



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
SAN LUIS POTOSÍ**

FACULTAD DE INGENIERÍA

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO

POSGRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA

Tesis

**SÍNTESIS Y ANÁLISIS DE CONTROLES ROBUSTOS
PARA ROBOTS PARALELOS TIPO DELTA**

Para obtener el grado de

Maestro en ingeniería mecánica

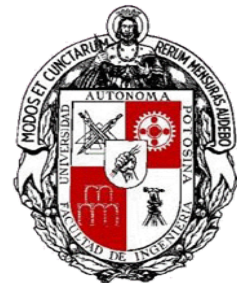
Presenta

Lic. Guillermo Daniel Rodríguez García

Asesor

Dr. Mauro Eduardo Maya Méndez

Septiembre, 2012



Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Facultad de Ingeniería



Centro de Investigación y Estudios de Posgrado
Posgrado en Ingeniería Mecánica
Opción en Mecatrónica y Sistemas Mecánicos



**SÍNTESIS Y ANÁLISIS DE CONTROLES ROBUSTOS
PARA ROBOTS PARALELOS TIPO DELTA**

Presenta

Lic. Guillermo Daniel Rodríguez García

Comité

Dr. Mauro Eduardo Maya Méndez

Dr. Emilio Jorge González Galván

Dra. Nancy Visairo Cruz

Dr. Juan Antonio Cárdenas Galindo

Agradecimientos

A través de estas simples notas las cuales no pretendo recuperar la importancia de la experiencia vivida, quiero expresar mi satisfacción por el desarrollo personal y auto conocimiento obtenido, en el camino que Dios me ha permitido continuar.

Agradezco de todo corazón el apoyo incondicional de las familias y amigos, por su confianza y aprecio.

En particular quiero agradecer a mi madre Patricia García Muñoz, por darme la vida, también por su tolerancia y paciencia que siempre le ha distinguido, a mi esposa Violeta Ezquerro Mosqueda, por el cariño brindado durante este pequeño ciclo que hemos recorrido juntos.

Agradezco también la dirección y el consejos de mi asesor Mauro Eduardo Maya Méndez, tanto como maestro y amigo, quien confió en mí para la realización de este trabajo. Así como las valiosas recomendaciones por parte de mi comité académico.

Finalmente, agradezco al Concejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por haber financiado mis estudios de maestría otorgándome una beca, a la Universidad Autónoma de San Luis Potosí y al Posgrado de Ingeniería Mecánica por el apoyo.

Resumen

En este trabajo se desarrollaron varias síntesis de control para robots paralelos tipo delta. Algunas de las síntesis propuestas están expresadas en el espacio cartesiano y otras están expresadas directamente en términos de las señales del sensor. En el análisis de estabilidad del sistema controlado se toman en cuenta incertidumbres en los términos que intervienen en las leyes de control y se logran establecer condiciones para garantizar dicha estabilidad. En particular se toman en cuenta errores asociados a la medición del estado del sistema así como errores de modelado los cuales son comunes en la práctica. Lo anterior confiere robustez al desempeño del sistema controlado ante los errores mencionados.

Los controles propuestos están basados en el modelo cinemático del robot. Particularmente se basan en el jacobiano asociado al modelo cinemático inverso del sistema. En este trabajo se presenta una forma de obtener explícitamente dicho jacobiano. Adicionalmente se deduce un modelo dinámico para el robot paralelo tipo delta [1].

Índice general

Índice general	1
Índice de figuras	3
Introducción	5
1. Estado del arte de control de robots paralelos	9
1.1. Panorama de la robótica y el robot paralelo tipo delta	9
1.2. Cinemática directa	13
1.3. Cinemática inversa	21
1.4. Esquemas de control	22
2. Modelado matemático del robot	25
2.1. Jacobiano de la cinemática inversa	26
2.2. Modelo dinámico del robot	28
2.3. Descripción sintetizada del modelo dinámico	32
3. Síntesis y análisis de controles para el robot	39
3.1. Control del robot basado en la función de tarea	39
3.2. Control proporcional (P)	41
3.2.1. Control P en el espacio cartesiano	42
3.2.2. Análisis de estabilidad y robustez para el control P en el espacio cartesiano	44
3.2.3. Control P basado en las señales del sensor	46
3.2.4. Análisis de estabilidad y robustez para el control P basado en las señales del sensor	49
3.3. Control proporcional-integral (PI)	52
3.3.1. Control PI en el espacio cartesiano	54
3.3.2. Análisis de estabilidad y robustez para el control PI en el espacio cartesiano	55
3.3.3. Control PI basado en las señales del sensor	59
3.3.4. Análisis de estabilidad y robustez para el control PI basado en las señales del sensor	61

ÍNDICE GENERAL

Conclusiones	65
Bibliografía	67

Índice de figuras

1.1. Robot KAWASAKI: FS45N C Control	10
1.2. El prototipo de la plataforma de Gough usado en la compañía Dunlop Tires	11
1.3. Robot paralelo tipo Delta Parallax LKF-2040	12
1.4. Esquema del robot paralelo Delta de Clavel	13
1.5. Vista superior de la estructura fija.	14
1.6. Esbozo geométrico tridimensional del robot paralelo.	14
1.7. a) vista general del brazo en la dirección \mathbf{e}_1 y b) vista de coordenadas auxiliares polares la dirección \mathbf{e}_1	15
1.8. a) vista general del brazo en la dirección \mathbf{e}_2 y b) vista de coordenadas auxiliares polares para la dirección \mathbf{e}_2	17
1.9. a) vista general del brazo en la dirección \mathbf{Y} y b) vista de coordenadas auxiliares polares para la dirección \mathbf{Y}	18
1.10. Esbozo geométrico para el modelado de la cinemática inversa	20
3.1. Representación, cota para el procesamiento de imágenes.	51

Introducción

La robótica es actualmente un campo de estudio muy activo. Esto se debe en parte al interés en las aplicaciones de robots para tareas automatizadas. Entre estas tareas se encuentran desde aplicaciones domésticas sencillas como son juguetes, dispositivos de limpieza y vigilancia, hasta las tareas complejas como tocar instrumentos musicales y las diferentes técnicas de manufactura avanzada. Ejemplos de estas últimas son el pintado de refacciones para automóviles, la soldadura de piezas mecánicas, la manipulación de objetos en movimiento en una línea de producción, etc.

En las diferentes aplicaciones en robótica se utilizan diseños de robots muy variados, sin embargo, al hablar de robots se piensa por lo general en los diseños de robots seriales industriales. Estos robots se inspiraron en la anatomía de un brazo humano, u otras variantes que lo asemejan, tratando de imitar la versatilidad de la mano de obra humana. Los primeros robots industriales tuvieron su aparición en la empresa Unimation, fundada por George Devol y Joseph F. Engelberger [2]. Algunos de los robots industriales modernos son capaces de realizar trayectorias complejas aún para el ser humano. Algunos ejemplos de este tipo de trayectorias son las que poseen altas velocidades, repetibilidad y precisión.

La arquitectura de un robot serial está basada en eslabones conectados de manera consecutiva o seriada de manera que forman una cadena cinemática abierta. Generalmente cada eslabón cuenta con un actuador que le proporciona movimiento a éste. Esta geometría resulta muy conveniente ya que el espacio de trabajo asociado al manipulador es muy amplio. Aún así, esta configuración mecánica tiene una considerable desventaja: cada par actuador-eslabón carga con el peso del resto de la cadena cinemática que le sucede, lo que requiere gran potencia y tamaño del actuador así como una gran rigidez que conlleva grandes dimensiones y peso del eslabón resultando en un robot pesado. Esto compromete la maniobrabilidad del robot y disminuye su precisión para largos periodos de trabajo, requiriendo que sean calibrados con frecuencia.

Pese a todo el desarrollo logrado en los últimos años, el aumento en las demandas de aplicación de la industria requieren el aumento de las capacidades de los robots. Particularmente se requiere cada vez mayor velocidad y precisión en los procesos, estabilidad en la ejecución de tareas, consumos energéticos menores y la robustez del desempeño ante

perturbaciones externas. El surgimiento de los robots paralelos ha permitido ofrecer una alternativa interesante para algunas de estas demandas.

Un robot paralelo se define como aquella estructura en la cual el efector final está unido a la base a través de varias cadenas cinemáticas cerradas [3]. Las principales ventajas de los robots paralelos, en contraste con los robots de configuración serie, son: las altas velocidades, su gran rigidez y una importante capacidad para soportar pesos mayores a la estructura móvil del sistema mecánico [4]. A continuación se hace un breve repaso de la robótica paralela.

Los robots paralelos

Uno de los primeros estudios conocidos de estructuras basadas en arquitecturas paralelas data de 1813, cuando el científico francés Louis Cauchy trabajara como ingeniero a las órdenes de Napoleón en la invasión de Inglaterra. En aquella época, Cauchy estudió la rigidez de un octaedro articulado. Sin embargo, no fue sino hasta 1962 que Gough y Whitehall propusieron un sistema de manipulación paralelo, el cual consistía en una máquina para probar la resistencia al choque de neumáticos [5]. A pesar de ello, las plataformas paralelas seguían siendo percibidas únicamente como mecanismos de diseños complejos. Esto debido a su pequeño espacio de trabajo comparado con los mencionados robots seriales. En otra de las primeras aplicaciones de robots paralelos se colocaron asientos de un teatro sobre una plataforma paralela con el fin de introducir un movimiento que diese una apariencia más real al espectáculo [6]. No pasó mucho tiempo antes de que se percibieran las notables ventajas que este tipo de diseños mecánicos tiene como la alta rigidez en la estructura para plataforma Stewart [6], las altas velocidades alcanzadas por el Delta de Raymond Clavel [7], el firme soporte por parte de la estructura externa en Variax de Giddings y Lewis [8], etc.

Para la época de los 80's, Raymond Clavel sugirió la idea de usar paralelogramos en la construir robots paralelos con cuatro grados de libertad. A su creación la llamó el **Robot Delta** [7]. Con el tiempo su diseño de robot paralelo se convirtió en uno de los más exitosos debido a su simplicidad y eficiencia. Los paralelogramos de este diseño aseguran que la plataforma móvil se mantenga paralela a la plataforma fija todo el tiempo. Sus cadenas cinemáticas están formadas con eslabones ligeros que permiten al manipulador alcanzar aceleraciones hasta 50 g en entornos experimentales para aplicaciones industriales. Además, su uso es muy conveniente en las operaciones de manipulación de objetos a altas velocidades. Hoy en día los robots Delta se encuentran en múltiples aplicaciones de la industria manufactura. En la actualidad el interés y estudios sobre los robots paralelos han ido aumentando ya que sus características y capacidades complementan las de los robots seriales en aplicaciones industriales.

Control de robots paralelos

En lo que respecta al desarrollo de algoritmos de control en las estructuras paralelas mencionadas, estos son relativamente nuevos. Además, el número de trabajos reportados en la literatura sobre el control de robots paralelos es limitado. Incluso la implementación de las técnicas de control, actualmente usadas para los robots seriales, no han sido todas extendidas para los robots paralelos. En particular, no existen muchos trabajos sobre el control de los robots delta. Además, en los trabajos existentes no se ha abordado la cuestión de la robustez del sistema controlado ante errores de estimación del estado del robot ni ante errores de modelado. Ejemplo de estos son: el control de compensación en la dinámica parcialmente inversa de la plataforma Stewart [9], el desarrollo en la compensación de compilación de errores en manipuladores paralelos [10], el modelo dinámico de control robusto para un robot paralelo traslacional [11], el control de manipuladores paralelos en muy altas aceleraciones [12], etc. Estos tipos de errores son muy comunes en la práctica e intervienen directamente en el diseño de leyes de control. Generalmente provienen de un conocimiento limitado de los sensores utilizados para medir el estado del robot o para detectar la posición y velocidad de los objetos a manipular. Otra fuente común de error son los errores del modelo (cinemático o dinámico) del robot provenientes de simplificaciones en el modelo o de imperfecciones en la construcción de los prototipos físicos.

Por lo anteriormente expuesto, resulta interesante desarrollar controles robustos para robots paralelos. Este trabajo está orientado en esa dirección. En particular se busca desarrollar algoritmos de control para robots paralelos tipo delta que incorporen un sentido de robustez ante errores de localización tanto del robot como de los objetos a manipular, así como errores en el modelo del robot. Lo anterior considerando trayectorias que permitan manipular objetos en movimiento. Además, se busca realizar un análisis de estabilidad del sistema controlado que permita establecer condiciones de estabilidad en términos de los elementos que intervienen en las leyes de control.

Objetivos de la tesis

El objetivo principal de este trabajo de tesis es la síntesis y análisis de algoritmos de control robustos para robots paralelos tipo delta. Los objetivos particulares de este trabajo son:

- La generación de algoritmos de control de robots paralelos tipo delta que respondan en forma satisfactoria pese a errores en la estimación de los términos que intervienen en la ley de control.

- La obtención de un modelo matemático capaz de captar los rasgos fundamentales del sistema y lo suficientemente simple de manejar para sintetizar controles y planear tareas tales como el seguimiento de un objeto en movimiento.
- Estudiar la estabilidad del sistema en lazo cerrado y, de ser posible, establecer condiciones de estabilidad en términos de los elementos que intervienen en la ley de control.

Organización de la tesis

Esta tesis está organizada en tres capítulos como sigue. En el capítulo 1 se describe el estado del arte en el control de robots paralelos. En ese capítulo se recordarán datos históricos de los robots industriales así como una descripción de las ventajas y desventajas de su estructura mecánica de tipo serial. Posteriormente se introduce el concepto de robots paralelos así como algunos datos históricos. También se mencionarán sus características contrastándolas con las de los robots seriales. Adicionalmente, se retorna a el desarrollo de la cinemática inversa y directa del robot delta.

En el capítulo 2 se presenta el jacobiano asociado al modelo cinemático inverso utilizado en este trabajo. Este jacobiano es utilizado en la síntesis de controles para el robot delta. Además se realiza un desarrollo del modelo dinámico del robot delta. A partir de este modelo se sintetizan las ecuaciones que describen el par de los actuadores del robot en forma análoga al modelo dinámico convencional de los robots seriales.

En el capítulo 3 se presenta inicialmente y de manera breve la técnica de control basada en tarea. Con base en esta técnica se desarrollan controles tipo P y PI, así como el análisis de estabilidad asociado. Además se presenta la extensión del análisis al caso en el que se consideran errores en los términos que componen la ley de control.

Capítulo 1

Estado del arte de control de robots paralelos

1.1. Panorama de la robótica y el robot paralelo tipo delta

La palabra robótica (del eslavo *robota* que quiere decir trabajo), usada para describir este campo de estudio, fue acuñada por el escritor de ciencia ficción Isaac Asimov [2]. La palabra robot puede referirse tanto a mecanismos físicos como a sistemas virtuales de software, aunque suele aludirse a los segundos con el término de bots. Un robot es una entidad artificial ya sea virtual o mecánica. En la práctica, un robot es por lo general un sistema electromecánico que, por su apariencia ó sus movimientos, ofrece la sensación de tener un propósito propio.

Es conocido que desde la antigüedad se han propuesto máquinas rudimentarias con base en vapor de agua capaces de moverse en forma independiente. En campos como la ciencia ficción, la investigación científica, e inclusive la industria, son bien conocidos los sistemas autónomos como es el caso de los robots. En la actualidad la robótica como campo de estudio resulta ser bastante amplio e interdisciplinario.

Como ya se hizo mención, los robots tienen como principal propósito, la capacidad de movimiento y control autónomo. En particular los de tipo industrial fueron principalmente diseñados para desarrollar tareas, con la consigna de realizarlas de manera repetitiva, precisa y rápida. Dichas tareas van desde el transporte de carga en sectores como el automotriz, hasta los cortes de precisión e inserción de pastillas semiconductoras para la fabricación de circuitos integrados. En particular, en los sectores anteriormente mencionados los robots industriales, también conocidos como brazos manipuladores, han tenido un importante desarrollo.

La gran versatilidad de este tipo de sistemas resultó ser una gran ventaja, permitiendo acortar tiempos de fabricación y reemplazar al hombre en labores que ponían en riesgo su integridad física entre muchas otras aplicaciones. Los robots industriales tuvieron su aparición en la empresa Unimation, fundada por George Devol y Joseph F. Engelberger en 1954; esta idea está basada en la patente original de Devol [2].



Figura 1.1: Robot KAWASAKI: FS45N C Control

Los primeros diseños propuestos para los robots industriales toman como referencia el cuerpo humano y en particular el brazo humano, de allí el nombre de **brazo manipulador**. Inclusive cada articulación se encuentra asociada con diferentes partes del cuerpo humano como son la muñeca, el codo, el hombro y la cintura. Los brazos manipuladores, que tienen su base fija en muchos casos, cubren un rango amplio de movimientos en el que las articulaciones se desenvuelven libremente. En la figura 1.1 se muestra un robot manipulador industrial. El diseño de estos robots es básicamente una cadena cinemática abierta con capacidad de movimiento de translación en 3D (tres dimensiones) y de rotación en otros tres ejes. Este tipo de diseños parece muy conveniente ya que, como se mencionó, el espacio de trabajo que éstos son capaces de cubrir es muy amplio. Sin embargo también hay desventajas evidentes en este tipo de robots. Como principal desventaja está la relación peso/carga que los hacen en ocasiones poco eficientes, esto es, la carga útil que pueden transportar es baja con relación al peso del propio robot. Lo anterior se debe en gran parte a que su arquitectura serial hace que cada eslabón cargue con el peso de todos los eslabones (y sus motores) que lo suceden. De esta manera se requieren articulaciones robustas y motores de gran potencia que las muevan, resultando en sistemas muy pesados

por lo general. Además, el mover estas grandes inercias produce un consumo energético mayor y un desajuste en las articulaciones para periodos largos de movimiento, por lo que es necesario su calibración continua.

Por otro lado la rigidez que ofrece este tipo de sistemas, si bien es suficiente para una gran variedad de tareas, no es la mejor. Mientras que éstos son capaces de realizar movimientos fluidos y suaves, por lo general les es más complicado realizar una detención súbita bastante rígida sin sufrir desgastes significativos y desajustes.

Por lo descrito anteriormente el estudio e investigación en los robots continuó buscando alternativas que no presentaran las limitaciones a las que se enfrentaron el común de los robots industriales. Una de las alternativas encontradas es el **robot paralelo**. Desde 1928 se tiene información acerca de este tipo de diseños. Hasta mediados de los 80 los robots paralelos sólo fueron considerados como ideas de estructuras complejas, simuladores de vuelo, sistemas de orientación de antenas y otros dispositivos [3].

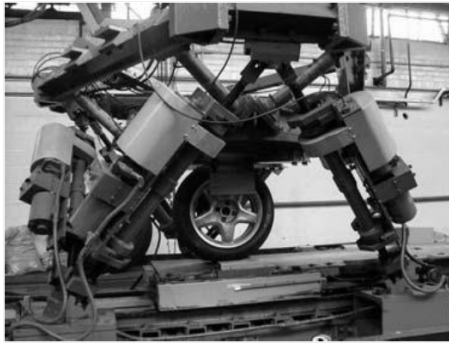


Figura 1.2: El prototipo de la plataforma de Gough usado en la compañía Dunlop Tires

La arquitectura de los robots paralelos es muy diferente a la de los robots serie, es una estructura en el que el efector final (también llamado plataforma móvil) está unido a una base o plataforma fija por más de una cadena cinemática cerrada independiente. Esto conduce a que, en la mayoría de los problemas, se debe de reconsiderar su análisis. De hecho existe una extraña dualidad entre ambos tipos de mecanismos, los tipo serial y los robots paralelos, ya que un problema de difícil solución para un tipo de estructura, es fácilmente resoluble por el otro tipo de estructura, y viceversa [13], [14]. La estructura cinemática de los robots paralelos se conoce desde hace mucho tiempo. En 1813, Cauchy estudió la rigidez de un octaedro articulado, sin embargo, fue mucho más tarde cuando Gough y Whitehall propusieron un mecanismo similar para la prueba de neumáticos (ver figura 1.2) [5].

Como principal característica deseable para los robots paralelos se encuentra la relación peso/carga que resulta para estas estructuras bastante eficiente. Esencialmente, la



Figura 1.3: Robot paralelo tipo Delta Parallax LKF-2040

carga a soportar por el robot se distribuye entre las cadenas cinemáticas que lo componen. Esto resulta en el hecho de que cadenas cinemáticas físicamente esbeltas y ligeras son suficientes para transportar la carga a manipular. Además, las cadenas cinemáticas cerradas confieren gran firmeza al mecanismo lo que resulta en una buena capacidad para resistir vibraciones y movimientos generados por el robot, o en su defecto externas. En la figura 1.3 se muestra un ejemplo de robot paralelo.

Gracias a las características enunciadas anteriormente, la estructura que ejecuta los movimientos del robot paralelo, si bien es un poco más compleja que la de los robots serie, resulta bastante ligera en general. Lo anterior desemboca en la ventaja de que la estructura que se encuentra en movimiento no tenga tanto peso como en el caso de los robots serie. Esto permite que la mayor parte de la energía suministrada por los actuadores sea transformada en movimiento útil. Otra de sus ventajas es que, sin importar que el sistema sea desacelerado súbitamente, su gran rigidez permite que esto se logre de manera precisa, sin afectar o comprometer la estructura, así como la estabilidad del sistema. Sin lugar a dudas estas capacidades hacen de gran importancia el estudio e investigación de este tipo de robot.

A principios de los años ochenta Raymond Clavel tuvo la idea de usar paralelogramos para construir un robot paralelo de tres grados de libertad traslacionales y un grado de libertad rotacional. Raymond Clavel llamó a su creación el robot Delta (ver figura 1.4). Con el tiempo este diseño ha resultado ser uno de los robots paralelos más populares.

La idea básica en el diseño del robot Delta es el uso de paralelogramos, los cuales permiten que la plataforma móvil conserve una orientación constante con la plataforma fija. En el esquema mostrado en la figura 1.4, se puede visualizar el uso de los tres paralelogramos (número 5) que restringen completamente la orientación de la plataforma móvil o eslabón de salida (número 8), la cual permanece con sólo tres grados de libertad puramente traslacionales. Los eslabones de (número 4) son actuados y están conectados a la plataforma fija mediante juntas de tipo revoluta (número 13). Las uniones entre los eslabones de entrada y los paralelogramos son juntas esféricas (números 6a y 6b), de

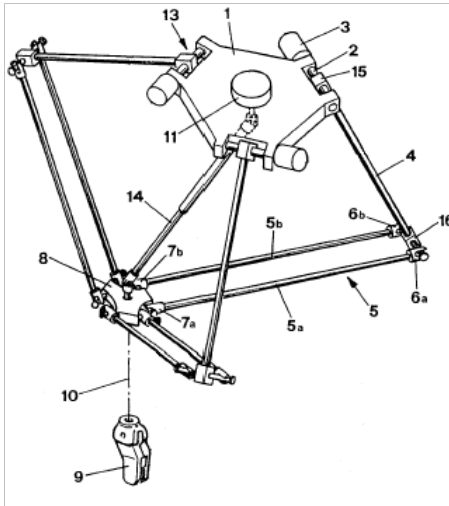


Figura 1.4: Esquema del robot paralelo Delta de Clavel

igual forma que las uniones entre los paralelogramos y la plataforma móvil (números 7a y 7b). Finalmente, se utiliza un cuarto eslabón (número 14) para transmitir el movimiento rotacional desde la base hacia el efector final montado en la plataforma móvil.

Enseguida se recordará brevemente el modelo cinemático del robot Delta. El estudio cinemático se interesa sólo por el movimiento geométrico, sin tener en cuenta las fuerzas que lo producen. Específicamente, está basado en su composición geométrica, posiciones espaciales, desplazamientos, rotaciones, velocidades y aceleraciones [15]. Es importante recordar que existen dos problemas fundamentales a resolver en la cinemática del robot. Primero, el **problema cinemático directo**, el cual consiste en determinar cuál es la posición y orientación de la herramienta final (efector final) del robot, a través de los valores conocidos para las articulaciones (juntas) y los elementos sólidos de conexión del robot (eslabones). El segundo problema se denomina **problema cinemático inverso**, el cual resuelve la configuración (ángulos de las juntas) que debe adoptar el robot para lograr una posición del efector final conocida [16].

1.2. Cinemática directa

Para describir la cinemática directa del robot delta, se usará un sistema coordenado cartesiano tridimensional descrito por los vectores ortogonales unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} , ya que los desplazamientos del efector final del robot, se realizan como traslaciones cartesianas. Para esto se ubicará el plano generado por las componentes \mathbf{ij} en la superficie de la plataforma superior (base fija) como se muestra en la figura 1.5 Esta plataforma es donde se sitúan los motores.

hora, se considera el origen coordenado $(0, 0, 0)$, en el centro de la base fija. De este punto parten los vectores \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 siendo todos coplanarios y constantes, de los cuales los últimos dos vectores son no ortogonales entre sí, como se ilustra en la figura 1.5. La triada de vectores \mathbf{Y} , \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 forman un triángulo equilátero, el cual soporta un actuador en cada uno de sus vértices.

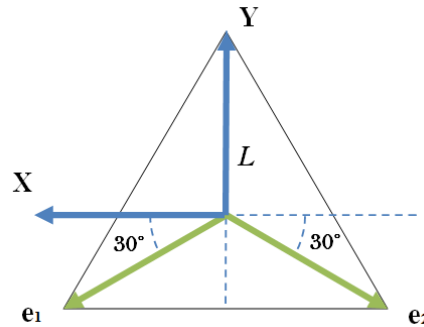


Figura 1.5: Vista superior de la estructura fija.

Se definen los vectores $\mathbf{e}_1 = \cos 30\mathbf{i} - \sin 30\mathbf{j}$ y $\mathbf{e}_2 = -\cos 30\mathbf{i} - \sin 30\mathbf{j}$ en el plano XY , con \mathbf{i} , \mathbf{j} como vectores unitarios en las direcciones de X y Y respectivamente. El radio de la plataforma fija es denotado por la constante L , cómo se ilustra en las figuras 1.5 y 1.6.

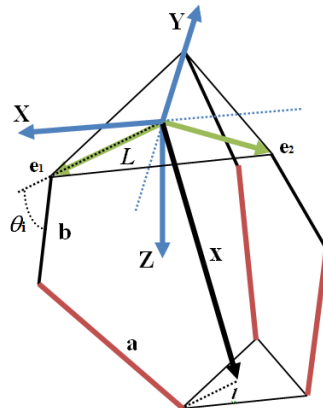


Figura 1.6: Esbozo geométrico tridimensional del robot paralelo.

En la figura 1.6 se observa un esquema del robot paralelo tipo delta. En esta figura, la plataforma fija (triángulo equilátero superior de radio L) está conectada con la plataforma móvil (triángulo equilátero inferior de radio l) a través de tres cadenas cinemáticas idénticas. Cada cadena cinemática está compuesta por un eslabón actuado de longitud b y un paralelogramo de longitud a . El ángulo θ_i es el ángulo del eslabón actuado con

respecto a la horizontal. Las dos plataformas están entonces separadas por un vector de posición variable \mathbf{x} , que va del centro de la plataforma fija al centro de la plataforma móvil como se ilustra en la figura 1.6. La cual esta descrita en terminos de θ_i como la posición angular del actuador, b la magnitud del eslabón actuado y a magnitud de los paralelogramos.

Se considera al centro de la plataforma móvil, como la posición del efector final. Existen tres trayectorias, denotadas por C_1 , C_2 y C_3 , que van desde el centro de la plataforma fija, hasta el efector final pasando cada trayectoria por una sola cadena cinemática.

En la figura que se muestra en 1.7 a), θ_1 representa la posición angular del actuador, situada entre le extremo superior del eslabón actuado de magnitud b , con el extremo de la base fija de la orientación \mathbf{e}_1 , como la primera articulación. Para la siguiente articulación, descrita por una junta esférica, a partir de los ángulos no actuados ψ_1 y ϕ_1 , situados entre los paralelogramos de magnitud a con el eslabón de magnitud b . La última articulación se encuentra, en el extremo de los paralelogramos de magnitud a , con plataforma móvil de radio l , en la dirección $-\mathbf{e}_1$. Para describir el vector \mathbf{x}_1 , que se expresa como

$$\mathbf{x}_1 = (L - l)\mathbf{e}_1 + b(-\cos \theta_1 \mathbf{e}_1 + \sin \theta_1 \mathbf{k}) + \mathbf{a}$$

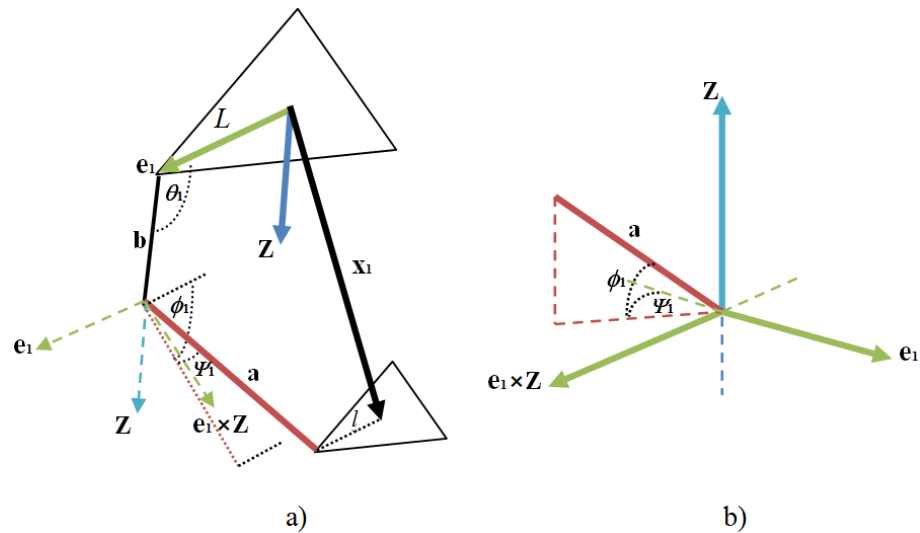


Figura 1.7: a) vista general del brazo en la dirección \mathbf{e}_1 y b) vista de coordenadas auxiliares polares la dirección \mathbf{e}_1 .

Adicionalmente, se incorpora una segunda descripción para la orientación espacial del eslabón de magnitud a , a partir de la triada de vectores $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{k}$, \mathbf{e}_1 y \mathbf{k} , situada en

la posición de la junta esférica, en terminos de los ángulos no actuados ψ_1 y ϕ_1 para el primer brazo. Con base ne la figura 1.7 b). Para describir el vector \mathbf{a} , que se expresa como

$$\mathbf{a} = a(\cos \phi_1 \sin \psi_1 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{k}) - \cos \phi_1 \cos \psi_1 \mathbf{e}_1 + \sin \phi_1 \mathbf{k}).$$

De manera que el vector \mathbf{x}_1 se puede escribir explícitamente en términos de los ángulos actuados y no actuados como

$$\mathbf{x}_1 = (L - l)\mathbf{e}_1 + b(-\cos \theta_1 \mathbf{e}_1 + \sin \theta_1 \mathbf{k}) + a(\cos \phi_1 \sin \psi_1 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{k}) - \cos \phi_1 \cos \psi_1 \mathbf{e}_1 + \sin \phi_1 \mathbf{k})$$

El producto de vectorial \mathbf{e}_1 con el vector \mathbf{k} , en coordenadas rectangulares, se obtiene como sigue:

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{k} = (\cos 30, -\sin 30, 0) \times (0, 0, 1) = (-\sin 30, -\cos 30, 0)$$

Sustituyendo el producto vectorial anterior en \mathbf{x}_1 y descomponiendo en componentes resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 = & ([(L - l) - b \cos \theta_1 - a \cos \phi_1 \cos \psi_1] \cos 30 - a \cos \phi_1 \sin \psi_1 \sin 30) \mathbf{i} + \\ & ([(L - l) - b \cos \theta_1 - a \cos \phi_1 \cos \psi_1] (-\sin 30) - a \cos \phi_1 \sin \psi_1 \cos 30) \mathbf{j} + \\ & (b \sin \theta_1 + a \sin \phi_1) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Entonces los ángulos situados entre el eslabón actuado y su consecuente son ϕ_1, ψ_1 (ver figura 1.7). A su vez, estos ángulos dependen de θ_1, θ_2 y θ_3 (a través de su conexión con la plataforma móvil y las trayectorias C_2 y C_3).

Ahora, en forma similar al análisis previo, se realizara la descripción del vector \mathbf{x}_2 . Apoyados en la figura 1.8 a) y b) se obtiene que

$$\mathbf{x}_2 = (L - l)\mathbf{e}_2 + b(-\cos \theta_2 \mathbf{e}_2 + \sin \theta_2 \mathbf{k}) + a(-\cos \phi_2 \sin \psi_2 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{k}) - \cos \phi_2 \cos \psi_2 \mathbf{e}_2 + \sin \phi_2 \mathbf{k})$$

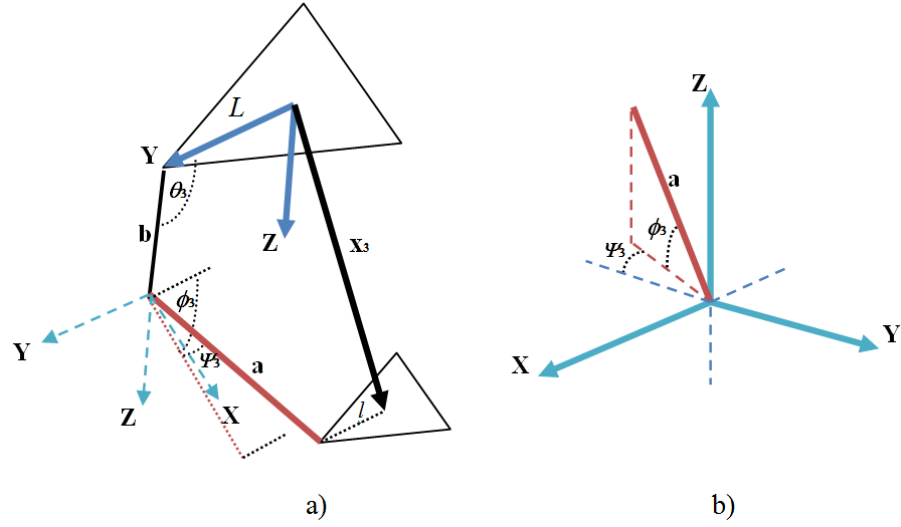


Figura 1.8: a) vista general del brazo en la dirección \mathbf{e}_2 y b) vista de coordenadas auxiliares polares para la dirección \mathbf{e}_2 .

el producto vectorial entre la dirección $\mathbf{e}_2 = (-\cos 30, -\sin 30, 0)$ con el vector normal \mathbf{k} , en coordenadas rectangulares es

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{k} = (-\cos 30, -\sin 30, 0) \times (0, 0, 1) = (-\sin 30, \cos 30, 0)$$

De modo que al sustituir el producto vectorial y expresando \mathbf{x}_2 en componentes se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 = & ((L - l) - b \cos \theta_2 - a \cos \phi_2 \cos \psi_2)(-\cos 30) + a \cos \phi_2 \sin \psi_2 \sin 30) \mathbf{i} + \\ & (((L - l) - b \cos \theta_2 - a \cos \phi_2 \cos \psi_2)(-\sin 30) - a \cos \phi_2 \sin \psi_2 \cos 30) \mathbf{j} + \\ & (b \sin \theta_2 - a \sin \phi_2) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Por último, la ecuación para el vector \mathbf{x}_3 se obtiene de la misma forma: de la representación de las figuras auxiliares (1.9) a) y b) se tiene que

$$\mathbf{x}_3 = (L - l) \mathbf{j} + b(-\cos \theta_3 \mathbf{j} + \sin \theta_3 \mathbf{k}) + a(-\cos \phi_3 \sin \psi_3 \mathbf{i} - \cos \phi_3 \cos \psi_3 \mathbf{j} - \sin \phi_3 \mathbf{k})$$

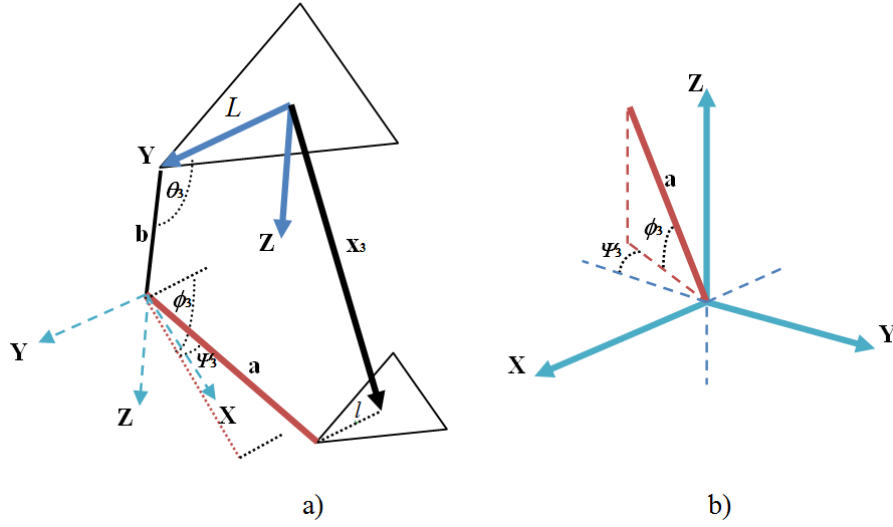


Figura 1.9: a) vista general del brazo en la dirección \mathbf{Y} y b) vista de coordenadas auxiliares polares para la dirección \mathbf{Y} .

De modo que al expresar en componentes a \mathbf{x}_3 se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_3 = & ((L - l) - b \sin 30 - a \cos \phi_3 \sin \psi_3)\mathbf{i} + \\ & ((L - l) - b \cos 30 - a \cos \phi_3 \cos \psi_3)\mathbf{j} + \\ & (b \sin \theta_3 - a \sin \phi_3)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Entonces para los vectores $\mathbf{x}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$, $\mathbf{x}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$ y $\mathbf{x}_3 = (X_3, Y_3, Z_3)$, descritos en las diferentes proyecciones espaciales, se cumple la siguiente condición $|\mathbf{x}_1| = |\mathbf{x}_2| = |\mathbf{x}_3|$. Más aún, dado que en realidad se trata del mismo vector representado en marcos de referencia con origen y eje Z comunes a todos ellos, las componentes de cada representación deben ser de la misma magnitud. De lo anterior puede entonces establecerse lo siguiente:

Para las componentes en X

$$\begin{aligned} [(L - l) - b \cos \theta_1 - a \cos \phi_1 \cos \psi_1] \cos 30 - a \cos \phi_1 \sin \psi_1 \sin 30 = \\ [(L - l) - b \cos \theta_2 - a \cos \phi_2 \cos \psi_2](-\cos 30) + a \cos \phi_2 \sin \psi_2 \sin 30 = \\ (L - l) - b \sin 30 - a \cos \phi_3 \sin \psi_3 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ahora para las componentes en Y

$$\begin{aligned} [(L - l) - b \cos \theta_1 - a \cos \phi_1 \cos \psi_1](-\sin 30) - a \cos \phi_1 \sin \psi_1 \cos 30 = \\ [(L - l) - b \cos \theta_2 - a \cos \phi_2 \cos \psi_2](-\sin 30) - a \cos \phi_2 \sin \psi_2 \cos 30 = \\ (L - l) - b \cos 30 - a \cos \phi_3 \cos \psi_3 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Y por último para la dirección Z

$$b \sin \theta_1 + a \sin \phi_1 = b \sin \theta_2 - a \sin \phi_2 = b \sin \theta_3 - a \sin \phi_3 \quad (1.6)$$

Se puede apreciar que las ecuaciones (1.4), (1.5) y (1.6), descritas en terminos los ángulos ϕ_i y ψ_i no actuados, con i de 1a 3, no están determinados. De manera que los sistema descrito previamente, son redundante y no tiene solución.

Por otra parte y con base en la descripción previa, se proponen el siguiente análisis, Para dos puntos de interés, con base en la figura 1.10. El primer punto de interés denotado con $x'_i = (X'_i, Y'_i, Z'_i)$, con $i = \{1, 2, 3\}$ (relativo a cada cadena cinemática) y es el punto de unión, del paralelogramo con la plataforma móvil. Las coordenadas de este punto pueden expresarse en términos de las componentes del vector $\mathbf{x} = (X, Y, Z)$ (que denota la posición del efector final situado en el centro del triángulo móvil) como sigue:

$$\mathbf{x}'_i = (X'_i, Y'_i, Z'_i) = (X + l \cos \beta_i, Y + l \sin \beta_i, Z) \quad (1.7)$$

El segundo punto de interés es $x_{ci} = (X_{ci}, Y_{ci}, Z_{ci})$ que es el punto de unión, entre el eslabón actuado (de longitud b) y el paralelogramo (de longitud a). La articulación asociada a este punto, es de tipo esférica con lo que el extremo x'_i del paralelogramo describe una esfera de radio a con centro en x_{ci} . Utilizando la ecuación de esta esfera con centro en x_{ci} y la ecuación (1.7) se tiene que

$$\begin{aligned} a^2 = \|\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}_{ci}\|^2 &= (X'_i - X_{ci})^2 + (Y'_i - Y_{ci})^2 + (Z'_i - Z_{ci})^2 \\ &= (X + l \cos \beta_i - X_{ci})^2 + (Y + l \sin \beta_i - Y_{ci})^2 + (Z - Z_{ci})^2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

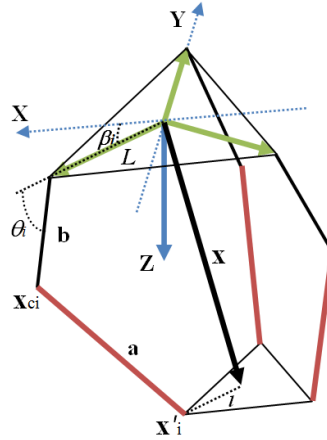


Figura 1.10: Esbozo geométrico para el modelado de la cinemática inversa

Ahora las coordenadas para \mathbf{x}_{ci} en términos de los ángulos β_i, θ_i son

$$X_{ci} = L \cos \beta_i + b \cos \theta_i \cos \beta_i$$

$$Y_{ci} = L \sin \beta_i + b \cos \theta_i \sin \beta_i$$

$$Z_{ci} = b \sin \theta_i$$

Por lo que la ecuación para la esfera (1.8), queda escrita en terminos del vector \mathbf{x} y los ángulos de los eslabones actuados (asimilados a los ángulos de los motores), como

$$\begin{aligned} a^2 = & (X - \Delta L \cos \beta_i - b \cos \theta_i \cos \beta_i)^2 \\ & + (Y - \Delta L \sin \beta_i - b \cos \theta_i \sin \beta_i)^2 + (Z - b \sin \theta_i)^2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\text{con } \Delta L = L - l$$

La ecuación (1.9) es la representación resumida del conjunto de cauciones para la cinemática directa. La cual no tiene solución analítica, Por lo que para dar solución al conjunto de ecuaciones, es necesaria la utilización de algún método numérico. Esto complica la realización de una ley de control en tiempo real basada en este modelo, debido al costo computacional que representa.

Por otra parte, se describe a continuación el problema de la cinemática inversa para el robot delta. El cual tiene solución analítica y es fácil de calcular para este mecanismo.

1.3. Cinemática inversa

El cálculo de la cinemática inversa del robot delta aplica la misma descripción de la geometría del robot mencionada anteriormente. Aprovechando las propiedades de simetría del robot sólo se analiza uno de los brazos o cadenas cinemáticas. El mismo análisis aplica para las otras cadenas cinemáticas (ver figura 1.10).

De tal forma que al desarrollar la ecuación (1.9) se obtiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned} & 2bZ \sin \theta_i + 2b(X \cos \beta_i + Y \sin \beta_i - \Delta L) \cos \theta_i \\ & -(X - \Delta L \cos \beta_i)^2 - (Y - \Delta L \sin \beta_i)^2 - Z^2 - b^2 + a^2 = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Entonces, se escribe (1.10) en la forma trigonométrica conocida $A_i \sin \theta_i + B_i \cos \theta_i + C_i = 0$ se obtiene la solución

$$\boxed{\tan \frac{\theta_i}{2} = \frac{-A_i \pm \sqrt{B_i^2 + A_i^2 - C_i^2}}{C_i - B_i}} \quad (1.11)$$

la cual representa la solución a la cinemática inversa, donde A_i , B_i y C_i están dados por

$$\begin{aligned} A_i &= 2bZ \quad ; \quad B_i = 2b(X \cos \beta_i + Y \sin \beta_i - \Delta L); \\ C_i &= -[(X - \Delta L \cos \beta_i)^2 + (Y - \Delta L \sin \beta_i)^2 + Z^2 + b^2 - a^2] \end{aligned}$$

1.4. Esquemas de control

El control de robots paralelos es un campo de investigación y desarrollo relativamente reciente; un ejemplo de ello es que no todos los trabajos reportados hasta la fecha involucran un análisis matemático riguroso. Ejemplos de estos trabajos son el modelo de control no lineal para un robot paralelo [17], el desarrollo en la compensación de compilación de errores en manipuladores paralelos [10], el estudio en alta precisión del control de movimiento para un robot paralelo [18], el control estratégico de la dinámica de un robots paralelos [19], etc.

Por otra parte no existen muchos desarrollos de controladores robustos ante errores del modelo y en las mediciones sensoriales para robots paralelos. Ejemplo de estos son: el trabajo sobre diseño de control robusto para un robot paralelo plano [20], el control robusto de alta precisión para un robot paralelo (4-DOF cuatro grados de libertad) [21], el control de compensación en la dinámica parcialmente inversa de la plataforma Stewart [9], el modelo dinámico de control robusto para un robot paralelo traslacional [11], el control de manipuladores paralelos con muy altas aceleraciones [12], etc.

Control en la tarea

La técnica de control basado en tarea [22] proporciona un marco formal para el desarrollo de controles para sistemas mecánicos. Originalmente fue desarrollada para el control de robots industriales de tipo serial pero, debido a su planteamiento general, esta técnica puede ser extendida a más tipos de sistemas. La técnica de control de tarea engloba una variedad de procedimientos afines a los siguientes objetivos: proporcionar información en tiempo real, controlar las variables de interés y optimizar el rendimiento del proceso. Con base en lo anterior, es posible plantear formalmente los casos del problema de control como una regulación a cero de la función de tarea, a medida que el tiempo t aumenta.

Por ejemplo, en un robot se puede proponer una función de tarea como al función

$$\mathbf{e}_\theta = \boldsymbol{\theta}_d(t) - \boldsymbol{\theta},$$

con $\boldsymbol{\theta}_d(t)$ como el vector de posiciones angulares deseado en terminos del la variable t y $\boldsymbol{\theta}$ como el vector de posiciones angulares actuales del robot. Otra forma semejante es

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}),$$

con $\mathbf{x}_d(t)$ como el vector de posiciones espaciales deseado en terminos de la variable t y $\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta})$ como el vector de posiciones espaciales en terminos del vector de posiciones angulares actuales del robot. Por ultimo también podría ser descrita como

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{s}_d(t) - \mathbf{s}(\mathbf{x}),$$

con $\mathbf{s}_d(t)$ como el vector de mediciones del sensor deseado en terminos de la variable t y $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ como el vector de mediciones en el sensor en terminos del vector de posiciones espaciales actuales del robot, todas a través de una trayectoria predeterminada y de la evolución del sistema mismo.

De esta manera, denotando la posición que se desea alcanzar con $\mathbf{q}_d(t)$ como el vector de coordenadas generales deseadas y el vector de coordenadas generales actuales del robot \mathbf{q} , para un caso particular de función de tarea. Esta es la función de error \mathbf{e} , entre la configuración deseada (posición de la muestra u objeto deseado $\mathbf{q}_d(t)$) y la configuración actual del robot (posición del robot manipulador \mathbf{q}). Esta función puede entonces escribirse como

$$\boxed{\mathbf{e} = \mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}} \quad (1.12)$$

Ahora, el problema de la regulación a cero de la función de la tarea posee ciertas condiciones bien establecidas. Primero debe *existir*, una trayectoria ideal y *única* de \mathbf{q} tal que la función de tarea sea nula en cada instante de tiempo. En términos prácticos lo anterior se traduce en el requerimiento de que el jacobiano de la tarea

$$\boxed{\mathbf{J}_e(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{q}}} \quad (1.13)$$

sea regular a lo largo de esta trayectoria. Una condición suficiente para ello es que el jacobiano sea derivable y tenga inversa para cada instante de tiempo.

Control PID

La forma para realizar un algoritmo de control por retroalimentación es aplicar una ecuación correctora capaz de ajustar el proceso según la consigna de optimización elegida. Un metodología bien estudiada para este tipo de ecuación correctora es el controlador proporcional integral derivativo (PID).

El elemento proporcional determina la reacción del controlador al error actual y que está dada por el producto de la constante proporcional y la señal de error del sistema. El elemento integral genera una corrección proporcional integral del error del sistema. Este elemento sirve para anular errores de estado estable del sistema. El elemento derivativo determina una acción predictora que se basa en la velocidad del error.

Un controlador PID puede ser diseñado sólo como PI, PD, P. Los controladores PI son particularmente comunes, ya que para una gran variedad de sistemas y de tareas de aplicación se obtiene un desempeño razonable. Además el elemento derivativo es muy sensible a perturbaciones. En cambio, el elemento integral regula a cero el error del sistema. Entonces bajo los esquemas de control por retroalimentación descritos por la ecuación (1.13) para los criterios de la función de tarea, se pueden realizar controladores de tipo proporcional y proporcional integral a través del modelo de la cinemática inversa del robot, y de esta manera generar algoritmos control en velocidad.

Como se verá en capítulos posteriores, en el análisis de la ecuación diferencial (1.13) se impone la condición de lazo cerrado en la cinemática inversa del robot. La solución a estas ecuaciones generan la descripción de un controlador de tipo proporcional el cual, bajo un análisis de estabilidad, amplía los enfoques para las condiciones de convergencia del sistema. Esto da lugar además al controlador proporcional integral y la estabilidad para los puntos de equilibrio del sistema de error asociado en presencia de errores en la estimación del estado del sistema y de su modelo. Para ellos primeramente, en el capítulo siguiente se desarrollan elementos de modelado complementarios y necesarios para la síntesis del control. Además también se presenta un modelo dinámico del robot.

Capítulo 2

Modelado matemático del robot

En este capítulo se realizará el análisis de la matriz jacobiana para el desarrollo de las leyes de control en velocidad, basados en la cinemática inversa para el robot delta. Además se presenta la descripción del modelo dinámico del robot.

Considere el modelo cinemático inverso descrito en el capítulo anterior, para ello se parte de la ecuación (1.10), como la solución para la posición de los diferentes actuadores dados por θ_i , con $i = 1, 2, 3$

$$\tan \frac{\theta_i}{2} = \frac{-A_i \pm \sqrt{B_i^2 + A_i^2 - C_i^2}}{C_i - B_i}$$

con $i = 1, 2, 3$

De donde, al comparar con el siguiente desarrollo en términos de los elementos del robot delta

$$\begin{aligned} & 2bZ \sin \theta_i + 2b(X \cos \beta_i + Y \sin \beta_i - \Delta L) \cos \theta_i \\ & -(X - \Delta L \cos \beta_i)^2 - (Y - \Delta L \sin \beta_i)^2 - Z^2 - b^2 + a^2 = 0 \end{aligned}$$

se obtienen los siguientes resultados

$$\begin{aligned} A_i &= 2bZ ; B_i = 2b(X \cos \beta_i + Y \sin \beta_i - \Delta L); \\ C_i &= -[(X - \Delta L \cos \beta_i)^2 + (Y - \Delta L \sin \beta_i)^2 + Z^2 + b^2 - a^2] \end{aligned}$$

A partir de este modelo se deducirá el jacobiano asociado a esta transformación.

2.1. Jacobiano de la cinemática inversa

De la configuración del robot en el espacio articular, en términos de la posición cartesiana del efector final $\mathbf{x} = (X, Y, Z) = (X_1, X_2, X_3)$ se proponen los siguientes cambios de variables para generar el análisis del jacobiano del robot como a continuación se muestra

$$\tan \frac{\theta_i}{2} = \frac{-A_i \pm \sqrt{B_i^2 + A_i^2 - C_i^2}}{C_i - B_i} = \frac{-A_i \pm R_i}{D_i} = \frac{h_i^\pm}{D_i} = g_i^\pm$$

con

$$R_i = \sqrt{B_i^2 + A_i^2 - C_i^2}$$

$$D_i = C_i - B_i ; h_i^\pm = -A_i \pm R_i$$

Despejando el valor de θ_i en términos de g_i^\pm se obtiene que

$$\theta_i = 2 \arctan(g_i^\pm)$$

Ahora que se establecen los cambios de variables, se procede a calcular el jacobiano de la cinemática inversa de la siguiente manera

$$[\mathbf{J}_\theta(\mathbf{x})]_{ij} = \frac{\partial \theta_i}{\partial X_j} = \frac{\partial \theta_i}{\partial g_k^\pm} \frac{\partial g_k^\pm}{\partial X_j}$$

de donde

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial g_k^\pm} = \frac{\partial(2 \arctan g_i^\pm)}{\partial g_k^\pm} \delta_{ik} = \frac{2}{1 + (g_i^\pm)^2} = \frac{2}{1 + \left(\frac{h_i^\pm}{D_i}\right)^2} = \frac{2(D_i)^2}{(D_i)^2 + (h_i^\pm)^2} \quad (2.1)$$

y

$$\frac{\partial g_k^\pm}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{h_i^\pm}{D_i} \right) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{-A_i \pm R_i}{D_i} \right)$$

Ahora se considera la siguiente transformación $\frac{\partial F_i}{\partial X_j} = F_i^j$ con $\{F_i\}$ alguno de los elementos de la solución para la cinemática inversa A_i, B_i, C_i o de los cambios de variable R_i y D_i . Entonces $\{F_i^j | F_i^j = A_i^j \text{ ó } B_i^j \text{ ó } C_i^j \text{ ó } D_i^j \text{ ó } R_i^j\}$ de tal forma que

$$\frac{\partial g_k^\pm}{\partial X_j} = \frac{D_i(-A_i^j \pm R_i^j) - h_i^\pm(D_i^j)}{(D_i)^2} \quad (2.2)$$

Sustituyendo (??) y (2.2) en (2.1) el jacobiano de la cinemática inversa es

$$\boxed{[\mathbf{J}_\theta(\mathbf{x})]_{ij} = \frac{\partial \theta_i}{\partial g_k^\pm} \frac{\partial g_k^\pm}{\partial X_j} = \frac{-2D_i(-A_i^j \mp R_i^j) + 2h_i^\mp(D_i^j)}{(D_i)^2 + (h_i^\pm)^2}} \quad (2.3)$$

donde los valores de R_i^j son

$$R_i^1 = \frac{B_i B_i^1 - C_i C_i^1}{R_i}; R_i^2 = \frac{B_i B_i^2 - C_i C_i^3}{R_i}; R_i^3 = \frac{2b A_i - 2Z C_i}{R_i},$$

los valores de A_i^j son

$$A_i^1 = 0; A_i^2 = 0; A_i^3 = 2b,$$

los valores de B_i^j son

$$B_i^1 = 2b \cos \beta_i ; B_i^2 = 2b \sin \beta_i ; B_i^3 = 0,$$

los valores de C_i^j son

$$C_i^1 = 2[-X + \Delta L \cos \beta_i] ; C_i^2 = 2[-Y + \Delta L \sin \beta_i] ; C_i^3 = Z,$$

y los valores de D_i^j son

$$D_i^1 = 2[-X + (\Delta L + b) \cos \beta_i] ; D_i^2 = 2[-Y + (\Delta L + b) \sin \beta_i] ; D_i^3 = Z.$$

2.2. Modelo dinámico del robot

Si se desea que un robot sea capaz de desplazarse a grandes velocidades y aceleraciones y mantener su precisión y estabilidad, es fundamental considerar el modelo dinámico de éste en el diseño del control [23]. Primero, un modelo dinámico puede ser usado para la simulación del movimiento del robot, para examinar el comportamiento del modelo bajo varias condiciones de funcionamiento y predecir el comportamiento del sistema. En este aspecto, varias tareas de automatización pueden ser examinadas sin la necesidad de un sistema real [24]. Segundo, el análisis dinámico puede ser utilizado para el desarrollo de un modelo realista que permita alcanzar un funcionamiento óptimo bajo condiciones de altas aceleraciones. Tercero, el análisis dinámico de un manipulador revela todas las fuerzas de reacción (y momentos) necesarios para el diseño y evaluación de la estructura mecánica del robot, y el dimensionamiento de los actuadores.

Hay dos tipos de modelos dinámicos, el modelo dinámico directo y modelo dinámico inverso. Para el modelo dinámico directo dado un vector de pares fuerzas aplicados, traduce el movimiento resultante como una función de tiempo [25]. Mientras que el modelo dinámico inverso encuentra los pares fuerzas de los actuadores requeridos y genera la trayectoria deseada del manipulador. En particular, el análisis que se describe a continuación está basado en el modelo inverso e inspirado en el trabajo realizado por Luis Ángel Silva sobre análisis y desarrollo de la plataforma paralela robotenís [26].

Formulación Lagrangiana

La formulación Lagrangiana tiene como base las leyes energéticas para la dinámica de cuerpos rígidos [27]. Una consecuencia de lo anterior es que la formulación Lagrangiana es independiente de los sistemas de coordenadas y, por tanto, permite obtener conclusiones generales de la descripción del movimiento [28]. La formulación de base es

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \text{ y } L = K - V. \quad (2.4)$$

con L la función de Lagrange, K la energía cinética, V la energía potencial, $j = 1$ a n y q_j , el índice, número y el vector de coordenadas generalizadas respectivamente,

$$q_j = [X, Y, Z, \theta_1, \theta_2, \theta_3]$$

Para el robot paralelo $n = 6$ y los términos i , m , f_i , como el índice, número y función de restricción respectivamente. Entonces la función de restricciones geométricas está dada por

$$f_i = \|\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}_{ci}\|^2 - a^2 = (X' - X_i)^2 + (Y' - Y_i)^2 + (Z' - Z_i)^2 - a^2 = 0 \quad (2.5)$$

con \mathbf{x}'_i y \mathbf{x}_{ci} descritos en el modelado de la cinemática inversa. Además λ_i es el multiplicador de Lagrange y Q_j las fuerzas externas generalizadas, con

$$Q_j = [0, 0, 0, Q_4, Q_5, Q_6] = [0, 0, 0, \tau_1, \tau_2, \tau_3]$$

donde τ_i es el par del motor en el brazo i de tal forma que

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} - \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \theta_i} \quad (2.6)$$

o escrito (2.6) en forma vectorial

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{\boldsymbol{\theta}}} L) - \nabla_{\boldsymbol{\theta}} L - \mathbf{J}_f(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\lambda} \quad (2.7)$$

donde $\mathbf{J}_f(\boldsymbol{\theta})$ es el gradiente de la función vectorial de restricción \mathbf{f} , cuyas componentes se describen en (2.5), con respecto del vector $\boldsymbol{\theta}$; esto es

$$[\mathbf{J}_f(\boldsymbol{\theta})]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} = \frac{\partial f_i}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial \theta_j} = \frac{\partial f_i}{\partial \theta_i} \delta_{ij}.$$

Tomando la función anterior para $i = 1$ a 3 se tiene:

$$\frac{\partial f_i}{\partial \theta_i} = 2b \sin \theta_i (X \cos \beta_i + Y \sin \beta_i - \Delta L) - 2b \cos \theta_i Z$$

Ahora se toman los valores de $j = 1$ a 3, entonces $q_j = X_j = [X, Y, Z]$. De esta manera, para obtener los multiplicadores de Lagrange, se tiene

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial X_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial X_j} \quad (2.8)$$

o escrito (2.8) en forma vectorial

$$\mathbf{J}_f^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\lambda} = \frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{\mathbf{x}}} L) - \nabla_{\mathbf{x}} L \quad (2.9)$$

donde $\mathbf{J}_f(\mathbf{x})$ es el Jacobiano de la función de restricción \mathbf{f} con respecto del vector \mathbf{x} , es decir

$$[\mathbf{J}_f(\mathbf{x})]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial X_j}$$

En componentes:

$$\frac{\partial f_i}{\partial X} = 2[X - (\Delta L + b \cos \theta_i) \cos \beta_i]$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial Y} = 2[Y - (\Delta L + b \cos \theta_i) \sin \beta_i]$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial Z} = 2(Z - b \sin \theta_i)$$

Ahora se define la energía cinética (K) y potencial (V) del robot

$$K = \sum_{i=1}^3 (K_{ai} + K_{bi}) + K_l$$

$$V = \sum_{i=1}^3 (V_{ai} + V_{bi}) + V_l$$

Con K_{bi} la energía cinética del i -ésimo eslabón de magnitud b , K_{ai} la energía cinética del i -ésimo eslabón de magnitud a y K_l la energía cinética de la plataforma móvil. De manera que la energía cinética total queda escrita como

$$K_l = \frac{1}{2} m_l (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) ; K_{bi} = \frac{1}{2} I_b \dot{\theta}_i^2$$

$$K_{ai} = \frac{1}{2} m_a \left\{ \frac{1}{3} [(\dot{X} \cos \beta_i + \dot{Y} \sin \beta_i + b \dot{\theta}_i \sin \theta_i)^2 + (-\dot{X} \sin \beta_i + \dot{Y} \cos \beta_i)^2 + (\dot{Z} - b \dot{\theta}_i \cos \theta_i)^2] \right.$$

$$\left. - b(\dot{X} \cos \beta_i + \dot{Y} \sin \beta_i) \dot{\theta}_i \sin \theta_i + b \dot{Z} \dot{\theta}_i \cos \theta_i \right\}$$

De forma similar, para la energía potencial, V_{bi} es la energía potencial del iésimo eslabón de magnitud b , V_{ai} es la energía potencial del iésimo eslabón de magnitud a y V_l es la energía potencial de la plataforma móvil. De donde la energía potencial total está dada por

$$V_l = -m_l g Z ; V_{bi} = -\frac{1}{2} m_b g b \text{sen} \theta_i ; V_{ai} = -\frac{1}{2} m_a g (Z - b \text{sen} \theta_i)$$

2.3. Descripción sintetizada del modelo dinámico

Para obtener las ecuaciones de las derivadas de la función Lagrangiana y de las ecuaciones de restricción f_i , con respecto a las tres primeras coordenadas generalizadas $q_i = [X, Y, Z]$, se deriva la función Lagrangiana respecto de X y \dot{X} como sigue

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) - \frac{\partial L}{\partial X} &= (m_a + m_l) \ddot{X} - \frac{1}{6} m_a b \sum_{i=1}^3 \cos \beta_i (\ddot{\theta}_i \text{sen} \theta_i + \dot{\theta}_i^2 \cos \theta_i) = \\ &= (m_a + m_l) \ddot{X} - \frac{1}{6} m_a b \sum_{i=1}^3 \dot{\theta}_i^2 \cos \theta_i \cos \beta_i - \frac{1}{6} m_a b \sum_{i=1}^3 \ddot{\theta}_i \text{sen} \theta_i \cos \beta_i \end{aligned}$$

Usando la transformación

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\ddot{X}) &= (m_a + m_l) \ddot{X} \\ \mathbf{h}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \sum_{i=1}^3 (\dot{\theta}_i \cos \theta_i \cos \beta_i) \dot{\theta}_i \\ \mathbf{w}_1 \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} &= \sum_{i=1}^3 (\text{sen} \theta_i \cos \beta_i) \ddot{\theta}_i \end{aligned}$$

se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) - \frac{\partial L}{\partial X} = \mathcal{L}(\ddot{X}) - \frac{1}{6} m_a b \mathbf{h}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{6} m_a b \mathbf{w}_1 \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}}$$

La derivada de la función Lagrangiana respecto de Y y \dot{Y} es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial Y} &= (m_a + m_l) \ddot{Y} - \frac{1}{6} m_a b \sum_{i=1}^3 \text{sen} \beta_i (\ddot{\theta}_i \text{sen} \theta_i + \dot{\theta}_i^2 \cos \theta_i) = \\ &= (m_a + m_l) \ddot{Y} - \frac{1}{6} m_a b \sum_{i=1}^3 \dot{\theta}_i^2 \cos \theta_i \text{sen} \beta_i - \frac{1}{6} m_a b \sum_{i=1}^3 \ddot{\theta}_i \text{sen} \theta_i \text{sen} \beta_i \end{aligned}$$

Usando la transformación

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\ddot{Y}) &= (m_a + m_l) \ddot{Y} \\ \mathbf{h}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \sum_{i=1}^3 (\dot{\theta}_i \cos \theta_i \text{sen} \beta_i) \dot{\theta}_i \\ \mathbf{w}_2 \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} &= \sum_{i=1}^3 (\text{sen} \theta_i \text{sen} \beta_i) \ddot{\theta}_i \end{aligned}$$

se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial Y} = \mathcal{L}(\ddot{Y}) - \frac{1}{6} m_a b \mathbf{h}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{6} m_a b \mathbf{w}_2 \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}}$$

La derivada de la función Lagrangiana respecto de Z y \dot{Z} es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial Z} &= (m_a + m_l) \ddot{Z} - \frac{1}{6} m_a b \sum_{i=1}^3 (\ddot{\theta}_i \cos \theta_i - \dot{\theta}_i^2 \text{sen} \theta_i) - (m_l + \frac{3}{2} m_a) g = \\ &= (m_a + m_l) \ddot{Z} - (m_l + \frac{3}{2} m_a) g + \frac{1}{6} m_a b \sum_{i=1}^3 \dot{\theta}_i^2 \text{sen} \theta_i - \frac{1}{6} m_a b \sum_{i=1}^3 \ddot{\theta}_i \cos \theta_i \end{aligned}$$

Usando el cambio de variables

$$\mathcal{L}(\ddot{Z}) = (m_a + m_l)\ddot{Z} - (m_l + \frac{3}{2}m_a)g$$

$$\mathbf{h}_3 \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \sum_{i=1}^3 (-\dot{\theta}_i \text{sen} \theta_i) \dot{\theta}_i$$

$$\mathbf{w}_3 \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} = \sum_{i=1}^3 (\cos \theta_i) \ddot{\theta}_i$$

se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Z}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Z} = \mathcal{L}(\ddot{Z}) - \frac{1}{6} m_a b \mathbf{h}_3 \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{6} m_a b \mathbf{w}_3 \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}}$$

De manera que escribiendo las derivadas la función Lagrangiana (2.9) en forma vectorial se tiene

$$\frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{X}}} \mathcal{L}) - \nabla_{\mathbf{X}} \mathcal{L} = \mathcal{L}(\ddot{\mathbf{X}}) - \frac{1}{6} m_a b \mathbf{H} \dot{\boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{6} m_a b \mathbf{W} \ddot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.10)$$

con \mathbf{W} la matriz $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3]^T$.

y \mathbf{H} la matriz $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3]^T$.

Ahora, de las ecuaciones que describen el comportamiento de los multiplicadores de Lagrange (2.9) descritas en forma vectorial, las derivadas del lagrangiano (2.10) se tiene que

$$\mathbf{J}_f^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\lambda} = \mathcal{L}(\ddot{\mathbf{x}}) - \frac{1}{6} m_a b \mathbf{H} \dot{\boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{6} m_a b \mathbf{W} \ddot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.11)$$

por lo que el vector de multiplicadores de Lagrange descrito a partir de (2.11) λ es

$$\lambda = \mathbf{J}_f^{-T}(\mathbf{x})\mathcal{L}(\ddot{\mathbf{x}}) - \frac{1}{6}m_a b \mathbf{J}_f^{-T}(\mathbf{x})\mathbf{H}\dot{\boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{6}m_a b \mathbf{J}_f^{-T}(\mathbf{x})\mathbf{W}\ddot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.12)$$

Entonces, para las derivadas de la función Lagrangiana y de las ecuaciones de restricción f_i con respecto a las siguientes tres coordenadas generalizadas $q_j = \theta_i = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i}\right) &= \left(\frac{1}{3}m_a b^2 + I_b\right)\ddot{\theta}_i \\ &- \frac{1}{6}m_a b [\text{sen}\theta_i(\cos\beta_i\ddot{X} + \text{sen}\beta_i\ddot{Y} + \dot{Z}\dot{\theta}_i) + \cos\theta_i(\cos\beta_i\dot{X}\dot{\theta}_i + \text{sen}\beta_i\dot{Y}\dot{\theta}_i - \ddot{Z})] \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} &= \frac{1}{2}gb \cos\theta_i(m_b + m_a) - \frac{1}{6}m_a b \dot{\theta}_i(\cos\beta_i \cos\theta_i\dot{X} + \text{sen}\beta_i \cos\theta_i\dot{Y} + \text{sen}\theta_i\dot{Z}). \end{aligned}$$

Reduciendo las derivadas de la función Lagrangiana con respecto a las últimas tres coordenadas generalizadas $q_j = \theta_i$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} &= (I_b + \frac{1}{3}m_a b^2)\ddot{\theta}_i - \frac{1}{6}m_a b [\text{sen}\theta_i(\cos\beta_i\ddot{X} + \text{sen}\beta_i\ddot{Y}) - \cos\theta_i\ddot{Z}] \\ &+ \frac{1}{2}gb \cos\theta_i(m_a + m_b) \end{aligned}$$

Ahora se proponen los siguientes cambios de variable para reducir las derivadas de la función Lagrangiana.

$$M = I_b + \frac{1}{3}m_a b^2 ; M_1 = -\frac{1}{6}m_a b ; M_0 = \frac{1}{2}gb(m_a + m_b)$$

$$T_i(\ddot{X}, \ddot{Y}) = \cos\beta_i\ddot{X} + \text{sen}\beta_i\ddot{Y}$$

Con lo anterior se pueden reescribir las derivadas de la función Lagrangiana como una función de la posición y aceleración de los actuadores en cada brazo, como a continuación se indica

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = M\ddot{\theta}_i + M_1(\text{sen}\theta_i T_i(\ddot{X}, \ddot{Y}) - \ddot{Z} \cos \theta_i + M_0 \cos \theta_i).$$

Nuevamente se realiza un cambio de variable:

$$M(\ddot{Z}) = M_0 - M_1 \ddot{Z}$$

con lo que derivadas de la función Lagrangiana quedan escritas como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = M\ddot{\theta}_i + M_1 T_i(\ddot{X}, \ddot{Y}) \text{sen}\theta_i + M(\ddot{Z}) \cos \theta_i.$$

Entonces sustituyendo lo anterior en la ecuación del par de cada motor se obtiene que

$$\tau_i = M\ddot{\theta}_i + M_1 T_i(\ddot{X}, \ddot{Y}) \text{sen}\theta_i + M(\ddot{Z}) \cos \theta_i - \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \theta_i}$$

que escrito en forma vectorial queda

$$\boldsymbol{\tau} = M \mathbf{I} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + M_1 \mathbf{t}_s(\ddot{X}, \ddot{Y}) + \mathbf{m}_c(\ddot{Z}) - \mathbf{J}_f(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\lambda} \quad (2.13)$$

con

$$[\mathbf{t}_s]_i = [\mathbf{t}_s(\ddot{X}, \ddot{Y})]_i = T_i(\ddot{X}, \ddot{Y}) \text{sen}\theta_i$$

$$[\mathbf{m}_c]_i = [\mathbf{m}_c(\ddot{Z})]_i = M(\ddot{Z}) \cos \theta_i$$

Sustituyendo el valor obtenido para el vector de multiplicadores de Lagrange descrito por (2.12), se tiene que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & M \mathbf{I} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + M_1 \mathbf{t}_s + \mathbf{m}_c - \mathbf{J}_f(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{J}_f^{-T}(\mathbf{x})] \boldsymbol{\mathcal{L}}(\ddot{\mathbf{x}}) \\ & - M_1 \mathbf{J}_f(\boldsymbol{\theta})\mathbf{J}_f^{-T}(\mathbf{x})\mathbf{H}\dot{\boldsymbol{\theta}} - M_1 \mathbf{J}_f(\boldsymbol{\theta})\mathbf{J}_f^{-T}(\mathbf{x})\mathbf{W}\ddot{\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned}$$

Factorizando el vector aceleración en los actuadores se tiene la ecuación para el comportamiento dinámico en cada uno de los pares del motor en forma semejante, al modelo de los robots seriales, descrita como

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})} \quad (2.14)$$

con $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$ la matriz de inercias que depende de $\boldsymbol{\theta}$ y \mathbf{x} y definida como sigue

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = M \mathbf{I} - M_1 \mathbf{J}_f(\boldsymbol{\theta})\mathbf{J}_f^{-T}(\mathbf{x})\mathbf{W}(\boldsymbol{\theta}),$$

$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ la matriz de efectos de Coriolis que depende de $\boldsymbol{\theta}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ y \mathbf{x} definida como

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = -M_1 \mathbf{J}_f(\boldsymbol{\theta})\mathbf{J}_f^{-T}(\mathbf{x})\mathbf{H}(\dot{\boldsymbol{\theta}})$$

y $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ el vector de gravedad que depende de $\boldsymbol{\theta}$ y $\ddot{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = M_1 \mathbf{t}_s + \mathbf{m}_c - \mathbf{J}_f(\boldsymbol{\theta})\mathbf{J}_f^{-T}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\mathcal{L}}(\ddot{\mathbf{x}})$$

2.3. DESCRIPCIÓN SINTETIZADA DEL MODELO DINÁMICO

A pesar de haber logrado la descripción de la dinámica para los pares de los motores en (2.14) de forma semejante a la del los robots seriales, está no cumple con las propiedades estudiadas para la dinámica estos robots. por consiguiente parecería conveniente realizar algún estudio mas profundo. Por cuestiones de tiempo no fue posible continuar el análisis dinámico, por esta razón solo quedan como una contribución al control del robot delta y no se mencionaran en le siguiente capitulo.

Capítulo 3

Síntesis y análisis de controles para el robot

En esta sección se desarrolla la síntesis de controles para el robot paralelo tipo delta. Simultáneamente, con la síntesis de controles se lleva a cabo un análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado. En una primera instancia los controles se desarrollan con la hipótesis de que todos los elementos son bien conocidos (no tienen errores) y se obtienen condiciones para la estabilidad. En una segunda instancia se consideran errores en los términos que intervienen en la expresión de la ley de control, lo cual constituye un escenario más real para una aplicación práctica. Típicamente estos errores se presentan en condiciones de aplicaciones reales debido al uso de sensores los cuales generalmente involucran fuentes de error como ruido en sus señales o el desconocimiento de los parámetros exactos del modelo del sensor entre otros. Otras fuentes de error son el desconocimiento de los parámetros reales del modelo del sistema. Esto puede ser ocasionado, por ejemplo, por variaciones en la fabricación del sistema real. Cabe mencionar que la propuesta de control será basada en la cinemática del robot manipulador.

Es importante resaltar que el control se desarrollará con base en la técnica de control de función de tarea. Enseguida se hace un breve recordatorio de los conceptos más importantes de esta técnica.

3.1. Control del robot basado en la función de tarea

Partiendo de la formulación de control de función de tarea desarrollada en [22], y considerando que en el capítulo anterior se realizarán síntesis de control basados en esta técnica. Una forma de proponer el control para el robot manipulador es a través del modelo en velocidad del mismo, es decir, a través de las velocidades de cada uno de los actuadores. Para ello se tiene que $\dot{\theta} = \mathbf{u}$, con \mathbf{u} la variable de control del sistema.

Para el control basado en la función de tarea, se propuso una función que debe ser regulada a cero para que la tarea se lleve a cabo. Es el caso de la función de error la cual representa el sistema descrito por: robot manipulador y objeto deseado, con \mathbf{q} como un vector de coordenadas generales, que pueden ser denotadas como coordenadas tridimensionales \mathbf{x} o mediciones del sensor \mathbf{s} .

$$\boxed{\mathbf{e} = \mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}(\boldsymbol{\theta}, t)} \quad (3.1)$$

Entonces, sea t el tiempo de evolución, para la dinámica del sistema descrito en terminos de la función de tarea y de la variable de control \mathbf{u} como un sistema no lineal, su representación es de la forma:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}(\mathbf{e}, \mathbf{u}, t)$$

Ahora sea el vector $\mathbf{e} = \mathbf{e}(\boldsymbol{\theta}, t)$ una función vectorial real definida en $D \subseteq \mathbf{R}^3$ con $\mathbf{e} = (e_1(\boldsymbol{\theta}, t), e_2(\boldsymbol{\theta}, t), e_3(\boldsymbol{\theta}, t))^T$. Por lo que del teorema de derivación total:

$$d\mathbf{e} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} dt + \left[\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] d\boldsymbol{\theta}$$

Entonces la derivada total con respecto a t es $\dot{\mathbf{e}}$ descrita como:

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{d\mathbf{e}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \left[\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

Por lo que, como se mencionó anteriormente, el control en velocidad implica que $\mathbf{u} = \dot{\boldsymbol{\theta}}$. De manera que la dinámica del sistema para la función de tarea propuesta sería:

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} - \left[\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] \mathbf{u}$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} - \mathbf{J}_e(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u} \quad (3.2)$$

$$\text{con } \mathbf{J}_e(\boldsymbol{\theta}) = \left[\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{q}} \right] \left[\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] = \mathbf{J}_e(\mathbf{q})\mathbf{J}_q(\boldsymbol{\theta})$$

y $\mathbf{J}_e(\mathbf{q})$ como el Jacobiano de la tarea, el cual es invertible.

La ecuación (3.2) constituye el sistema de control que se utilizará para realizar las síntesis de control en las secciones siguientes.

3.2. Control proporcional (P)

Para el sistema (3.2) se propone realizar un controlador que asemeje las características del un control proporcional a través de la matriz diagonal de ganancias \mathbf{K}_p de tal manera que la dinámica del sistema controlado (en lazo cerrado) tome la forma:

$$\dot{\mathbf{e}} = -\mathbf{K}_p \mathbf{e}. \quad (3.3)$$

La ecuación (3.3) corresponde a un sistema lineal cuyo estado $\mathbf{e} \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$. Por lo que imponiendo la dinámica (3.3) al sistema (3.2):

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} - \mathbf{J}_e(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u} = -\mathbf{K}_p \mathbf{e}$$

de donde despejando \mathbf{u} se obtiene la siguiente ley de control:

$$\mathbf{u} = \mathbf{J}_e^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left[\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \mathbf{K}_p \mathbf{e} \right] \quad (3.4)$$

La anterior es una ley de control proporcional que involucra el conocimiento del jacobiano asociado a la función de error así como la medición del error mismo y la velocidad de éste. Esto último implica tanto la medición del estado del robot como del objeto a manipular así como las velocidades de ambos. A continuación se expresa esta ley de control usando un sistema de coordenadas.

3.2.1. Control P en el espacio cartesiano

Ya que el órgano terminal del robot paralelo evoluciona en el espacio cartesiano, se usará el vector $\mathbf{x} = (X, Y, Z)$ que describe la posición del efector final en coordenadas cartesianas. Asimismo, la posición del objeto a manipular se considera en coordenadas cartesianas. Además se supone que tanto el robot como el objeto a manipular evolucionan en el espacio de trabajo del robot (espacio geométrico definido por los movimientos dentro del alcance del robot).

Se proponen dos vectores para describir las posiciones del objeto deseado y del efector final del robot. El vector de posición del objeto (o posición deseada para el robot) que se desplaza en el espacio de trabajo se escribe $\mathbf{x}_d = \mathbf{x}_d(t)$, y el vector de posición del efector final del manipulador robot es $\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta})$. Por facilidad de notación estos vectores se escribirán simplemente como \mathbf{x}_d y \mathbf{x} salvo cuando pueda existir confusión. Con la notación anterior se propone una función de tarea dado por (comparar con la ecuación (3.1))

$$\boxed{\mathbf{e}_x = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}} \quad (3.5)$$

Sustituyendo (3.5) en la ley de control proporcional de tarea en (3.4) se tiene la expresión de la ley de control en coordenadas cartesianas

$$\mathbf{u}_x = \mathbf{J}_{e_x}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left[\frac{\partial \mathbf{e}_x}{\partial t} + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_x \right]$$

Sustituyendo (3.5) en (3.2) y en el término para la parcial respecto al tiempo de (3.4) se tiene

$$\mathbf{J}_{e_x}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \mathbf{e}_x}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J}_x(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.6)$$

y

$$\frac{\partial \mathbf{e}_x}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{x}_d}{\partial t} = \frac{d\mathbf{x}_d}{dt} = \dot{\mathbf{x}}_d$$

de donde una expresión alternativa para la ley de control obtenida en coordenadas cartesianas es:

$$\mathbf{u}_x = \mathbf{J}_x^{-1}(\boldsymbol{\theta})[\dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_x] \quad (3.7)$$

Para implementar la ley de control (3.7) en la práctica es necesario conocer el jacobiano asociado a la cinemática directa ($\mathbf{J}_x(\boldsymbol{\theta})$). Además es necesario conocer la velocidad del objeto a manipular ($\dot{\mathbf{x}}_d$) así como la posición del robot y del objeto a manipular (\mathbf{e}). Sin embargo, debido a las características del robot delta (cinemática directa en forma de función implícita) no es fácil obtener un modelo del Jacobiano asociado a la cinemática directa. Por lo que se propone utilizar el Jacobiano asociado a la cinemática inversa:

$$\mathbf{J}_x(\boldsymbol{\theta}) = \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] \text{ a diferencia del Jacobiano } \mathbf{J}_\theta(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \mathbf{x}} \right]$$

De tal manera que si:

$$\mathbf{J}_x^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^{-1} = \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}_\theta(\mathbf{x})$$

se puede escribir la ley de control (3.7) como:

$$\boxed{\mathbf{u}_x = \mathbf{J}_\theta(\mathbf{x})[\dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_x]} \quad (3.8)$$

Considerando que $\mathbf{J}_x(\boldsymbol{\theta})\mathbf{J}_\theta(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$, con \mathbf{I} la matriz identidad de dimensión 3×3 , el control (3.9) asegura que la trayectoria del robot converge exponencialmente hacia la trayectoria del objeto deseado ($\mathbf{e} \rightarrow 0$). Sin embargo, como se ha mencionado anteriormente, los términos que intervienen en la ley de control son difíciles de conocer con exactitud en la práctica. Enseguida se verá la influencia de errores en estos términos sobre el desempeño del sistema controlado.

3.2.2. Análisis de estabilidad y robustez para el control P en el espacio cartesiano

El modelo de tarea, a pesar de ser flexible y razonablemente fácil de implementar, tiene como cualquier otro modelo matemático para un proceso real, un grado de incertidumbre; además intervienen imprecisiones del sistema real [29]. Ya que en la mayoría de los casos es deseable la generación de un algoritmo que controle de manera eficiente el proceso real, es necesario involucrar en el diseño del controlador, explícitamente, las fuentes de incertidumbre. Además, en el análisis de estabilidad asociado al sistema controlado se debe evaluar el efecto de las incertidumbres sobre el comportamiento del sistema. En la medida que el modelo empleado describa el comportamiento del sistema disminuirá la incertidumbre y se mejorará el desempeño del sistema controlado. Esta aproximación puede llegar a ser extremadamente compleja para ser descrita en forma absoluta por el modelo de tarea. Sin embargo, una alternativa es perseguir un objetivo menos ambicioso, por ejemplo un modelo local. De esta manera se puede aproximar localmente la función de tarea con un modelo lineal e invariante en el tiempo, lo cual facilita el análisis del sistema bajo un conjunto de hipótesis. Además permite la síntesis de controladores simples pero funcionales como el caso del controlador proporcional integral [30].

Considerando que los términos de la ley de control (3.7) son difíciles de conocer con exactitud en la práctica se desea examinar la influencia de errores en esos términos sobre el desempeño del sistema controlado. Por ejemplo considere el hecho de que no se puede medir de forma precisa la velocidad deseada del objeto a manipular, las posiciones del efector final y del objeto a manipular ni el Jacobiano de la cinemática inversa y que lo único que está disponible son aproximaciones de estas cantidades. Con esta consideración se sustituyen los términos de la ley de control por las aproximaciones disponibles las cuales se notarán con el símbolo '^' encima de la cantidad estimada. Es decir, se denotará $\hat{\dot{\mathbf{x}}}_d$ y $\hat{\mathbf{J}}_\theta(\mathbf{x})$ respectivamente a estas aproximaciones, por lo que se escribe

$$\mathbf{u}_x = \hat{\mathbf{J}}_\theta(\mathbf{x})[\hat{\dot{\mathbf{x}}}_d + \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}}_x] \quad (3.9)$$

Sustituyendo (3.9) en la dinámica ecuación (2.2) de la función de tarea en el espacio de 3D se tiene que:

$$\dot{\mathbf{e}}_x = \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{J}_X(\boldsymbol{\theta})\hat{\mathbf{J}}_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})[\dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}}_x]$$

De tal forma que si $\mathbf{J}_X(\boldsymbol{\theta})\hat{\mathbf{J}}_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) = \mathbf{K}'$ con \mathbf{K}' , como una matriz de componentes constantes, en la cual todos sus coeficientes pueden ser diferentes o resultar en los elementos de una matriz diagonal entonces:

$$\dot{\mathbf{e}}_x = \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{K}'[\dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}}_x] = [\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{K}'\dot{\mathbf{x}}_d] - \mathbf{K}'\mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}}_x. \quad (3.10)$$

Ahora, si se propone que $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{D}_c\mathbf{x} + \mathbf{c}_x$ y $\hat{\mathbf{x}}_d = \mathbf{D}_c\mathbf{x}_d + \mathbf{c}_x$ como un modelo de error. Hay mas, pero este cubre una cantidad significativa de casos. Con \mathbf{D}_c y \mathbf{c}_x , la matriz de diagonal y el vector ambos constantes respectivamente, y la aproximación del error es

$$\hat{\mathbf{e}}_x = \hat{\mathbf{x}}_d - \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{D}_c(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}) = \mathbf{D}_c\mathbf{e}_x$$

entonces

$$\hat{\mathbf{e}}_x = \mathbf{D}_c\mathbf{e}_x \quad (3.11)$$

Adicionalmente $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{D}_c\dot{\mathbf{x}}$, $\dot{\hat{\mathbf{x}}}_d = \mathbf{D}_c\dot{\mathbf{x}}_d$ y $\dot{\hat{\mathbf{e}}}_x = \mathbf{D}_c\dot{\mathbf{e}}_x$, por lo que, del termino que depende de la velocidad deseada $\dot{\mathbf{x}}_d$ para la ecuación (2.13), se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{K}'\dot{\hat{\mathbf{x}}}_d = [\mathbf{I} - \mathbf{K}'\mathbf{D}_c]\dot{\mathbf{x}}_d \quad (3.12)$$

De sustituir los resultados obtenidos en (3.11) y (3.12) en la ecuación (3.10) se obtiene que

$$\dot{\mathbf{e}}_x = [\mathbf{I} - \mathbf{K}'\mathbf{D}_c]\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c \mathbf{e}_x$$

Ahora, si se propone que $\dot{\mathbf{x}}_d = \boldsymbol{\alpha}$, con $\boldsymbol{\alpha}$ un vector de valores constantes (por ejemplo que el objeto a manipular esté en una banda transportadora que se desplaza a velocidad constante), la ecuación anterior pasa de un sistema variante en el tiempo a uno invariante, entonces:

$$\dot{\mathbf{e}}_x = [\mathbf{I} - \mathbf{K}'\mathbf{D}_c]\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c \mathbf{e}_x$$

Si se realiza el siguiente cambio de variable, $\boldsymbol{\delta} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}'\mathbf{D}_c]\boldsymbol{\alpha}$ y $\mathbf{e}_\delta = \dot{\mathbf{e}}_x$, entonces:

$$\mathbf{e}_\delta = \boldsymbol{\delta} - \mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c \mathbf{e}_x$$

y al calcular la dinámica para $\dot{\mathbf{e}}_\delta$ se tiene que

$$\dot{\mathbf{e}}_\delta = -\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c \dot{\mathbf{e}}_x = -\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c \mathbf{e}_\delta$$

De manera que si la matriz $\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c$ es definida positiva. $\mathbf{e}_\delta \rightarrow \mathbf{0}$ conforme el tiempo $t \rightarrow \infty$, por lo tanto $\mathbf{e}_x = [\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c]^{-1}\boldsymbol{\delta}$.

Por lo que $\mathbf{R} = \text{adj}(\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c)$, la matriz $[\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c]^{-1}$ es $[\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c]^{-1} = \frac{\mathbf{R}}{\det(\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c)}$

Entonces si $\det(\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c) \rightarrow \infty$ la función de el error $\mathbf{e}_x \rightarrow 0$.

3.2.3. Control P basado en las señales del sensor

Como es conocido, normalmente es necesario usar un modelo complejo para poder pasar de las señales de un sensor de posición a la obtención de la posición que se desea

medir. Por otro lado, es también conocido que el expresar un sistema físico en términos de las señales del sensor, puede ser de ayuda para sintetizar leyes de control que garanticen la estabilidad del sistema (que faciliten el análisis de estabilidad). Además, estos controles tienen la ventaja de que no es necesario reconstruir una señal de posición sino que se utilizan directamente las señales que se obtienen del sensor. Esto reduce la introducción de errores en la medición y puede redundar en una mejora de precisión de la tarea a desarrollar.

Por lo anteriormente expuesto es de interés realizar una síntesis de control basado en las señales del sensor. Para ello es necesario expresar el sistema de control en términos de estas coordenadas. Con esta idea se usará el vector \mathbf{s} que describe la señal que entrega el sensor.

De modo que se proponen dos coordenadas para describir la diferencia entre el objeto deseado y el efector final del robot. Las coordenadas deseadas del objeto que desplaza en el espacio de trabajo descritas por el sensor como $\mathbf{s}_d = \mathbf{s}_d(t)$, y las coordenadas en las que se encuentra el efector final del manipulador robot como $\mathbf{s}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}), t)$. Que en lo general solo serán descritas como \mathbf{s}_d y \mathbf{s} . Por lo que se propone una función de tarea dada por la ecuación (3.1) que deberá ser regulada a cero para asegurar el cumplimiento de la tarea.

$$\boxed{\mathbf{e}_s = \mathbf{s}_d - \mathbf{s}} \quad (3.13)$$

Sustituyendo (3.13) en la ley de control proporcional de tarea (3.6):

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{J}_{e_s}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left[\frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial t} + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_s \right]$$

se obtienen los siguientes resultados, primero de sustituir (3.13) en (3.2)

$$\mathbf{J}_{e_s}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J}_s(\mathbf{x}) \mathbf{J}_x(\boldsymbol{\theta})$$

$$\text{con } \mathbf{J}_s(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}}$$

3.2. CONTROL PROPORCIONAL (P)

el jacobiano de la transformación entre las coordenadas 3D en el espacio de trabajo del robot \mathbf{x} y las mediciones del sensor \mathbf{s} . Después para el término para la parcial respecto al tiempo de (3.5), entonces

$$\frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{s}_d}{\partial t} = \frac{d\mathbf{s}_d}{dt} = \dot{\mathbf{s}}_d$$

de donde la ley de control obtenida para el espacio del sensor es:

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{J}_x^{-1}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{J}_s^{-1}(\mathbf{x})[\dot{\mathbf{s}}_d + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_s] \quad (3.14)$$

Para implementar la ley de control (3.14) en la práctica es necesario conocer el jacobiano asociado a la cinemática directa ($\mathbf{J}_x(\boldsymbol{\theta})$). Sin embargo, como comentado anteriormente, debido a las características del robot delta (cinemática directa en forma de función implícita) no es fácil obtener un modelo del Jacobiano asociado a la cinemática directa. Por lo que se propone utilizar el Jacobiano asociado a la cinemática inversa:

$$\mathbf{J}_x(\boldsymbol{\theta}) = \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] \text{ a diferencia del Jacobiano } \mathbf{J}_\theta(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \mathbf{x}} \right]$$

De tal manera que si:

$$\mathbf{J}_x^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^{-1} = \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}_\theta(\mathbf{x})$$

Por lo que se escribe la ley de control como:

$$\boxed{\mathbf{u}_s = \mathbf{J}_\theta(\mathbf{x})\mathbf{J}_s^{-1}(\mathbf{x})[\dot{\mathbf{s}}_d + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_s]} \quad (3.15)$$

Considerando que $\mathbf{J}_x(\boldsymbol{\theta})\mathbf{J}_\theta(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$, con \mathbf{I} la matriz identidad de dimensión 3×3 , el control (3.15) asegura que la trayectoria del robot en coordenadas del sensor converge

exponencialmente hacia la trayectoria del objeto deseado ($\mathbf{e}_s \rightarrow 0$). Sin embargo, como mencionado anteriormente, los términos que intervienen en la ley de control son difíciles de conocer con exactitud en la práctica. Enseguida veremos la influencia de errores en estos términos sobre el desempeño del sistema controlado.

3.2.4. Análisis de estabilidad y robustez para el control P basado en las señales del sensor

Del análisis previo que se generó para el control en las coordenadas del sensor de donde se estableció que la ley de control (3.15) es

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{J}_\theta(\mathbf{s})\mathbf{J}_x(\mathbf{s})[\dot{\mathbf{s}}_d + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_s]$$

para un controlador proporcional, de modo que se proponen las condiciones que continuación se indican, con la premisa de que asemejen ó aproximen el sistema real. Primero si se impone el hecho de que no se puede obtener el Jacobiano de la cinemática inversa y el Jacobiano del sensor y la reconstrucción 3D en forma precisa. De tal modo que llamaremos, $\hat{\mathbf{J}}_\theta(\mathbf{x})$, $\hat{\mathbf{J}}_x(\mathbf{s})$ y $\dot{\hat{\mathbf{s}}}$ respectivamente a estas aproximaciones, por lo que se escribe

$$\mathbf{u}_s = \hat{\mathbf{J}}_\theta(\mathbf{x})\hat{\mathbf{J}}_s^{-1}(\mathbf{x})[\dot{\hat{\mathbf{s}}}_d + \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}}_s] \quad (3.16)$$

Sustituyendo (3.16) en la dinámica de la función de tarea en el espacio del sensor:

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_s = \dot{\hat{\mathbf{s}}}_d - \mathbf{J}_s(\mathbf{x})\mathbf{J}_x(\boldsymbol{\theta})\hat{\mathbf{J}}_\theta(\mathbf{x})\hat{\mathbf{J}}_s^{-1}(\mathbf{x})[\dot{\hat{\mathbf{s}}}_d + \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}}_s]$$

De tal forma que si $\mathbf{J}_x(\boldsymbol{\theta})\hat{\mathbf{J}}_\theta(\mathbf{x}) = \mathbf{K}''$ y $\mathbf{J}_s(\mathbf{x})\mathbf{K}''\hat{\mathbf{J}}_s^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{K}'$ con \mathbf{K}' como una matriz de componentes constantes, en la cual todos sus coeficientes pueden ser diferentes o resultar en los elementos de una matriz diagonal entonces:

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_s = \dot{\hat{\mathbf{s}}}_d - \mathbf{K}'[\dot{\hat{\mathbf{s}}}_d + \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}}_s] = [\dot{\hat{\mathbf{s}}}_d - \mathbf{K}'\dot{\hat{\mathbf{s}}}_d] - \mathbf{K}'\mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}}_s \quad (3.17)$$

3.2. CONTROL PROPORCIONAL (P)

Se propone que $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{D}_c \mathbf{s} + \mathbf{c}_s$ y $\hat{\mathbf{s}}_d = \mathbf{D}_c \mathbf{s}_d + \mathbf{c}_s$, con \mathbf{D}_c y \mathbf{c}_s , la matriz de diagonal y el vector ambos constantes respectivamente, y la aproximación del error

$$\hat{\mathbf{e}}_s = \hat{\mathbf{s}}_d - \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{D}_c (\mathbf{s}_d - \mathbf{s}) = \mathbf{D}_c \mathbf{e}_s$$

Del estudio de sensores de imagen como es el caso de cámaras de video. Para la función de aproximación para el error $\hat{\mathbf{e}}_s$, a medida en que $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_d$, la aproximación del error $\hat{\mathbf{e}}_s \rightarrow 0$, lo cual lo satisface el resultado

$$\hat{\mathbf{e}}_s = \mathbf{D}_c \mathbf{e}_s \tag{3.18}$$

De modo que $\dot{\hat{\mathbf{s}}} = \mathbf{D}_c \dot{\mathbf{s}}$, $\dot{\hat{\mathbf{s}}}_d = \mathbf{D}_c \dot{\mathbf{s}}_d$ y $\dot{\hat{\mathbf{e}}}_s = \mathbf{D}_c \dot{\mathbf{e}}_s$, entonces

$$\dot{\mathbf{s}}_d - \mathbf{K}' \dot{\hat{\mathbf{s}}}_d = [\mathbf{I} - \mathbf{K}' \mathbf{D}_c] \dot{\mathbf{s}}_d \tag{3.19}$$

Por lo tanto de sustituir los resultados obtenidos en (3.18) y (3.19) en la ecuación (3.17)

$$\dot{\mathbf{e}}_s = [\mathbf{I} - \mathbf{K}' \mathbf{D}_c] \dot{\mathbf{s}}_d - \mathbf{K}' \mathbf{K}_p \mathbf{D}_c \mathbf{e}_s$$

Ahora la primera condición para obtener la convergencia del sistema es que las velocidades realizadas por el manipulador tanto como por el sensor deben ser finitas. Esta condición se cumple siempre que la medición para $\dot{\mathbf{s}}_d$ entre una iteración y otra, pertenezcan a la región delimitada por la cota impuesta por el tratamiento de imágenes, de tal manera que $\dot{\mathbf{s}}_d = \boldsymbol{\alpha}$. Con $\boldsymbol{\alpha}$ el vector de valores acotados por el tratamiento de imágenes.

$$\dot{\mathbf{e}}_s = [\mathbf{I} - \mathbf{K}' \mathbf{D}_c] \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{K}' \mathbf{K}_p \mathbf{D}_c \mathbf{e}_s$$

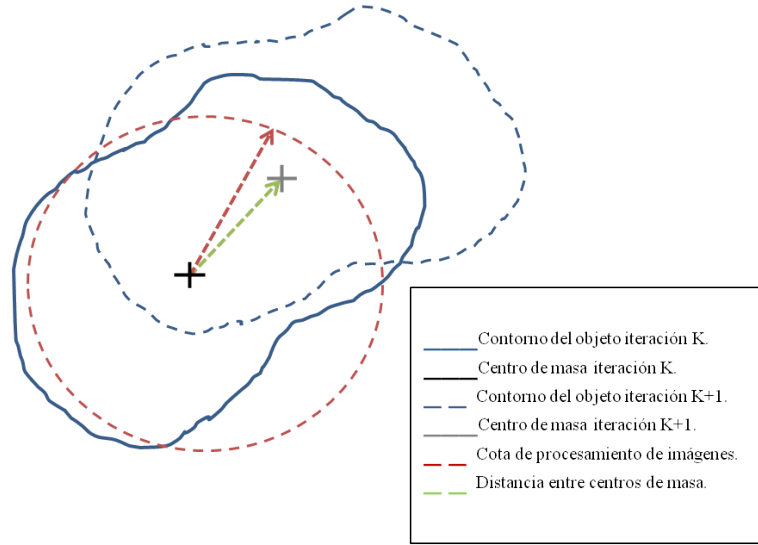


Figura 3.1: Representación, cota para el procesamiento de imágenes.

Si se realiza el siguiente cambio de variable, $\boldsymbol{\delta} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}'\mathbf{D}_c]\boldsymbol{\alpha}$ y $\mathbf{e}_\delta = \dot{\mathbf{e}}_s$, entonces:

$$\mathbf{e}_\delta = \boldsymbol{\delta} - \mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c \mathbf{e}_s$$

y al calcular la dinámica para $\dot{\mathbf{e}}_\delta$ se tiene que

$$\dot{\mathbf{e}}_\delta = -\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c \dot{\mathbf{e}}_s = -\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c \mathbf{e}_\delta$$

De manera que si la matriz $\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c$ es definida positiva. $\mathbf{e}_\delta \rightarrow \mathbf{0}$ conforme el tiempo $t \rightarrow \infty$, por lo tanto $\mathbf{e}_s = [\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c]^{-1}\boldsymbol{\delta}$.

Por lo que $\mathbf{R} = \text{adj}(\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c)$, la matriz $[\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c]^{-1}$ es $[\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c]^{-1} = \frac{\mathbf{R}}{\det(\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c)}$

Entonces si el $\det(\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c) \rightarrow \infty$ la función de tarea para las coordenadas del sensor $\mathbf{e}_s \rightarrow 0$.

3.3. Control proporcional-integral (PI)

Ahora, la siguiente forma de proponer el control para el robot manipulador es a través de la velocidad de cada uno de los actuadores. Con $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{y}$ como la salida del sistema. Además para el control basado en las condiciones de tarea descritas, se retorna la función de error (3.1) descrita en coordenadas generales por

$$\mathbf{e} = \mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}(\boldsymbol{\theta}, t)$$

y se propone la variable que represente un segundo estado para mejorar la convergencia del sistema. Como el integrador del error dado por:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{e} \quad (3.20)$$

Lo cual da lugar a una segunda ley de control a través de un controlador proporcional integral, y retomando la dinámica del sistema para la función de tarea (3.3), en términos de la salida \mathbf{y} se tiene:

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} - \mathbf{J}_e(\boldsymbol{\theta})\mathbf{y} \quad (3.21)$$

De manera que la representación de estados expresada en términos de \mathbf{e} y $\boldsymbol{\sigma}$ es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \partial \mathbf{e} / \partial t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_e(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

Entonces se impone la siguiente variable de control proporcional a la dinámica de la función de tarea como $\mathbf{e} = \mathbf{u}$ por lo que sustituyendo en (3.21) se tiene que

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} - \mathbf{J}_e(\boldsymbol{\theta})\mathbf{y}$$

de manera que el sistema puede ser escrito por la siguiente representación lineal:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (3.22)$$

Para generar el lazo cerrado se aplica la retroalimentación del sistema dada por:

$$\mathbf{u} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_i & \mathbf{K}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

con \mathbf{K}_i y \mathbf{K}_p las matrices diagonales de control integral y proporcional respectivamente, ahora sustituyendo (3.23) en la representación de estados del sistema (3.22) se tiene que:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_i & -\mathbf{K}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

Para lo cual si \mathbf{K}_i y \mathbf{K}_p son definidas positivas o sus elementos en la diagonal son mayores que cero, entonces la función de tarea para sistema es $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{0}$ conforme el tiempo $t \rightarrow \infty$. Entonces la siguiente ecuación describe el lazo cerrado para el controlador PI:

$$\boxed{\dot{\mathbf{e}} = -\mathbf{K}_i \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{K}_p \mathbf{e}} \quad (3.24)$$

que escrita en forma integrodiferencial es

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = -\mathbf{K}_i \int_0^t \mathbf{e} dt - \mathbf{K}_p \mathbf{e}$$

con

$$\sigma = \int_0^t \mathbf{e} dt \quad (3.25)$$

imponiendo (3.24) en la dinámica para la función de tarea en términos de la salida del sistema (3.21)

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} - \mathbf{J}_e(\boldsymbol{\theta})\mathbf{y} = -\mathbf{K}_i \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{K}_p \mathbf{e}$$

de donde despejando para el término de \mathbf{y} se obtiene la siguiente ecuación para la salida del sistema

$$\mathbf{y} = \mathbf{J}_e^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left[\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \mathbf{K}_i \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{K}_p \mathbf{e} \right] \quad (3.26)$$

3.3.1. Control PI en el espacio cartesiano

Para el control PI del robot manipulador en el espacio de 3D, la velocidad de cada uno de los actuadores es $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{y}$, con \mathbf{y} el control que gobierna la señal de salida para el sistema. Primero, como en los casos anteriores, se propone un vector que define el espacio que se analizará. Ya que el robot paralelo se traslada en coordenadas rectangulares se usará el vector $\mathbf{x} = (X, Y, Z)$ para describir la posición del robot.

Como en el caso anterior se propone una función que sea regulada a cero, para lo cual se retorna a la función de tarea (3.6). Así, la función queda escrita en términos de la posición deseada y la posición en la que se encuentra el efector final todo en coordenadas cartesianas o 3D es

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}$$

Como se hizo mención anteriormente, las características del robot delta facilitan la obtención el Jacobiano de la cinemática inversa. Esta se evalúa a través de el vector de

posición \mathbf{x} , por lo que se propone la reconstrucción del vector de posición en coordenadas 3D. De manera que que sustituyendo (3.6) en la ecuación (3.26)

$$\mathbf{y}_x = \mathbf{J}_{e_x}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left[\frac{\partial \mathbf{e}_x}{\partial t} + \mathbf{K}_i \boldsymbol{\sigma}_x + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_x \right]$$

como en el caso de los análisis anteriores para el control en le espacio de 3D se obtienen los siguientes resultados.

$$\mathbf{J}_{e_x}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{J}_x(\boldsymbol{\theta}) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{e}_x}{\partial t} = \dot{\mathbf{x}}_d$$

De donde se dice que la salida \mathbf{y} que gobierna el sistema es:

$$\mathbf{y}_x = \mathbf{J}_x^{-1}(\boldsymbol{\theta}) [\dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_i \boldsymbol{\sigma}_x + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_x]$$

Como se mencionó, es fácil proponer un modelo del Jacobiano de la cinemática inversa descrito como:

$$\mathbf{J}_x^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{J}_\theta(\mathbf{x})$$

Por lo que se concluye que la salida de control para el sistema en las coordenadas en 3D está dado por:

$$\boxed{\mathbf{y}_x = \mathbf{J}_\theta(\mathbf{x})[\dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_i \boldsymbol{\sigma}_x + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_x]} \quad (3.27)$$

3.3.2. Análisis de estabilidad y robustez para el control PI en el espacio cartesiano

Del análisis previo se estableció la ley para realizar control de la salida del sistema (3.27) como:

$$\mathbf{y}_x = \mathbf{J}_\theta(\mathbf{x})[\dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_i \boldsymbol{\sigma}_x + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_x]$$

con un controlador PI, de donde se incluyen las condiciones previas, de que el sistema asemejen o aproxime el control real.

Nuevamente, se impone el hecho de que no se puede obtener el Jacobiano de la cinemática directa y la reconstrucción 3D en forma precisa. De tal modo que es llamado, $\hat{\mathbf{J}}_\theta(\mathbf{x})$ y $\hat{\mathbf{x}}$ respectivamente a estas aproximaciones, por lo que se escribe

$$\mathbf{y}_s = \hat{\mathbf{J}}_\theta(\mathbf{x})[\dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_i \hat{\boldsymbol{\sigma}}_x + \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}}_x]$$

Ahora substituyendo en la dinámica del error en el espacio cartesiano se tiene que:

$$\dot{\mathbf{e}}_x = \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{J}_x(\boldsymbol{\theta})\hat{\mathbf{J}}_\theta(\mathbf{x})[\dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_I \hat{\boldsymbol{\sigma}}_x + \mathbf{K}_P \hat{\mathbf{e}}_x] \quad (3.28)$$

De tal forma que si $\mathbf{J}_x(\boldsymbol{\theta})\hat{\mathbf{J}}_\theta(\mathbf{x}) = \mathbf{K}'$ con \mathbf{K}' como una matriz de componentes constantes, en la cual todos sus coeficientes pueden ser diferentes o resultar en los elementos de una matriz diagonal entonces:

$$\dot{\mathbf{e}}_x = \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{K}'(\dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_i \hat{\boldsymbol{\sigma}}_x + \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}}_x) = \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{K}'\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{K}'\mathbf{K}_i \hat{\boldsymbol{\sigma}}_x - \mathbf{K}'\mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}}_x$$

Si se considera a $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{D}_c \mathbf{x} + \mathbf{c}_x$, con \mathbf{c}_x un vector de coeficientes constantes $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{D}_c \dot{\mathbf{x}}$. Por lo que el sistema del error es

$$\hat{\mathbf{e}}_x = \hat{\mathbf{x}}_d - \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{D}_c \mathbf{e}_x$$

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_x = \mathbf{D}_c \dot{\mathbf{e}}_x$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_x = \int_0^t \hat{\mathbf{e}}_x dt = \mathbf{D}_c \int_0^t \mathbf{e}_x dt = \mathbf{D}_c \boldsymbol{\sigma}_x$$

entonces $\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{K}' \dot{\hat{\mathbf{x}}}_d = [\mathbf{I} - \mathbf{K}'\mathbf{D}_c]\dot{\mathbf{x}}_d$, por lo que

$$\dot{\mathbf{e}}_x = [\mathbf{I} - \mathbf{K}'\mathbf{D}_c]\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{K}'\mathbf{K}_i \hat{\boldsymbol{\sigma}}_x - \mathbf{K}'\mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}}_x$$

o

$$\dot{\mathbf{e}}_x = [\mathbf{I} - \mathbf{K}'\mathbf{D}_c]\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{K}'\mathbf{D}_c\mathbf{K}_i \boldsymbol{\sigma}_x - \mathbf{K}'\mathbf{D}_c\mathbf{K}_p \mathbf{e}_x$$

La condición para obtener la convergencia del sistema es que las velocidades alcanzadas por el manipulador tanto como por el sensor deben ser finitas. Siempre que la medición para $\dot{\mathbf{x}}_d$ entre una iteración y otra, pertenezcan a la región delimitada por la cota impuesta por el tratamiento de imágenes, de tal manera que $\dot{\mathbf{x}}_d = \boldsymbol{\alpha}$. Con $\boldsymbol{\alpha}$ el vector de valores acotados de la reconstrucción 3D.

$$\dot{\mathbf{e}}_x = [\mathbf{I} - \mathbf{K}'\mathbf{D}_c]\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{K}'\mathbf{K}_i\mathbf{D}_c \boldsymbol{\sigma}_x - \mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c \mathbf{e}_x$$

Resultando en un sistema asintóticamente estable dado como:

$$\dot{\mathbf{e}}_x = \boldsymbol{\delta} - \mathbf{K}'\mathbf{K}_i\mathbf{D}_c \boldsymbol{\sigma}_x - \mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c \mathbf{e}_x$$

$$\text{Con } \boldsymbol{\delta} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}'\mathbf{D}_c]\boldsymbol{\alpha}$$

Entonces

$$\dot{\mathbf{e}}_x = \boldsymbol{\delta} - \mathbf{K}'\mathbf{K}_i\mathbf{D}_c \boldsymbol{\sigma}_x - \mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c \mathbf{e}_x$$

Ahora, si se escoge la variable \mathbf{e}_δ , de forma que $\dot{\mathbf{e}}_x = \boldsymbol{\delta} - \mathbf{K}'\mathbf{K}_i\mathbf{D}_c \boldsymbol{\sigma}_x - \mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_\delta$. De donde la dinámica para \mathbf{e}_δ es:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_\delta &= -\mathbf{K}'\mathbf{K}_i\mathbf{D}_c \dot{\boldsymbol{\sigma}}_x - \mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c \dot{\mathbf{e}}_x \\ &= -\mathbf{K}'\mathbf{K}_i\mathbf{D}_c \mathbf{e}_x - \mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c \mathbf{e}_\delta\end{aligned}$$

Para lo cual se realiza la siguiente representación en espacio de estados

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}'\mathbf{K}_i\mathbf{D}_c & -\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_\delta \end{bmatrix}$$

De donde si la matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}'\mathbf{K}_i\mathbf{D}_c & -\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c \end{bmatrix}$ es Hurwitz el sistema es estable.

De manera que para obtener los valores propios de la matriz:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}'\mathbf{K}_i\mathbf{D}_c & -\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c - \lambda\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Utilizando el complemento de Schur descrito en [31]

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$$

Por lo que de identificar los términos

$$\mathbf{A} = -\lambda\mathbf{I}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{C} = -\mathbf{K}'\mathbf{K}_i\mathbf{D}_c$$

$$\mathbf{D} = -\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c - \lambda\mathbf{I}$$

y sustituyendo en la identidad para el complemento Schur

$$\det(-\lambda\mathbf{I}) \det(-\mathbf{K}'\mathbf{K}_P\mathbf{D}_c - \lambda\mathbf{I} - (\mathbf{K}'\mathbf{K}_I\mathbf{D}_c)(\lambda\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{I})) =$$

al factorizar la ecuación

$$\det(-\lambda\mathbf{I}) \det \left((-\lambda\mathbf{I})^{-1}(\lambda^2\mathbf{I} + \lambda\mathbf{K}'\mathbf{K}_P\mathbf{D}_c + c\mathbf{K}'\mathbf{K}_I\mathbf{D}_c) \right) =$$

Por último se hace uso de la identidad [32]. Sea c un número real y \mathbf{E} una matriz de $n \times n$, entonces

$$\det(c\mathbf{E}) = c^n \det(\mathbf{E})$$

Por lo tanto identificando $c = -\lambda$ se reduce a la siguiente ecuacion

$$\det(\lambda^2\mathbf{I} + \lambda\mathbf{K}'\mathbf{K}_P\mathbf{D}_c + \mathbf{K}'\mathbf{K}_I\mathbf{D}_c)$$

Si \mathbf{K}_i y \mathbf{K}_p son definidas positivas o sus elementos en la diagonal son mayores que cero, entonces la función de tarea para el sistema $\mathbf{e}_x \rightarrow \mathbf{0}$ conforme el tiempo $t \rightarrow \infty$.

3.3.3. Control PI basado en las señales del sensor

Ahora se sintetizará un control PI en el espacio del sensor. La velocidad de cada uno de los actuadores es $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{y}$, con \mathbf{y} el control que gobierna la señal de salida para el sistema.

Primero, como en los casos anteriores, se propone un vector que define el espacio del sensor que se analizará. Ya que el robot paralelo se traslada en coordenadas rectangulares se usará el vector $\mathbf{x} = (X, Y, Z)$ que describe la posición del robot. Además $\mathbf{s}_d(t)$ y $\mathbf{s}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}), t)$ para las posiciones deseadas y del robot manipulador como mediciones del sensor respectivamente. Y de igual manera se propone una función que sea regulada a cero, para lo cual se retorna a la función de error. Para ello se retorna a la función de

3.3. CONTROL PROPORCIONAL-INTEGRAL (PI)

tarea (3.6). Así, la función queda escrita en términos de la posición deseada y la posición en la que se encuentra el efector final, todo en coordenadas del espacio del sensor

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{s}_d - \mathbf{s}$$

De las características del robot delta se facilita la obtención el Jacobiano de la cinemática inversa. Esta se evalúa a través de el vector de posición \mathbf{s} , por lo que se propone la reconstrucción del vector de posición en coordenadas 3D. De manera que, sustituyendo (3.6) en la ecuación (3.26)

$$\mathbf{y}_s = \mathbf{J}_{e_s}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left[\frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial t} + \mathbf{K}_i \boldsymbol{\sigma}_s + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_s \right]$$

como en el caso de los análisis anteriores para el control en le espacio de 3D se obtienen los siguientes resultados.

$$\mathbf{J}_{e_s}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{J}_s(\mathbf{x})\mathbf{J}_x(\boldsymbol{\theta}) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial t} = \dot{\mathbf{s}}_d$$

De donde se dice que la salida \mathbf{y}_s que gobierna el sistema es:

$$\mathbf{y}_s = \mathbf{J}_x^{-1}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{J}_s^{-1}(\mathbf{x}) [\dot{\mathbf{s}}_d + \mathbf{K}_i \boldsymbol{\sigma}_s + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_s]$$

Como se mencionó, es fácil proponer un modelo del Jacobiano de la cinemática inversa descrito como:

$$\mathbf{J}_x^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{J}_\theta(\mathbf{x})$$

Por lo que se escribe la salida de control para el sistema descrito en las coordenadas en 3D como:

$$\mathbf{y}_s = \mathbf{J}_\theta(\mathbf{x})\mathbf{J}_s^{-1}(\mathbf{x})[\dot{\mathbf{s}}_d + \mathbf{K}_i \boldsymbol{\sigma}_s + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_s] \quad (3.29)$$

3.3.4. Análisis de estabilidad y robustez para el control PI basado en las señales del sensor

Del análisis previo que se generó para el control en el sensor, se estableció que la ley para realizar control de la salida del sistema como: $\mathbf{y}_s = [\mathbf{J}_\theta(\mathbf{x})\mathbf{J}_x(\mathbf{s})](\dot{\mathbf{s}}_d + \mathbf{K}_i \boldsymbol{\sigma}_s + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_s)$ con un controlador PI. Ahora se considera el caso práctico en el que los términos de la ley de control no son perfectamente conocidos.

Del análisis previo el control es:

$$\mathbf{y}_s = \mathbf{J}_s(\mathbf{x})\mathbf{J}_\theta(\mathbf{x})[\dot{\mathbf{s}}_d + \mathbf{K}_i \boldsymbol{\sigma}_s + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_s]$$

con un controlador PI.

Nuevamente, si se impone el hecho de que no se puede obtener el Jacobiano de la cinemática inversa y la medición del sensor. De tal modo que se llaman, $\hat{\mathbf{J}}_\theta(\mathbf{x})\hat{\mathbf{J}}_s(\mathbf{x})$ y $\hat{\mathbf{s}}$ respectivamente a estas aproximaciones, por lo que se escribe $\mathbf{y}_s = \hat{\mathbf{J}}_\theta(\mathbf{x})\hat{\mathbf{J}}_s(\mathbf{x})[\hat{\mathbf{s}}_d + \mathbf{K}_i \hat{\boldsymbol{\sigma}}_s + \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}}_s]$.

Ahora se sustituye en la dinámica del error en el espacio del sensor, se tiene que:

$$\dot{\mathbf{e}}_s = \dot{\mathbf{s}}_d - \mathbf{J}_s(\mathbf{x})\mathbf{J}_\theta(\mathbf{x})\hat{\mathbf{J}}_\theta(\mathbf{x})\hat{\mathbf{J}}_s(\mathbf{x})[\dot{\mathbf{s}}_d + \mathbf{K}_I \hat{\boldsymbol{\sigma}}_s + \mathbf{K}_P \hat{\mathbf{e}}_s]$$

De tal forma que si $\mathbf{J}_x(\boldsymbol{\theta})\hat{\mathbf{J}}_\theta(\mathbf{x}) = \mathbf{K}'$ con \mathbf{K}' como una matriz de componentes constantes, en la cual todos sus coeficientes pueden ser diferentes ó resultar en los elementos de una matriz diagonal, entonces:

$$\dot{\mathbf{e}}_s = \dot{\mathbf{s}}_d - \mathbf{K}'(\dot{\mathbf{s}}_d + \mathbf{K}_i \hat{\boldsymbol{\sigma}}_s + \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}}_s) = \dot{\mathbf{s}}_d - \mathbf{K}'\dot{\mathbf{s}}_d - \mathbf{K}'\mathbf{K}_i \hat{\boldsymbol{\sigma}}_s - \mathbf{K}'\mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}}_s$$

3.3. CONTROL PROPORCIONAL-INTEGRAL (PI)

Si se considera a $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{D}_c \mathbf{s} + \mathbf{c}_s$, con \mathbf{c}_s un vector de coeficientes constantes, por lo que $\dot{\hat{\mathbf{s}}} = \mathbf{D}_c \dot{\mathbf{s}}$. Por lo que el sistema del error es

$$\hat{\mathbf{e}}_s = \hat{\mathbf{s}}_d - \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{D}_c \mathbf{e}_s$$

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_s = \mathbf{D}_c \dot{\mathbf{e}}_s$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_s = \int_0^t \hat{\mathbf{e}}_s dt = \mathbf{D}_c \int_0^t \mathbf{e}_s dt = \mathbf{D}_c \boldsymbol{\sigma}_s$$

Entonces $\dot{\mathbf{s}}_d - \mathbf{K}' \dot{\hat{\mathbf{s}}}_d = [\mathbf{I} - \mathbf{K}' \mathbf{D}_c] \dot{\mathbf{s}}_d$, por lo que

$$\dot{\mathbf{e}}_s = [\mathbf{I} - \mathbf{K}' \mathbf{D}_c] \dot{\mathbf{s}}_d - \mathbf{K}' \mathbf{K}_i \hat{\boldsymbol{\sigma}}_s - \mathbf{K}' \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{e}}_s$$

ó

$$\dot{\mathbf{e}}_s = [\mathbf{I} - \mathbf{K}' \mathbf{D}_c] \dot{\mathbf{s}}_d - \mathbf{K}' \mathbf{D}_c \mathbf{K}_i \boldsymbol{\sigma}_s - \mathbf{K}' \mathbf{D}_c \mathbf{K}_p \mathbf{e}_s$$

La condición para la convergencia del sistema es que las velocidades realizadas por el manipulador tanto como por el objeto a manipular deben ser finitas. Esto se logra si la medición para $\dot{\mathbf{s}}_d$, entre una iteración y otra, pertenezcan a la región delimitada por la cota impuesta por el tratamiento de imágenes, de tal manera que $\dot{\mathbf{s}}_d = \boldsymbol{\alpha}$. Con $\boldsymbol{\alpha}$ el vector de valores acotados de la velocidad.

$$\dot{\mathbf{e}}_s = [\mathbf{I} - \mathbf{K}' \mathbf{D}_c] \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{K}' \mathbf{K}_i \mathbf{D}_c \boldsymbol{\sigma}_s - \mathbf{K}' \mathbf{K}_p \mathbf{D}_c \mathbf{e}_s$$

Resultando en un sistema asintóticamente estable dado como:

$$\dot{\mathbf{e}}_s = \boldsymbol{\delta} - \mathbf{K}' \mathbf{K}_i \mathbf{D}_c \boldsymbol{\sigma}_s - \mathbf{K}' \mathbf{K}_p \mathbf{D}_c \mathbf{e}_s$$

$$\text{Con } \boldsymbol{\delta} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}' \mathbf{D}_c] \boldsymbol{\alpha}$$

Entonces

$$\dot{\mathbf{e}}_s = \boldsymbol{\delta} - \mathbf{K}'\mathbf{K}_i\mathbf{D}_c \boldsymbol{\sigma}_s - \mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c \mathbf{e}_s$$

Ahora, si se escoge una variable \mathbf{e}_δ , de forma que $\dot{\mathbf{e}}_s = \boldsymbol{\delta} - \mathbf{K}'\mathbf{K}_i\mathbf{D}_c \boldsymbol{\sigma}_s - \mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c \mathbf{e}_s = \mathbf{e}_\delta$. De donde la dinámica para \mathbf{e}_δ es:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_\delta &= -\mathbf{K}'\mathbf{K}_i\mathbf{D}_c \dot{\boldsymbol{\sigma}}_s - \mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c \dot{\mathbf{e}}_s \\ &= -\mathbf{K}'\mathbf{K}_i\mathbf{D}_c \mathbf{e}_s - \mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c \mathbf{e}_\delta \end{aligned}$$

Para lo cual se realiza la siguiente representación en espacio de estados

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_s \\ \mathbf{e}_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}'\mathbf{K}_i\mathbf{D}_c & -\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_s \\ \mathbf{e}_\delta \end{bmatrix}$$

De donde si la matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}'\mathbf{K}_i\mathbf{D}_c & -\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c \end{bmatrix}$ es Hurwitz el sistema es estable.

De manera que para obtener los valores propios de la matriz:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}'\mathbf{K}_i\mathbf{D}_c & -\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c - \lambda\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Utilizando el complemento de Schur descrita en [31]

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$$

Por lo que al identificar los términos

$$\mathbf{A} = -\lambda\mathbf{I}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{C} = -\mathbf{K}'\mathbf{K}_i\mathbf{D}_c$$

$$\mathbf{D} = -\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c - \lambda\mathbf{I}$$

y se sustituye en la identidad para el complemento Schur

$$\det(-\lambda\mathbf{I}) \det(-\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c - \lambda\mathbf{I} - (\mathbf{K}'\mathbf{K}_i\mathbf{D}_c)(\lambda\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{I})) =$$

Al factorizar la ecuación

$$\det(-\lambda\mathbf{I}) \det\left((-\lambda\mathbf{I})^{-1}(\lambda^2\mathbf{I} + \lambda\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c + c\mathbf{K}'\mathbf{K}_i\mathbf{D}_c)\right) =$$

Por último se hace uso de la identidad. Sea c un número real y \mathbf{E} una matriz de $n \times n$, entonces

$$\det(c\mathbf{E}) = c^n \det(\mathbf{E})$$

Por lo tanto se identifica $c = -\lambda$, y se reduce a la siguiente ecuación

$$\det(\lambda^2\mathbf{I} + \lambda\mathbf{K}'\mathbf{K}_p\mathbf{D}_c + \mathbf{K}'\mathbf{K}_i\mathbf{D}_c)$$

Sí \mathbf{K}_i y \mathbf{K}_p son definidas positivas o sus elementos en la diagonal son mayores que cero, entonces la función de tarea para el sistema es $\mathbf{e}_s \rightarrow \mathbf{0}$ conforme el tiempo $t \rightarrow \infty$.

Conclusiones

En este trabajo de tesis se desarrollaron síntesis de controles para robots paralelos tipo delta. La tarea que se tomó como base para las síntesis de control es la manipulación de objetos en movimiento. Se desarrollaron dos clases de controles: a) controles en coordenadas cartesianas y b) controles expresados directamente en términos de las señales del sensor (control basado en sensor).

Los controles fueron desarrollados con un enfoque en la robustez en el desempeño del sistema controlado ante errores en la medición del estado del robot, errores de medición de la posición y velocidad del objeto a manipular así como posibles errores en el modelo del sistema. Estas son condiciones que en la práctica son comunes debido a la utilización de sensores cuyas señales contienen perturbaciones. Diferencias en los parámetros reales del modelo del sensor constituyen otra fuente frecuente de errores de medición. Por otro lado, la construcción de los sistemas físicos generalmente conlleva desviaciones con respecto al modelo ideal. Estas desviaciones generan errores de modelo del sistema que pueden llevar incluso a la inestabilidad del mismo.

Se realizaron análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado con los controles desarrollados. Estos análisis permitieron establecer condiciones para estabilidad en términos de estos tipos de errores. En particular se tomaron en cuenta errores en las estimaciones de los términos que intervienen en las leyes de control desarrolladas. Una condición necesaria para garantizar la estabilidad de la tarea de manipulación de un objeto en movimiento es que la velocidad de éste sea finita lo cual constituye un requerimiento común en este tipo de análisis. Sin embargo, en este trabajo fue posible también establecer condiciones de estabilidad cuando no se tiene información precisa sobre esta velocidad.

En lo que respecta al modelado se obtuvo el modelo del jacobiano asociado a la cinemática inversa del robot. Este jacobiano es parte fundamental de las leyes de control desarrolladas. Adicionalmente, se calcularon explícitamente los términos de dicho jacobiano. De esta manera resultará sencillo programarlo con miras a aplicar los controles obtenidos en un sistema real. Por otro lado, se desarrolló el modelo dinámico del robot tipo delta con base en la formulación Lagrangiana. El modelo pudo ser reducido a una expresión suficientemente sencilla pero útil para análisis y síntesis de control posteriores. El modelo dinámico obtenido no tiene las propiedades usuales del modelo dinámico de

robots seriales por lo que amerita un estudio complementario antes de poder ser usado para la síntesis de controles. Además, dada su sencillez, el modelo es adecuado para ser implementado en una plataforma de tiempo real. Esta característica es muy deseable para aplicaciones prácticas.

Las aportaciones principales de este trabajo son:

- La síntesis de leyes de control que proporcionan robustez en el desempeño de un sistema controlado en condiciones reales.
- La realización de análisis de estabilidad asociados a los controles sintetizados y, en particular, la obtención de condiciones para estabilidad en términos de las estimaciones de los términos que intervienen en las leyes de control.
- El desarrollo de un modelo explícito para el jacobiano asociado a la cinemática directa de los robots paralelos tipo delta.
- El desarrollo de un modelo dinámico de los robots paralelos tipo delta que resulta manejable y adaptado para aplicaciones de tiempo real.

Trabajo a futuro

Al término de este trabajo varias acciones para continuarlo quedan establecidas. Todas ellas tienen el objetivo común de implementar los controles desarrollados en una aplicación práctica. Algunas de las más importantes son:

- Programación de los algoritmos de control desarrollados. La codificación de los algoritmos de control es un paso indispensable para poderlos validar tanto en simulación como en experimentación. Se debe tener cuidado con el costo computacional resultante para lo cual una buena programación es necesaria.
- Implementación de los algoritmos de control. Se propone que primeramente se implementen en simulación para enseguida se apliquen experimentalmente. La implementación en simulación permitiría detectar errores de programación sin poner en riesgo el sistema físico en caso de que tales errores ocurran.
- Estudio de las propiedades del modelo dinámico obtenido. Esto permitirá explotar esas propiedades para sintetizar controles basados en este modelo que permitan realizar tareas con velocidades más altas sin perder precisión.

Bibliografía

- [1] Juan Carlos Arellano. Análisis y caracterización del caminado humano para la síntesis de un mecanismo de prótesis de pierna transfemoral, 2010.
- [2] Richard M. Murray. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Taylor and Francis Group, 1994.
- [3] Hugo Nava Palomares. *Análisis de las deformaciones en un mecanismo paralelo usado para tareas de fresado. Tesis Doctoral*. IPN Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Querétaro, MÉXICO, 2007.
- [4] García-Sanz and Motilva Casado. Herramientas para el estudio de robots de cinemática paralela: Simulador y prototipo experimental. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 2(2):73–81, 2005.
- [5] Gough y Whitehall. Universal tyre test machine. *International Technical Congress*, 1(62):117–137, 1962.
- [6] D. Stewart. A platform with six degrees of freedom. *Proceeding of the Institution of Mechanical Engineers*, 180(1,15):371–386, 1965.
- [7] Raymond Clavel. Delta, a fast robot with parallel geometry. *Proceedings of the 18th International Symposium on Industrial Robots*, 1(1,15):91–100, 1988.
- [8] Gidding y Lewis. *Parallel Robots*. Gidding & Lewis, WI, 1994.
- [9] Fu y Yao. Non-linear robust control with partial inverse dynamic compensation for a stewart platform manipulator. *The International Journal of Modelling, Identification and Control*, 1(1):44–51, 2006.
- [10] Klimchik, Pashkevich, Chablat y Hovland. Compensation of compliance errors in parallel manipulators composed of non-perfect kinematic chains. *Institut de Recherche en Communications et Cybernetique de Nantes*, 1(1):1–9, 2012.
- [11] Li y Xu. Dynamic modeling and robust control of a 3-prc translational parallel kinematic machine. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 25(7,20):630–640, 2009.

- [12] Sartori, Chemori y Pierrot. Control of parallel manipulators for very high accelerations: the mechanical vibrations issue. *11th Pan-American Congress of Applied Mechanics - PACAM XI*, 1(25):4–8, 2010.
- [13] Zamanov y Sotirov. A contribution to the serial and parallel manipulator duality. *8th IFToMM World Congress on the Theory of Machine and Mechanisms*, 1(26-31):517–520, 1991.
- [14] Waldron y Hunt. Series-parallel dualities in actively coordinated mechanisms. *The International Journal of Robotics Research*, 10(2):473–480, 1991.
- [15] Joseph Edward Shigley. *Análisis cinemático de Mecanismos*. McGRAW-HILL, Universidad de Michigan, 1976.
- [16] Antonio Barrientos. *Fundamentos de Robótica*. McGRAW-HILL, Universidad Politécnica de Madrid, 1997.
- [17] Aschemann y Schindele. Nonlinear model-based control of a parallel robot driven by pneumatic muscle actuators. *New Approaches in Automation and Robotics*, 1(2):392, 2008.
- [18] Khalil, Globovic y Sabanovic. High precision motion control of parallel robots with imperfections and manufacturing tolerances. *Mechatronics (ICM), IEEE international conference*, 1(1):39–44, 2011.
- [19] Paccot, Andreff y Martinet. Revisiting the major dynamic control strategies of parallel robots. *International Journal of Robotics Research*, 28(3):395–416, 2009.
- [20] Fu y Mills. Robust control design for a planar parallel robot. *International Journal of Robotics and Automation*, 22(2):139–147, 2007.
- [21] Cheung y Hung. Robust control of a high precision 4-dof parallel manipulator. *Proceedings of the 17th World Congress*, 17(1):15708–15713, 2008.
- [22] Claude Samson. *Robot Control the task function approach*. Clarendon Press Oxford, 1991.
- [23] Emilio Jorge González Galván. *Notas sobre Teoría de Estimación aplicada a la Robótica*. Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, 2010.
- [24] Domingo Torres Cruz.
- [25] Siciliano, Bruno, Sciavicco, Lorenzo, Villani, Luigi, and Oriolo y Giuseppe. *Robotics: Modelling, Planning and Control, 1a edición*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2008.

- [26] Luis Ángel Silva. *Control visual de robots paralelos. Análisis, desarrollo y aplicación de la plataforma ROBOTENIS. Tesis Doctoral.* Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Madrid, 2005.
- [27] Emilio Jorge González Galván. *Notas del curso DINÁMICA ANÁLITICA.* Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, 2010.
- [28] Dare A. Wells. *Dinámica de Lagrange.* McGraw-Hill, Universidad de Cincinnati, 1970.
- [29] Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design, 3a Ed.* Serie Oxford, 1999.
- [30] John Van de Vegte. *Feedback Control Systems.* Prentice Hall, Universidad de Toronto, 1998.
- [31] Carl D. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* Siam, 2000.
- [32] Stanley Grossman. *Álgebra lineal, 5ta Ed.* McGRAW-HILL, Universidad de Montana, 1996.