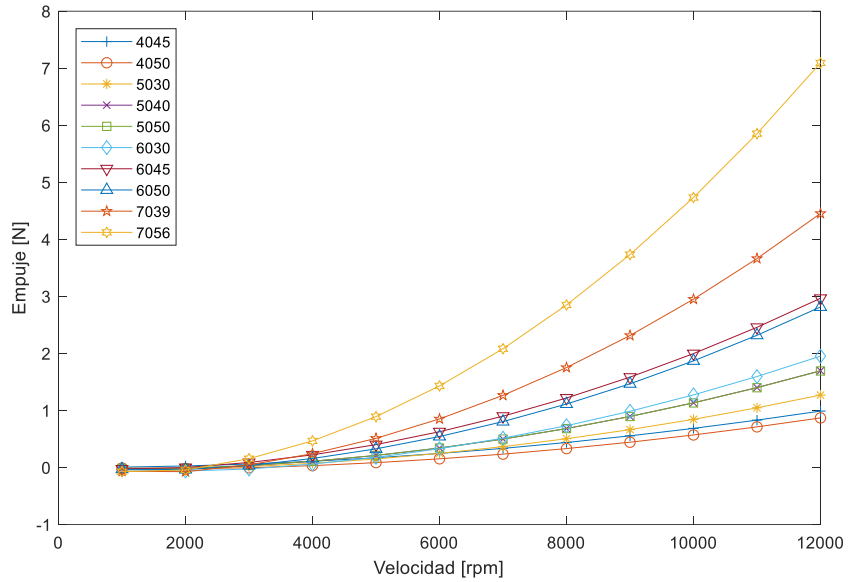
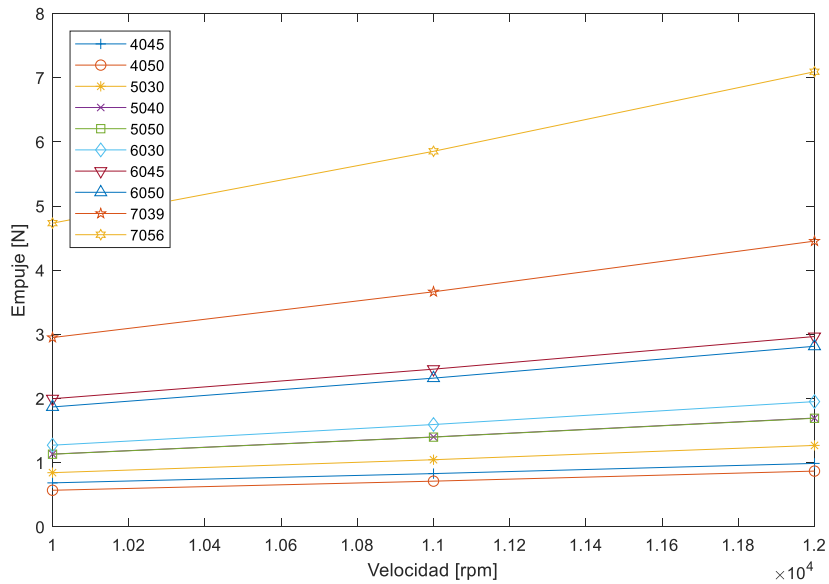


Figura 4.4. Potencia vs empuje. Comparación de resultados teórico-experimentales para varios diámetros. Sistema de hélice sencillo.

En la Fig. 4.5 se comparan las todas las hélices simuladas. Los resultados muestran que el aumento tanto del diámetro como del paso mejoran el empuje obtenido. Se observa que hélices de igual diámetro y pasos similares (5040,5050 o 6030,6045) presentan niveles de empuje semejante.



(a)



(b)

Figura 4.5. Empuje contra velocidad de rotación para la totalidad de hélices simuladas (a) Rango completo experimentalado. (b) Ampliación en el rango de 10000 a 12000 rpm

Al utilizar el mismo paso, pero variando el diámetro (hélices 4050, 5050 y 6050) se observa un aumento en el empuje producido por cada hélice. En la Fig. 4.5b se observa mejor esta similitud.

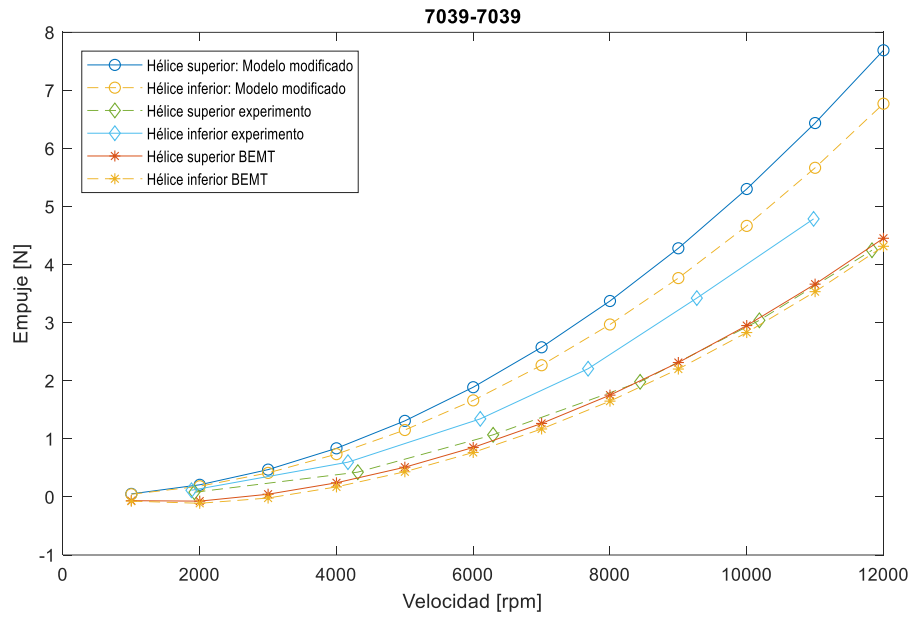
4.3. Sistema coaxial

Se presenta a continuación los resultados experimentales correspondientes a la implementación del sistema coaxial para varios pares de hélices. En la parte superior de cada gráfica se indica el par representado. Para un sistema coaxial en el que se usó el mismo diámetro en la hélice superior e inferior, éste par se repite (Fig. 4.6). La nomenclatura del par de hélices consta primero de la hélice superior seguido por la hélice inferior. Por ejemplo, el sistema coaxial 7039-4050 tiene como hélice superior una hélice de 7 in de diámetro con 3.9 in/rev de paso, mientras que la hélice inferior tiene una hélice de 4 in de diámetro y 5 in/rev de paso.

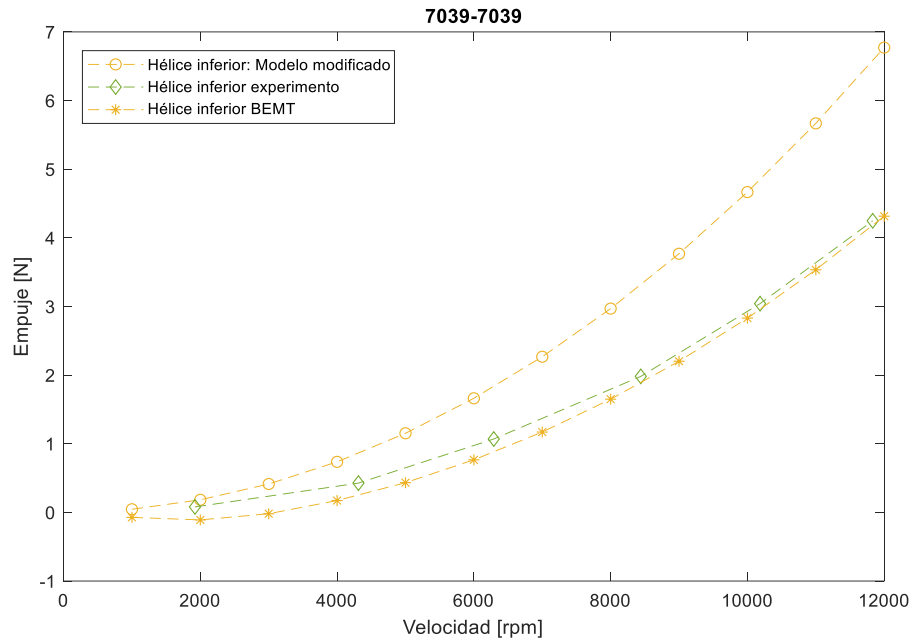
4.3.1 Sistema coaxial con diámetros iguales

Las Figs. 4.6 comparan los valores numéricos obtenidos con el modelo modificado [48], los datos experimentales y el modelo BEMT. La Fig. 4.6a presenta los resultados de empuje contra velocidad para las dos hélices, cuantificando de manera individual el empuje de cada una. Esto también permite comparar con valores experimentales obtenidos de la misma forma (empuje separado para hélice inferior y superior). Se observa que para el caso del empuje producido por la hélice superior el modelo modificado (círculos azules) sobrestima con más diferencia los datos experimentales (rombo azul) mientras el modelo BEMT los subestima. La Fig. 4.6b presenta los resultados correspondientes únicamente a la hélice inferior.

El uso del modelo modificado implica la ejecución de una prueba y luego una o varias iteraciones. Se podría mejorar con más iteraciones, pero en vista de los resultados obtenidos con el modelo básico y su buen ajuste con los datos experimentales, se continúa el análisis utilizando este último (BEMT).



(a)

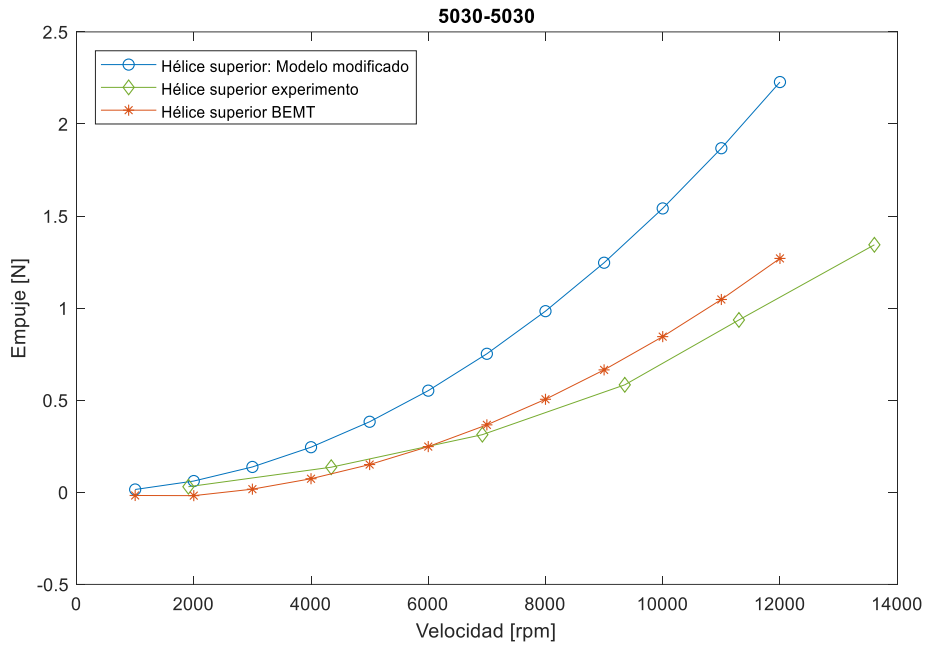


(b)

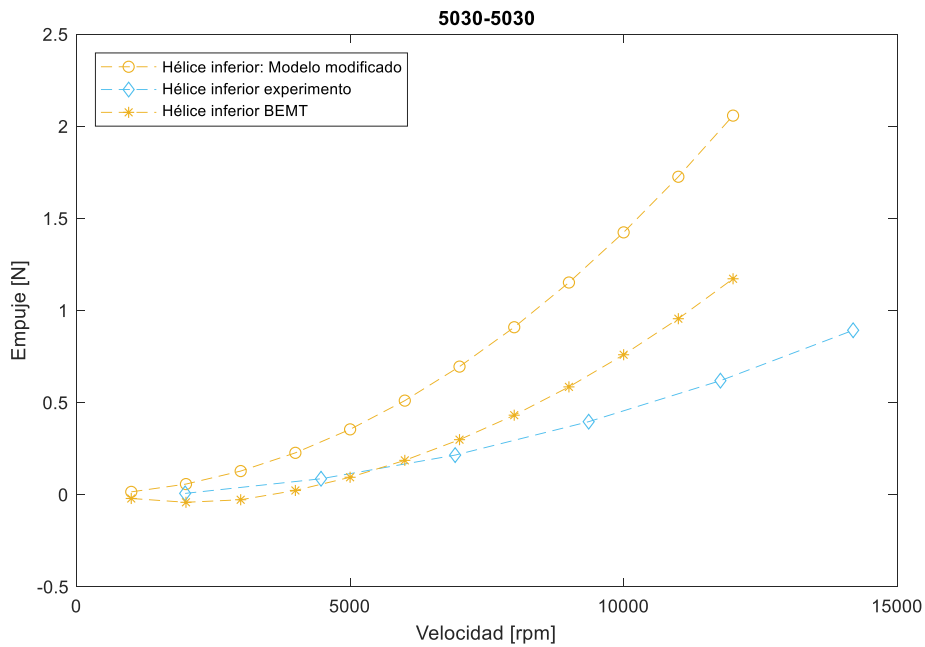
Figura 4.6. Comparación del modelo modificado [48] contra resultados experimentales y modelo BEMT. a) Hélices superior e inferior; b) Hélice inferior

Las Figs. 4.7a y 4.7b presentan los mismos parámetros mostrados en la Fig. 4.6, pero esta vez para un sistema coaxial de hélices del mismo diámetro superior e inferior, denominado 5030-5030, separando los resultados por cada hélice. Los datos numéricos (círculos y asteriscos) sobreestiman los resultados y esta

vez a partir de cierto valor de velocidad en el caso de BEMT. La diferencia se hace más grande a valores de velocidad más grandes.



(a)



(b)

Figura 4.7. Comparación de datos teóricos y experimentales para el sistema 5030-5030. a) hélice superior; b) Hélice inferior

Comparando los resultados experimentales de la Fig. 4.7a (hélice superior), con los de la Fig. 4.7b (inferior) se observa un cambio de pendiente en el empuje obtenido, siendo mayor el de la hélice superior. Este cambio podría deberse a los efectos de la velocidad de la hélice superior sobre la inferior, al cambiar ángulos de ataque y los respectivos valores de C_l y C_d .

El empuje total obtenido al utilizar hélices de igual diámetro se muestra en la Fig. 4.8. Se observa que, similar al caso del sistema de mono-hélice o sencillo, al aumentar el diámetro de la hélice incrementa el empuje generado. Mientras que los pares de hélices de diámetro menor son capaces de generar niveles de empuje semejantes, consumiendo mayor potencia que los pares de hélices de mayor diámetro.

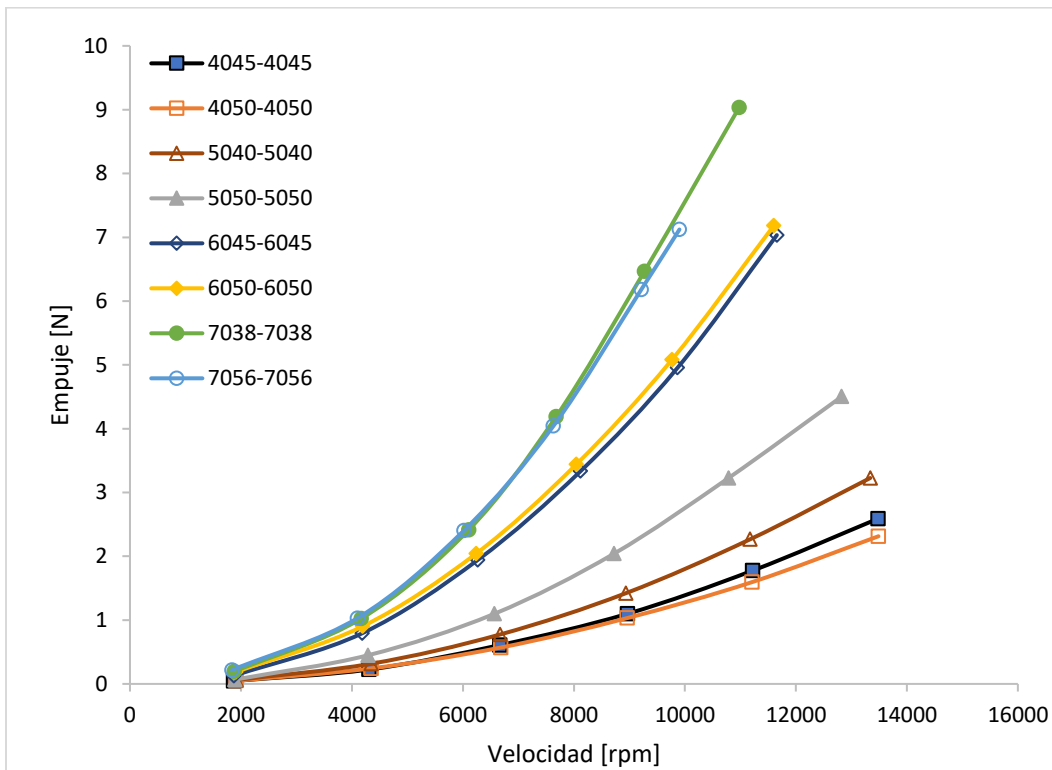


Figura 4.8. Empuje vs. velocidad de rotación para sistema coaxial con hélices del mismo diámetro

Al comparar el cambio del paso entre los pares de hélices de mismo diámetro (Fig. 4.9) se observa que el aumento del paso requiere menos consumo de potencia. Lo anterior se puede observar para el caso de las hélices de 5 y 6 in. Sin embargo, para el caso 7038-7038 y 7056-7056 la hélice de paso menor logra generar mayor empuje. Es posible que las limitaciones del motor (el motor no es capaz de proporcionar la potencia que necesitan las hélices para funcionar a altas rpm) causen esta excepción en las hélices de 7 in.

Comparando con la Fig. 4.4 se observa que se obtiene más potencia en el caso del sistema sencillo. Esto se debe a que con las hélices sencillas se alcanzaban velocidades de rotación más altas rpm que con el sistema

coaxial. La potencia varía con el cuadrado de las rpm como se mostrará más adelante en el análisis de semejanza.

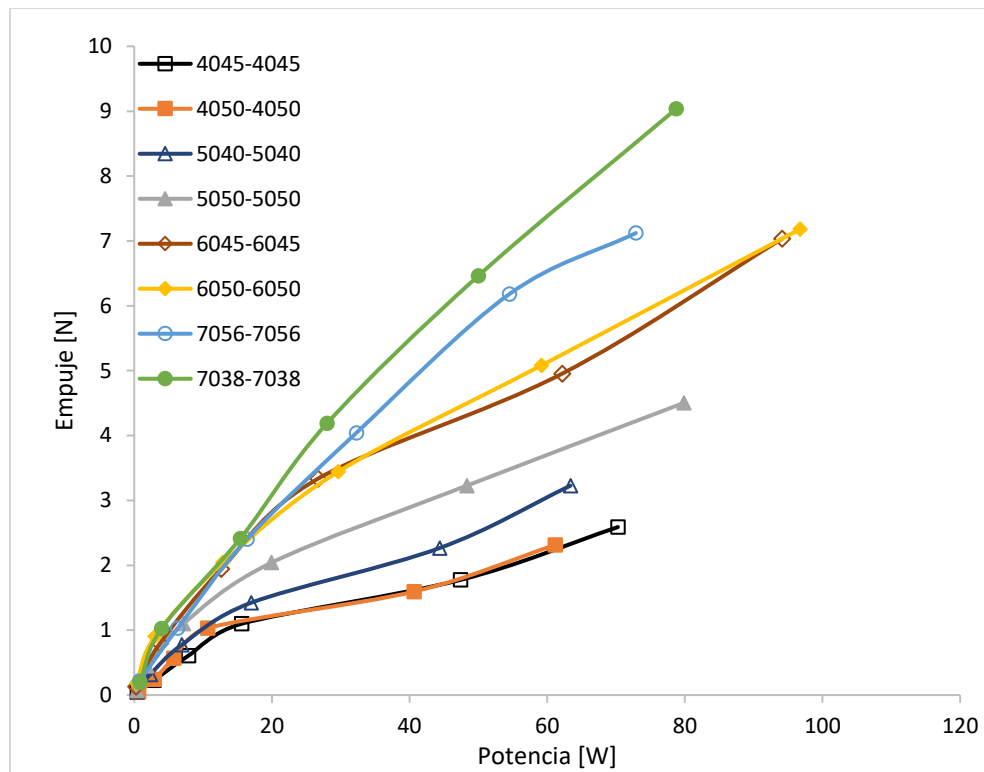
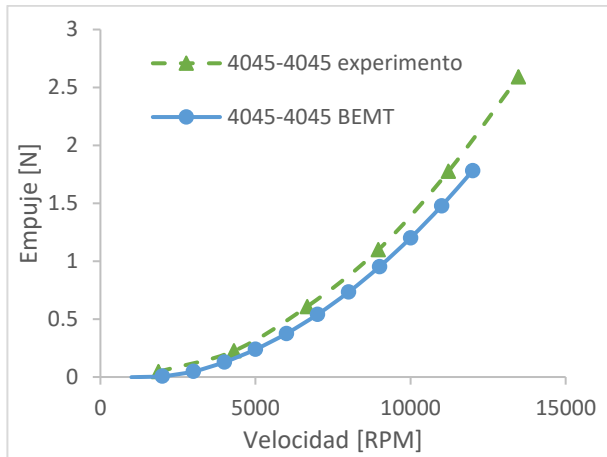
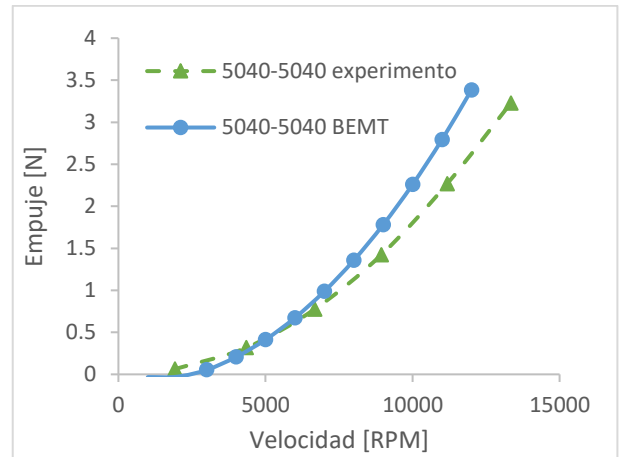


Figura 4.9.. Resultados experimentales para la potencia contra empuje producido para sistema coaxial con hélices del mismo diámetro

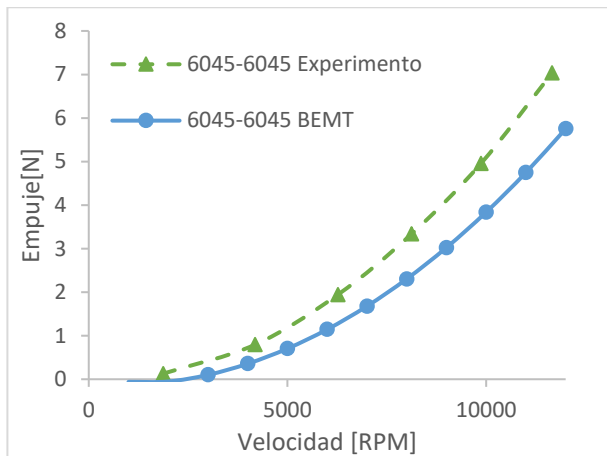
La Fig. 4.10 resume comportamientos individuales para pares de hélices que operan con igual diámetro en un sistema coaxial. Al realizar la comparación de los experimentos con el modelo matemático se observa buena semejanza entre el modelado y los experimentos. Se observa una diferencia máxima de 15%, 17%, 18% y 24% para los casos representados en la Fig. 4.10a-4.10d.



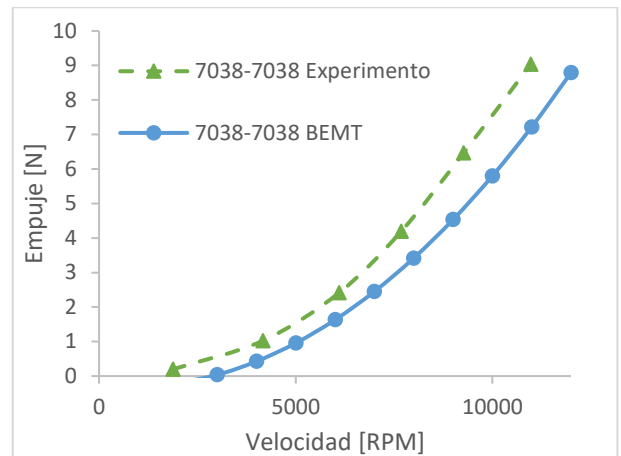
(a)



(b)



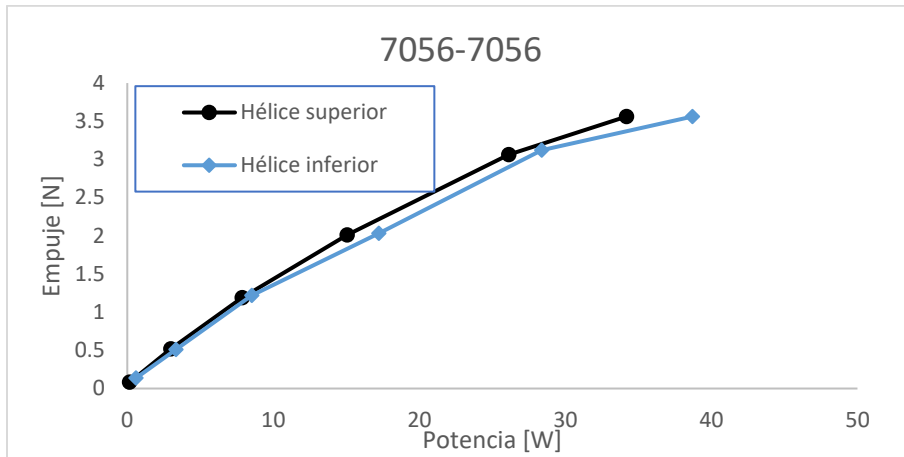
(c)



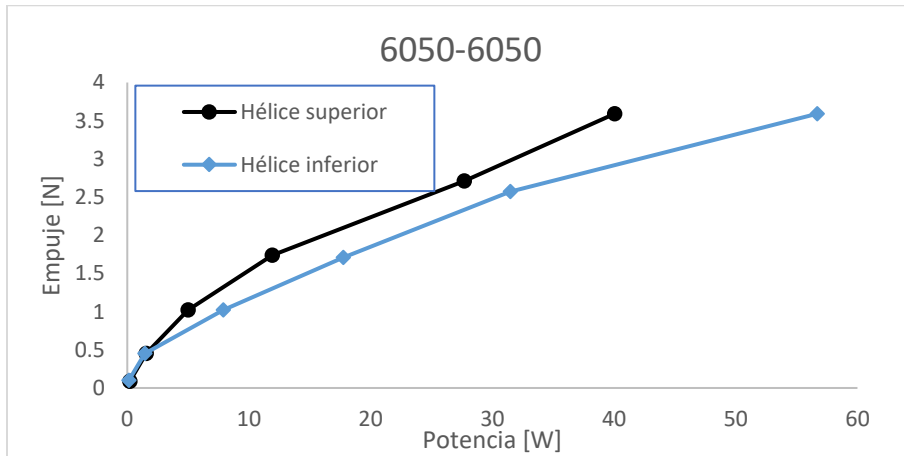
(d)

Figura 4.10. Comparación del modelo matemático con los experimentos para sistema coaxial con hélices del mismo diámetro. a) Hélice 4045-4045; b) Hélice 5040-5040; c) Hélice 6045-6045; d) Hélice 7038-7038.

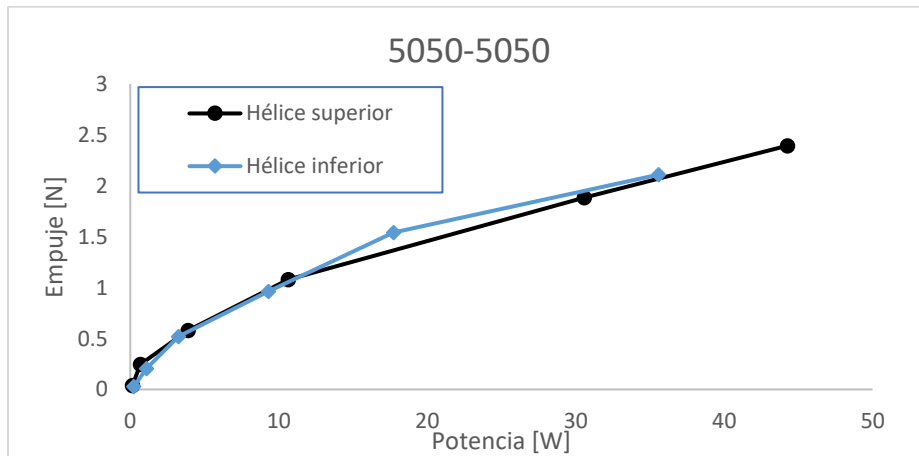
Al analizar el comportamiento del empuje y la potencia consumida por cada hélice del sistema coaxial con hélices del mismo diámetro podemos observar que para los casos de las hélices de 7 y 5 in (Fig. 4.11 (a) y (c)), ambas hélices producen prácticamente el mismo empuje, pero la hélice inferior tiende a consumir mayor potencia. Para el caso de las hélices de 6 pulgadas (Fig. 4.11b), la hélice superior consume mayor potencia generando un nivel de empuje similar.



(a)



(b)



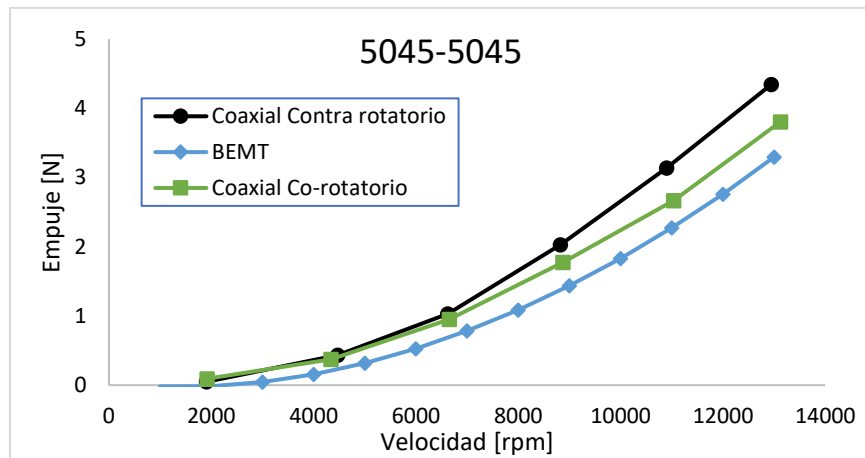
(c)

Figura 4.11. Distribución de la generación de empuje y potencia transmitida entre las hélices superior e inferior del sistema coaxial.

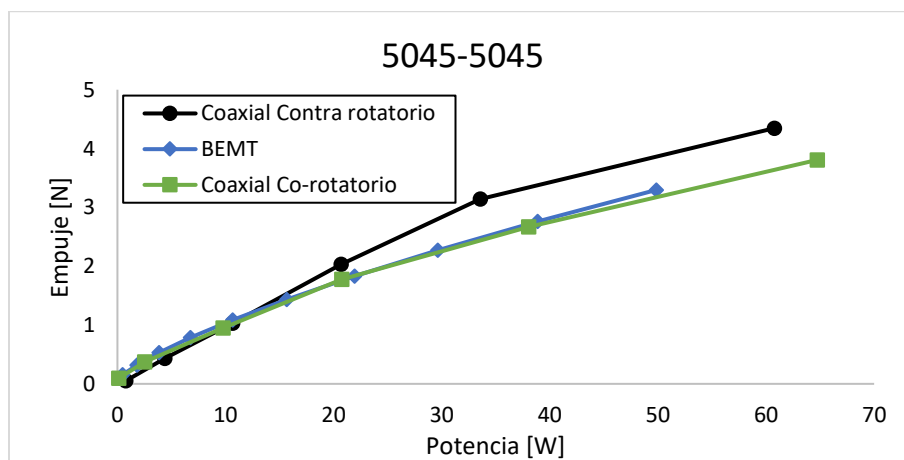
4.3.2 Sistema coaxial con mismo diámetro según dirección de giro

Las Figs. 4.12 a 4.15 introducen resultados de empuje y potencia de las hélices dispuestas con el mismo diámetro superior e inferior, para comprobar la influencia del sentido de giro (co-rotatorio ó contra-rotatorio) sobre el desempeño del sistema coaxial. También se muestra el resultado de la simulación contra rotatoria para el modelo BEMT.

La Fig. 4.12a corresponde al conjunto 5045-5045. El modelo utilizado para comparación se muestra como referencia con línea azul. Aunque es más notoria a velocidades más altas, cuando las hélices giran en sentido opuesto (círculos) obtienen más empuje, a la misma velocidad, que al girar en el mismo sentido.



(a)

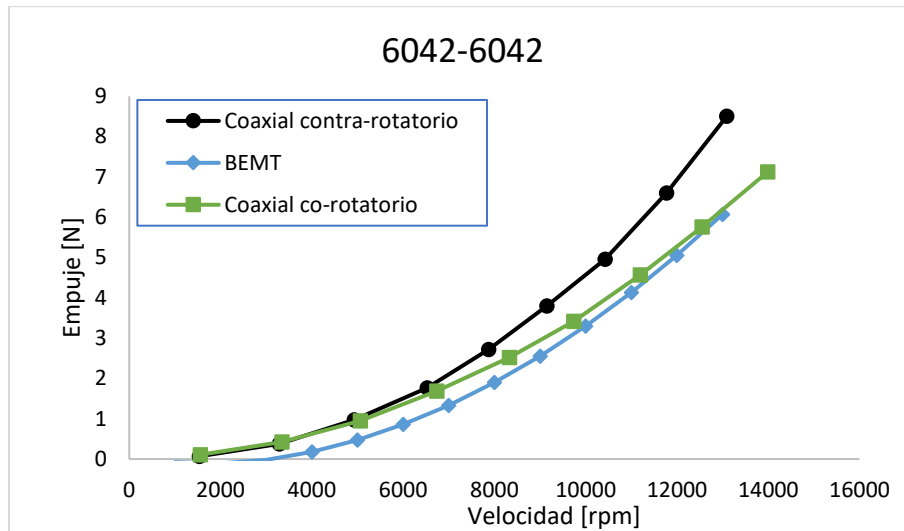


(b)

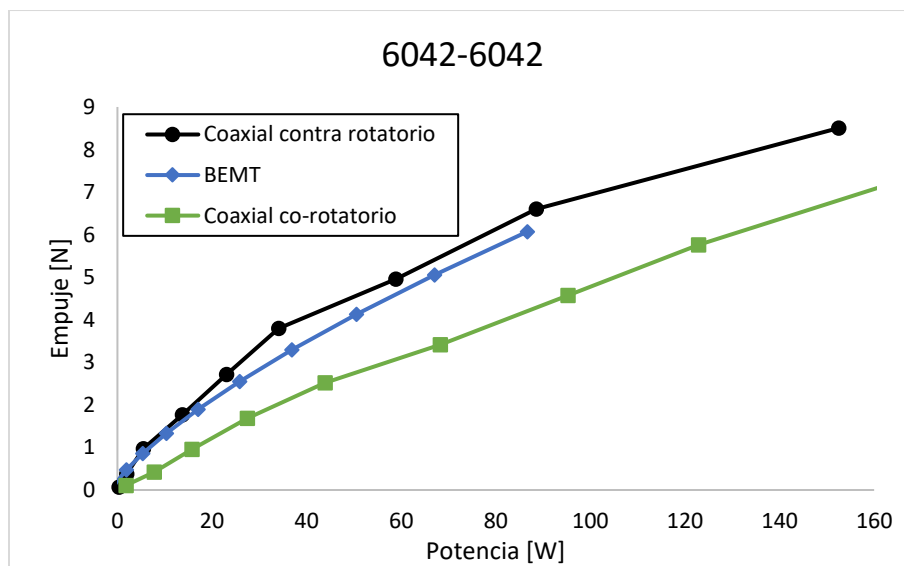
Figura 4.12. Resultados en sentido co-rotatorio y contra rotatorio para el conjunto 5045-5045 (a) Empuje vs velocidad; (b) Potencia vs empuje

La Fig.4.12b permite corroborar lo anterior. Girando en sentidos opuestos, el sistema produce mayor empuje con el mismo requerimiento de potencia.

La Fig. 4.13 muestra resultados para el conjunto 6042-6042. Se observa un comportamiento similar y aplican las mismas conclusiones expuestas en el caso anterior.



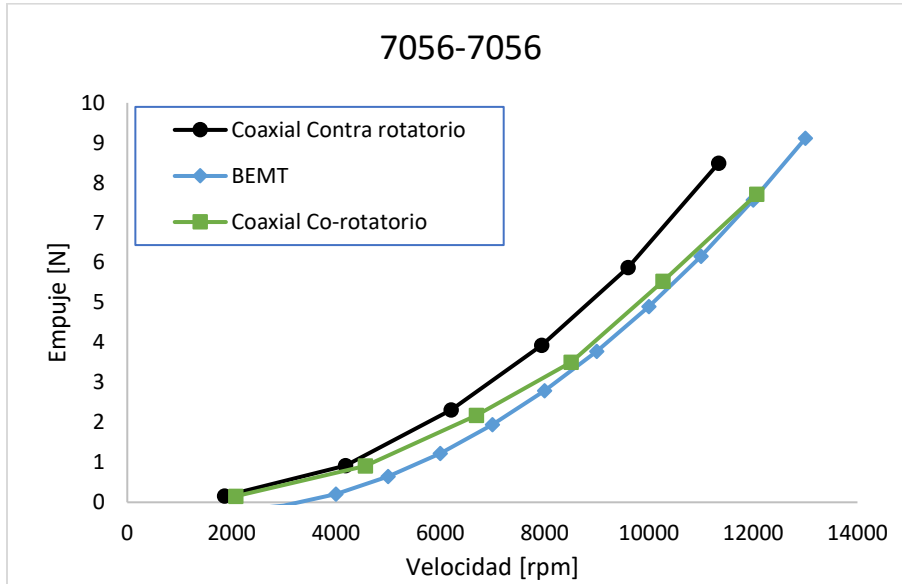
(a)



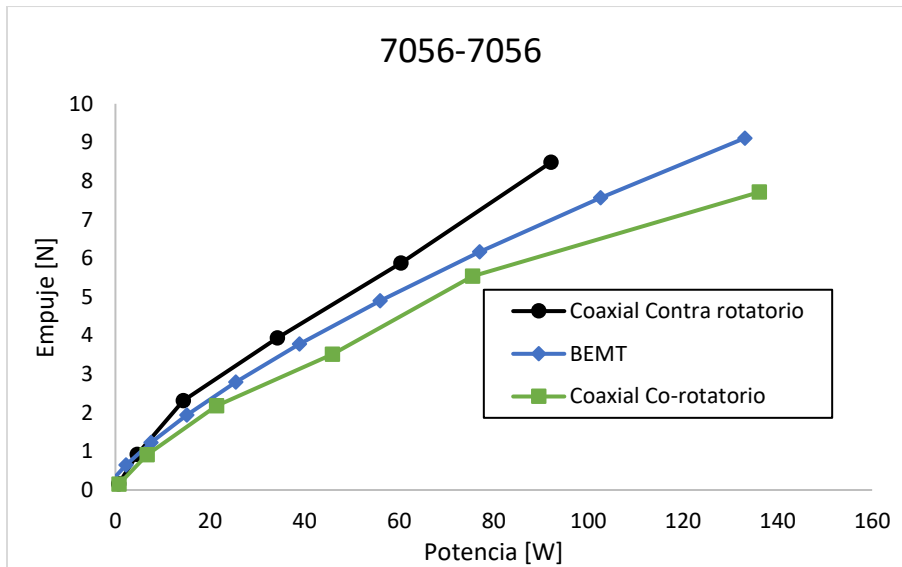
(b)

Figura 4.13. Resultados en sentido co-rotatorio y contra rotatorio para el conjunto 6042-6042 (a) Empuje vs velocidad; (b) Potencia vs empuje

Los mismos parámetros son graficados para el caso 7056-7056 en la Figs. 4.14 a y 4.14 b. Una vez más la operación en modo contra-rotatorio de las hélices presenta mejores resultados para el empuje para el mismo requerimiento de potencia.



(a)



(b)

Figura 4.14. Resultados en sentido co-rotatorio y contra rotatorio para el conjunto 7056-7056 (a) Empuje vs velocidad; (b) Potencia vs empuje

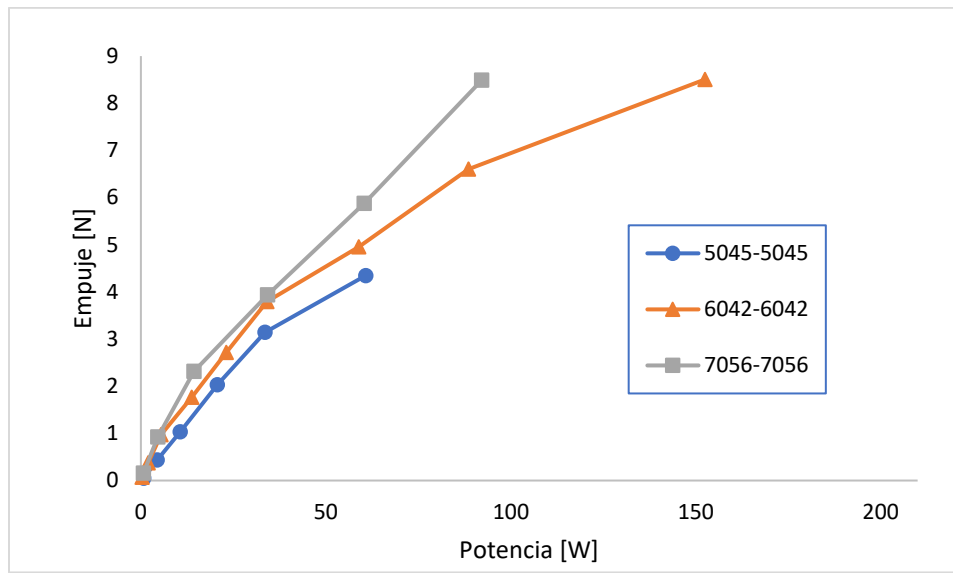


Figura 4.15. Empuje vs potencia para varios conjuntos operando en sentido contra-rotatorio

Los casos analizados (resumidos en la Fig. 4.15) permiten visualizar que utilizar hélices de mismo diámetro, pero con giro contra rotatorio produce mayor empuje consumiendo la misma o incluso menor potencia que utilizando hélices que giran en el mismo sentido. Se observa también el mismo comportamiento entre el modelo matemático y los resultados experimentales.

4.3.3 Sistema coaxial con diámetros distintos

Las Fig. 4.16 a 4.22 muestran los resultados teóricos y experimentales al utilizar diámetros diferentes en la hélice superior e inferior. Al cambiar la configuración del sistema coaxial, colocando hélices de mayor tamaño en la parte superior, se pretende evaluar los resultados de empuje y potencia y observar la influencia del paso.

La Fig. 4.16 ilustra este caso para una hélice superior fija de 7 in de diámetro 7056. Observando por ejemplo el sistema 7056-6050 (gris) y 7056-6030 (amarillo) se aprecia un aumento en el empuje, para una velocidad fija, cuando el paso aumenta en la hélice inferior de 6 in. Lo mismo sucede para el conjunto 7056-5050 (azul) y 7056-5030 (verde). Existe una excepción para el caso de la hélice 7038 (naranja).

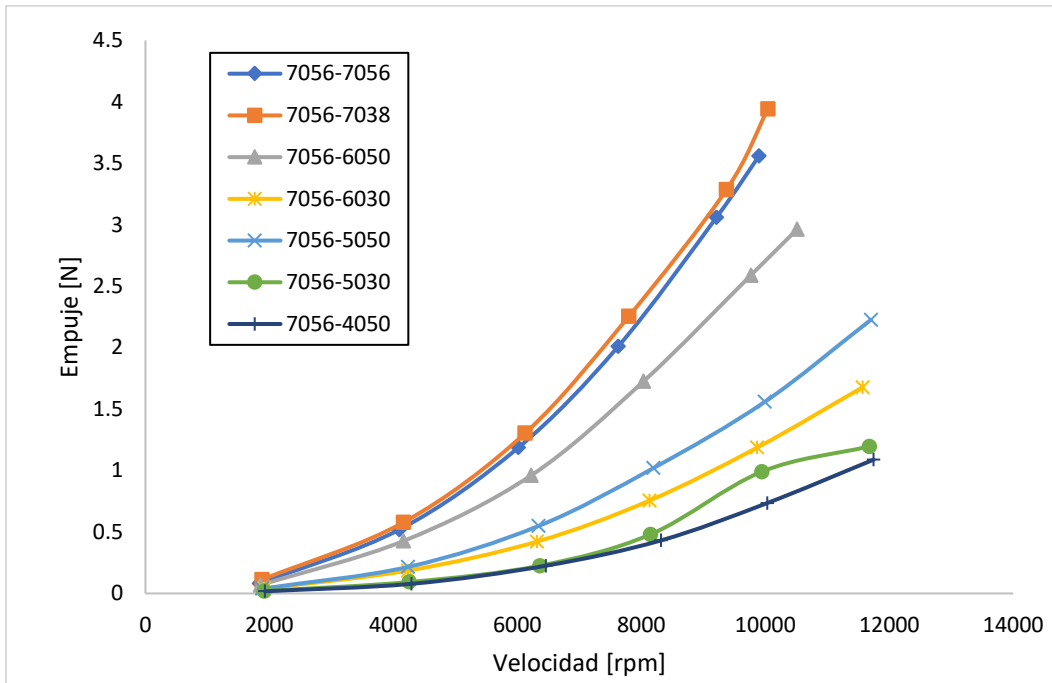
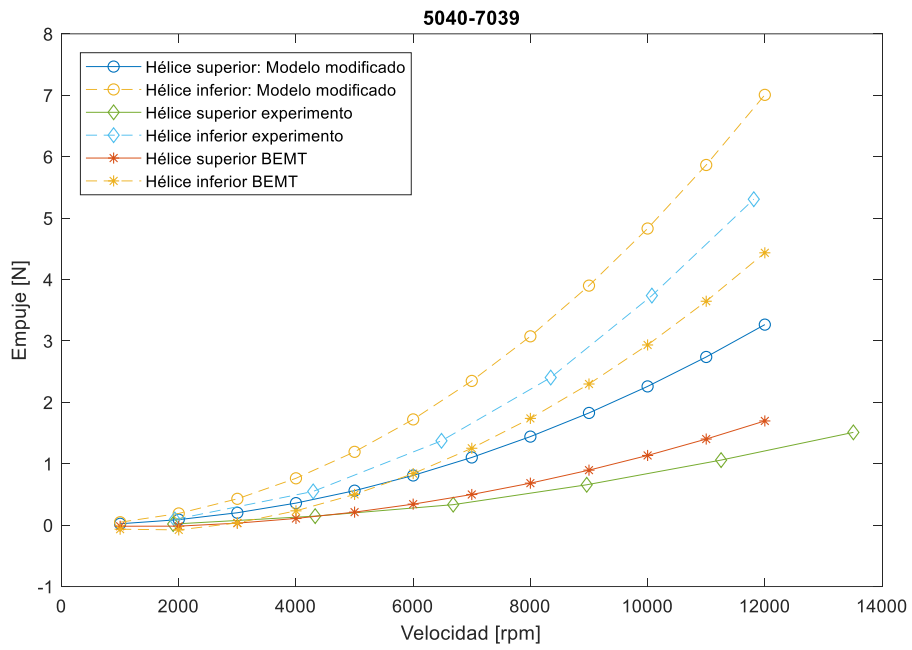


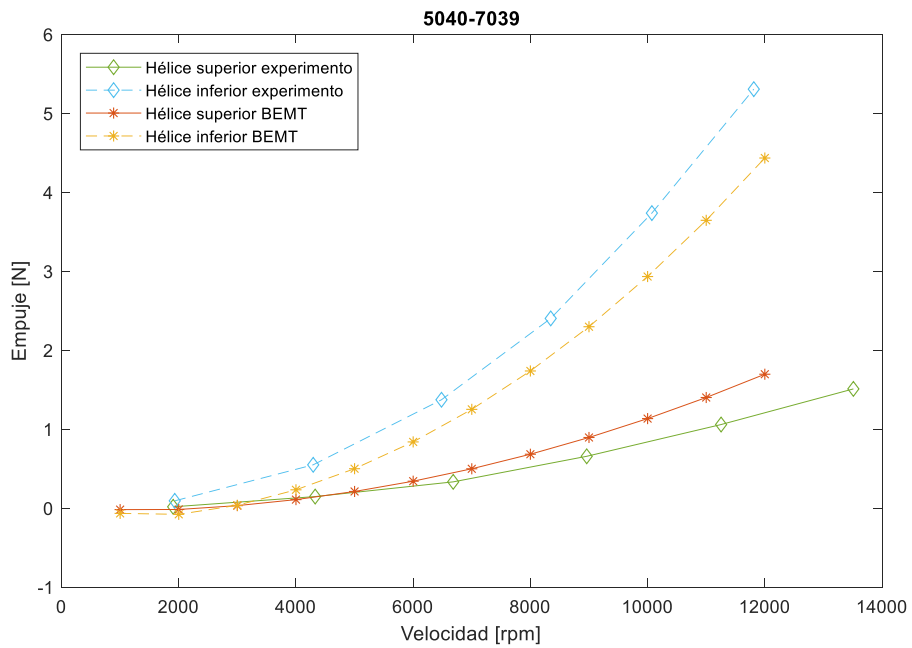
Figura 4.16. Sistema coaxial con hélice superior de mayor diámetro.

Para analizar el caso opuesto en el que el diámetro es menor en la hélice superior se muestra la Fig. 4.17. El conjunto graficado consta de una hélice superior de 5 in y una inferior de 7 (5040-7039). La Fig. 4.17a permite ver que para este caso el modelo modificado sobreestima los datos experimentales. Si se enfoca a los resultados teóricos en el caso de la hélice superior (círculo azul) y los del ensayo (rombo verde) la diferencia puede resultar apreciable mientras aumenta la velocidad. Si se hace la misma comparación, esta vez con los modelos BEMT (asterisco naranja) se observa una menor pendiente y una diferencia mucho más pequeña. Para el caso de la hélice inferior las conclusiones son las mismas, observándose más ajuste entre el modelo básico y los experimentales, esta vez no tan cercano como el caso de la hélice superior. Además, se observa que el BEMT subestima los resultados reales, caso contrario a la hélice superior.

Los mismos resultados se observan en la Fig. 4.17b, ahora suprimiendo la información del modelo modificado. Esto permite visualizar una comparación más clara en cuanto a resultados teóricos y experimentales para ambas hélices (superior e inferior).



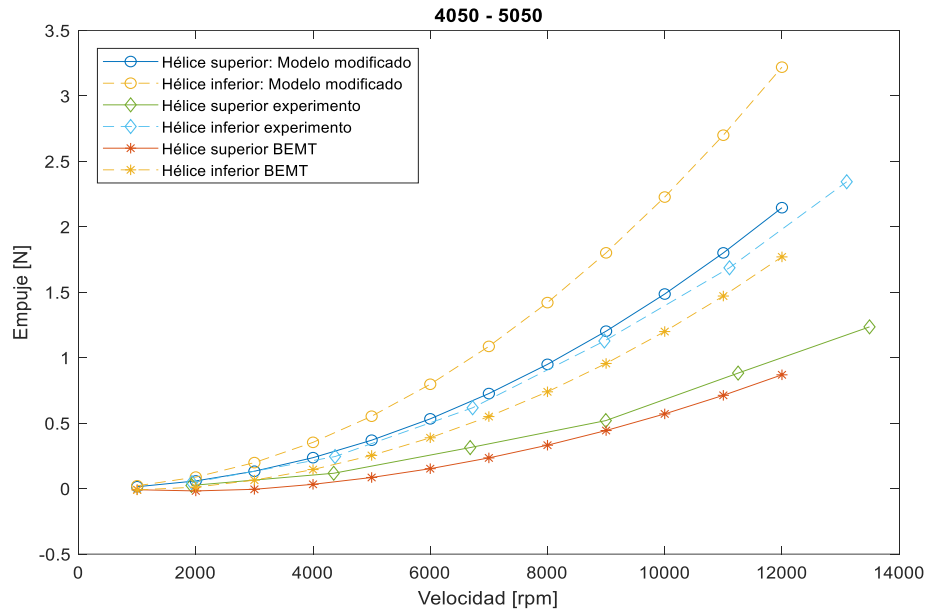
(a)



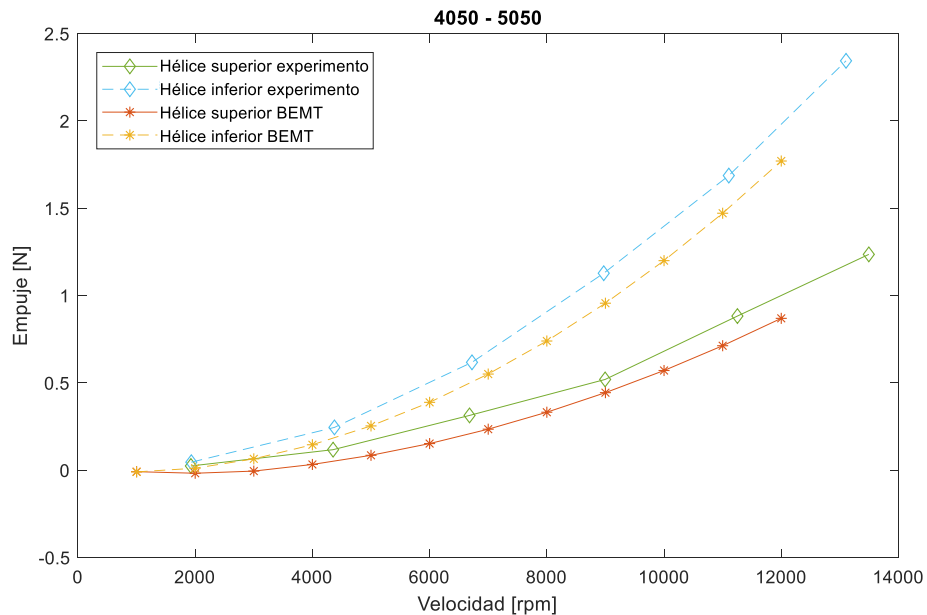
(b)

Figura 4.17. Comparación de empuje teórico y experimental para hélice superior e inferior del conjunto 5040-7039. a) Dos modelos teóricos y datos experimentales; b) Modelo BEMT y datos experimentales.

Las Figs. 4.18a y 4.18b exhiben los mismos resultados, esta vez para el conjunto 4050-5050. Las mismas conclusiones al caso anterior aplican, excepto que esta vez el modelo BEMT (asteriscos) subestima los datos experimentales en ambas hélices (superior e inferior).



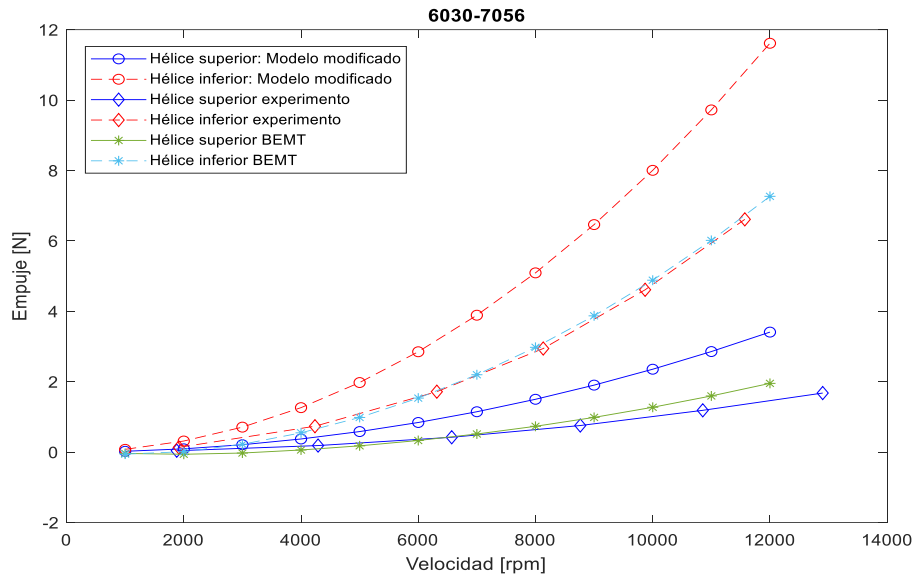
(a)



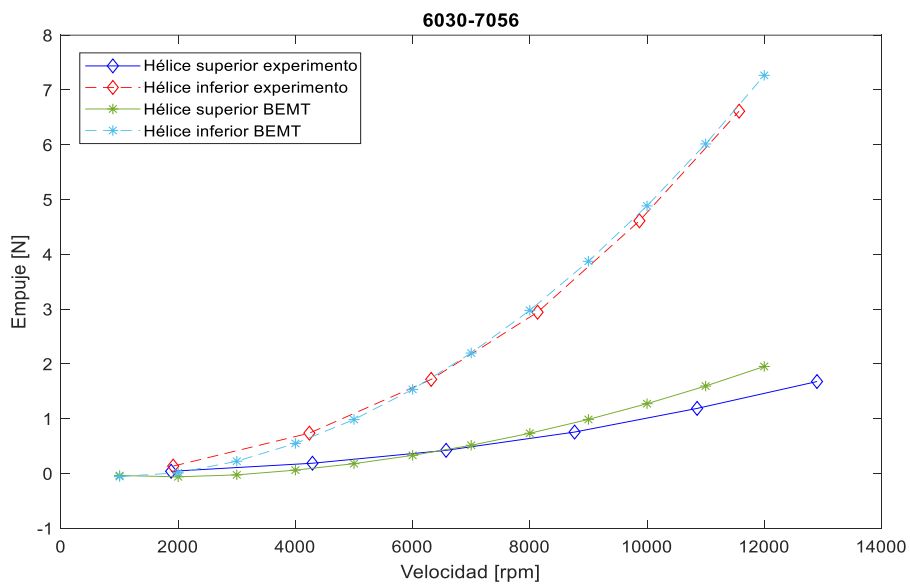
(b)

Figura 4.18. Comparación de empuje teórico y experimental para hélice superior e inferior del conjunto 4050-5050. a) Dos modelos teóricos y datos experimentales.; b) Modelo BEMT y datos experimentales.

Se muestra la comparación teórico-experimental ahora para el conjunto 6030-7056 en la Fig. 4.19. El comportamiento es muy similar a las anteriores en cuanto a tendencia de empuje, crecientes con la velocidad.



(a)



(b)

Figura 4.19. Comparación de empuje teórico y experimental para hélice superior e inferior del conjunto 6030-7056. a) Dos modelos teóricos y datos experimentales.; b) Modelo BEMT y datos experimentales.

En la Fig. 4.19b se ha suprimido el modelo modificado en la comparación. Se aprecia un mejor ajuste entre datos teóricos (BEMT) y experimentales. Asimismo, a partir de un determinado valor de velocidad este modelo sobreestima a los datos reales. Este conjunto de hélices produce más empuje que los analizados anteriormente.

En las Figs. 4.20 a 4.22 se analiza la variación de la posición de las hélices, es decir el efecto que tiene el intercambiar la posición de las hélices. En la Fig. 4.20 se observa que al utilizar el paso mayor en la posición inferior se logra generar mayor empuje consumiendo menos potencia que al tener el paso mayor en la posición superior.

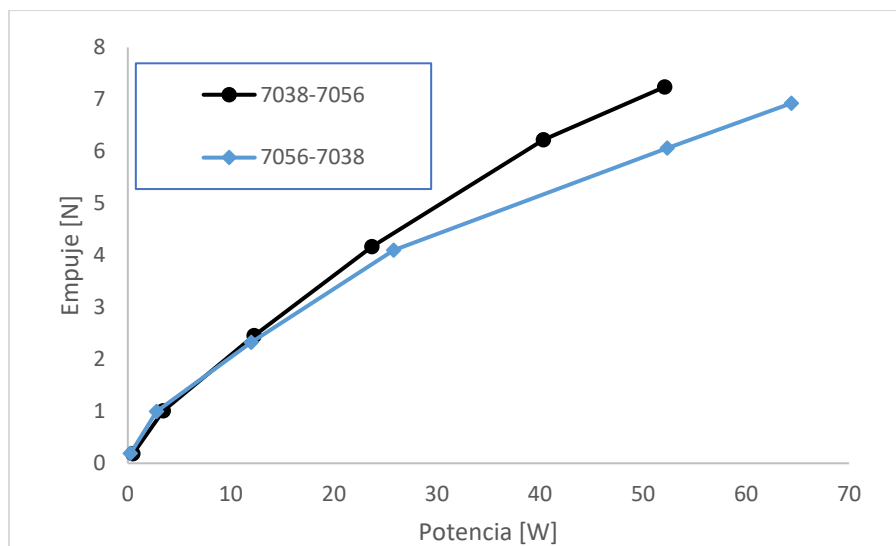


Figura 4.20. Intercambio del paso para sistema coaxial con hélices del mismo diámetro y paso diferente.

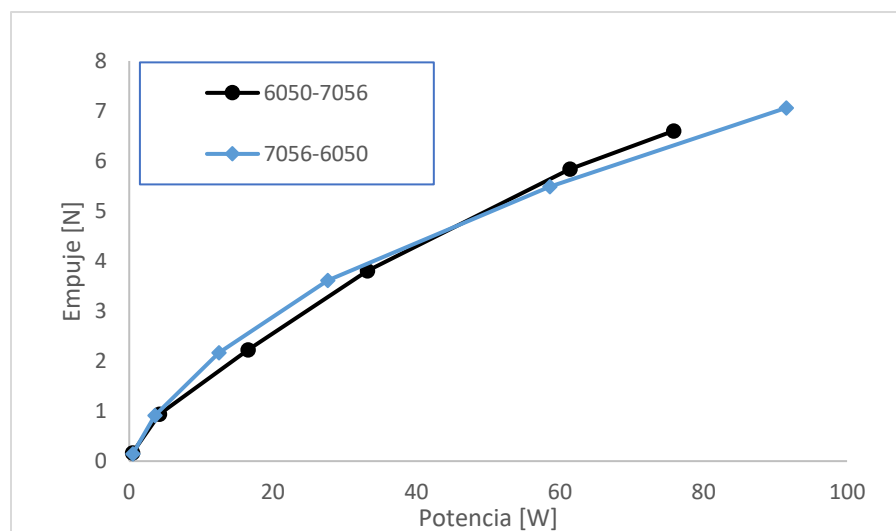
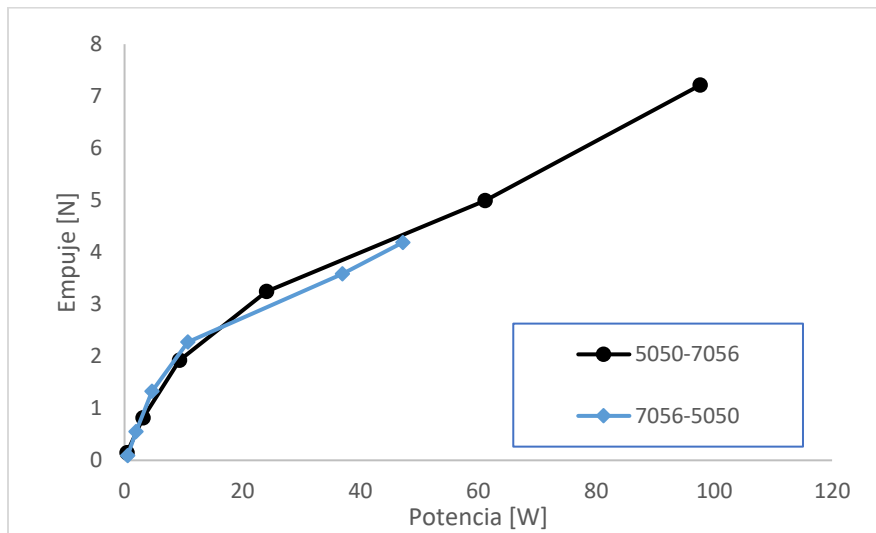


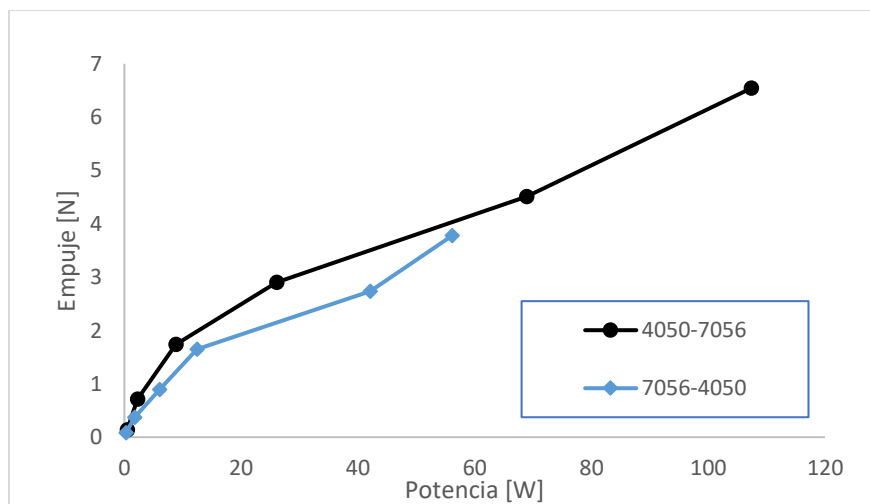
Figura 4.21. Intercambio de diámetros para sistema coaxial.

En la Fig. 4.21 muestra que, para hélices de 6 y 7 in, ambas combinaciones generan el mismo nivel de empuje, pero al tener el diámetro más grande en la hélice superior (7056-6050) se consume más potencia a la velocidad máxima.

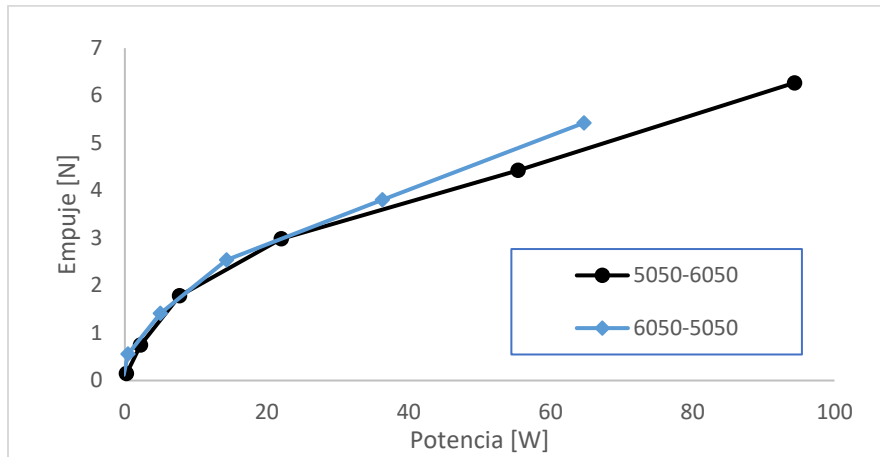
La Fig. 4.22 (a, b, d) ilustra como al utilizar el diámetro más pequeño en la hélice superior (cuando la diferencia entre diámetros es mayor igual a 2 in) se genera hasta el doble de empuje. No obstante, al utilizar hélices de diámetro similar (diferencia entre diámetros de 1 in) como se muestra en la Fig. 4.22 (c, e), el empuje mejora menos de 25% cuando la hélice de menor diámetro está en la posición superior.



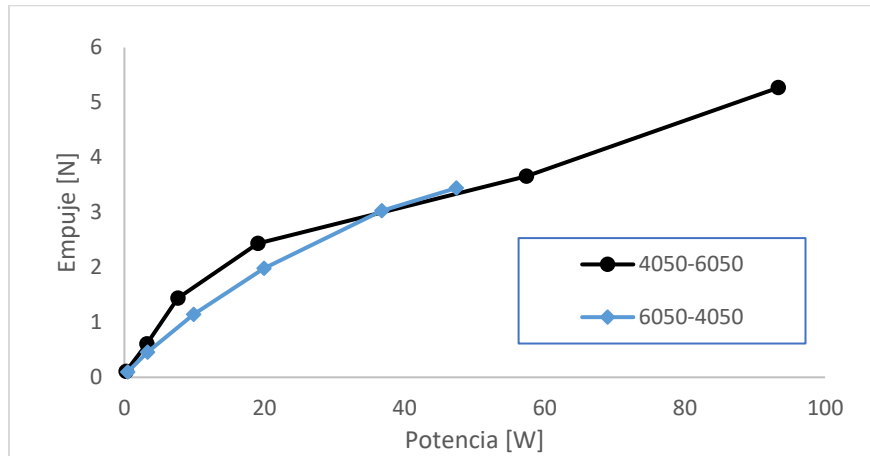
(a)



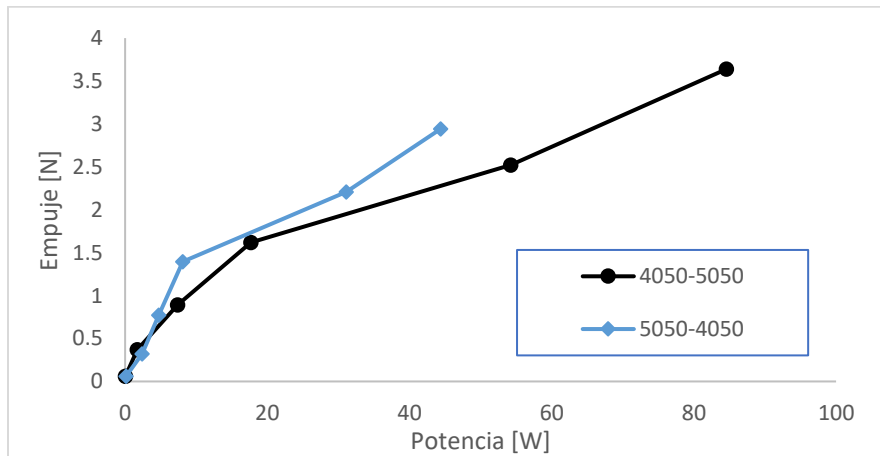
(b)



(c)



(d)



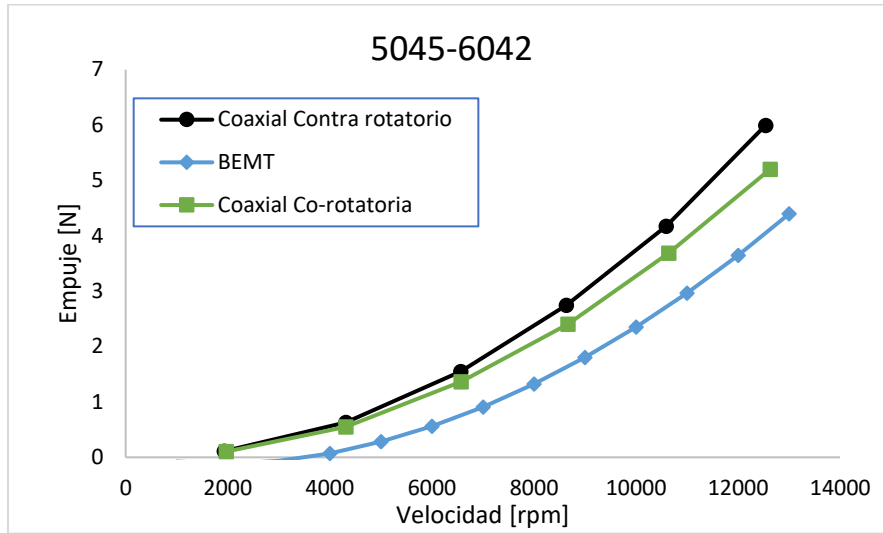
(e)

Figura 4.22. Intercambio de diámetros para sistemas coaxiales. (a) hélices de 5 y 7 in; (b) hélices de 4 y 7 in; (c) hélices de 5 y 6 in; (d) hélices de 4 y 6 in; (e) hélices de 4 y 5 in.

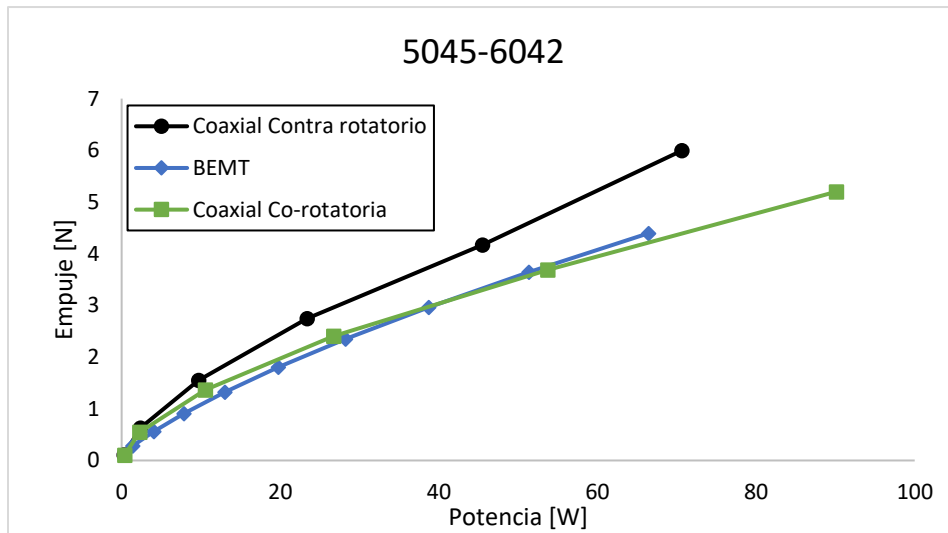
4.3.1 Sistema coaxial con distinto diámetro según dirección de giro

Las Figs. 4.23 a 4.25 presentan resultados de empuje y potencia de las hélices dispuestas con diámetro diferente superior e inferior, para observar el efecto del sentido co-rotatorio ó contra-rotatorio sobre el desempeño del sistema coaxial.

Al igual que en el caso de operación con hélices de igual diámetro, en general se observa un empuje mayor al operar en sentido de giro opuestos. El modelo BEMT se muestra en azul para cotejo.



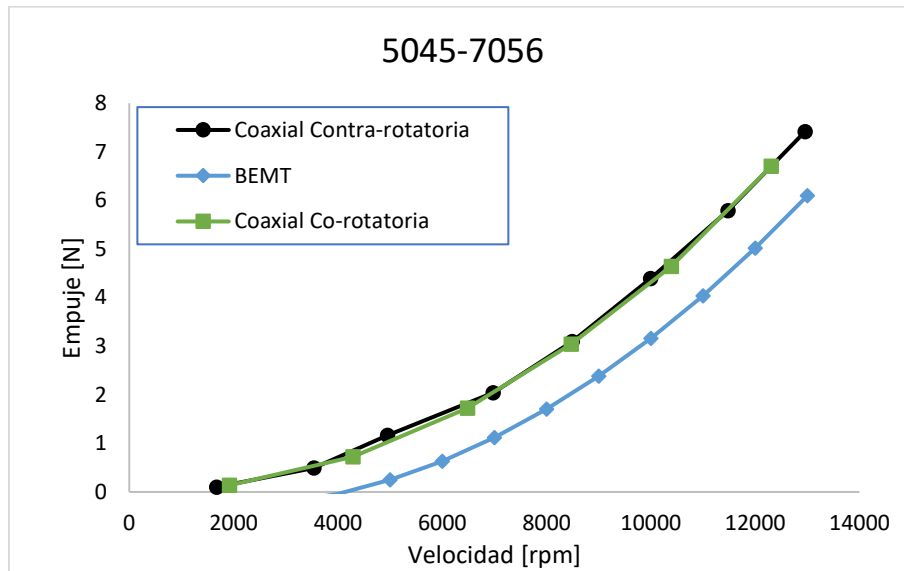
(a)



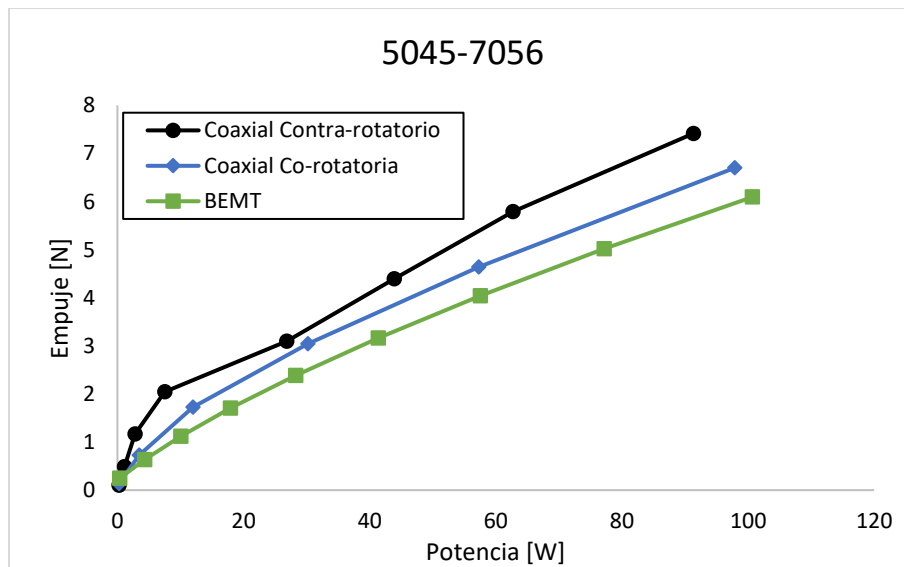
(b)

Figura 4.23. Resultados en sentido co-rotatorio y contra rotatorio para el conjunto 5045-6042 (a) Empuje vs velocidad; (b) Potencia vs empuje

Los mismos comentarios son válidos para los casos 5045-7056 solo que en este par no se observa influencia del sentido de giro a una velocidad fija, pero la Fig. 4.24b ayuda a notar que para la misma potencia en sentido contra-rotatorio se produce más empuje.



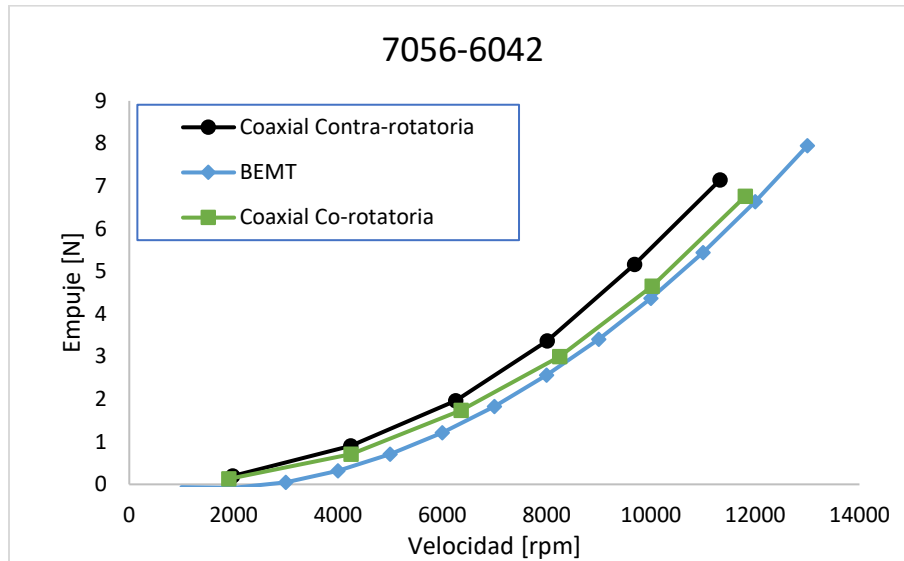
(a)



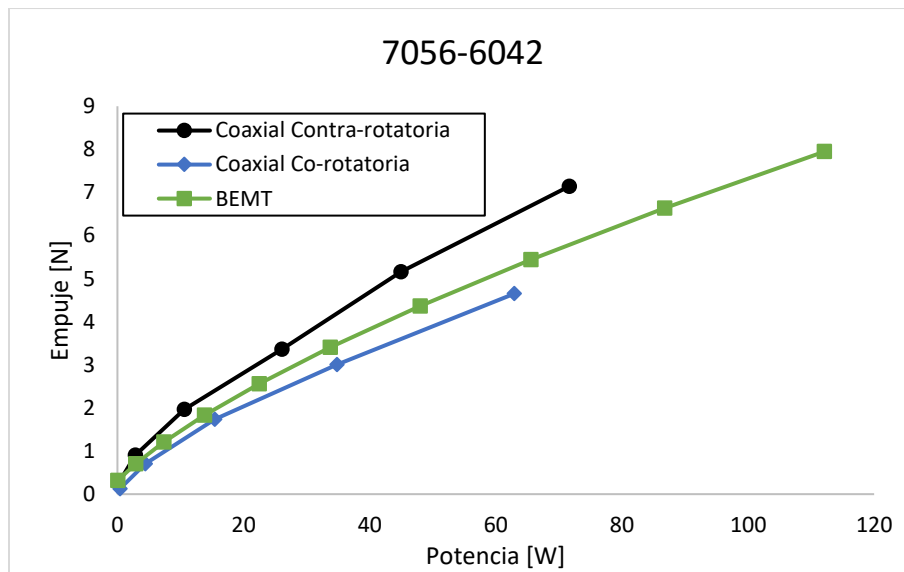
(b)

Figura 4.24. Resultados en sentido co-rotatorio y contra rotatorio para el conjunto 5045-7056 (a) Empuje vs velocidad; (b) Potencia vs empuje

Para el caso 7056-6042 (Fig. 4.25a y Fig. 4.25b) también se observa mejor desempeño en operación contrarrotatoria.



(a)



(b)

Figura 4.25. Resultados en sentido co-rotatorio y contra rotatorio para el conjunto 7056-6042 (a) Empuje vs velocidad; (b) Potencia vs empuje

Al igual que en caso de sistemas con el mismo diámetro, se observa que al utilizar hélices que giran en sentido opuesto se puede generar un empuje mayor utilizando la misma potencia.

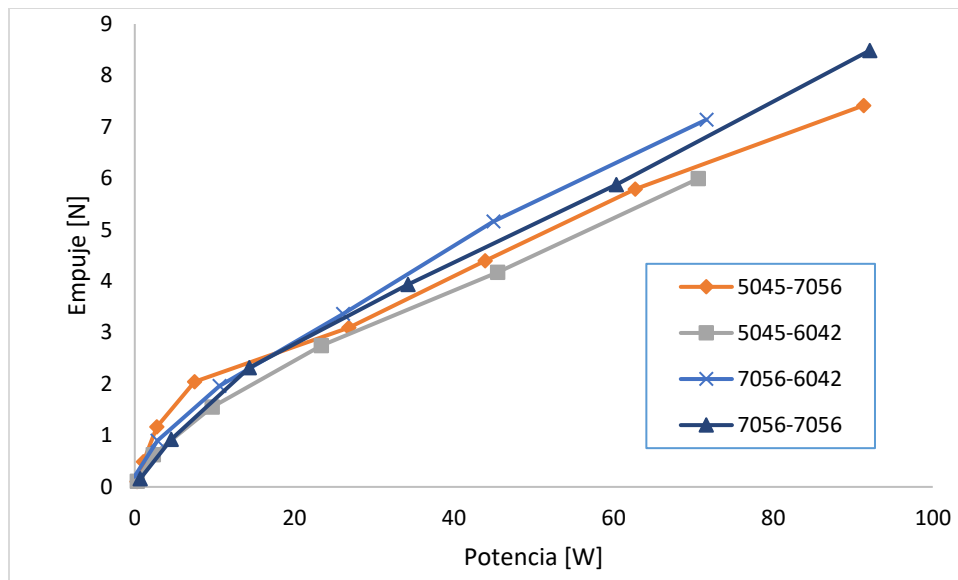
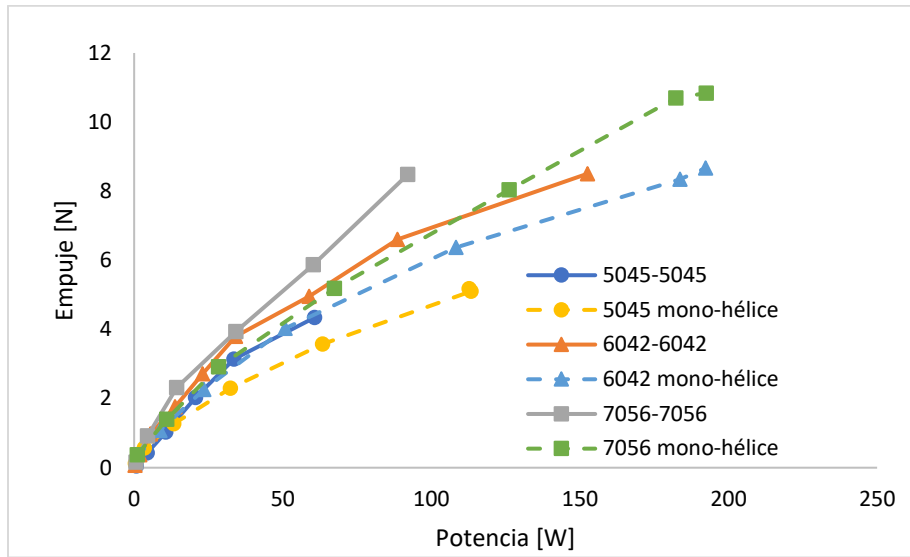


Figura 4.26. Empuje vs potencia para conjuntos coaxiales de diámetro diferente operando en sentido opuesto

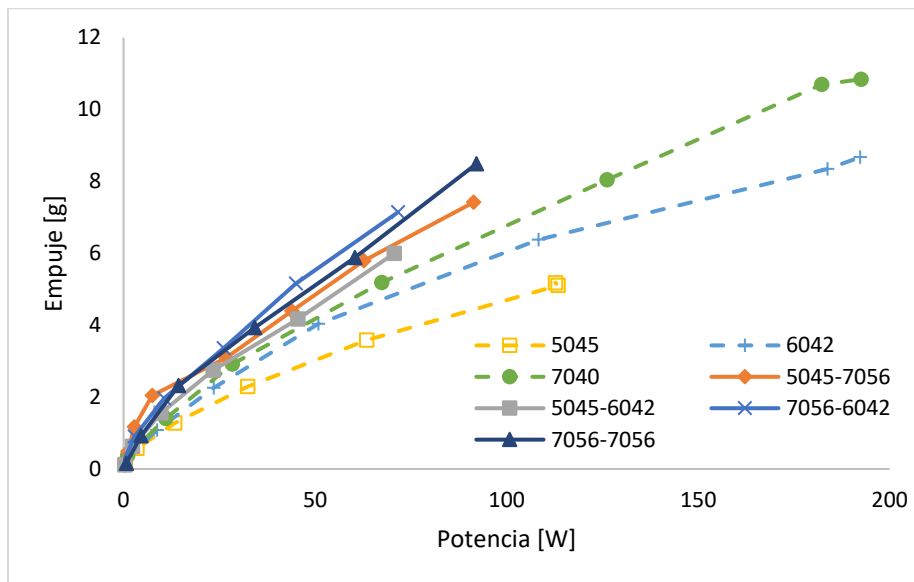
La Fig. 4.26 puede dar una idea acerca del peso del diámetro cuando las hélices operan en sentido contrarrotatorio. A mayor diámetro superior se obtiene una leve mejora en el empuje.

4.3.2 Sistema de hélices sencillo vs coaxial

Con base a los resultados presentados en las secciones anteriores, surge la cuestión de comparar los sistemas sencillo y coaxial. Las Fig. 4.27 resumen los resultados para los casos de diámetros iguales o distintos-



a)



(b)

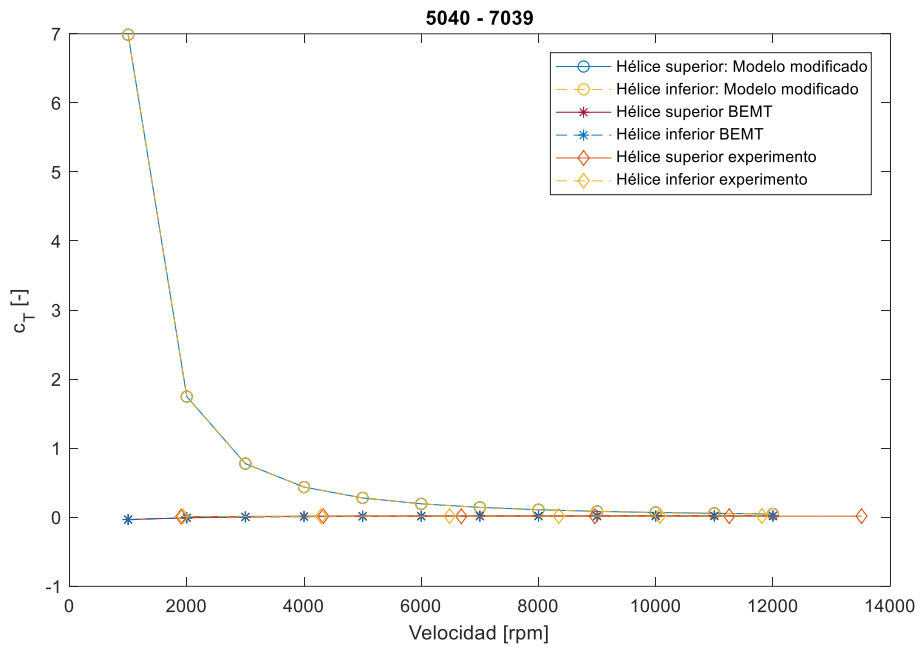
Figura 4.27. Comparación del sistema mono-hélice y coaxial. a) Coaxial diámetro igual; b) coaxial diámetro diferente.

Los resultados experimentales obtenidos al operar el sistema coaxial con diámetros iguales se ilustran en la Fig. 4.27a. Para un valor de potencia determinado, p. ej. 50W, se demuestra que el sistema coaxial 5045-5045 obtiene más empuje que el sistema sencillo con la misma hélice. Lo mismo sucede con las hélices de 6 in. Aunque es más difícil comparar el caso de las hélices de diámetro distinto, se muestran como referencias varios resultados para comprar en la Fig. 4.27b. En general, se observa que el sistema de hélice coaxial arroja una mejor relación empuje-potencia. El sistema de mono-hélice es capaz de generar niveles iguales o mayores de empuje que el coaxial, pero a cambio de consumir de 20% a 100% más energía.

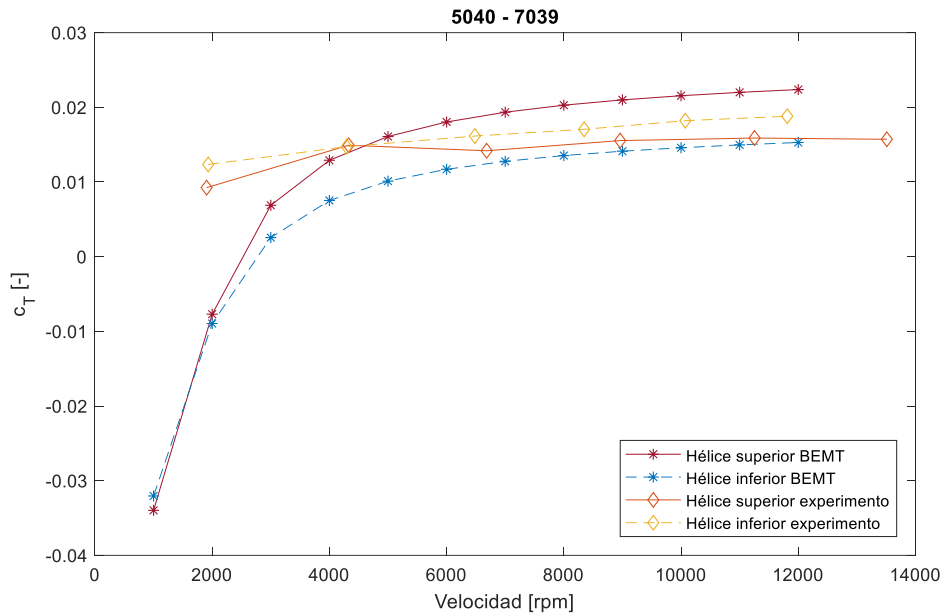
4.3.3 Coeficiente de empuje

Las Figs. 4.28 a 4.30 reportan resultados correspondientes al coeficiente de empuje C_T contra la velocidad angular de las hélices en varios conjuntos coaxiales ensayados.

Los resultados correspondientes al conjunto 5040-7039 se exponen en la Fig. 4.28a. en la cual se grafican los valores del modelo modificado, siendo muy superiores a los experimentales y a los obtenidos con BEMT. En la Fig. 4.28b se anula este modelo y se observa con mucho más detalle el comportamiento del coeficiente de empuje. A partir de 4000 rpm los cálculos teóricos y experimentales difieren poco. A valores inferiores de velocidad los resultados numéricos manifiestan una pendiente que hace que el error se incremente debido a los ángulos de entrada del aire y velocidades inducidas por las secciones de la hélice que provocan un empuje negativo.



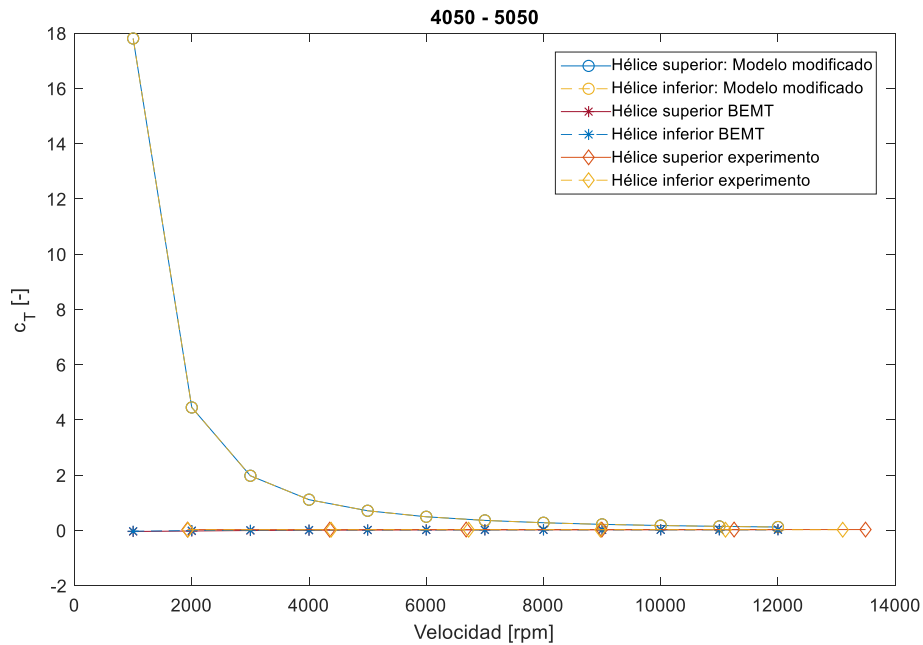
(a)



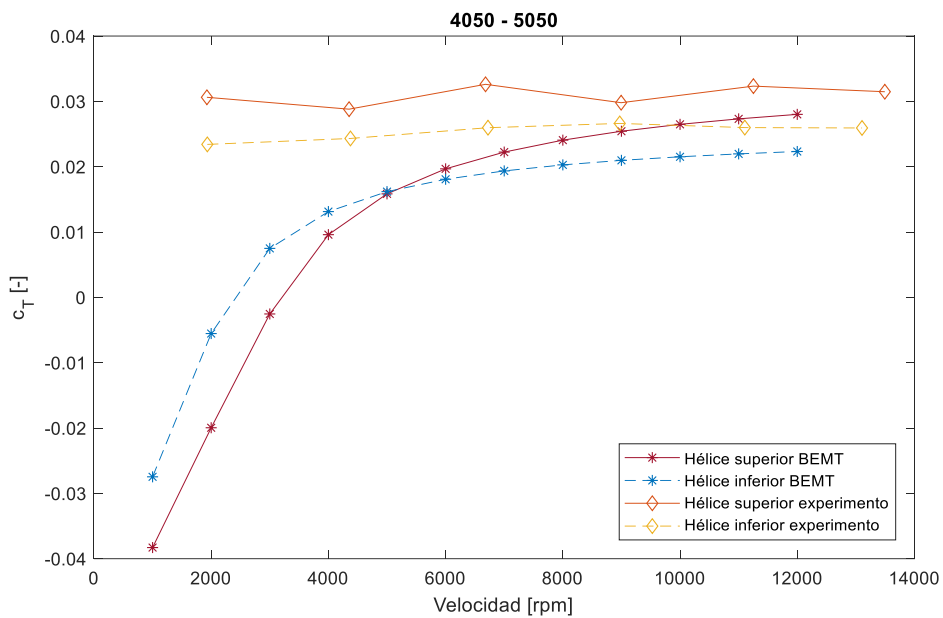
(b)

Figura 4.28. Comparación de coeficiente de empuje teórico y experimental para hélice superior e inferior del conjunto 5040-7030. a) Dos modelos teóricos y datos experimentales.; b) Modelo BEMT y datos experimentales.

Los mismos parámetros y resultados pueden apreciarse en las Figs.4.29 y 4.30 para el caso de los conjuntos 4050-5050 y 6030-7056. Los valores del cambio de pendiente de los datos teóricos se observan a diferentes rpm.



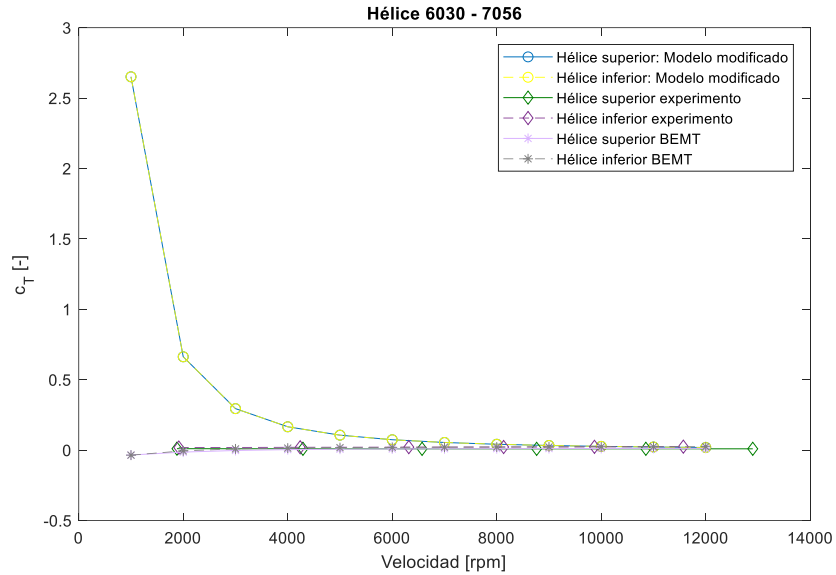
(a)



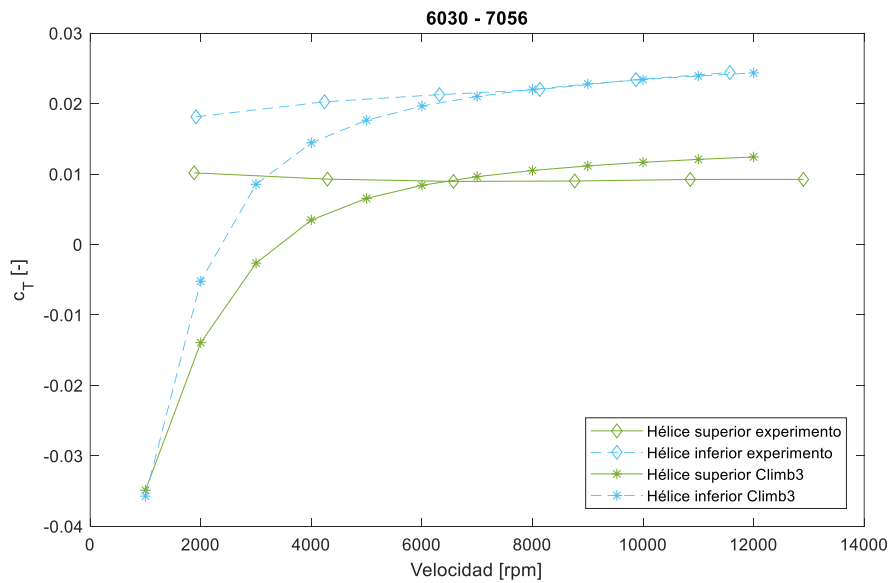
(b)

Figura 4.29. Comparación de coeficiente de empuje teórico y experimental para hélice superior e inferior del conjunto 4050-5050. a) Dos modelos teóricos y datos experimentales.; b) Modelo BEMT y datos experimentales.

Los resultados negativos del C_T se explican por la dependencia de los ángulos de ataque con el paso de la hélice y el ángulo de entrada del aire, los cuales pueden ocasionar que el perfil aerodinámico que compone el asa de la hélice genere un empuje teórico negativo.



(a)



(b)

Figura 4.30. Comparación de coeficiente de empuje teórico y experimental para hélice superior e inferior del conjunto 4050-5050. a) Dos modelos teóricos y datos experimentales.; b) Modelo BEMT y datos experimentales.

Al utilizar las hélices más grandes se observa cómo se incrementa la precisión de BEMT, especialmente al trabajar con coeficientes adimensionales.

4.4. Simulación de hélices comerciales

A continuación, se expone en la Fig. 4.31 el resultado de la simulación de hélices disponibles comercialmente. Esta simulación se realiza para proporcionar a la empresa una idea del desempeño que pueden presentar las hélices que recomienda el fabricante. La nomenclatura de estas hélices consta primero del diámetro por el paso, ambos en pulgadas. Por ejemplo, la primera (15x5) es de 15 in de diámetro y 5.5 in de paso. La X indica estos datos de la hélice y la Y indica el empuje que genera esa hélice a 60% de la velocidad del motor utilizado.

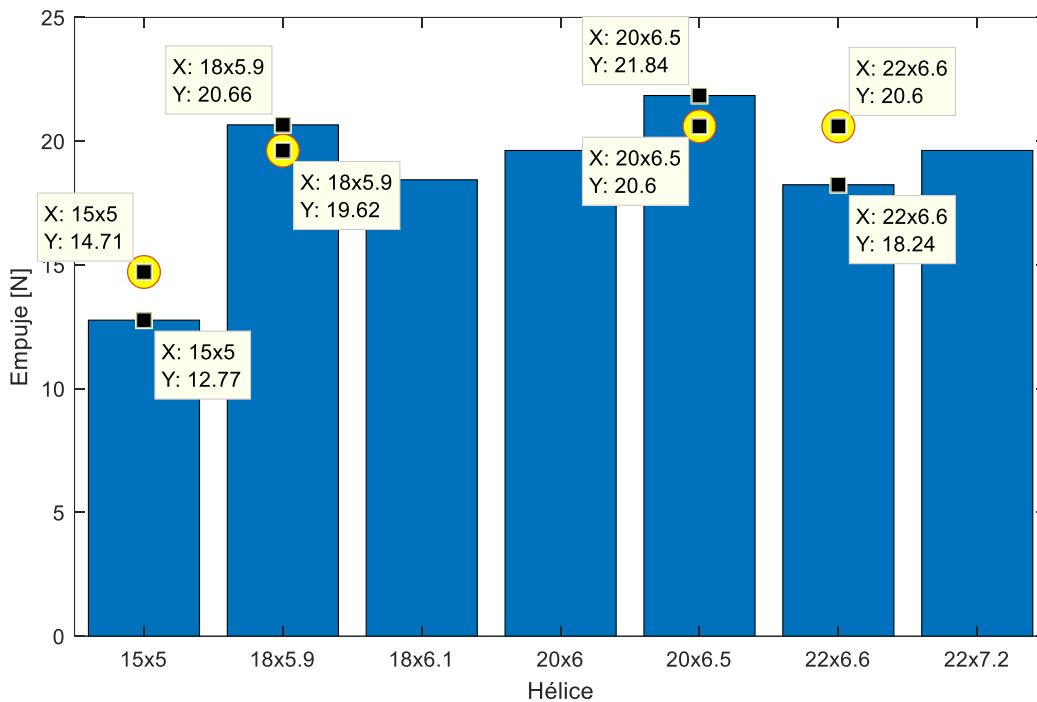
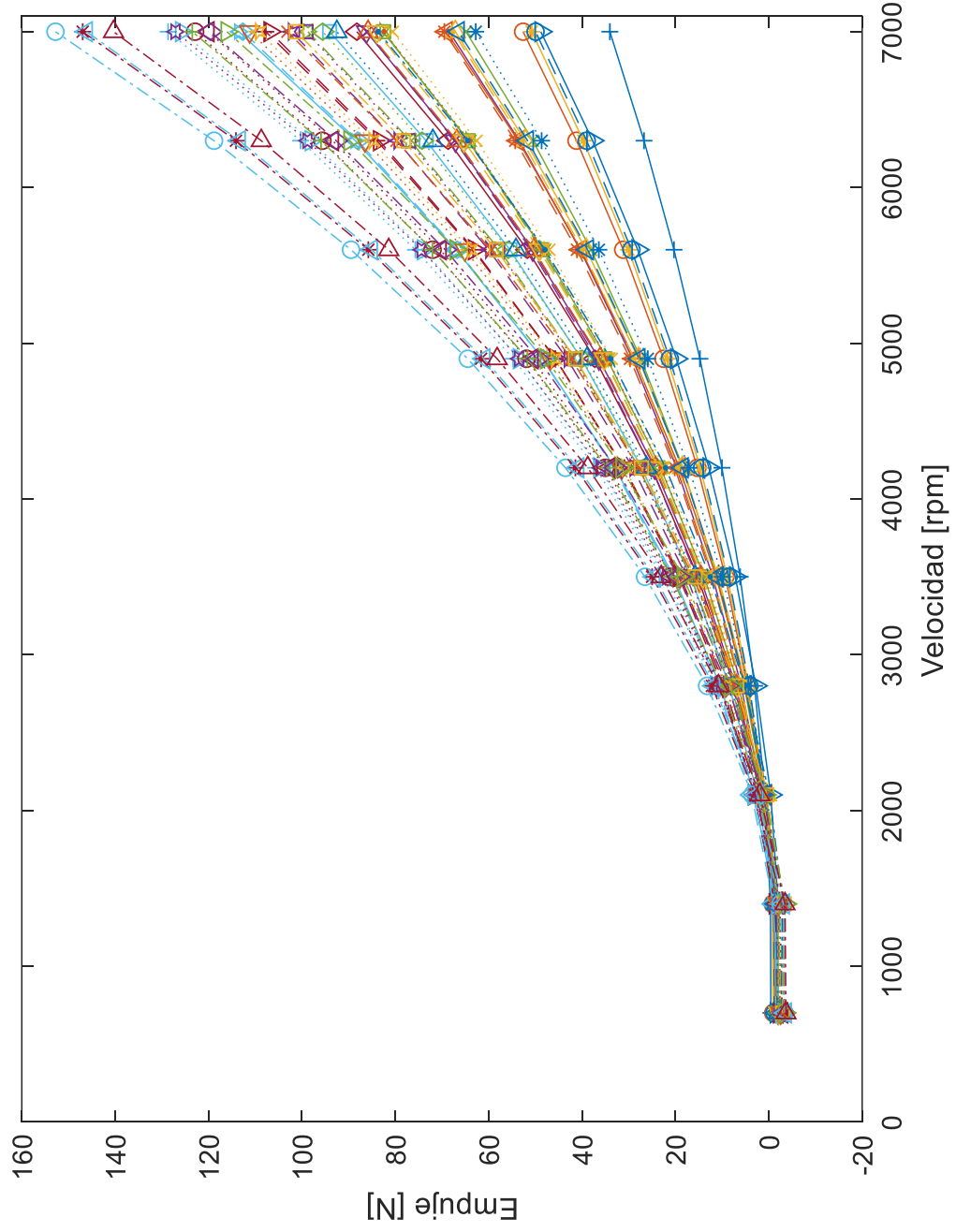
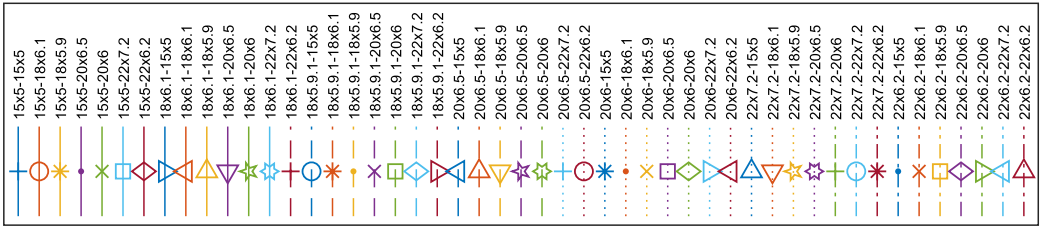


Figura 4.31. Empuje de hélices disponibles comercialmente a 60% de velocidad

Las barras corresponden también al 60% de la velocidad. Se observan diferencias entre 5 y 11%.

Al realizar el análisis de todas las combinaciones de hélices coaxiales disponibles se obtiene la Fig. 4.32



(a)

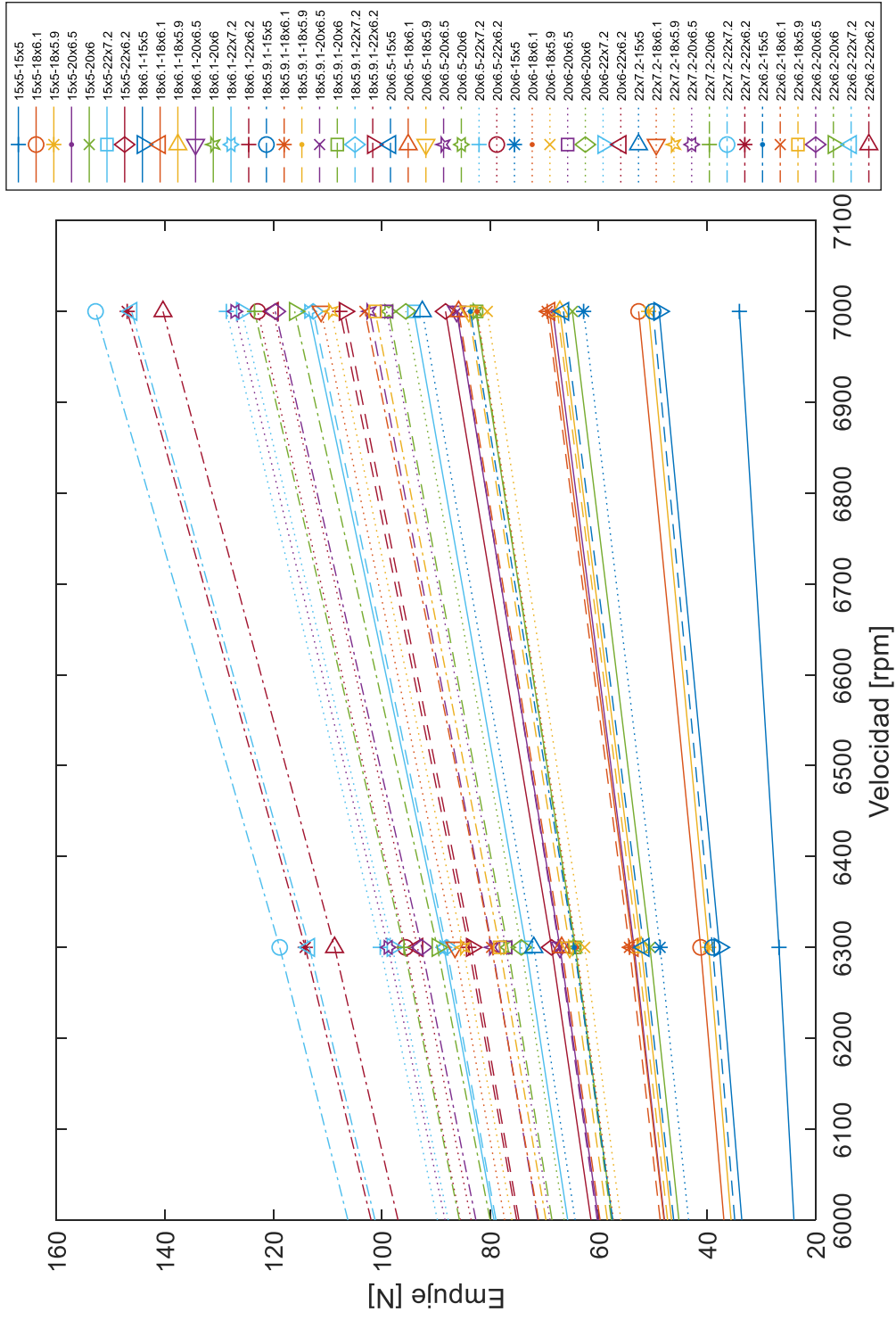
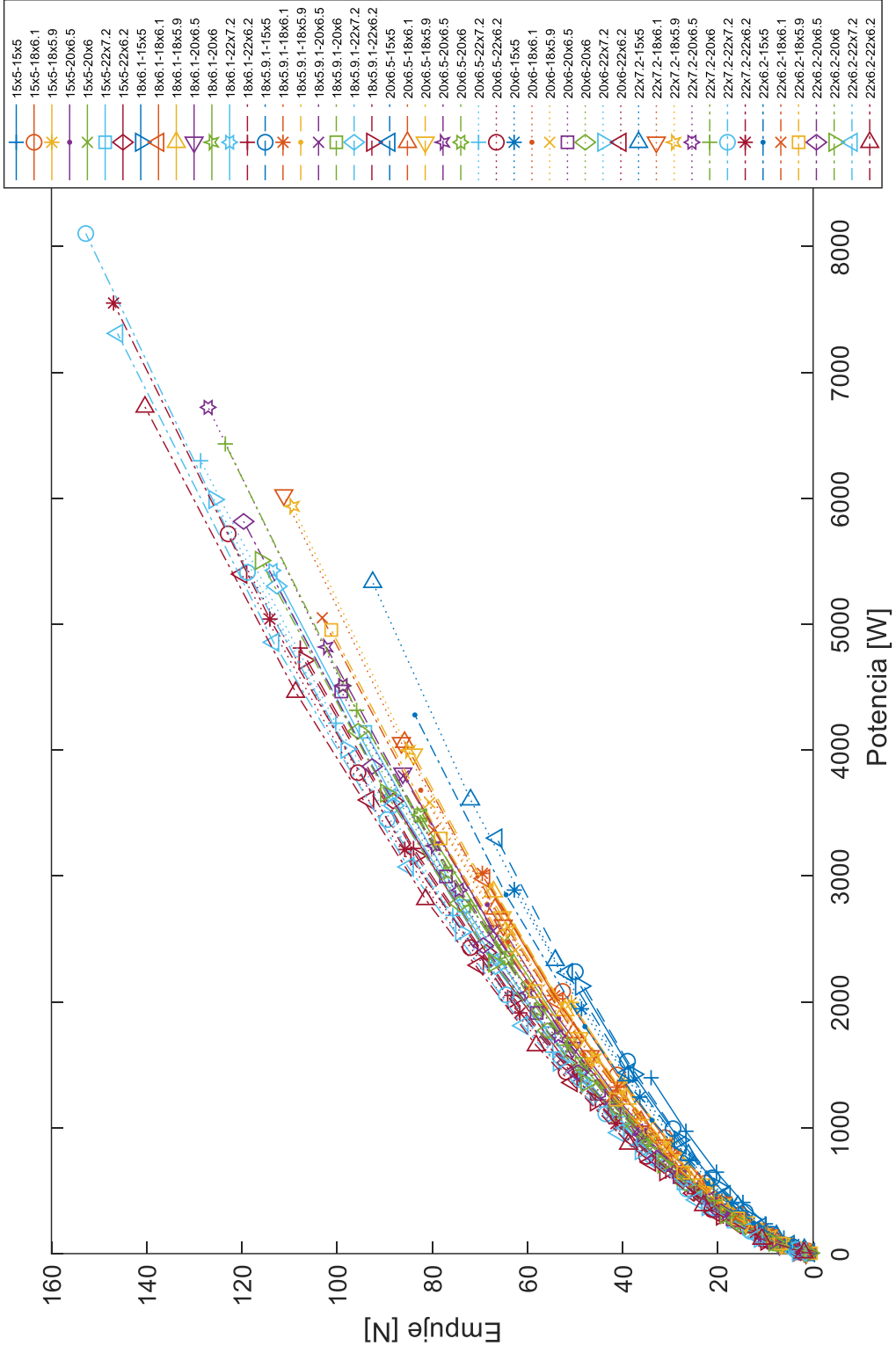


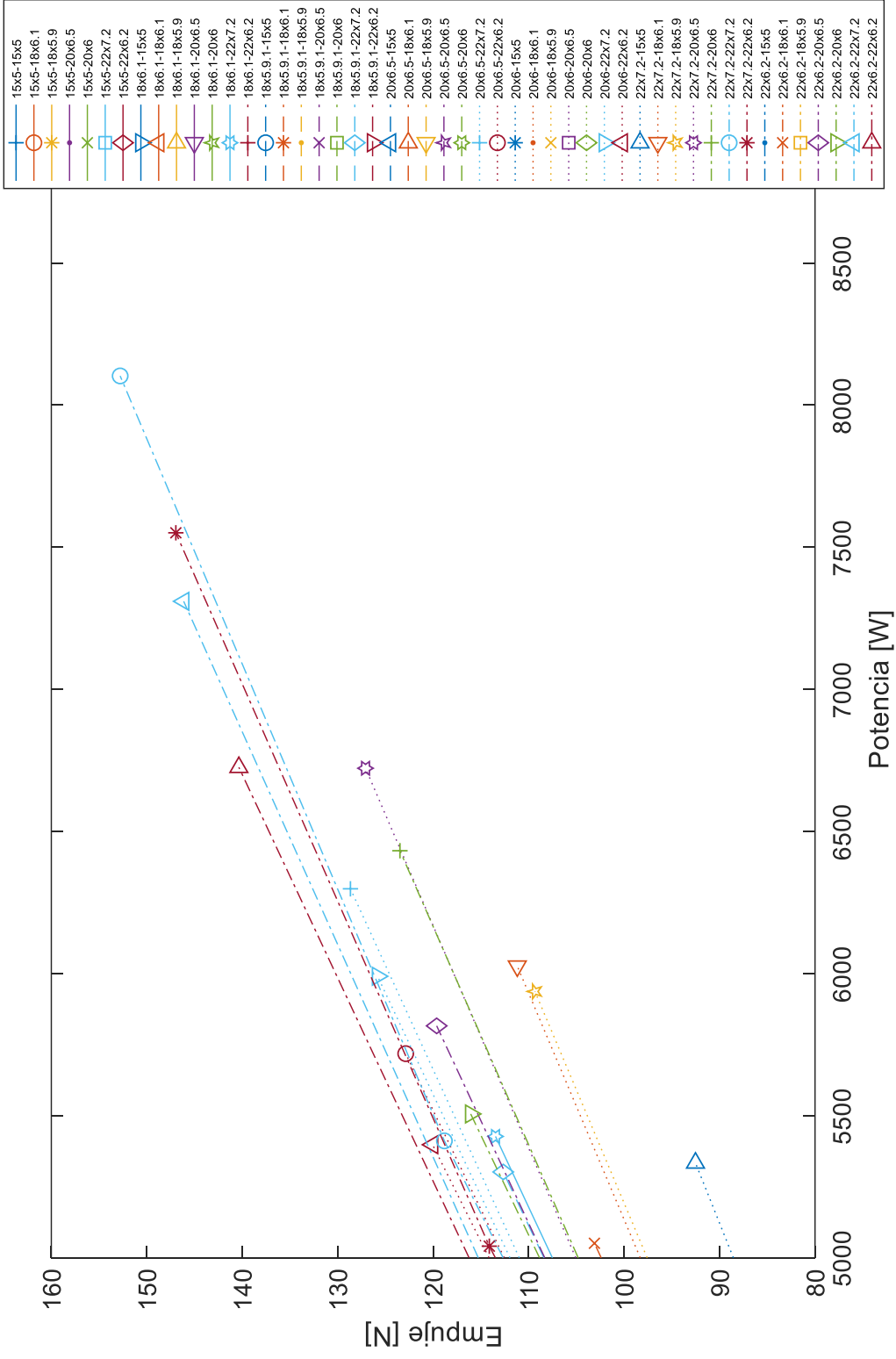
Figura 4.32. Modelado de hélices comerciales. a) Figura completa; b) detalle de 6000 rpm a 7000 rpm

La Fig. 4.32 muestra que la combinación de hélices que generaría un mayor empuje sería la 22x7.2-22x7.2. La figura 4.33 presenta los resultados teóricos de empuje vs. potencia consumida para las distintas hélices disponibles comercialmente. El par de hélices 22x7.2-22x7.2 genera mayor y es la que consume mayor potencia. Pero la diferencia en la potencia que consumen las que mayor empuje generan es pequeño.

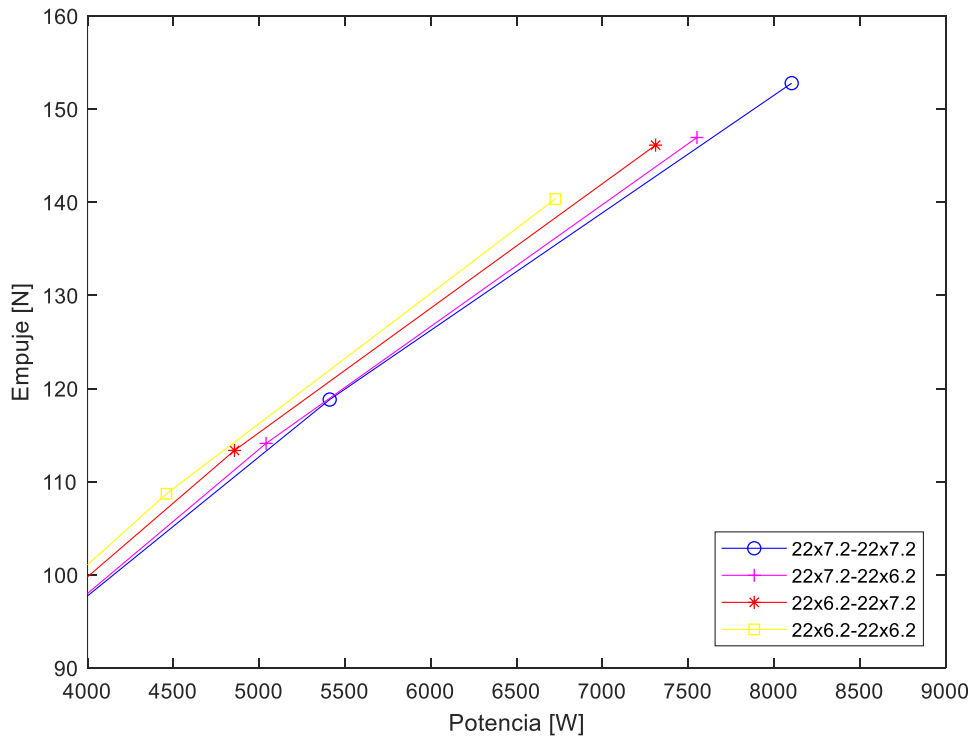
Con estos resultados se sugiere utilizar un sistema coaxial 22x7.2-22x7.2 para obtener la mayor cantidad de empuje del sistema. Mientras que para obtener una mejor relación empuje potencia se sugiere utilizar la combinación 22x6.2-22x7.2.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.33. Modelado de hélices comercialmente disponibles. (a) Resultados modificados; (b)Detalle de 5000 a 8000 W de potencia; (c) Detalle de las 4 hélices que generan mayor empuje.

4.5. Análisis de semejanza

Se realiza un análisis utilizando las leyes de semejanza para ventiladores [57,58], teóricamente aplicables al considerar que se trabaja en un rango de velocidades subsónica, despreciando los efectos de compresibilidad en el fluido. Los experimentos y simulaciones realizados se encuentran en el rango de $Mach < 0.3$ donde se desprecian los efectos de compresibilidad en el aire. Se busca una relación entre las hélices sugeridas (22x6.2 y 22x7.2) y las experimentadas, para predecir el comportamiento de la hélice a escala real.

Estas leyes nos dicen que, para hélices geoméricamente semejantes, el caudal que generan será directamente proporcional al cubo de los diámetros

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^3 \quad (54)$$

Para este caso la hélice que mejor describe el comportamiento a diferentes velocidades es la hélice 7056, comparada en la Fig 4.34.

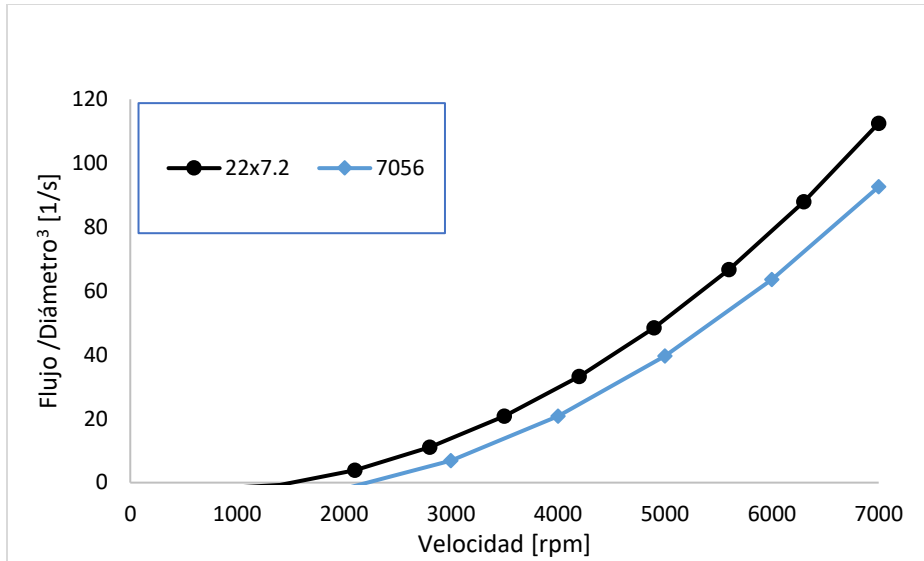


Figura 4.34. Semejanza de caudal entre la hélice 22x7.2 y 7056.

Por otra parte, las leyes de semejanza también indican que la presión total generada por la hélice será proporcional al cuadrado de los diámetros

$$p_2 = p_1 \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 \quad (55)$$

De nueva cuenta siendo la hélice 7056 la que tiene semejanza mayor como se muestra en la Fig. 4.35.

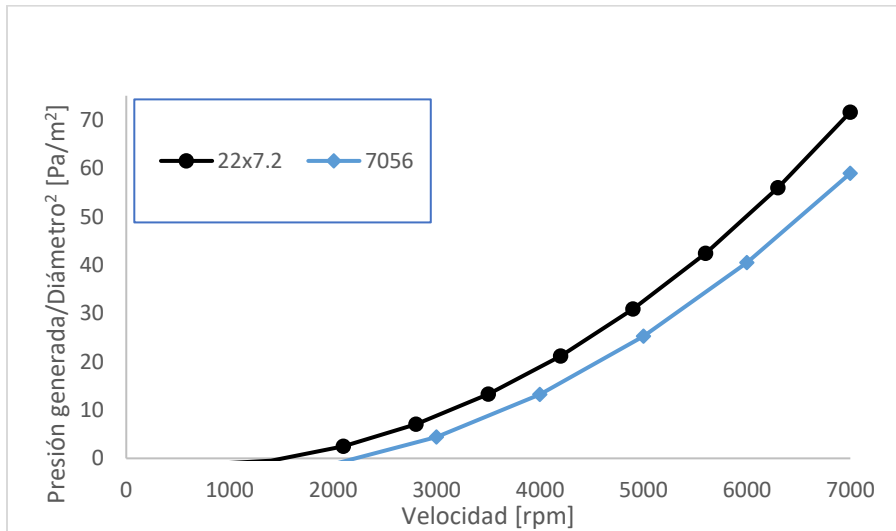


Figura 4.35. Semejanza de presión entre la hélice 22x7.2 y 7056.

La tercera ley de semejanza aplicable establece que la potencia varía de forma directa con el diámetro a la quinta potencia.

$$P_2 = P_1 \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^5 \quad (56)$$

Para este tipo de semejanza resulta mejor compararla con una hélice 6030 como se muestra en la Fig 4.36.

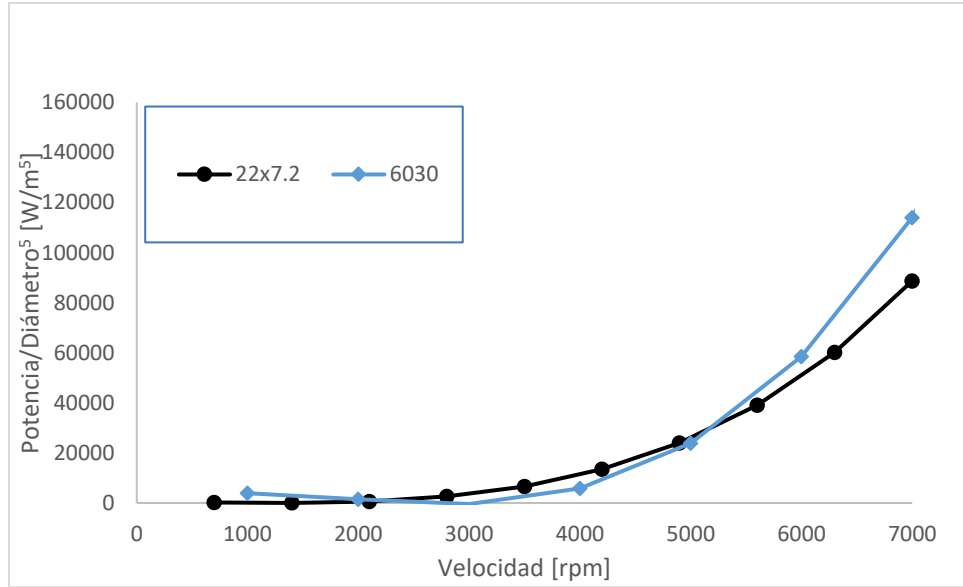


Figura 4.36. Semejanza de potencia entre la hélice 22x7.2 y 6030.

Con base en las ecuaciones y gráficas anteriores, se podría buscar una hélice que tenga un comportamiento semejante a la hélice propuesta y a partir de ahí utilizar las Eqs. (56) y (6) para predecir el empuje generado. Mientras que para predecir la potencia se utiliza la Eq. (58). Por ejemplo, para predecir el empuje generado por la hélice 22x7.2 se puede utilizar la hélice 7056 (Fig. 4.35). Mientras que se podría utilizar la hélice 6030 para predecir la potencia transmitida al aire por la hélice 22x7.2 (Fig. 4.36).

A su vez también se pueden utilizar las leyes de semejanza para predecir el comportamiento de la misma hélice [57,58].

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 \left(\frac{N_2}{N_1} \right) \quad (57)$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 \quad (58)$$

$$P_2 = P_1 \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^3 \quad (59)$$

Mediante las Eqs (56-61) resulta posible disminuir el número de experimentos o simulaciones realizadas siempre y cuando se cumplan las leyes de semejanza para las condiciones de operación. En aplicaciones reales estas leyes no resultan adecuadas para la selección de hélices, debido a la dificultad que representa encontrar un par que sea geoméricamente semejante.

Conclusiones

Este trabajo de tesis consistió en el estudio teórico y experimental de hélices coaxiales, cuyos resultados tendrán aplicación directa por parte de una empresa mexicana desarrolladora de tecnología. Las principales conclusiones se resumen a continuación:

Con base en la experimentación:

- El sistema de hélices coaxiales muestra una mejor relación empuje-potencia cuando se opera en sentidos de giro opuesto (operando en sentido contra-rotatorio).

Con base en los resultados teóricos:

- La teoría de álabes en combinación con la de cantidad de movimiento puede ser usada para simulación de hélices coaxiales.
- En los dos tipos de sistemas se puede incrementar el empuje aumentando únicamente el paso. Para el sistema sencillo la variación es poca. Sin embargo, para sistemas coaxiales depende de si el paso mayor está en la hélice superior (aumenta la potencia consumida) o inferior (genera el mismo empuje consumiendo menos potencia).

Con base en resultados teóricos y experimentales:

- El diámetro de la hélice influye notoriamente sobre el empuje generado. Una hélice de mayor dimensión produce un mayor empuje en el sistema sencillo.
- En el sistema coaxial, para varias combinaciones de pasos y para una relación $h/D = 0.27$ fija, los resultados experimentales obtenidos demuestran que si una de las hélices (superior o inferior) se cambia por una de un diámetro mayor, el empuje generado incrementará.
- Tanto en sistemas sencillos como coaxiales, el uso de hélices de diámetro mayor genera una mejor relación empuje/potencia, incluso a pesar de utilizar una cantidad mayor de energía para las combinaciones de diámetros estudiadas.
- Para ambos sistemas (sencillos y coaxiales) las hélices de menor diámetro necesitan mayor potencia para producir el mismo empuje.
- El desempeño del sistema coaxial resultó ser mejor al compararse con el sistema sencillo. Esto se observa más claramente al operar un sistema con diámetros iguales.

Contribuciones

- El efecto de modificar sistemas coaxiales es un aspecto no conocido por la empresa hasta ahora, por lo que los resultados aquí presentados serán de mucha utilidad para el diseño de nuevas aeronaves.

El interés principal de la empresa es contar con la configuración que ofrezca la mejor relación peso/potencia; o en su caso la que genera el máximo empuje.

- Los experimentos desarrollados en este trabajo cubren una carencia de años en los cuales la empresa se limitaba a seguir lineamientos de los fabricantes. Estos resultados tienen especial valor en investigadores interesados en el tema para efectos de comprobación o validación de modelos teóricos y más aún para el desarrollo tecnológico de aeronaves que utilicen sistemas de hélices coaxiales.

Trabajo a futuro

- Extender el estudio a vuelo en ascenso y aterrizaje: En el desarrollo posterior se considera un flujo arbitrario para el perfeccionamiento del modelo de forma que se puede indicar la velocidad del aire libre para las hélices.
- Uso de CFD para modelar interacción de las hélices y compararlos con los datos experimentales que se obtuvieron.
- La gran mayoría de aeronaves híbridas, que tienen capacidad de vuelo horizontal con alas y de despegue/aterrizaje vertical, requieren una rotación del eje de giro del sistema de hélices. No se tiene muy claro los efectos que esta rotación tendrá sobre la aeronave y por lo tanto se plantea como uno de los siguientes problemas a resolver.

Referencias.

- [1] Gudmundsson S. General aviation aircraft desing : Applied methods and procedures. 1st ed. Elsevier; 2014.
- [2] Piper Navajo n.d. goldaviation.com.
- [3] Cleynen. Aairfoil parts n.d. wikipedia.org.
- [4] Partes hélice n.d. <https://nptel.ac.in/content/storage2/courses/101101001/downloads/Intro-Propulsion-Lect-2.pdf>.
- [5] Nichols S. Experimental Approach to the Feasibility of an Axially-Stacked Propeller System. n.d.
- [6] Rankine WJM. On the mechanical principles of the action of propellers. Trans Inst Nav Archit 1865:18.
- [7] Froude RE. No Title. Trans Inst Nav Archit 1889.
- [8] Drzewiecki S. No Title. Bull L'Association Tech Marit 1892.
- [9] Wald Q. The Wright Brothers propeller theory and design, 2013. <https://doi.org/10.2514/6.2001-3386>.
- [10] Wald QR. The aerodynamics of propellers. Prog Aerosp Sci 2006;42:85–128. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2006.04.001>.
- [11] Prandtl L, Betz A. Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik. Neudrunck aus den Verhandlungen des III Int. Math. Kongresses zu Heidelb. und aus den Nachrichten der Gesellschaft der wissenschaften zu Göttingen, Universitätsverlag Göttingen; 1927.
- [12] Goldstein S. On the Vortex Theory of Screw Propellers. Proc R Soc A Math Phys Eng Sci 1929;123:440–65. <https://doi.org/10.1098/rspa.1929.0078>.
- [13] Theodorsen T. Theory of Propellers. New York: McGraw-Hill; 1948.
- [14] Taylor M. A balsa-dust tehniqe for air-flow visualization and its application to flow through model helicopter rotors in static thrust. TN-2220 1950.
- [15] Harrington R. Full-scale-tunnel investigation of the static-thrust performance of a coaxial helicopter rotor. NACA TN-2318 1951.
- [16] Dingledein R. Wind-tunnel studies of the performance of multirotor configurations. NACA TN-3236 1954.
- [17] Coleman CP. A Survey of Theoretical and Experimental Coaxial Rotor Aerodynamic Research. Nasa Tp 3675 1997:1–25. <https://doi.org/NASA Technical Paper 3675>.
- [18] Ramasamy M. Measurements comparing hover performance of single, Coaxial, Tandem, and tilt-rotor configurations. Annu Forum Proc - AHS Int 2013;4:2439–61.

- [19] Barbely NL, Field M, Komerath NM, Novak LA. A Study of Coaxial Rotor Performance and Flow Field Characteristics. AHS Tech Meet Aeromechanics Des Vert Lift 2016.
- [20] Bright 1861 n.d.
- [21] Andrew MJ. Coaxial contrarotating twin rotor aerodynamics. University of Southampton, 1983.
- [22] Kim HW, Brown RE. A Comparison of Coaxial and Conventional Rotor Performance. *J Am Helicopter Soc* 2009;55:12004–1200420. <https://doi.org/10.4050/jahs.55.012004>.
- [23] R.E. Brown. Rotor Wake Modeling for Flight Dynamic Simulation of Helicopters. *AIAA J* 2000;38:57–63.
- [24] Rajmohan N, Zhao J, He C. A Coupled Vortex Particle / CFD Methodology for Studying Coaxial Rotor Configurations. Fifth Decenn AHS Aeromechanics Spec Conf 2014.
- [25] Sørensen JN. General Momentum Theory for Horizontal Axis Wind Turbines, *Research Topics in Wind Energy- Volume 4*. vol. 4. 2016. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-22114-4>.
- [26] Padfield GD. *Helicopter Flight Dynamics*. 2018. <https://doi.org/10.1002/9781119401087>.
- [27] Gessow A, Myers GC. *Aerodynamics of the Helicopter* n.d.
- [28] Liu T, Oyama A, Fujii K. Scaling analysis of propeller-driven aircraft for Mars exploration. *J Aircr* 2013;50:1593–604. <https://doi.org/10.2514/1.C032086>.
- [29] Lakshminarayan V, Baeder J. Computational Investigation of Small Scale Coaxial Rotor Aerodynamics in Hover 2013:1–23. <https://doi.org/10.2514/6.2009-1069>.
- [30] Holzsager JE, Holzsager JE. *The Effects of Coaxial Propellers for the Propulsion of Multirotor Systems*. The State University of New Jersey, 2017.
- [31] Johnson W. *Influence of Lift Offset on Rotorcraft Performance* 2019.
- [32] Enconniere J, Ortiz-Carretero J, Pachidis V. Mission performance analysis of a conceptual coaxial rotorcraft for air taxi applications. *Aerosp Sci Technol* 2017;69:1–14. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.06.015>.
- [33] Gur O, Rosen A. Optimization of Propeller Based Propulsion System. *J Aircr* 2009;46:95–106. <https://doi.org/10.2514/1.36055>.
- [34] Nagashima T, Nakanishi K. OPTIMUM PERFORMANCE AND WAKE GEOMETRY OF CO-AXIAL ROTOR IN HOVER. *Natl Def Acad* 1981.
- [35] Leishman JG. *Principles of Helicopter Aerodynamics* 2006.
- [36] Bell J, Brazinskas M, Prior S. Optimizing performance variables for small unmanned aerial vehicle co-axial rotor systems. *Lect Notes Comput Sci (Including Subser Lect Notes Artif Intell Lect Notes Bioinformatics)* 2011;6781 LNAI:494–503. https://doi.org/10.1007/978-3-642-21741-8_52.
- [37] Bohorquez F. ROTOR HOVER PERFORMANCE AND SYSTEM DESIGN OF AN EFFICIENT

- COAXIAL ROTARY WING MICRO AIR VEHICLE. University of Maryland, 2007.
- [38] Schafroth D, Bouabdallah S, Bermes C, Siegwart R. From the Test Benches to the First Prototype of the muFly Micro Helicopter 2009;245–60. <https://doi.org/10.1007/s10846-008-9264-z>.
- [39] Lucas F. Study of Contra-rotating Coaxial Rotors in Hover, A Performance Model Based on Blade Element Theory Including Swirl Velocity. Embry-Riddle Aeronautical University, 2007.
- [40] Ho J, Yeo H, Bhagwat M. Validation of Rotorcraft Comprehensive Analysis Performance Predictions for Coaxial Rotors in Hover. *J Am Helicopter Soc* 2017;62:1–13. <https://doi.org/10.4050/jahs.62.022005>.
- [41] von Kármán T. Helicopter Theory. *Aircr Eng Aerosp Technol* 2008;12:271–6. <https://doi.org/10.1108/eb030686>.
- [42] Configurations CR, Rajmohan N, Zhao J, He C. A Coupled Vortex Particle / CFD Methodology for Studying 2014.
- [43] Johnson W. Helicopter Theory. Princeton: Dover; 1994.
- [44] Chica-Arrieta E, Aguilar-Bedoya J, Rubio-Clemente A. Investigación numérica sobre el uso de álabes multielemento en turbina hidrocínética de eje horizontal. *Rev UIS Ing* 2019;18:117–28. <https://doi.org/10.18273/revuin.v18n3-2019012>.
- [45] Carpenter PJ. Lift and Profile-Drag Characteristics of an NACA 0012 Airfoil Section as Derived from Measured Helicopter-Rotor Hovering Performance. n.d.
- [46] Airfoil Tools n.d.
- [47] Padfield GD. Helicopter Flight Dynamics. 2018. <https://doi.org/10.1002/9781119401087>.
- [48] Stahlhut C. AERODYNAMIC DESIGN OPTIMIZATION OF PROPROPOTORS FOR CONVERTIBLE-ROTOR CONCEPTS. 2012.
- [49] Moriarty PJ, Hansen AC. AeroDyn Theory Manual. 2005.
- [50] Airfoil Tools. NACA 0012 AIRFOILS (n0012-il) n.d. <http://airfoiltools.com/airfoil/details?airfoil=n0012-il>.
- [51] Carpenter PJ. Lift and Profile-Drag Characteristics of an NACA 0012 Airfoil Section as Derived from Measured Helicopter-Rotor Hovering Performance. 1958.
- [52] Sforza PM. Commercial Airplane Design Principles. 1st ed. Oxford: Elsevier; 2014.
- [53] Prouty R. Helicopter Performance, Stability and Control. Krieger; 2002.
- [54] AKXO n.d.
- [55] <https://articulo.mercadolibre.com.mx/> n.d.
- [56] ADMINISTRATION FA. Pilot's Handbook of Aeronautical Knowledge n.d.
- [57] Mataix C. Mecánica de Fluidos y Maquinas Hidraulicas. Segunda Edición. 1986.
- [58] UNE 100-230-95 1995.