

Universidad Autónoma de San Luis Potosí Facultad de Ingeniería



Centro de Investigación y Estudios de Posgrado
Posgrado en Ingeniería Eléctrica

Sincronización de Convertidores de Potencia en una Microrred Eléctrica bajo un Esquema de Control Adaptivo

T E S I S

Para obtener el título en:

Maestría en Ingeniería Eléctrica con opción a Control Automático

PRESENTA

Ing. Noé Alfredo Bernal Moncada

Asesor

Dr. Homero Miranda Vidales

Co-asesor

Dr. César Fernando Francisco Méndez Barrios



UASLP
Universidad Autónoma
de San Luis Potosí



FACULTAD DE
INGENIERÍA

19 de noviembre de 2020

**ING. NOÉ ALFREDO BERNAL MONCADA
P R E S E N T E.**

En atención a su solicitud de Temario, presentada por los **Dres. Homero Miranda Vidales y César Fernando Francisco Méndez Barrios**, Asesor y Coasesor de la Tesis que desarrollará Usted con el objeto de obtener el Grado de **Maestro en Ingeniería Eléctrica**, me es grato comunicarle que en la sesión del H. Consejo Técnico Consultivo celebrada el día 19 de noviembre del presente, fue aprobado el Temario propuesto:

TEMARIO:

“Sincronización de Convertidores de Potencia en una Microrred Eléctrica bajo un Esquema de Control Adaptivo”

Introducción.

1. Modelo matemático de los convertidores de potencia.
2. Fundamentos de la teoría de estabilidad y de la teoría de grafos.
3. Esquema de control para el caso de un solo agente.
4. Esquema completo de sincronización y control.
5. Simulación y resultados.

Conclusiones.

Referencias.

“MODOS ET CUNCTARUM RERUM MENSURAS AUDEBO”

A T E N T A M E N T E



DR. EMILIO JORGE GONZÁLEZ GALVÁN
DIRECTOR

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE SAN LUIS POTOSÍ
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIRECCION

www.uaslp.mx

Copia. Archivo.
*etn.

Av. Manuel Nava 8
Zona Universitaria • CP 78290
San Luis Potosí, S.L.P.
tel. (444) 826 2330 al39
fax (444) 826 2336

“1945-2020: 75 años de formación de profesionales en la Facultad de Ingeniería”



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ
Facultad de Ingeniería.

Área de Investigación y Estudios de Posgrado
ACLARACIÓN

El presente trabajo que lleva por título:

“Sincronización de los Convertidores de Potencia en una Microrred Eléctrica bajo un Esquema de Control Adaptivo”

Que se realizó en el periodo julio de 2019 a julio de 2021 bajo la dirección del Dr. Homero Miranda Vidales y el Dr. César Fernando Francisco Médez Barrios.

Originalidad

Por este medio aseguro que he realizado este documento de tesis para fines académicos sin ayuda indebida de terceros y sin utilizar otros medios más que los indicados.

Las referencias e información tomadas directa o indirectamente de otras fuentes se han definido en el texto como tales y se ha dado el debido crédito a las mismas.

El autor exime a la UASLP de las opiniones vertidas en este documento y asume la responsabilidad total del mismo.

Este documento no ha sido sometido como tesis a ninguna otra institución nacional o internacional en forma parcial o total.

Se autoriza a la UASLP para que divulgue este documento de Tesis para fines académicos.

A T E N T A M E N T E

Noé Alfredo Bernal Moncada

Agradecimientos

Primero extender mi profundo agradecimiento a mis asesores, el Dr. Homero Miranda Vidales y el Dr. César Fernando Francisco Méndez Barrios por haber depositado su confianza en mí para este proyecto de tesis.

Al CONACYT por el apoyo económico que se me otorgó, también los profesores y al personal que pertenece al Centro de Investigación y Estudios de Posgrado.

A mis revisores: el Dr. Ricardo Álvarez Salas, el Dr. Raúl Eduardo Balderas Navarro y el Dr. Mario Arturo González García por sus comentarios y tiempo dedicado a este trabajo de tesis.

Al Dr. Víctor Manuel Cárdenas Galindo y a la Lic. Ana Cecilia Rivera Rivera por sus atenciones en el Laboratorio de Calidad de Energía Eléctrica y Control de Motores.

A Juan Carlos Coronado en especial por su tiempo ya que me ayudó a comprender mejor el controlador propuesto.

A mis compañeros del posgrado: Agustín Tobías, Alberto Arellanes, Ángel Daniel Mejía, Daniel Sting, Diego Torres, Edgar Saúl Araiza, Erick Moreno, Frank Loredó, Fernando Isidoro Quiroz, Josué Ricardo Hernández, Juan Alejandro González, José Manuel Sandoval, Julián Alejandro Hernández, Julio Hernández, Miguel Ángel Toro, Ricardo de Jesús Arriaga, Rosa Iris, San José de la Rosa, Saúl Rolando y Yuniel León con los que compartí momentos increíbles en mi estancia.

A todos mis familiares y amigos que me acompañaron en esta odisea (si, todos ellos en algún momento estuvieron al pendiente): Abigail Miranda, Agustín Rumayor, Alejandra Zermeño, Alejandro Villanueva, Alejandro Zermeño, Alonso Rodríguez, Ana Lucía Salinas, Andrea de Alba, Andrea Zermeño, Andreas Fernández, Andrés Aguilar, Areli Huerta, Belem Salazar, Carlos Ramos, Claudia Paulina Hernández, Constanza Espinosa, Carlos Rangel, Christian Alejandro Torres, David González, Dayris Martínez, Daniela Salinas, Daniel Urbina, Dennis Damaris Rodríguez, Eduardo Cervantes, Eduardo Gama, Elizabeth Vázquez, Fátima Sierra, Federico Otero, Fernando Ramírez, Francisco Moisés Lara, Gerardo Salinas, Guillermo González, Hilma Martínez, Iván Herrera, Jimena Castanedo, Jonathan Bárcenas, José de Jesús Mata, José Ramón González, Karen Anahí Rubio, Kenna Zermeño, Luis David Morán, Luis Enrique Barbosa, Luis Manuel Lugo, Mario Castanedo, Michel Rivera, Miguel Sánchez, Milton Porfirio Ortiz, Narda Hernández, Paola Castanedo, Paulina Salinas, Salvador Fernández, Sergio Adrián Bernal y Uriel de la Rocha.

Índice general

Índice general	XV
Acrónimos y símbolos	XVII
Índice de figuras	XXVI
Índice de tablas	XXVII
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	5
1.2. Contribución	18
1.3. Objetivo general	19
1.4. Objetivos particulares	19
2. Modelo matemático de los convertidores de potencia	21
2.1. Modelado matemático por energía	22
2.1.1. Cálculo de variaciones	23
2.1.2. Coordenadas generalizadas	24
2.1.3. Principio de d’Alambert	25
2.1.4. Principio de Hamilton	27
2.1.5. Sistemas Euler-Lagrange	28
2.1.6. Parámetros Euler-Lagrange	30
2.1.7. Propiedades adicionales	30
2.1.8. Parámetros para los convertidores de potencia	32
2.2. Clases de inversores	33
2.3. Diseño y sintonización del filtro de acoplamiento	34
2.3.1. Caracterización	35
2.3.2. Transformada directa e inversa de Laplace	35
2.3.3. Función de transferencia	36
2.3.4. Polos y ceros	36
2.3.5. Diagrama de Bode	38

2.3.6.	Respuesta en frecuencia	39
2.3.7.	Aproximación de Butterworth	44
2.3.8.	Procedimiento de diseño y sintonización	46
2.3.8.1.	Filtro-LC	48
2.3.8.2.	Filtro-L	50
2.3.8.3.	Filtro-LCL	52
2.3.8.4.	Tabla de resultados	54
2.4.	Determinación del modelo matemático	55
2.4.1.	Procedimiento	55
2.4.1.1.	Inversor formador de red	56
2.4.1.2.	Inversor alimentador	59
2.4.1.3.	Inversor de soporte	61
2.4.1.4.	Tabla de resultados	64
2.4.2.	Validación	65
3.	Fundamentos de la teoría de estabilidad y de la teoría de grafos	69
3.1.	Introducción	70
3.2.	Teoría de grafos	74
3.2.1.	Características elementales	74
3.2.2.	Características matemáticas	76
3.3.	Acoplamiento difuso	81
3.4.	Sincronización	82
3.5.	Criterio de estabilidad de Lyapunov	86
3.6.	Análisis por contracción	89
3.6.1.	Sistemas dinámicos en una región de contracción	89
3.6.2.	Combinación de sistemas dinámicos	95
3.6.3.	Contracción parcial	96
3.6.4.	Sincronización y contracción parcial	97
4.	Esquema de control para el caso de un solo agente	99
4.1.	Controlador para un solo agente	100
4.2.	Demostración	103
4.3.	Condiciones para el controlador	109
4.3.1.	Sistemas dinámicos sub-actuados	109
4.3.2.	Segmentación del controlador	110
4.4.	Re-estructuración del modelo matemático	110
4.4.1.	Procedimiento	111

4.4.1.1.	Inversor formador de red	112
4.4.1.2.	Inversor alimentador	115
4.4.1.3.	Inversor de soporte	116
4.4.1.4.	Tabla de resultados	119
5.	Esquema completo de sincronización y control	121
5.1.	Controlador para múltiples agentes	123
5.2.	Seguimiento de un trayectoria deseada	127
5.3.	Escala de tiempo del controlador propuesto	129
5.4.	Sincronización del comportamiento de los estados	130
5.4.1.	Controlador sin estimación de parámetros	131
5.4.2.	Controlador con estimación de parámetros	131
6.	Simulación y resultados	133
6.1.	Controlador para un solo agente	136
6.1.1.	Simulación con el inversor como convertidor de potencia	136
6.1.2.	Simulación con fuente controlada de tensión	138
6.1.3.	Carga de consumo variante en el tiempo	139
6.1.4.	Carga de consumo no caracterizada	141
6.2.	Controlador para múltiples agentes	142
6.2.1.	Desconexión de la red de suministro	143
6.2.2.	Micro-cortes en la red de suministro	144
6.2.3.	Sincronización del comportamiento de estados con $K_2 \neq 0$	145
6.2.4.	Sincronización del comportamiento de estados con $K_2 = 0$	146
7.	Conclusiones	149
7.1.	Conclusiones	149
7.2.	Trabajo a futuro	151
A.	Ecuación de Euler-Lagrange	153
A.1.	Partiendo del principio de d'Alambert	153
A.2.	Partiendo del principio de Hamilton	156
B.	Anexo de bloques: Simulación y resultados	157
B.1.	Bloques para la modulación unipolar	157
B.2.	Bloques para el controlador	159

Acrónimos y símbolos

T-	TEOREMA
H-	HIPÓTESIS
A-	AXIOMA
C-	COROLARIO
L-	LEMA
P-	PROPOSICIÓN
D-	DEFINICIÓN
N-	NOTA
CN	CONDICIÓN
PP	PROPIEDAD
AS	SUPOSICIÓN
CS	CASO
PB	PROBLEMA
SL	SOLUCIÓN
PS	<i>...del inglés</i> , Sistema de potencia
EL	Euler-Lagrange, para un conjunto de parámetros o un sistema dinámico
LTIs	Sistema lineal invariante en el tiempo
NLSs	Sistema no-lineal
AC	Corriente alterna
DC	Corriente directa
CG	<i>...del inglés</i> , Generación centralizada
DG	<i>...del inglés</i> , Generación distribuida
DERs	<i>...del inglés</i> , Recursos de Energía Distribuida
CERs	<i>...del inglés</i> , Recursos de Energía Centralizada
INVR	Inversor
RECT	Rectificador
SPST	<i>...del inglés</i> , Single-Pole Single-Throw, para describir un interruptor
PCCs	<i>...del inglés</i> , Punto de conexión común

BESS	...del inglés, Sistema de almacenamiento de energía por baterías
MPPT	...del inglés, Maximum Power Point Tracker
FETs	...del inglés, Field Effect Transistor
BJTs	...del inglés, Bipolar Junction Transistor
MOSFET	...del inglés, Metal-Oxide Switching Field Effect Transistor
IGBT	...del inglés, Insulated Gate Bipolar Transistor
SiC •	...del inglés, Silicon Carbide
GaN •	...del inglés, Gallium Nitride
PWMs	...del inglés, Pulse-Width Modulation
SPWM	...del inglés, Sinusoidal Pulse-Width Modulation
LCKs	Leyes de Kirchhoff, <i>ley de corrientes de malla</i>
LVKs	Leyes de Kirchhoff, <i>ley de tensiones en nodo</i>
n	Número de renglones en $\underline{\mathbf{A}}$ Número de polos \check{p}_i en $H(s)$ Cantidad de coordenadas en un sistema dinámico Dimensión en general de un conjunto o de un vector
m	Número de columnas en $\underline{\mathbf{A}}$ Número de ceros \check{z}_j en $H(s)$ Variable auxiliar para el número de restricciones debido a ligaduras holónomas Variable auxiliar para el número de arcos o aristas en un grafo
q	Número de polos complejos \check{p}_{C_i} en $H(s)$ Coordenada generalizada
p	Número de ceros complejos \check{z}_{C_j} en $H(s)$ Agente en un sistema dinámico
k, l, w, z	Índices Variables auxiliares
r	Repetición de un polo \check{p}_i o un cero \check{z}_j en $H(s)$ Parámetro desconocido
N	Grados de libertad
P	Total de agentes presentes en el sistema dinámico
M	Constante auxiliar para expresar un total asociado a m
R	Total de parámetros desconocidos
$\{\cdot\}_i$	Índice para los elementos de \mathbf{x} o los renglones de $\underline{\mathbf{A}}$ Índice para los polos \check{p}_i de una función de transferencia $H(s)$
$\{\cdot\}_j$	Índice para los elementos de \mathbf{x} o las columnas de $\underline{\mathbf{A}}$ Índice para los ceros \check{z}_j de una función de transferencia $H(s)$

x, y	Variable
a, b	Constante
\mathbf{x}	Vector
\mathbf{A}	Matriz
t	Dominio del tiempo
s	Dominio de Laplace
d	Operador de la derivada, diferénciese de d
\hat{j}	Número imaginario, diferénciese de j y j
\mathbb{N}	Conjunto de los números naturales $\mathbb{N} \in \{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{Z}	Conjunto de los números naturales incluyendo el cero $\mathbb{Z} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales
\mathbb{C}	Conjunto de los números complejos
$\Re\{\cdot\}$	Parte real
$\Im\{\cdot\}$	Parte imaginaria
$\mathcal{L}\{\cdot\}$	Transformada directa de Laplace
$\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$	Transformada inversa de Laplace
\mathbb{R}_{\pm}	Conjunto de los números reales positivos o negativos, según sea el caso
$\overline{\mathbb{R}}_{\pm}$	Conjunto de los números reales positivos o negativos, incluyendo el cero
\mathcal{C}^1	Clase de funciones diferenciables al menos una vez
\mathcal{C}^n	Clase de funciones diferenciables n -veces
$\prec \preceq \succeq \succ$	Operadores de desigualdad elemento a elemento
\equiv	Proposiciones equivalentes
$\{\cdot\}^*$	Trayectoria deseada
$\hat{\cdot}$	Objeto donde se realizó la estimación de los parámetros desconocidos
$\{\cdot\}'$	Variable adicional o modificada
$\tilde{\cdot}$	Error en el comportamiento de los estados o en la estimación de parámetros
$\{\cdot\}^*$	El conjugado de $a \in \mathbb{C}$ o la conjugada transpuesta de \mathbf{A}
$\{\cdot\}^{\top}$	Operación de transposición de \mathbf{x} o de \mathbf{A}
$T_{(1+)}^A$	Interruptor T del <i>Inversor</i> A ; en la <i>primera rama</i> $_1$, en la <i>parte superior</i> $_+$
$T_{(1-)}^A$	Interruptor T del <i>Inversor</i> A ; en la <i>primera rama</i> $_1$, en la <i>parte inferior</i> $_-$
$T_{(2+)}^A$	Interruptor T del <i>Inversor</i> A ; en la <i>segunda rama</i> $_2$, en la <i>parte superior</i> $_+$
$T_{(2-)}^A$	Interruptor T del <i>Inversor</i> A ; en la <i>segunda rama</i> $_2$, en la <i>parte inferior</i> $_-$
$v_i(t)$	Tensión instantánea de la fuente de alimentación del inversor
$i_i(t)$	Corriente instantánea de la fuente de alimentación del inversor
$v_o(t)$	Tensión instantánea en las terminales del inversor
$i_o(t)$	Corriente instantánea en las terminales del inversor
V_{dC}	Tensión de la fuente de alimentación del inversor
V_o	Tensión en las terminales del inversor

$v_{jSPWM}(t)$	Tensión instantánea para la representación alternativa del inversor
$i_{jSPWM}(t)$	Corriente instantánea para la representación alternativa del inversor
V_{sAC}	Tensión nominal de la red
$v_s(t)$	Tensión instantánea nominal de la red
$u(t)$	Señal de control
$(\ v_o(t)\ _\infty)_{f_0}$	Valor máximo a frecuencia fundamental/nominal
$m(t)$	Señal moduladora
$p(t)$	Señal portadora
m_a	Índice de modulación en amplitud
m_f	Índice de modulación en frecuencia
ω_0	Velocidad angular fundamental/nominal de la red
f_0	Frecuencia fundamental o frecuencia nominal de la red
ω_1	Velocidad angular de corte del filtro de acoplamiento
f_1	Frecuencia de corte del filtro de acoplamiento
T_0	Período fundamental/nominal de la red
T_1	Período de corte del filtro de acoplamiento
ω_m	Velocidad angular de la señal moduladora
f_m	Frecuencia de la señal moduladora
ω_p	Velocidad angular de la señal portadora
f_p	Frecuencia de la señal portadora
T_m	Período de la señal moduladora
T_p	Período de la señal portadora
$\mathcal{W}(t; \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$	Función
$\mathfrak{W}(\mathbf{z})$	Funcional
x	Posición mecánica
\times	Vector de coordenadas
\dot{x}	Velocidad mecánica
\ddot{x}	Aceleración mecánica
q	Posición generalizada, propiamente carga eléctrica
\mathbf{q}	Vector de coordenadas generalizadas
\dot{q}	Velocidad generalizada, propiamente corriente eléctrica
\ddot{q}	Aceleración generalizada, propiamente la derivada de la corriente eléctrica
$\{\dot{q}, \ddot{q}\}$	Derivadas de las coordenadas generalizadas
$f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$	Función que depende de las coordenadas generalizadas y sus derivadas
\mathbf{r}	Desplazamiento
$\delta\mathbf{r}$	Desplazamiento virtual
$m\dot{\mathbf{v}}$	Derivada del momento lineal
\mathbf{F}	Fuerza mecánica

W	Trabajo
δW	Trabajo virtual
\mathbf{F}^e	Fuerza que actúa sobre un sistema de partículas
\mathbf{F}^l	Fuerza por ligadura
$\mathcal{L}(t; \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Lagrangiano
$\mathcal{S}(\mathbf{q})$	Funcional de acción
$\mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Energía cinética
$\mathcal{V}(\mathbf{q})$	Energía potencial
\mathcal{Q}	Fuerzas generalizadas
\mathcal{F}	Fuerzas externas
\mathcal{Q}'	Fuerzas generalizadas conservativas
\mathcal{Q}''	Fuerzas generalizadas no conservativas
$\mathcal{G}(\dot{\mathbf{q}})$	Fuerza disipativa
$\mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}})$	Co-función de disipación de Ralyleigh
τ	Acción de control
μ	Perturbaciones
$\Sigma'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Sistema-EL mediante sus Parámetros-EL (<i>fuerzas conservativas</i>)
$\Sigma''(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Sistema-EL mediante sus Parámetros-EL (<i>fuerzas no conservativas</i>)
$\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$	Matriz de inercia/masa generalizada
$\underline{\Psi}$	Matriz antisimétrica donde $\underline{\Psi} = -\underline{\Psi}^\top$
$\underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q})$	Matriz de fuerzas centrífugas/de coriolis
$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{q})$	Fuerza o par generalizado debido a la presencia de campos de potencia
$\underline{\Phi}(\dots)$	Matriz de regresión de funciones conocidas
θ	Parámetros desconocidos
V	Variable de control: Tensión
ϕ	Variable de control: Fase
P	Variable de control: Potencia real
Q	Variable de control: Potencia reactiva
$R_f : \{R_1, R_2\}$	Resistencia en serie
R_L	Resistencia de la carga de consumo
$L_f : \{L_1, R_L\}$	Inductancia
C_f	Capacitancia
$ H(\hat{j}\omega) $	Magnitud de la respuesta en frecuencia para un diagrama de Bode
$\angle H(\hat{j}\omega)$	Fase de la respuesta en frecuencia para un diagrama de Bode
$\{x(t), y(t)\}$	Función de entrada y función de salida, en el dominio del tiempo
$\{X(s), Y(s)\}$	Función de entrada y función de salida, en el dominio de Laplace
\check{p}_j	Polo
\check{z}_j	Cero

$H(s)$	Función de transferencia de un filtro lineal
K	Ganancia de la respuesta en frecuencia
$\check{p}_{\mathbb{R}_i}$	Polo real
$\check{z}_{\mathbb{R}_j}$	Cero real
$\check{p}_{\mathbb{C}_i}$	Polo complejo, generalmente va como par conjugado
$\check{z}_{\mathbb{C}_j}$	Cero complejo, generalmente va como par conjugado
$H^{\text{PB}}(s)$	Filtro lineal de <i>pasa-bajas</i> PB
$H^{\text{PA}}(s)$	Filtro lineal de <i>pasa-altas</i> PA
$H_{(1^\circ)}(s)$	Filtro lineal de <i>1er. orden</i> (1°)
$H_{(2^\circ)}(s)$	Filtro lineal de <i>2do. orden</i> (2°)
ω_n	Velocidad angular natural
ζ	Factor de amortiguamiento
$\check{H}_{(n^\circ)}^{\text{PB}}(s)$	Función de transferencia normalizada
$\check{B}_{(n^\circ)}(s)$	Polinomio característico normalizado de orden definido (n°)
$V_i(s)$	Tensión en la entrada del filtro de acoplamiento
$V_o(s)$	Tensión en la salida del filtro de acoplamiento
$v_{L_f}(t)$	Tensión en el inductor
$i_{L_f}(t)$	Corriente en el inductor
$v_{C_f}(t)$	Tensión en el capacitor
$i_{C_f}(t)$	Corriente en el capacitor
\dot{q}_{L_1}	Coordenada generalizada de la corriente en el inductor
\ddot{q}_{L_1}	Coordenada generalizada de la derivada de la corriente en el inductor
q_{C_f}	Coordenada generalizada de la carga en el capacitor
\dot{q}_{C_f}	Coordenada generalizada de la corriente en el capacitor
t_i	Tiempo inicial de simulación
t_f	Tiempo final de simulación
T	Constante de tiempo del bloque integrador
t_s	Paso de integración
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$	<i>Sistema no-lineal</i> o NLSs en (3.1)
$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$	Trayectoria del sistema dinámico en (3.1) para un \mathbf{x}_0 dado
$\mathbf{0}_n ; \mathbf{1}_n$	Vector de dimensión n donde todos sus elementos son 0 o 1 según el caso
\mathbf{I}_n	Matriz identidad de dimensión $n \times n$
$\mathbf{0}_{n \times m}$	Matriz de dimensión $n \times m$ donde todos sus elementos son 0
$\mathbf{1}_{n \times m}$	Matriz de dimensión $n \times m$ donde todos sus elementos son 1
$\lambda(\mathbf{W})$	Algún eigenvalor de la matriz \mathbf{W}
$\nu(\mathbf{W})$	Algún eigenvector (derecho) de la matriz \mathbf{W}
$\lambda_{\text{mín}}$	Eigenvalor más pequeño
$\lambda_{\text{máx}}$	Eigenvalor más grande

$\underline{\Lambda}$	Matriz diagonal de los eigenvalores de una matriz simétrica para la descomposición espectral
$\underline{\mathbf{N}}$	Matriz de los eigenvectores ortogonales de una matriz simétrica para la descomposición espectral
$\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$	Grafo
\mathcal{N}_x	Conjunto de vecindad del nodo v_x
\mathcal{V}	Conjunto de nodos de un grafo
v_x	Nodo en un grafo
\mathcal{E}	Conjunto de arcos de un grafo
e_y	Arco en un grafo
d	Distancia entre dos nodos conectados cualesquiera en un grafo
$d_{máx}$	Diámetro de un grafo
$d_i(v_x)$	Grafo de entrada del nodo v_x
$d_o(v_x)$	Grafo de salida del nodo v_x
\mathcal{L}	Matriz laplaciana
l_{ij}	Elemento de la matriz laplaciana
\mathcal{G}	Matriz de grado
g_{ij}	Elemento de la matriz de grado
\mathcal{L}	Matriz de adyacencia
a_{ij}	Elemento de la matriz de adyacencia
\mathcal{H}	Matriz de incidencia
k_{ij}	Elemento de la matriz de incidencia
ξ	Fuerza de interacción en un acoplamiento difuso
ϖ	Ponderación de la interconexión
ϵ	Error de seguimiento
ε	Error de sincronización
$\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$	Denota la función candidata o función de Lyapunov
$\mathbf{U}(t, \mathbf{x})$	Denota una función auxiliar
$\bar{\mathbf{x}}_0$	Punto de equilibrio del sistema dinámico en (3.1)
$\bar{\mathbf{x}}(t; \bar{\mathbf{x}}_0, t_0)$	Trayectoria del sistema dinámico en (3.1) para un $\bar{\mathbf{x}}_0$ dado
$\bar{\mathbf{V}}(t, \bar{\mathbf{x}})$	Denota la función candidata evaluada en la trayectoria $\bar{\mathbf{x}}(t; \bar{\mathbf{x}}_0, t_0)$
$\dot{\mathbf{V}}(t, \dot{\mathbf{x}})$	Denota la derivada en el tiempo de la función candidata
$\delta \mathbf{x}$	Desplazamiento virtual
	Forma diferencial tangencial lineal
$\ \delta \mathbf{x}\ ^2$	Longitud de separación cuadrada
$\delta \mathbf{x}^\top \delta \mathbf{x}$	Forma cuadrática tangencial asociada
$\vartheta(\mathbf{x}_0, \eta)$	Vecindad centrada en \mathbf{x}_0 de radio η
$\mathfrak{F}(t, \mathbf{x})$	Jacobiano

$\underline{\mathbf{W}}_{\text{sim}}$	Parte simétrica de una matriz cuadrada $\underline{\mathbf{W}}$
$\underline{\mathbf{W}}_{\text{ant}}$	Parte antisimétrica de una matriz cuadrada $\underline{\mathbf{W}}$
$\underline{\Theta}(t, \mathbf{x})$	Matriz cuadrada de transformación a coordenadas diferenciales $\delta \mathbf{w}$
$\underline{\Upsilon}(t, \mathbf{x})$	Métrica en coordenadas diferenciales $\delta \mathbf{w}$
$\varsigma = \dot{\tilde{x}} + \gamma \tilde{x}$	Variable compuesta para describir una superficie deslizante
γ	Ganancia asociada a la posición en la variable compuesta ς

Índice de figuras

1.1.	Topología del circuito electrónico de un inversor	5
1.2.	El convertidor de potencia bidireccional	8
1.3.	La técnica de conmutación bipolar, $m_a = 0.75$ y $m_f = 21$	13
1.4.	La técnica de conmutación unipolar, $m_a = 0.75$ y $m_f = 21$	14
1.5.	Espectro armónico de la técnica de conmutación bipolar	16
1.6.	Espectro armónico de la técnica de conmutación unipolar	16
1.7.	Arquitectura de un inversor	17
1.8.	Fuente de tensión controlada equivalente	17
2.1.	Inversor formador de red	33
2.2.	Inversor alimentador	33
2.3.	Inversor de soporte para definir las condiciones de operación (V y ϕ)	34
2.4.	Inversor de soporte para inyectar potencia aparente (P y Q)	34
2.5.	Respuesta en frecuencia: $H_{(1^\circ)}^{\text{PB}}(s)$ y $H_{(1^\circ)}^{\text{PA}}(s)$	40
2.6.	Respuesta en frecuencia: $H_{(2^\circ)}^{\text{PB}}(s)$ y $H_{(2^\circ)}^{\text{PA}}(s)$	41
2.7.	Respuesta en frecuencia en magnitud de un <i>filtro-LC</i>	49
2.8.	Topología de un <i>filtro-LC</i>	49
2.9.	Respuesta en frecuencia en magnitud de un <i>filtro-L</i>	51
2.10.	Topología de un <i>filtro-L</i>	51
2.11.	Respuesta en frecuencia en magnitud de un <i>filtro-LCL</i>	52
2.12.	Topología de un <i>filtro-LCL</i>	53
2.13.	Inversor formador de red (utilizando la <i>primera aproximación</i>)	57
2.14.	Inversor formador de red (utilizando la <i>segunda aproximación</i>)	58
2.15.	Inversor alimentador (utilizando la <i>primera aproximación</i>)	59
2.16.	Inversor alimentador (utilizando la <i>segunda aproximación</i>)	60
2.17.	Inversor de soporte (utilizando la <i>primera aproximación</i>)	61
2.18.	Inversor de soporte (utilizando la <i>segunda aproximación</i>)	62
2.19.	Comportamiento de la señal \dot{q}_{L_1} en el inversor formador de red	66
2.20.	Comportamiento de la señal q_{C_f} en el inversor formador de red	66
2.21.	Comportamiento de la señal \dot{q}_{L_1} en el inversor alimentador	67

2.22.	Comportamiento de la señal \dot{q}_{L_2} en el inversor de soporte	67
3.1.	Ilustración de los tipos de arcos en un grafo	75
3.2.	Ejemplos de diferentes de grafos	79
3.3.	Sincronización basada en el acoplamiento cruzado	83
3.4.	Sincronización de dos manipuladores robóticos	84
3.5.	Dos trayectorias vecinas en el sistema dinámico (3.2)	90
3.6.	Región de contracción en el sistema dinámico (3.1)	92
4.1.	Controlador para un solo agente	103
5.1.	Controlador para múltiples agentes	125
5.2.	Escenario de simulación para el presente trabajo de tesis	126
6.1.	Tipos de fuentes de alimentación	135
6.2.	Inversor formador de red	136
6.3.	Comportamiento de $q_{C_f}(t)$ contra $q_{C_f}^*(t)$	137
6.4.	Comportamiento de $\dot{q}_{C_f}(t)$ contra $\dot{q}_{C_f}^*(t)$	137
6.5.	Señal de control $\tau(t)$	137
6.6.	Tensión nominal en el capacitor de acoplamiento $v_{C_f}(t)$	138
6.7.	Estimación de la carga de consumo R_L	138
6.8.	Tensión nominal en el capacitor de acoplamiento $v_{C_f}(t)$	139
6.9.	Estimación de la carga de consumo R_L	139
6.10.	Señal de control $\tau(t)$	140
6.11.	Corriente eléctrica a través de la impedancia en serie $i_{Z_1}(t)$	140
6.12.	Tensión nominal en el capacitor de acoplamiento $v_{C_f}(t)$	140
6.13.	Tensión nominal en el capacitor de acoplamiento $v_{C_f}(t)$	141
6.14.	Estimación de la carga de consumo R_L	141
6.15.	Inversor formador de red	142
6.16.	Tensión nominal en el capacitor de acoplamiento $v_{C_f}(t)$	143
6.17.	Corriente eléctrica a través de todas las impedancias $i_{Z_1}^X$	143
6.18.	Tensión nominal en el capacitor de acoplamiento $v_{C_f}(t)$	144
6.19.	Corriente eléctrica a través de todas las impedancias $i_{Z_1}^X$	144
6.20.	Ejecución de la sincronización del comportamiento de los estados	145
6.21.	Ausencia de la sincronización del comportamiento de los estados	146
B.1.	Diagrama de bloques, en Powersim PSIM 9.1.1	158
B.2.	Diagrama de bloques, en MathWorks SIMULINK R2017b	158

Índice de tablas

1.1.	Estados de conmutación	7
2.1.	Parámetros-EL de un inversor	32
2.2.	Tabla comparativa de los filtros simples	42
2.3.	Corrección de la gráfica en magnitud para $H_{(2^o)}^{PB}(s)$	43
2.4.	Corrección de la gráfica en magnitud para $H_{(2^o)}^{PA}(s)$	43
2.5.	Algunos ejemplos de $\check{B}_{(n^o)}(s')$	46
2.6.	Parámetros para el diseño del filtro de acoplamiento	48
2.7.	Parámetros de cada uno de los filtros de acoplamiento	54
2.8.	Modelo matemático de cada clase de inversor	65
2.9.	Parámetros para la simulación por ordenador	66
4.1.	Implementación del controlador para un solo agente	120
6.1.	Parámetros para las diferentes simulaciones	135

Introducción

En ingeniería eléctrica, una rama que ha tenido una contribución muy importante en los últimos años es la **electrónica de potencia**. La electrónica de potencia ha permitido construir topologías que emplean el principio de “conmutación” para modificar la forma de transmisión y la forma de utilización de la energía eléctrica. Esto se debe principalmente a la aparición de los dispositivos semiconductores de estado sólido en el S. XX [1, p. 5-6] y que continúa en desarrollo al día de hoy.

Los **convertidores de potencia** son dispositivos electrónicos que acondicionan la energía eléctrica [2, p. 1-2] y generalmente se localizan entre la fuente de alimentación y la carga de consumo. Su utilización han permitido introducir nuevamente un esquema de transmisión eléctrica en corriente directa (**DC**, *del inglés* “direct current”) en comparación al esquema de transmisión eléctrica convencional en corriente alterna (**AC**, *del inglés* “alternating current”) que se utiliza por omisión hoy en día. Adicionalmente, permiten modificar los parámetros que caracterizan a la energía eléctrica, por ejemplo, en términos de amplitud y rizo para señales en corriente directa **DC**, y en términos de amplitud, armónicas, fase y frecuencia para señales en corriente alterna **AC**; entre otras aplicaciones como mitigación de armónicas [3, p. 1-2] y control del flujo de potencia [4, p. 15, 17-19].

El **rectificador** convierte energía eléctrica en corriente alterna a corriente directa (**AC**→**DC**), mientras que el **inversor** convierte energía eléctrica en corriente directa a corriente alterna

(**DC**→**AC**). De igual forma, existen convertidores que mantienen la forma de suministrar la energía eléctrica pero modifican los parámetros que la caracterizan [2, p. 2].

Los convertidores de potencia se pueden conectar en cascada para cumplir diferentes propósitos [5, p. 13], por ejemplo: un sistema de generación fotovoltaico puede interconectarse a un sistema de potencia utilizando un **convertidor elevador** en cascada con un **inversor** [6, p. 10]. La primera etapa es responsable de incrementar la tensión en corriente directa **DC** que produce el conjunto de paneles solares mientras que la segunda etapa es responsable de modificar la forma de suministrar la energía en corriente alterna **AC** hacia la red de distribución.

La **generación distribuida** o **DG** ha tenido un crecimiento importante en los últimos años [5, p. 2] dado que, en lugar de emplear una central eléctrica de gran capacidad de generación energética y largas líneas de transmisión para alimentar un sector, existen múltiples *puntos de baja capacidad de generación energética distribuidos dentro de dicho sector* o **DERs** que buscan emplear fuentes de energía alternas que tienen un impacto ambiental mucho menor, entre las que destacan la generación eólica y la generación fotovoltaica, donde implícitamente es necesario utilizar un convertidor de potencia como interfaz entre el recurso de generación y el sistema de potencia.

El concepto de **microrred eléctrica** o **red inteligente** cambia por completo el paradigma del sistema de potencia ya que incorpora los recursos de generación distribuida o **DERs**, adicionalmente, puede emplear algoritmos de control para la regulación de los parámetros asociados a la calidad de la energía y corrección de fallas [6, p. 13-18] de forma local. Entre otras cualidades, la microrred eléctrica o red inteligente puede operar de forma aislada del sistema de potencia en caso de que se presenten problemas en la red de suministro a fin de proteger las cargas de consumo sin la interrupción del servicio. En la actualidad, se desea integrar este concepto al esquema de generación central con largas líneas de transmisión.

El hecho de que incorporan recursos de generación distribuida o **DERs** que utilizan un convertidor de potencia como interfaz de interconexión, se facilita la implementación de algoritmos de control, dado que, un convertidor de potencia puede emplearse como un actuador capaz de cubrir algún objetivo de control como la estabilización y/o regulación de parámetros, el seguimiento de una trayectoria deseada, la corrección de fallas, entre otras tareas particulares en un sistema de potencia.

La ingeniería de control ha tenido una contribución muy importante en sistemas eléctricos, especialmente ahora que se tiene una visión de integrar el esquema de generación distribuida **DG** al esquema de generación centralizado **CG** [5, p. 2][6, p. 1]. Esto se debe principalmente a que los algoritmos de control se pueden introducir en cualquier recurso de energía distribuida **DERs** a diferencia de que antes dependía únicamente de unos cuantos recursos de energía centralizada **CERs**. Sin mencionar que es necesario desarrollar e implementar algoritmos de control para lograr una apropiada transición al nuevo paradigma de los sistemas de potencia debido a la presencia de una mayor cantidad de fuentes de alimentación.

Existen múltiples técnicas de control automático y la que se utilice depende, en principio, del objetivo de control. De igual forma, depende de la complejidad del modelo matemático y a su vez de si es *invariante en el tiempo* (que depende únicamente de sus estados, menos complejo) o de si es *variante en el tiempo* (que depende de sus estados y el tiempo, más complejo). Las técnicas de control pueden clasificarse en dos categorías de acuerdo a la complejidad del modelo matemático:

- El **control lineal** [7, p. 1-4], que emplea herramientas como la función de transferencia y la álgebra lineal.
- El **control no lineal**, esencialmente emplea el **Criterio de estabilidad de Lapunov** (en honor a A. M. Lyapunov) [8, p. 111-112] entre otras herramientas según sea el caso.

Dependiendo de la implementación del controlador puede ser necesario discretizar el modelo matemático y utilizar la técnica de control automático equivalente para el tiempo discreto, por ejemplo, cuando se utiliza un microcontrolador u ordenador, o inclusive cuando se utiliza un procesador de señales. Ahora, considerando el objetivo de control que se desea alcanzar, existe una gran cantidad de técnicas de control automático y para ejemplificar, se mencionan algunas de ellas a continuación:

- El *control robusto* lidia con la incertidumbre en los parámetros del sistema dinámico para el diseño del controlador.
- El *control adaptivo* utiliza un proceso de identificación de los parámetros del sistema dinámico en línea modificando las ganancias del controlador para aumentar su robustez.
- El *control inteligente* utiliza aproximaciones por computadora mediante *redes neuronales, lógica difusa, aprendizaje automático, algoritmos genéticos*, etcétera.

- El *control cooperativo* alcanza el *consensus* o la *sincronización* del comportamiento dinámico de múltiples agentes (sistemas dinámicos simples) en un sistema dinámico complejo.

Para seleccionar una técnica de control automático es necesario identificar el objetivo de control que se desea alcanzar. Frecuentemente en los sistemas de potencia el objetivo de control consiste en mitigar los fenómenos que afectan la calidad de la energía; por ejemplo, para el caso de suministro de energía en corriente alterna **AC** [3, p. 5-12] se tiene:

- Considerando las variaciones de la tensión, los *swell* y los *sag* consisten en un aumento y en una disminución muy rápida de la amplitud de la tensión, respectivamente; estas variaciones también pueden presentarse lentamente, sin embargo, en caso de ser así, quedan propiamente fuera de esta clasificación.
- De igual forma, las interrupciones en la señal se clasifican de acuerdo a su duración, es decir, para periodos muy largos cuando la señal mantiene una amplitud cero de forma constante se denomina *interruption* mientras que cuando se presenta una serie de microcortes que se reflejan en una pequeña y momentánea caída de tensión se denomina *notching*.
- En cuanto al comportamiento en frecuencia de la señal, puede presentarse *distorsión armónica* a través de componentes armónicas de orden entero bien identificadas y/o *ruido* a través de componentes armónicas de alta frecuencia, de orden desconocido y generalmente no entero.
- Entre otros fenómenos, como la presencia de impulsos en la señal llamados *transients* o parpadeo oscilatorio de la señal conocido como *flickering*.

Estos fenómenos aparecen por diferentes causas, debido probablemente al proceso de generación de la energía eléctrica hasta las condiciones climatológicas a lo largo de la línea de transmisión, también pueden aparecer debido a la caracterización de la carga de consumo o a la presencia de interferencia electromagnética.

Complementar el uso de convertidores de potencia con el control automático permite mantener, de forma activa, los parámetros asociados a la calidad de la energía y, ante la presencia de los fenómenos que se mencionaron anteriormente, compensar o mitigar el efecto que tienen en la energía eléctrica, desde su generación hasta su consumo.

1.1 Estado del arte

El **inversor** es un convertidor de potencia que transfiere energía de una fuente de alimentación en corriente directa **DC** a una carga de consumo en corriente alterna **AC** [2, p. 331]. La topología del circuito electrónico de un **inversor** es idéntica a la de un *rectificador de puente completo*, pero en lugar de emplear dispositivos semiconductores no controlados o semi-controlados (un arreglo de diodos o un arreglo de rectificadores controlados de silicio respectivamente) se emplea una clase que si permita controlar el estado de conmutación.

Considérese la topología del circuito electrónico del inversor que se muestra en la **Figura 1.1** y los estados de conmutación en la **Tabla 1.1** más adelante [2, p. 331-332]:

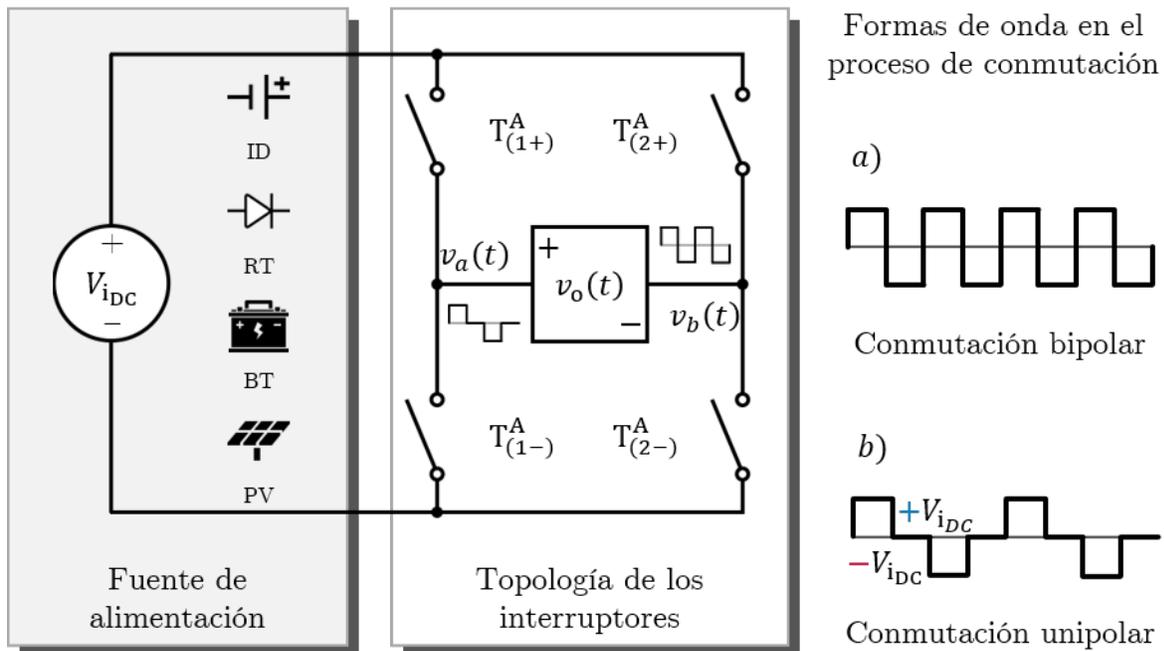


Figura 1.1
Topología del circuito electrónico de un inversor

En el bloque de la izquierda se observan cuatro formas distintas para suministrar energía en corriente directa **DC**. Dependiendo de la fuente de alimentación que se utilice, existen algunas consideraciones particulares que es necesario prever para determinar el modelo matemático y para conocer el comportamiento dinámico del inversor según sea el caso.

Por ejemplo, el convertidor back-to-back se construye interconectando un rectificador en cascada con un inversor [4] de tal forma que la fuente de alimentación del inversor es la salida del rectificador **RT** donde se percibe en terminales una señal de tensión en corriente directa. Para el presente trabajo de tesis cabe mencionar que se emplea una f fuente ideal **ID** que permite integrar la fuente de alimentación y la topología de los interruptores formando una fuente de tensión dependiente (de una señal de control) *equivalente*. En cuanto a las otras dos formas restantes de la **Figura 1.1**; en el sistema de almacenamiento por baterías **BT** (*del inglés*, Battery Energy Storage System o **BESS**) es necesario que el comportamiento del convertidor de potencia sea bidireccional de tal forma que opere como rectificador o inversor según sea la polaridad de la señal de tensión y la dirección de la señal de corriente [9, p. 200], mientras que en el sistema de generación fotovoltaico **PV** es necesario integrar un regulador para el seguimiento del punto máximo de potencia (*del inglés*, Maximum Power Point Tracker o **MPPT**) [9, p. 475-476] ya que la cantidad de energía producida por un panel solar depende de la temperatura del entorno y de la irradiancia solar.

En el bloque de la derecha se observa la topología de los interruptores del inversor. Como se mencionó anteriormente este arreglo es idéntico al que se puede encontrar en un *rectificador de puente completo* pero, controlando apropiadamente la secuencia de conmutación, es posible emplearlo como un *inversor monofásico*.

En la **Figura 1.1** se utiliza una representación del interruptor ideal *unipolar de un tiro* [10] (*del inglés*, Single-Pole Single-Throw o **SPST**), sin embargo, en la realidad se emplean dispositivos semiconductores de estado sólido controlados seleccionados a partir de la potencia de operación y la velocidad de conmutación.

Existen dos clases de dispositivos semiconductores que pueden emplearse en la construcción de un inversor [11]: Los *tiristores* solo cuentan con dos estados, el “apagado” y el “encendido”, este último estado se produce cuando se aplica corriente eléctrica en alguna de sus terminales; Por otro lado, los *transistores* responden cuando se aplica tensión eléctrica en la compuerta (gate) y puede cambiar de un estado a otro de forma suave o permanecer en un punto intermedio como una resistencia interna variable.

En la construcción de un inversor popularmente se emplea como dispositivos semiconductores de estado sólido controlados los **MOSFET** (Metal-Oxide Switching Field Effect Transistor) o los **IGBT** (Insulated Gate Bipolar Transistor), ambos de la familia de transistores [12]. Los **MOSFET** pueden conmutar a una velocidad superior mientras que los **IGBT** son capaces de soportar una tensión eléctrica mayor y conducir una corriente eléctrica de gran magnitud.

Como su nombre lo indica, los dispositivos semiconductores están fabricados a partir de esta clase de materiales, en esencia, silicio (Si) dopado con arsénico (As) o fósforo (P) para el *tipo-N* y silicio (Si) dopado con aluminio (Al) o galio (Ga) para el *tipo-P*, sin embargo, han emergido nuevas tecnologías en la fabricación de materiales más nobles para este tipo de aplicaciones como el *carburo de silicio* (SiC) y el *nitruro de galio* (GaN).

CASO	1.	2.	3.	4.	5.	6.
$v_o(t)$	$+V_{i_{DC}}$	$-V_{i_{DC}}$	0	0	-	-
CLSE	$T_{(1+)}^A$	$T_{(1-)}^A$	$T_{(1+)}^A$	$T_{(2-)}^A$	$T_{(1+)}^A$	$T_{(2-)}^A$
	$T_{(2-)}^A$	$T_{(2+)}^A$	$T_{(2+)}^A$	$T_{(1-)}^A$	$T_{(1-)}^A$	$T_{(2+)}^A$

Tabla 1.1
Estados de conmutación

En la **Tabla 1.1** se describen los diferentes casos para el estado de los interruptores, los dos primeros son los más importantes a considerar:

1. Cuando $T_{(1+)}^A$ y $T_{(2-)}^A$ están cerrados donde $v_o(t) = +V_{i_{DC}}$.
2. Cuando $T_{(1-)}^A$ y $T_{(2+)}^A$ están cerrados donde $v_o(t) = -V_{i_{DC}}$.
3. Cuando $T_{(1+)}^A$ y $T_{(2+)}^A$ están cerrados donde $v_o(t) = 0$.
4. Cuando $T_{(1-)}^A$ y $T_{(2-)}^A$ están cerrados donde $v_o(t) = 0$.

Si se utiliza apropiadamente cada uno de los escenarios que se enumeran anteriormente en combinación con una señal de control para la conmutación interruptores, se genera una señal alternante que se asemeja a la señal que emplea en un esquema de suministro de energía en corriente alterna **AC** como se muestra en los incisos *a)* y en *b)* de la **Figura 1.1**.

En cuánto a los escenarios restantes donde no se especifica algún valor para $v_o(t)$, se consideran no son deseables ya que producen un cortocircuito en cualquiera de las dos ramas.

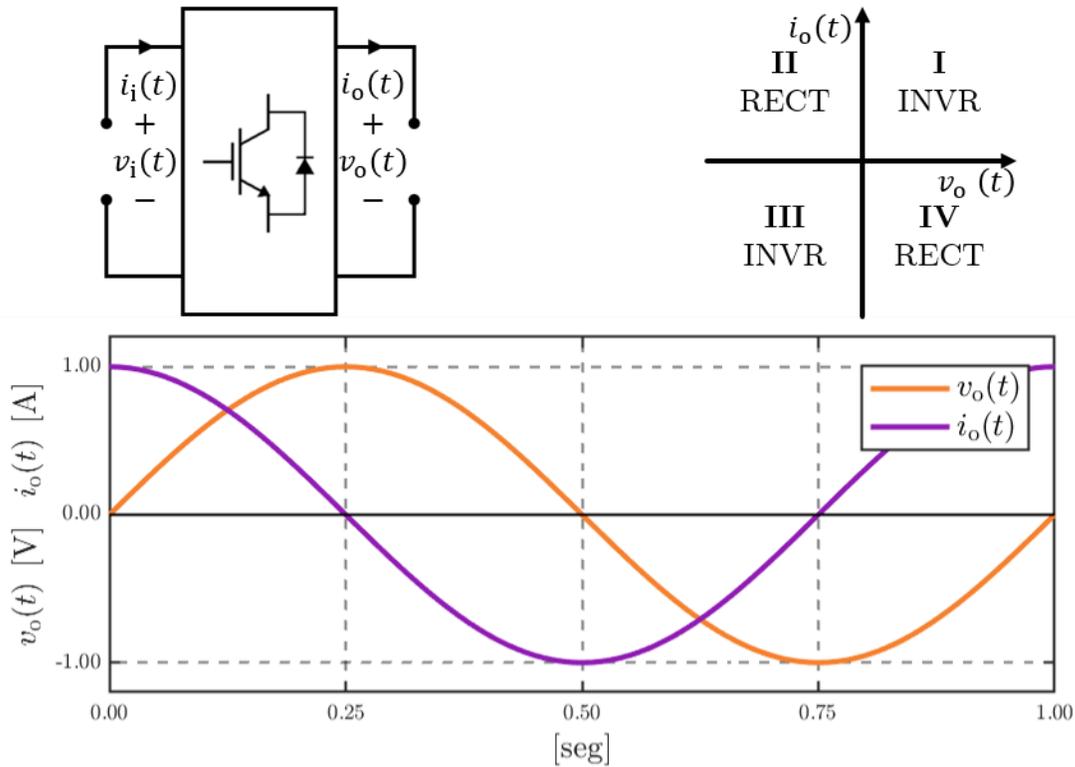


Figura 1.2
El convertidor de potencia bidireccional

Para comprender el funcionamiento de un convertidor de potencia bidireccional es útil retomar el ejemplo de la **Figura 1.1** donde el sistema de almacenamiento por baterías **BT** es utilizado como fuente de alimentación de tal forma que el convertidor de potencia debe de tener la capacidad de operar como inversor a la hora de suministrar energía para alimentar la carga o como rectificador a la hora absorber energía para cargar el banco como se explicó anteriormente. Este comportamiento se puede visualizar en la **Figura 1.2** [9, p. 202] donde es importante tener en consideración la polaridad de la tensión v_o y la dirección de la corriente i_o para obtener cada uno de los escenarios de operación:

- I** De 0.00 a 0.25 [seg] se tiene que $v_o > 0$ y $i_o > 0$ tal que opera como inversor.
- II** De 0.25 a 0.50 [seg] se tiene que $v_o > 0$ y $i_o < 0$ tal que opera como rectificador.

III De 0.50 a 0.75 [seg] se tiene que $v_o < 0$ y $i_o < 0$ tal que opera como inversor.

IV De 0.75 a 1.00 [seg] se tiene que $v_o < 0$ y $i_o > 0$ tal que opera como rectificador.

Aunque se conoce el funcionamiento del convertidor de potencia bidireccional, de ahora en adelante únicamente se tendrá en consideración el escenario tal que opera como inversor (es decir, dentro de los cuadrantes: **I** y **III**). Para lograr la transferencia de energía desde la fuente de alimentación hacia la carga de consumo es necesario coordinar el comportamiento de los interruptores de estado sólido empleando las combinaciones apropiadas que se observan en la **Tabla 1.1**.

En comunicaciones, específicamente en el área orientada al procesamiento de señales, la **modulación** es una técnica que permite producir una variación característica de una *señal moduladora* a través de una *señal portadora* [13]. En la actualidad, esta técnica se encuentra presente en nuestro entorno porque se utiliza para transmitir y recibir información en todo momento a través del espectro electromagnético en un ancho de banda definido que puede seleccionarse mediante un filtro de señal emulando un canal de comunicación [14]. Independientemente de las aplicaciones que tiene para la transmisión y recepción de información, la modulación se utiliza también para generar una señal de control que permita seleccionar el estado de conmutación para los interruptores de estado sólido en un inversor considerando las combinaciones apropiadas de la **Tabla 1.1**.

Existen múltiples técnicas para coordinar los estados de conmutación de un inversor, dos de ellas se mencionan a continuación [9, p. 200-221]:

- La **modulación por ancho de pulsos** o **PWMs** para un *inversor de onda cuadrada* es el esquema de conmutación más simple.

Aunque la forma de onda de $v_o(t)$ no es sinusoidal como es de esperarse en un esquema de suministro de energía en corriente alterna **AC**, es adecuada para ciertas aplicaciones.

Realizando un análisis a frecuencia fundamental o frecuencia nominal f_0 se puede observar que la tensión máxima en $v_o(t)$ está dada por (1.1):

$$(1.1) \quad (\|v_o(t)\|)_{f_0} = \frac{4V_{iDC}}{\pi}$$

- La **modulación por ancho de pulsos sinusoidal** o **SPWM** emplea una *señal de modulación* o *señal de referencia* $m(t)$, generalmente, con una forma de onda sinusoidal, y una

señal portadora $p(t)$ con forma de onda triangular tal que la comparación de ambas señales permite generar una *señal de control* $u(t)$ para establecer el comportamiento de la conmutación de los interruptores con el objetivo de regular la tensión $v_o(t)$ a través de la señal de modulación o señal de referencia $m(t)$.

Existen dos variantes para esta última técnica de modulación y la principal diferencia se puede observar mediante un análisis en el dominio armónico.

El dominio armónico es una herramienta matemática que permite analizar y describir el comportamiento de cualquier señal bajo su naturaleza periódica y recurrente [15].

El espectro armónico [16] es una representación donde se puede observar la descomposición de una señal periódica a través de sus componentes armónicas. Las componentes armónicas de una señal periódica se extraen utilizando la **Serie de Fourier** (en honor a J. Fourier) que permite descomponer una señal compleja en una serie de señales “simples”.

Para determinar la **Serie de Fourier** de una señal modulada (considere un período $T = 2\pi$ para simplificar el argumento de las funciones trigonométricas) se utiliza (1.2):

$$(1.2) \quad F(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

$$(1.2a) \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt$$

$$(1.2b) \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt$$

La **modulación por ancho de pulsos sinusoidal** o **SPWM** es una técnica de modulación que se utiliza ampliamente hoy en día para coordinar los estados de conmutación de un inversor y para el presente trabajo de tesis no es la excepción. Cabe recalcar que existen dos formas de implementar esta técnica de modulación como se mencionó anteriormente:

- La técnica de **conmutación bipolar**.
- La técnica de **conmutación unipolar**.

Antes de describir las formas para implementar la **modulación por ancho de pulsos sinusoidal** o **SPWM** hay considerar lo siguiente: [2, p. 357-361] [9, p. 211-221]:

- La señal moduladora $m(t)$ generalmente tiene una forma de onda sinusoidal definida por (1.3) donde m_a es *índice de modulación en amplitud*; mientras que ω_m es la velocidad angular de la señal moduladora tal que $\omega_m = 2\pi f_m$ o $\omega_m = \frac{2\pi}{T_m}$ donde f_m es la frecuencia y T_m es el período respectivamente, ϕ es la fase (desplazamiento en el tiempo).

$$(1.3) \quad m(t) = m_a \sin(\omega_m t + \phi)$$

- La señal portadora $p(t)$ tiene una forma de onda triangular definida a través de una función periódica por partes que se muestra en (1.4):

$$(1.4) \quad p(t) = \begin{cases} 4f_p(t + \phi) - (1 + 4n) & ; \text{ para } kT_p \leq t < \frac{T_p}{2} + kT_p, \\ -4f_p(t + \phi) + (1 + 4n) & ; \text{ para } \frac{T_p}{2} + kT_p \leq t < (k + 1)T_p \end{cases}$$

El dominio y el rango de la señal portadora $p(t)$ es: $\mathfrak{D} : [0, +\infty)$ y $\mathfrak{R} : [-1, 1]$ respectivamente. La periodicidad de la señal se define a través de k tal que $k \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$.

Se denota f_p y T_p como la frecuencia y el período de la señal portadora respectivamente tal que $f_p = \frac{1}{T_p}$ o $T_p = \frac{1}{f_p}$, ϕ es la fase (desplazamiento en el tiempo).

- m_a denota el *índice de modulación por amplitud* y establece una relación unitaria entre la amplitud de la señal moduladora $m(t)$ y la señal portadora $p(t)$ tal que:

$$(1.5a) \quad m_a = \frac{\|m(t)\|_\infty}{\|p(t)\|_\infty}$$

$$(1.5b) \quad (\|v_o(t)\|_\infty)_{f_m} = m_a V_{\text{IDC}}$$

- m_f denota el *índice de modulación en frecuencia* y establece una relación entre la frecuencia de la señal moduladora $m(t)$ y la señal portadora $p(t)$ tal que:

$$(1.6) \quad m_f = \frac{f_p}{f_m} = \frac{T_m}{T_p}$$

- Los interruptores de estado sólido tienen que ser capaces de conducir corriente eléctrica en ambas direcciones para esta técnica de modulación.

- Cabe señalar que la señal de referencia $m(t)$ no necesariamente tiene una forma de onda sinusoidal.

En la técnica de **modulación bipolar** la señal de control oscila entre $\{-1, 1\}$ donde se utiliza una señal moduladora $m(t)$ con forma de onda sinusoidal y una señal portadora $p(t)$ con forma de onda triangular. La coordinación de los interruptores de estado sólido, considerando la **Figura 1.1**, se describe en (1.7):

$$(1.7a) \quad \begin{aligned} v_o(t) &= +V_{i_{DC}} && ; \text{ para } m(t) > p(t) \\ v_o(t) &= -V_{i_{DC}} && ; \text{ para } m(t) < p(t) \end{aligned}$$

$$(1.7b) \quad \begin{aligned} T_{(1+)}^A \text{ y } T_{(2-)}^A &\text{ están en la posición: CLSE} && ; \text{ para } m(t) > p(t) \\ T_{(1-)}^A \text{ y } T_{(2+)}^A &\text{ están en la posición: CLSE} && ; \text{ para } m(t) < p(t) \end{aligned}$$

En la técnica de **modulación unipolar** la señal de control oscila entre $\{0, 1\}$ donde se utiliza una señal moduladora $m(t)$ con forma de onda sinusoidal y dos señales portadoras $p_1(t)$ y $p_2(t)$ con forma de onda triangular desfasadas $[\pi \text{rad}]$ una de la otra. La coordinación de los interruptores de estado sólido, considerando la **Figura 1.1**, se describe en (1.8):

$$(1.8) \quad \begin{aligned} T_{(1+)}^A &\text{ está en la posición: CLSE} && ; \text{ para } m(t) > p_1(t) \\ T_{(2-)}^A &\text{ está en la posición: CLSE} && ; \text{ para } m(t) > p_2(t) \\ T_{(1-)}^A &\text{ está en la posición: CLSE} && ; \text{ para } m(t) < p_1(t) \\ T_{(2+)}^A &\text{ está en la posición: CLSE} && ; \text{ para } m(t) < p_2(t) \end{aligned}$$

Esta técnica de modulación reduce la cantidad de armónicos y permite diseñar un filtro de acoplamiento bajo una especificación más relajada. La técnica de **modulación unipolar** dentro de la **modulación por ancho de pulsos sinusoidal** o **SPWM** es la que se utilizará a lo largo del presente trabajo de tesis.

Considerando el bloque: “Topología de los interruptores” de la **Figura 1.1**, la tensión en las terminales v_a y v_b oscila entre los valores de $\{0, 1\}$ o propiamente entre $\{0, +V_{i_{DC}}\}$ como se indicó anteriormente. Por lo tanto, la tensión en $v_o(t)$ está dada por la expresión $v_o(t) = v_a(t) - v_b(t)$ como en la **Figura 1.4**.

Utilizando un $m_a = 0.75$ y un $m_f = 21$, en la **Figura 1.3** se observa la implementación de la técnica de **modulación bipolar**.

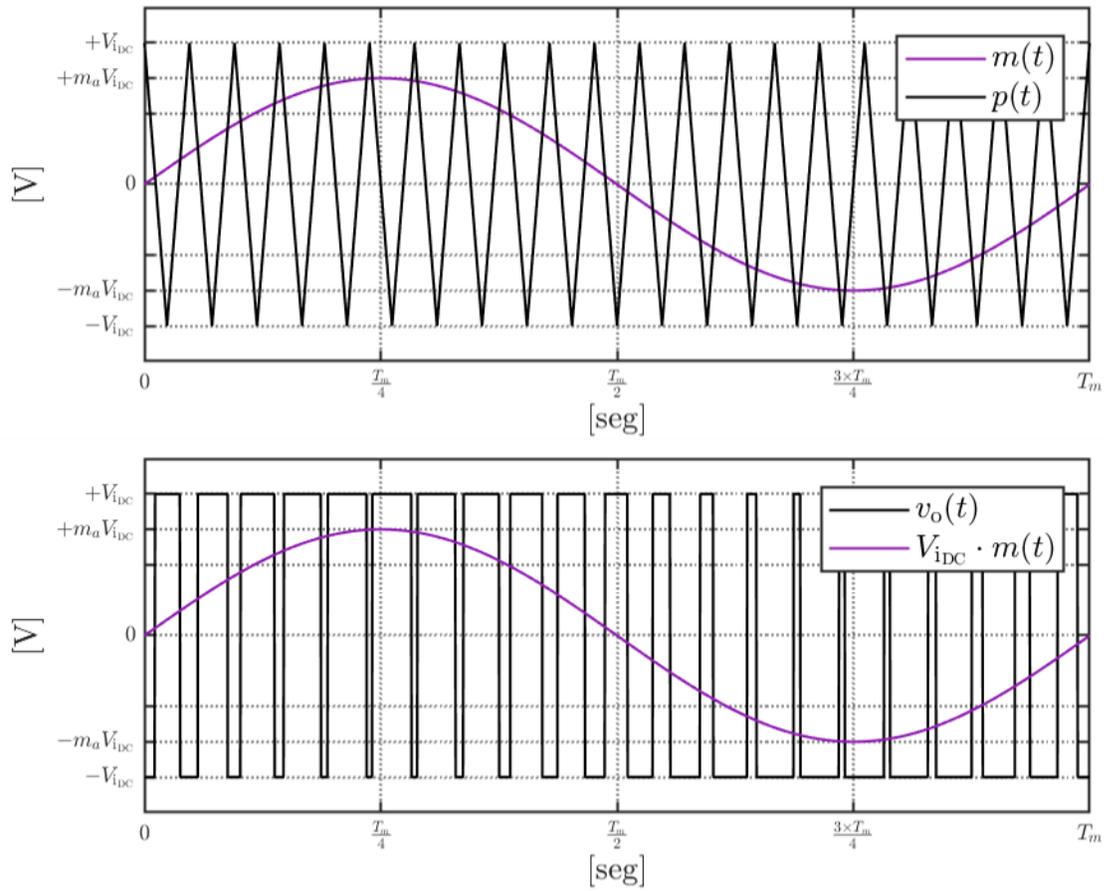


Figura 1.3

La técnica de conmutación bipolar, $m_a = 0.75$ y $m_f = 21$

Con los mismos parámetros, en la **Figura 1.4** se observa la implementación de la técnica de **modulación unipolar**.

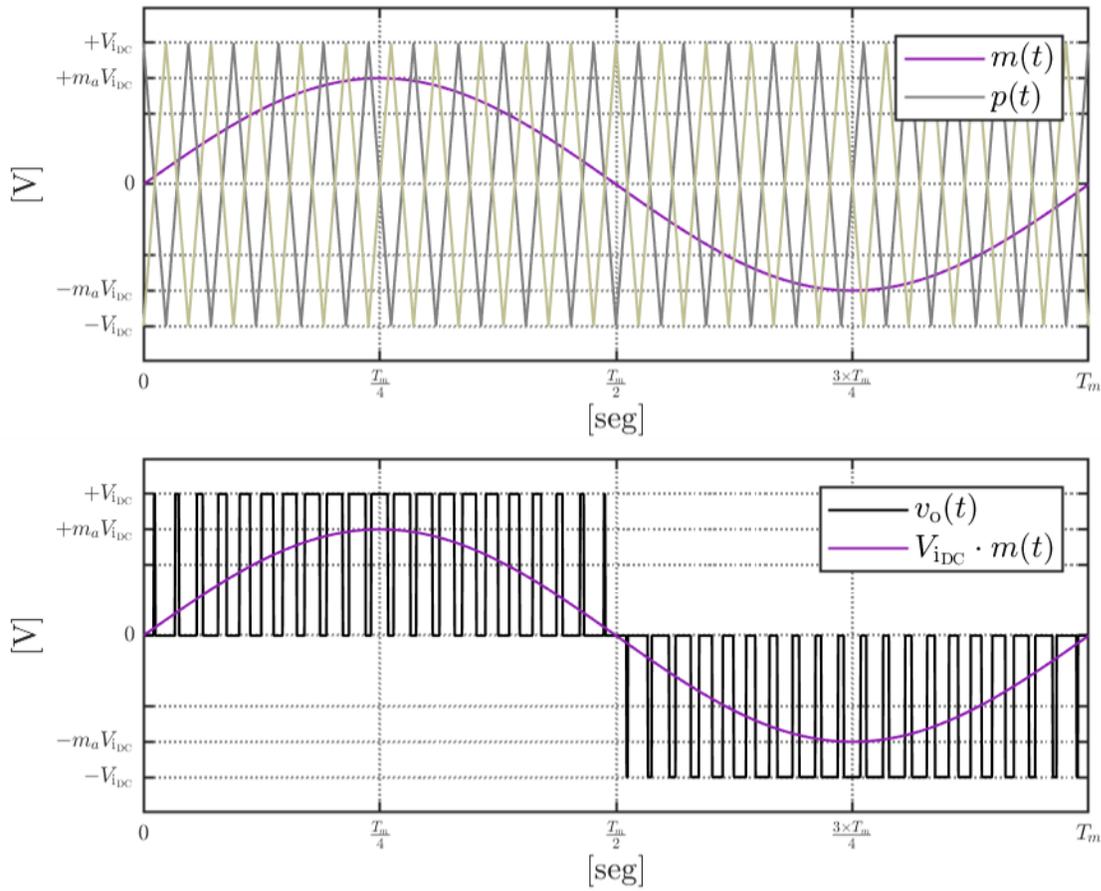


Figura 1.4

La técnica de conmutación unipolar, $m_a = 0.75$ y $m_f = 21$

Considere que la señal portadora $p(t)$ está sincronizada como se muestra en la **Figura 1.3** y en la **Figura 1.4**, además, seleccionando un *índice de modulación en frecuencia* m_f impar para que la señal de control $u(t)$ exhiba una simetría impar. Entonces la **Serie de Fourier** de la señal de control $u(t)$ para la conmutación de los interruptores de cualquiera de las dos formas de modulación puede determinarse analizando cada uno de los pulsos presentes en la señal mediante (1.9):

$$(1.9) \quad v_o(t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_l \sin(n\omega_m t)$$

Para ello, es necesario determinar el *coeficiente de Fourier* V_k de cada pulso usando (1.10a) y después (1.10b) donde i es el número total de pulsos en un período T .

$$(1.10a) \quad V_k = \frac{2}{\pi} \int_0^T v(t) \sin(n\omega_m t) d(\omega_m t)$$

$$(1.10b) \quad V_l = \sum_{k=1}^i V_k$$

En primer lugar se muestra el espectro armónico de la técnica de **modulación bipolar** en la **Figura 1.5**, considere que está normalizado a la frecuencia de la señal moduladora f_m .

En segundo lugar también observa el espectro armónico de la técnica de **modulación unipolar** en la **Figura 1.6** donde desaparecen las componentes de orden impar de $m_f f_m$.

Debido a la presencia de componentes armónicas de alta frecuencia se añade un filtro de acoplamiento en las terminales de salida del inversor. Cabe señalar que se diseña como un filtro *pasa-bajas* o PB de tal manera que las atenúe para conservar únicamente la componente fundamental f_m en la medida de lo posible.

La arquitectura de un inversor se puede abstraer a partir de cuatro bloques con una función diferente cada uno. En la **Figura 1.7** se observa que, además de considerar la fuente de alimentación y la topología de los interruptores, el filtro de acoplamiento y la carga de consumo también forman parte de la arquitectura del inversor.

Dependiendo de la aplicación a la que está sujeto el inversor, en el método de diseño del filtro de acoplamiento se puede integrar la carga de consumo como un solo bloque de tal forma que

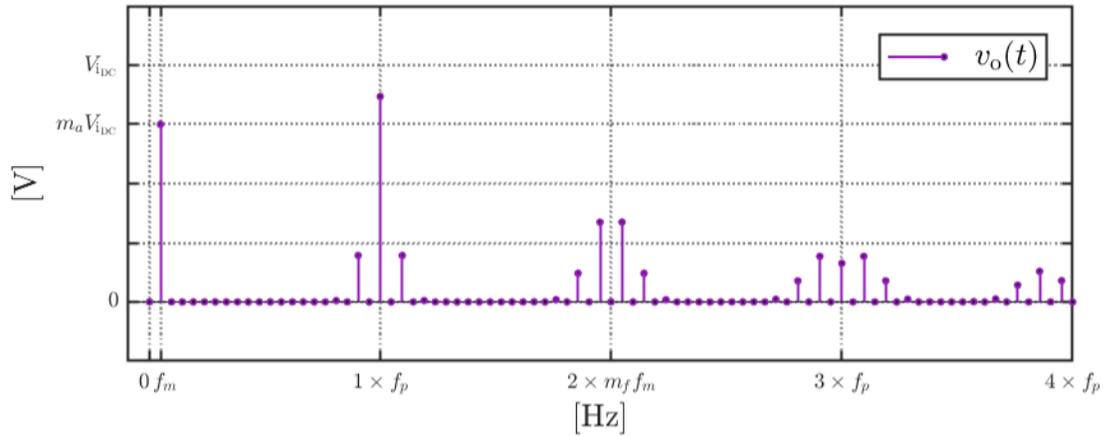


Figura 1.5
Espectro armónico de la técnica de conmutación bipolar

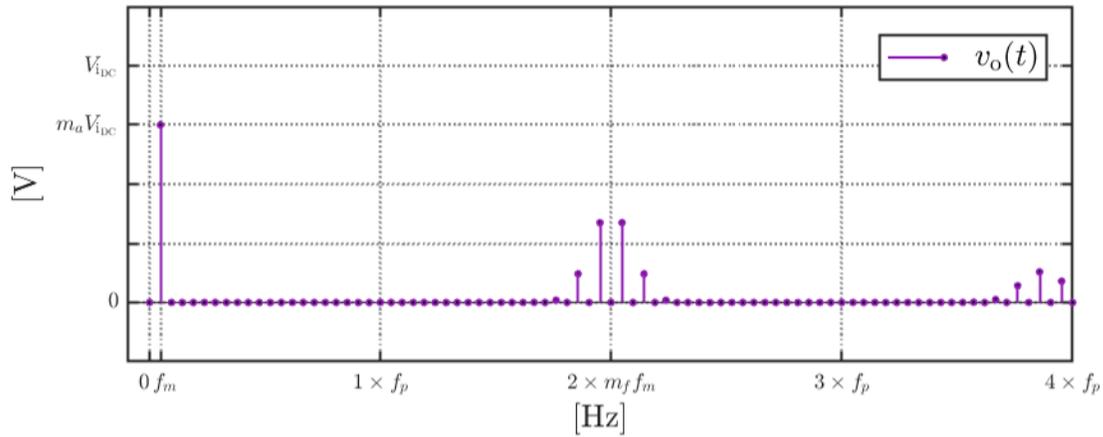


Figura 1.6
Espectro armónico de la técnica de conmutación unipolar

en su respuesta en frecuencia se obtenga la curva característica de un filtro *pasa-bajas* o PB como ocurre para el presente trabajo de tesis.

Como parte de la estrategia para obtener el modelo matemático, es posible integrar la fuente de alimentación y la topología de los interruptores en un solo bloque (únicamente cuando se emplea una fente ideal ID) de tal forma que se obtiene una *fente de tensión controlada equivalente* en como se observa en la **Figura 1.8**.

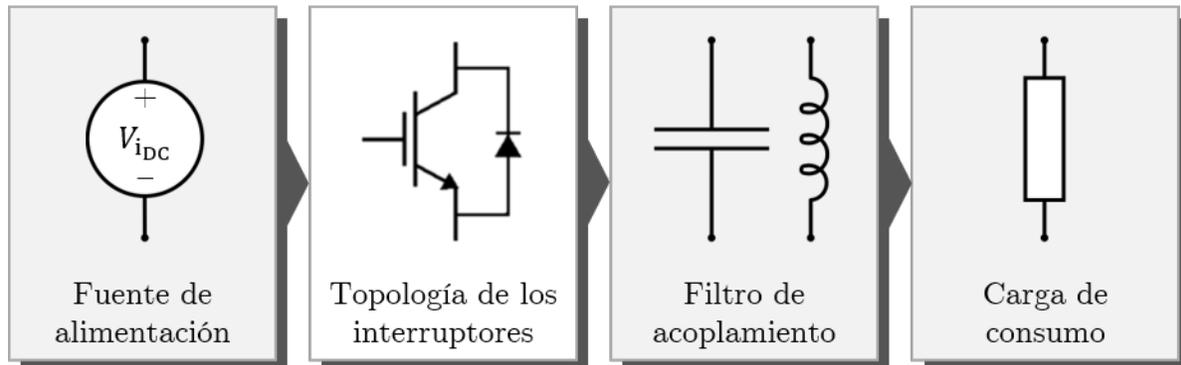


Figura 1.7
Arquitectura de un inversor

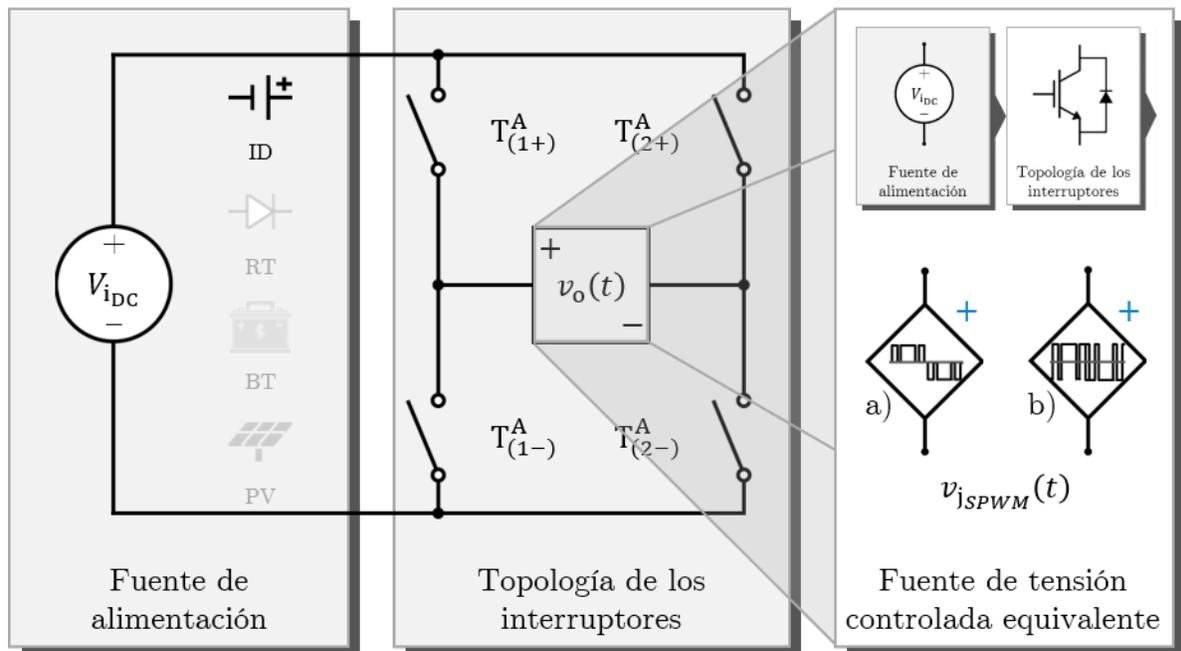


Figura 1.8
Fuente de tensión controlada equivalente

En función de la técnica de modulación que se utilice, el símbolo empleado para la *fuentes de tensión controlada equivalente* obedece lo siguiente:

- (a) La técnica de modulación unipolar.
- (b) La técnica de modulación bipolar.

1.2 Contribución

Recientemente en los sistemas robóticos (*sistemas electromecánicos*), ante la presencia de múltiples agentes en un mismo entorno, se desarrolló un esquema de control de agentes interconectados orientado a la sincronización de los estados entre ellos; adicionalmente y de forma paralela, el controlador es capaz de realizar la tarea de seguimiento de trayectoria y la tarea de estimación de parámetros. El modelado matemático de esta clase de sistemas dinámicos utiliza el principio de variación de las funciones de energía.

Utilizando esta aproximación, se emplea el mismo esquema de control de agentes interconectados para un sistema eléctrico o sistema de potencia, propiamente para los convertidores de potencia instalados en una microrred eléctrica. En él, se garantiza la estabilidad del sistema dinámico y el alcance de los objetivos de control.

De forma general, el objetivo de control establece que la señal de la tensión eléctrica en el **punto de conexión común** o **PCCs** está definida por la trayectoria deseada.

El **controlador** para *un solo agente* que se utiliza en el presente trabajo de tesis está inspirado en el *controlador adaptivo de Slotine*; está sintonizado para realizar dos tareas de control en específico como se muestra a continuación donde se garantiza un comportamiento **estable globalmente** y **asintóticamente**:

1. El seguimiento de una trayectoria deseada $\mathbf{q}^*(t)$ para establecer el comportamiento de los estados.
2. La estimación de parámetros desconocidos $\boldsymbol{\theta}$ para compensar incertidumbres o perturbaciones en el modelo matemático

Dado que el **controlador** para *múltiples agentes* es una extensión del **controlador** para *un solo agente*; también goza de los mismos beneficios. Adicionalmente, el **controlador** para *múltiples agentes* considera la tarea de control asociada a la sincronización del comportamiento de los estados donde se garantiza que:

1. Es **estable globalmente** y **exponencialmente** para el caso *sin adaptabilidad*.
2. Es **estable globalmente** y **asintóticamente** para el caso *con adaptabilidad*.

1.3 Objetivo general

Proponer un esquema de control de agentes interconectados que permita la sincronización del comportamiento de los estados entre los convertidores de potencia que están instalados en una microrred eléctrica para asegurar que la tensión en el **punto de conexión común** o **PCCs** está definida por la trayectoria deseada.

1.4 Objetivos particulares

1. Utilizar el modelado matemático por energía para los convertidores de potencia instalados en una microrred eléctrica.
2. Utilizar la teoría de grafos para establecer la interacción que existe entre los convertidores de potencia.
3. Desarrollar el controlador para un solo agente que sea capaz de completar la tarea de control para el seguimiento de una trayectoria y la tarea de estimación de parámetros.
4. Complementar el controlador para que, además, sea capaz de garantizar la sincronización entre los convertidores de potencia instalados en una microrred eléctrica.
5. Simular y validar el controlador.
6. Considerar diferentes escenarios de operación.

Modelo matemático de los convertidores de potencia

El **modelado matemático** consiste en codificar y decodificar la realidad donde un fenómeno natural es reducido a una expresión numérica con una estructura definida [17].

Existen múltiples compromisos que es necesario considerar a la hora de determinar el **modelo matemático** de un *sistema dinámico* porque pueden presentarse interacciones de la realidad muy complicadas para ser tomadas en cuenta. El primer compromiso es identificar las partes esenciales de un *sistema dinámico* e incluirlo en el modelo matemático mientras que las partes que no cumplen con este calificativo son excluidas. El segundo compromiso está relacionado con la manipulación de la expresión que vale la pena considerar [18].

En el presente trabajo de tesis es necesario validar si los convertidores de potencia instalados en una microrred eléctrica cuentan con las características y propiedades adecuadas para poder implementar el esquema de control propuesto; de la misma forma, determinar la estabilidad en conjunto y simular de forma numérica.

La obtención del **modelo matemático** de un sistema dinámico se basa en la observación de su comportamiento en conjunto y depende de una representación aproximada, pero suficientemente

comprensible, de las características más importantes teniendo en consideración la aplicación a la que está sujeto el sistema dinámico [10, p. 9-10].

2.1 Modelado matemático por energía

La intención de imitar la teoría de control para los *sistemas lineales invariantes en el tiempo* o **LTI**s en una clase general de sistemas dinámicos no es trivial. La extensión de conceptos elementales como *controlabilidad* y *observabilidad* para *sistemas no-lineales* o **NLS**s es difícil debido a que el comportamiento en conjunto es complejo por si mismo.

La síntesis de un controlador para esta última clase de sistemas solo es posible para casos muy particulares y generalmente no existe alguna aplicación donde se pueda emplear. Por otro lado, el desarrollo tecnológico que se ha tenido en los últimos años ha suscitado problemas en ingeniería donde es necesario tener en consideración los efectos *no-lineales*.

Una aproximación para resolver este problema consiste en partir de una clase de sistemas dinámicos donde se conoce ampliamente su solución, por ejemplo para los *sistemas lineales invariantes en el tiempo* o **LTI**s, y extenderla para *sistemas no-lineales* o **NLS**s incorporando de forma progresiva los efectos *no-lineales* que los caracteriza.

En esa dirección, se parte de una clase bien definida de sistemas dinámicos denominados **Sistemas-EL** que poseen una estructura particular y que abarcan un gran número de aplicaciones en la actualidad; por mencionar algunas, principalmente en las ramas de electricidad, electrónica, mecánica y robótica [19, p. vii-viii].

Para el modelado matemático de sistemas eléctricos con parámetros concentrados, por lo general, se utiliza cualquiera de estas dos aproximaciones:

1. La obtención de las ecuaciones de movimiento utilizando las **leyes de Kirchhoff** (*ley de tensiones en malla LVKs* y *ley de corrientes en nodo LCKs*).
2. La aplicación del problema clásico de variaciones para las funciones de energía de un sistema dinámico.

La segunda aproximación permite obtener el modelo matemático con los beneficios que se mencionan a continuación [19, p. 3-5, 15-18]:

- Dado que el modelado matemático se realiza en términos de la energía, es posible considerar sistemas dinámicos de naturaleza mixta; por ejemplo: en un manipulador robótico los actuadores son elementos eléctricos que controlan el movimiento y los eslabones son elementos mecánicos que conforman su estructura y geometría.
- Automáticamente se obtiene la función de almacenamiento y la función de disipación en términos de energía a partir de los **Parámetros-EL** (definido más adelante).
- El modelo matemático está basado en una representación del intercambio de energía, entonces permite la descomposición como la interconexión de sub-sistemas más simples.
- La estructura del modelo matemático se conserva de forma que dos **Sistemas-EL** interconectados forman siempre un **Sistema-EL** (definido más adelante).

2.1.1 Cálculo de variaciones

Una forma de obtener la **Ecuación de Euler-Lagrange**, como se mencionó anteriormente, es mediante el problema clásico de variaciones [20].

El **cálculo de variaciones** es una rama de las matemáticas que lidia con el problema de encontrar la **extrema** de un **funcional** continuo y definido sobre algún *espacio funcional* mediante variaciones infinitesimales [21]. La **extrema** corresponde al *máximo* o al *mínimo* de un **funcional**, el cual mapea un conjunto de funciones a un escalar real [22, p.3-4].

PB 2.1.1. Supóngase que la función $\mathcal{W}(t; \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ es *continuamente diferenciable* dos veces con respecto de todos sus argumentos. De entre todas las funciones $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ que son *continuamente diferenciables* dos veces en el intervalo $[a, b]$ con $\mathbf{z}(a)$ y $\mathbf{z}(b)$ definidos, encuentre la **extrema** del **funcional** $\mathfrak{W}(\mathbf{z})$ [20, p. 3]:

$$(2.1) \quad \mathfrak{W}(\mathbf{z}) := \int_a^b \mathcal{W}(t; \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) dt$$

T- 2.1.2. La función $w = w(t)$ que permite encontrar la **extrema** del **funcional** $\mathfrak{W}(\mathbf{r})$ necesariamente satisface la **Ecuación de Euler-Lagrange** en el intervalo $[a, b]$ [20, p. 3]:

$$(2.2) \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \dot{w}} \right) = 0$$

2.1.2 Coordenadas generalizadas

La configuración de un sistema físico generalmente se describe a través de un conjunto de coordenadas [19, p. 483-486]. Sin embargo, desde un punto de vista dinámico donde existe movimiento, el sistema físico puede describirse a través de un conjunto de partículas que están sujetas a dos fenómenos que definen una serie de **ligaduras**:

1. El entorno en el que se encuentra el sistema físico.
2. La dependencia entre una partícula y otra dentro del conjunto.

Para sistemas *estáticos* el conjunto de **coordenadas** de configuración es suficiente para describirlo, por el contrario, para sistemas *dinámicos* es necesario un conjunto adicional de **coordenadas** que proveen la información relacionada con el movimiento del sistema de partículas dentro del entorno físico como la velocidad (*momento*) y la aceleración (*fuerza*).

Las **ligaduras** pueden reducir la cantidad de coordenadas empleadas para describir el sistema dinámico porque proveen de una relación de dependencia de una partícula con otra o de las partículas con su entorno. Esto motiva a diferenciar entre **ligaduras holónomas** y **ligaduras no holónomas** [19, p. 483-486][20, p. 37-38].

Para un sistema dinámico que tenga únicamente ligaduras holónomas es posible seleccionar un conjunto de coordenadas independientes tal que las ecuaciones asociadas a esas restricciones no sean necesarias. Esto quiere decir que para n coordenadas y m restricciones, un conjunto $(n - m)$ de **coordenadas generalizadas** $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_{(n-m)})^T$ puede obtenerse. Las coordenadas generalizadas constituyen al conjunto de variables $2(n - m)$ que describen el movimiento del sistema dinámico (considerando posición y velocidad).

Entonces, es posible transformar el conjunto de coordenadas de configuración a un conjunto de coordenadas generalizadas como:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= z_1(q_1, \dots, q_n; t) \\
 z_2 &= z_2(q_1, \dots, q_n; t) \\
 &\vdots \\
 z_N &= z_N(q_1, \dots, q_n; t)
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Donde el mínimo de coordenadas generalizadas o el mínimo de variables que describen el movimiento de un sistema dinámico $N = (n - m)$ se conoce como **grados de libertad**.

D- 2.1.3. Sea un sistema de partículas y sus posiciones dadas por $z_i(t)$ con $i = \{1, 2, \dots, N\}$; las **ligaduras holónomas** son las que pueden expresarse como:

$$\mathcal{W}(z_1, \dots, z_N; t) = 0
 \tag{2.4}$$

D- 2.1.4. Sea un sistema de partículas y sus posiciones dadas por $z_i(t)$ con $i = \{1, 2, \dots, N\}$; las **ligaduras no holónomas** son las que no pueden expresarse como (2.4).

2.1.3 Principio de d’Alambert

D- 2.1.5. Un **desplazamiento virtual** δr ocurre cuando un sistema de coordenadas se desplaza una distancia infinitesimal para el mismo instante de tiempo.

D- 2.1.6. El **trabajo virtual** δW parte de la definición original de trabajo $W \equiv \int \mathbf{F} d\mathbf{r}$, pero sobre un desplazamiento virtual tal que $\delta W = \mathbf{F} \delta \mathbf{r}$.

Utilizando los fundamentos de la mecánica clásica, el **principio de d’Alambert** establece que solo es necesario considerar las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas y permite descartar aquellas fuerzas que están asociadas a una ligadura partiendo de los conceptos de **desplazamiento virtual** y **trabajo virtual** [23, p. 13-16].

T- 2.1.7. El **principio de d’Alambert** (en honor a J. d’Alambert) establece que la suma de la diferencia de las derivadas del momento lineal $m_i \dot{\mathbf{v}}_i$ y las fuerzas externas \mathbf{F}_i que actúan en un sistema de partículas proyectadas en un desplazamiento virtual $\delta \mathbf{r}_i$ son cero de forma consistente con las ligaduras presentes [24].

$$(2.5) \quad \sum_i (m_i \dot{\mathbf{v}}_i - \mathbf{F}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0$$

Cabe señalar que para ligaduras holónomas, únicamente es necesario considerar las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas para un conjunto apropiado de coordenadas generalizadas [20, p. 39-40]. De forma general, esto puede interpretarse físicamente como se muestra a continuación:

Sean \mathbf{F}^e las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas y sea \mathbf{F}^l las fuerzas asociadas a una ligadura tal que $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^e + \mathbf{F}_i^l$. Considerando que la única fuerza que puede producir trabajo es aquella que va en dirección del desplazamiento, utilizando los conceptos de **desplazamiento virtual** y **trabajo virtual** en (2.5) se sabe que:

$$0 = \sum_i (m_i \dot{\mathbf{v}}_i - (\mathbf{F}_i^e + \mathbf{F}_i^l)) \delta \mathbf{r}_i$$

Sin embargo, dado que las fuerzas asociadas a una ligadura \mathbf{F}_i^l actúan en dirección perpendicular al desplazamiento virtual $\delta \mathbf{r}_i$, no producen trabajo virtual $\delta W = \mathbf{F}_i^l \delta \mathbf{r} = 0$ para mantener las restricciones del movimiento de partículas. Entonces, las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas son las únicas que producen trabajo de forma que:

$$0 = \sum_i (m_i \dot{\mathbf{v}}_i - \mathbf{F}_i^e) \delta \mathbf{r}_i$$

T- 2.1.8. Asumiendo que las ligaduras son holónomas en un sistema de partículas, el **principio de d’Alambert** establece que dicho sistema de partículas es equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que se observa en (2.6), es decir la **Ecuación de Euler-Lagrange** para $i = \{1, 2, \dots, N\}$ [20, p. 39-42][**Apéndice A.1**].

$$(2.6) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} - \mathcal{Q}_i = 0$$

Donde $\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}'_i + \mathcal{Q}''_i$ representa la **fuerza generalizada** para $i = \{1, 2, \dots, n\}$ debido a la transformación a coordenadas generalizadas.

- \mathcal{Q}'_i *Fuerza conservativa.*
- \mathcal{Q}''_i *Fuerza no conservativa.*

N- 2.1.9. Para sistemas eléctricos, las **leyes de Kirchhoff** (en honor a G. Kirchhoff) describen el sistema dinámico en coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, \dots)^\top$ [19, p. 486].

N- 2.1.10. El espacio *n-dimensional* que es un sub-espacio del espacio *N-dimensional* (*3N-dimensional* para sistemas mecánicos) donde existe la solución a la **Ecuación de Euler-Lagrange** se conoce como **espacio de configuración** y solo puede estar parametrizada mediante las coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^\top$ [20, p. 42].

2.1.4 Principio de Hamilton

D- 2.1.11. El **lagrangiano** $\mathcal{L}(t; \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es una función escalar que se define como la diferencia entre **energía cinética** \mathcal{T} y **energía potencial** \mathcal{V} [20, p. 40].

$$(2.7) \quad \mathcal{L}(t; \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \mathcal{T} - \mathcal{V}$$

D- 2.1.12. Se define como **acción** al funcional $\mathcal{S}(\mathbf{q})$ en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ dado por [20, p. 42-45]:

$$(2.8) \quad \mathcal{S}(\mathbf{q}) := \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t; \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt$$

T- 2.1.13. El **principio de Hamilton** (en honor a W. Hamilton) establece que la evolución de $\mathbf{q}(t)$ de un sistema dinámico descrito por coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^\top$ entre dos estados $\mathbf{q}(t_1)$ y $\mathbf{q}(t_2)$ es un **punto estacionario** donde la variación de la **acción** $\mathcal{S}(\mathbf{q})$ es cero como se observa a continuación [25][26]:

$$(2.9) \quad \frac{\delta \mathcal{S}(\mathbf{q})}{\delta \mathbf{q}} = 0$$

T- 2.1.14. La trayectoria correcta del movimiento de un sistema dinámico con ligaduras holónomas y fuerzas conservativas en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es la solución de un **punto estacionario** de la **acción** $\mathcal{S}(\mathbf{q})$ mediante el cálculo de variaciones. En efecto, la trayectoria correcta del movimiento de $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ con $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^\top$ que va de $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}(t_1)$ a $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}(t_2)$ es una condición necesaria y suficiente para satisfacer la **Ecuación de Euler-Lagrange** [20, p. 42-45][**Apéndice A.2**]:

$$(2.10) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = 0$$

2.1.5 Sistemas Euler-Lagrange

N- 2.1.15. Un **Sistema Euler-Lagrange** (*de ahora en adelante Sistema-EL*) se construye a partir de un conjunto de ecuaciones que derivan de la **Ecuación de Euler-Lagrange** utilizando un marco de referencia en coordenadas generalizadas $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$ como se muestra a continuación [27-36]:

$$(2.11) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = 0 ; \text{ cuando solo existen } \textit{fuerzas conservativas}$$

$$(2.12) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \mathcal{Q}'' ; \text{ cuando existen } \textit{fuerzas no conservativas}$$

N- 2.1.16. Completando la ecuación (2.7) de la **D- 2.1.11** que se observa anteriormente, el **lagrangiano** $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por:

$$(2.13) \quad \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{V}(\mathbf{q})$$

D- 2.1.17. La variable \mathcal{Q}'' representa la intervención de *fuerzas no conservativas* en el **Sistema-EL** como: fuerzas externas \mathcal{F} , fuerzas disipativas $\mathcal{G}(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ (asociado a la *co-función de disipación de Rayleigh* como se describirá más adelante), la acción de control $\boldsymbol{\tau}$ y las perturbaciones $\boldsymbol{\mu}$ [19, p. 18][20, p. 42].

$$(2.14) \quad \mathcal{Q}'' := \mathcal{F} - \mathcal{G}(\dot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\mu}$$

N- 2.1.18. Sustituyendo (2.13) y (2.14) en (2.11) y (2.12); y posteriormente, simplificar cada expresión considerando únicamente los términos que aparecen en el modelo matemático de los convertidores de potencia que se obtienen para el presente trabajo de tesis (eliminando la acción de control $\boldsymbol{\tau}$ y las perturbaciones $\boldsymbol{\mu}$), se tiene:

$$(2.15) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = 0 ; \text{ para la ecuación (2.11)}$$

$$(2.16) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} ; \text{ para la ecuación (2.12)}$$

T- 2.1.19. La **energía cinética** denotada por $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ en la expresión anterior se define en la ecuación (2.17) donde $\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ es la *matriz de inercia/masa generalizada* y tiene las propiedades de ser una matriz *diagonal* por lo tanto *simétrica*, *positiva definida* (ver **D- 3.1.7**) y *acotada* de ser *positiva definida* [19, p. 17][20, p. 42].

$$(2.17a) \quad \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^\top \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

$$(2.17b) \quad \mathcal{T}(q_i, \dot{q}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N M_i(q_i) |\dot{q}_i|^2$$

AS 2.1.20. La **energía potencial** está denotada por $\mathcal{V}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ y se asume que está *acotada inferiormente* tal que $\exists c \in \mathbb{R}$ donde $\mathcal{V}(\mathbf{q}) > c \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$.

T- 2.1.21. Por otro lado, la *co-función de disipación de Rayleigh* (en honor a L. Rayleigh) $\mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ considera los efectos de las *fuerzas no conservativas* que generan pérdidas de energía proporcionales a la primera derivada de las coordenadas generalizadas $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^N$ (velocidad generalizada) como la fuerza de fricción que es proporcional al rozamiento $\underline{\mathbf{B}}$ (en un *sistema mecánico*) o la corriente a través de un resistor proporcional a la resistencia $\underline{\mathbf{R}}$ (en un *sistema eléctrico*) como se observa en la ecuación (2.18) para el último caso [37, 38]:

$$(2.18a) \quad \mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^\top \underline{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{q}}$$

$$(2.18b) \quad \mathcal{D}(\dot{q}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N R_i |\dot{q}_i|^2$$

D- 2.1.22. Por último, el término $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^N$ contiene las **fuerzas externas** proyectadas en el marco de las coordenadas generalizadas donde $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_N)^\top$.

2.1.6 Parámetros Euler-Lagrange

D- 2.1.23. Un **Sistema-EL** queda definido por sus **Parámetros-EL** (**Parámetros Euler-Lagrange**) como [19, p. 18]:

$$(2.19) \quad \Sigma'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \{\mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \mathcal{V}(\mathbf{q})\} ; \text{ para la ecuación (2.15)}$$

$$(2.20) \quad \Sigma''(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \{\mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \mathcal{V}(\mathbf{q}), \mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}}), \mathcal{F}\} ; \text{ para la ecuación (2.16)}$$

AS 2.1.24. En cuanto a la **generalidad** del modelo matemático, es importante recalcar que la *co-función de disipación de Rayleigh* siempre es una función cuadrática tal que $[\mathbf{B}]$ y $[\mathbf{R}]$ son constantes para *sistemas mecánicos* y *sistemas eléctricos* respectivamente. También es necesario considerar que la acción de control $\boldsymbol{\tau}$ y las perturbaciones $\boldsymbol{\mu}$ ingresan al modelo matemático de forma aditiva, sin embargo esto no siempre ocurre para todos los sistemas dinámicos.

2.1.7 Propiedades adicionales

Después de haber analizado los fundamentos detrás del modelado matemático por energía de un sistema dinámico, para la implementación del esquema de control propuesto es necesario además tener en consideración algunas *propiedades adicionales* que son particulares de un **Sistema-EL**.

Los siguientes enunciados son esenciales ya que permiten verificar si el modelo matemático es válido para la implementación del esquema de control en lazo cerrado con el sistema dinámico; por ello, se reemplaza el término \mathcal{F} que está asociado a las fuerzas generalizadas por el término $\boldsymbol{\tau}$ que está asociado a la acción de control.

PP 2.1.25. El **Sistema-EL** de la **N- 2.1.18** mediante una manipulación apropiada puede tener una representación alternativa como se muestra en (2.21) donde $\underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ se conoce como la *matriz de fuerzas centrífugas/de coriolis* y $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$ es una fuerza o par (generalizado) que aparece debido a la presencia de campos de potencia [39, 40].

$$(2.21) \quad \boldsymbol{\tau} = \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{q})$$

PP 2.1.26. El **Sistema-EL** de la forma (2.21) puede ser parametrizado linealmente mediante una *matriz de regresión* de funciones conocidas $\underline{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ y un vector que contiene los *parámetros desconocidos* $\boldsymbol{\theta}$ tal que $\underline{\Phi} \in \mathbb{R}^{N \times R}$ y $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^R$ para la implementación de una *ley de estimación* en el esquema de control como se verá más adelante [19, p. 29][39-42].

$$(2.22) \quad \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) = \underline{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\theta}$$

D- 2.1.27. Un **Sistema-EL** es *completamente actuado* si $\text{rank}(\mathbf{q}) = \text{rank}(\boldsymbol{\tau})$, es decir, que tiene el mismo número de estados que de entradas de control.

PP 2.1.28. En el **Sistema-EL** de la forma (2.21) es necesario que la matriz de fuerzas centrífugas/de coriolis $\underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ esté definida de tal forma que se cumpla cualquiera de las dos ecuaciones (2.23) y (2.24) (son ecuaciones equivalentes); esta propiedad es fundamental para demostrar la estabilidad del **controlador** para un solo *agente* [39-42].

$$(2.23) \quad \underline{\dot{\mathbf{M}}}(\mathbf{q}) = \underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \underline{\mathbf{C}}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

$$(2.24) \quad \underline{\Psi} = \underline{\dot{\mathbf{M}}} - 2\underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \text{ forma una } \textit{matriz antisimétrica} \text{ tal que } \underline{\Psi} = -\underline{\Psi}^T$$

Se puede encontrar una demostración formal de la **PP 2.1.28** en [43][44]. Sin embargo y en términos generales, físicamente se puede interpretar que el cambio de energía cinética en el sistema dinámico debe de ser igual a la energía potencial que proveen los actuadores y a la energía almacenada en los campos de potencia [41]:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{q}}^T [\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{q}} \right) = \dot{\mathbf{q}}^T \left[\boldsymbol{\tau} - \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) \right]$$

Esto implica que la relación (2.25) se cumple en todo momento para (2.26) como se observa a continuación:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left[\underline{\dot{\mathbf{M}}}(\mathbf{q}) - 2\underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} \equiv 0$$

2.1.8 Parámetros para los convertidores de potencia

Los **Parámetros-EL** de un inversor están directamente asociados a los elementos pasivos que conforman el filtro de acoplamiento. Para determinar los **Parámetros-EL** es necesario utilizar la información presentada anteriormente y que puede localizarse a partir de la lista de identificadores que se muestra a continuación:

- T- 2.1.15.
- AS 2.1.16.
- T- 2.1.17.
- D- 2.1.18.

Las expresiones que determinan el modelo matemático por energía del inversor se observan en la **Tabla 2.1**:

$$(2.25) \quad \mathcal{T}(q_i, \dot{q}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1} L_i |\dot{q}_{L_i}|^2$$

$$(2.26) \quad \mathcal{V}(q_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1} \frac{q_{C_i}}{C_i}$$

$$(2.27) \quad \mathcal{D}(\dot{q}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1} R_i |\dot{q}_{R_i}|^2$$

$$(2.28) \quad \mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n)^\top$$

Tabla 2.1
Parámetros-EL de un inversor

2.2 Clases de inversores

Los **inversores** se clasifican de acuerdo a la función que cumplen dentro de un sistema de potencia. La clase del inversor está determinada por los parámetros que regulan (es decir, cómo visualiza el sistema de potencia al inversor en el *bus* de corriente alterna **AC**) y se asocia al filtro de acoplamiento que integre el inversor dentro de su arquitectura como se observó en la **Figura 1.7**. De ahora en adelante se considera que la fuente de alimentación y la topología de los interruptores se agrupan en un solo bloque como en la **Figura 1.8**.

Para el presente trabajo de tesis se obtiene el modelo matemático y se analiza la implementación del **controlador** para tres clases de inversores [5, p. 13-16]:

El **inversor formador de red** integra un filtro de acoplamiento del tipo *filtro-LC* y tiene la función de establecer las condiciones de operación del sistema de potencia en términos de tensión V y fase ϕ . Es necesario al menos un inversor de esta clase para que una microrred eléctrica pueda operar de forma aislada del sistema de potencia.

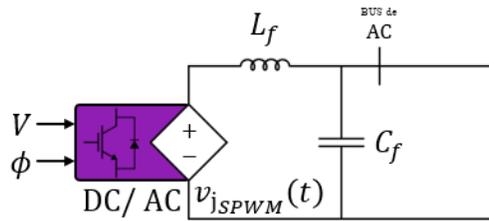


Figura 2.1

Inversor formador de red

El **inversor alimentador** integra un filtro de acoplamiento del tipo *filtro-L* y tiene la función de inyectar potencia aparente (P y Q) al sistema de eléctrico. Cabe mencionar que una microrred eléctrica no puede operar de forma aislada del sistema de potencia si está constituida únicamente por convertidores de potencia de esta clase.

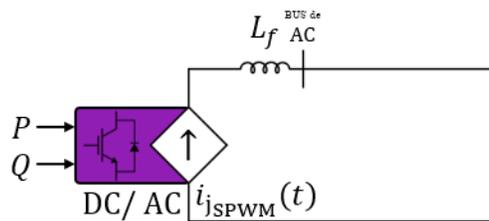


Figura 2.2

Inversor alimentador

El **inversor de soporte** debe de integrar un filtro de acoplamiento de segundo orden al menos, aunque puede ser uno de orden superior. Es el de mayor grado de complejidad porque es capaz de cubrir cualquiera de los dos roles que se describieron anteriormente. Utiliza un esquema de control más complejo para establecer las condiciones de operación del sistema de potencia (V y ϕ) como en el **inversor formador de red** o para inyectar potencia aparente (P y Q) como en el **inversor alimentador** según se necesite.

Para representarlo, se utiliza un filtro de acoplamiento del tipo *filtro-LC* (de 2do. Orden), sin embargo, más adelante se considera uno de orden superior.

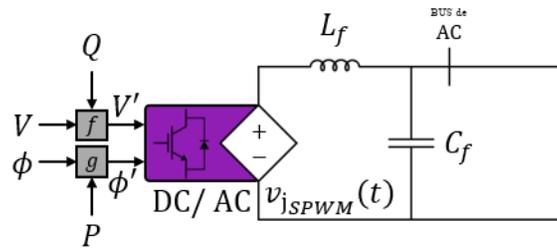


Figura 2.3

Inversor de soporte para definir las condiciones de operación (V y ϕ)

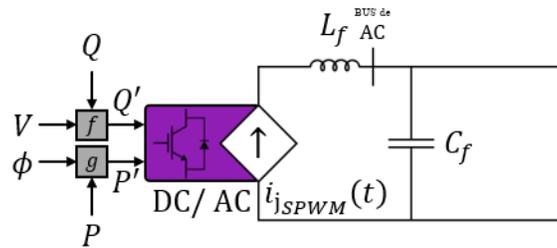


Figura 2.4

Inversor de soporte para inyectar potencia aparente (P y Q)

2.3 Diseño y sintonización del filtro de acoplamiento

Un **filtro de acoplamiento** se diseña para manipular el espectro en frecuencia de una señal [45, p. 1-1]. Se utilizan comúnmente para amplificar o atenuar un ancho de banda; así como para aislar un sector del espectro en frecuencia formando un canal para el intercambio de información a través de una señal.

Para la sintonización de un filtro de acoplamiento es necesario evaluar la respuesta en frecuencia ante una señal de excitación que produce un barrido armónico.

Una herramienta muy útil para diseñar un filtro de acoplamiento mediante la respuesta en frecuencia es el **diagrama de Bode** [46][47, p. 25] (en honor a H.W. Bode) donde se utilizan dos gráficas que permite visualizar el comportamiento del filtro de acoplamiento en términos de magnitud $|H(\hat{j}\omega)|$ y fase $\angle H(\hat{j}\omega)$.

De igual forma, existen métodos de aproximación que permiten sintonizar un filtro de acoplamiento con características bien definidas.

2.3.1 Caracterización

Un filtro lineal con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ puede caracterizarse por la ecuación diferencial de la forma que se muestra en (2.29) donde los coeficientes a_{n-i} y b_{m-j} con $i = \{1, 2, \dots, n\}$ y $j = \{1, 2, \dots, m\}$ tal que $n \geq m$ están asociados a los elementos que almacenan energía en el sistema dinámico [45, p. 1-3]:

$$(2.29) \quad \sum_{i=0}^n a_{n-i} \frac{d^{(n-i)}y(t)}{dt^{(n-i)}} = \sum_{j=0}^m b_{m-j} \frac{d^{(m-j)}x(t)}{dt^{(m-j)}}$$

2.3.2 Transformada directa e inversa de Laplace

Una herramienta matemática esencial para diseñar un filtro lineal es la **transformada directa de Laplace** y la **transformada inversa de Laplace** (en honor a P.S. Laplace) porque permite transformar una ecuación diferencial en una ecuación algebraica y viceversa para una manipulación mas sencilla de la expresión original [45, p. 1-3 a 1-4].

Estas operaciones mapean una ecuación diferencial en el dominio del tiempo t a una ecuación algebraica en el dominio de la frecuencia compleja $s = \sigma \pm \hat{j}\omega$ y viceversa; para la transformada directa de Laplace se utiliza la expresión (2.30a) tal que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y para la transformada inversa de Laplace se utiliza la expresión (2.30b) tal que $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

$$(2.30a) \quad X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$(2.30b) \quad x(t) = \frac{1}{2\pi\hat{j}} \int_{\sigma-\hat{j}\infty}^{\sigma+\hat{j}\infty} X(s) e^{st} ds ; \text{ donde } \sigma \text{ es una constante positiva}$$

Por simplicidad, de ahora en adelante considere que $\sigma = 0$ para que la relación entre el **dominio de Laplace** y el **dominio de la frecuencia** se reduzca a $s = \hat{j}\omega$.

2.3.3 Función de transferencia

Aplicando la transformada directa de Laplace a la ecuación diferencial (2.29) se obtiene una expresión algebraica como (2.31).

$$(2.31) \quad \sum_{i=0}^n (a_{n-i} s^{n-i}) Y(s) = \sum_{j=0}^m (b_{m-j} s^{m-j}) X(s)$$

Entonces, la igualdad (2.31) puede expresarse como la razón de dos polinomios $Y(s)$ y $X(s)$ donde se observa la relación entre la señal de salida y la señal de entrada del filtro lineal. A esta relación se le conoce como **función de transferencia** y es la representación estructurada del filtro lineal tal como (2.32) [45, p. 1-5][46]:

$$(2.32) \quad H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{Y(s)}{X(s)} = K \frac{\sum_{j=0}^m (b_{m-j} s^{m-j})}{\sum_{i=0}^n (a_{n-i} s^{n-i})}$$

2.3.4 Polos y ceros

Realizando una factorización del polinomio $X(s)$ (el del *denominador*) y del polinomio $Y(s)$ (el del *numerador*) se obtiene [45, p. 1-11 a p. 1-14]:

$$(2.33) \quad \frac{Y(s)}{X(s)} = K \left[\left(\frac{\prod_{j=1}^{m-2p} \overbrace{(s + \check{z}_{\mathbb{R}_j})}^{(b)}}}{\prod_{i=1}^{n-2q} \underbrace{(s + \check{p}_{\mathbb{R}_i})}_{(a)}} \right) \left(\frac{\prod_{j=m-2p}^m \overbrace{(s + \check{z}_{\mathbb{C}_j})(s + \check{z}_{\mathbb{C}_j}^*)}^{(d)}}}{\prod_{i=n-2q}^n \underbrace{(s + \check{p}_{\mathbb{C}_i})(s + \check{p}_{\mathbb{C}_i}^*)}_{(c)}} \right) \right]$$

Recibe el nombre de *polo* cada uno de los factores que permiten obtener el polinomio $X(s)$ (el del *denominador*), mientras que recibe el nombre de *cero* cada uno de los factores que permiten

obtener el polinomio $Y(s)$ (el del *numerador*); además, se clasifican de acuerdo al conjunto numérico que pertenecen, es decir:

- (a) $(s + \check{p}_{\mathbb{R}_i})$ es un *polo real* tal que $\check{p}_{\mathbb{R}_i} \in \mathbb{R}$.
- (b) $(s + \check{z}_{\mathbb{R}_j})$ es un *cero real* tal que $\check{z}_{\mathbb{R}_j} \in \mathbb{R}$.
- (c) $(s + \check{p}_{\mathbb{C}_i})(s + \check{p}_{\mathbb{C}_i}^*)$ es un *polo complejo* donde $\check{p}_{\mathbb{C}_i} \in \mathbb{C}$ y $\check{p}_{\mathbb{C}_i}^* \in \mathbb{C}$ es el *conjugado*.
- (d) $(s + \check{z}_{\mathbb{C}_j})(s + \check{z}_{\mathbb{C}_j}^*)$ es un *cero complejo* donde $\check{z}_{\mathbb{C}_j} \in \mathbb{C}$ y $\check{z}_{\mathbb{C}_j}^* \in \mathbb{C}$ es el *conjugado*.

El número de factores del polinomio $X(s)$ (el del *denominador*) está denotado por n , mientras que el número de factores del polinomio $Y(s)$ (el del *numerador*) está denotado por m .

Si bien un *polo* o un *cero real* aporta únicamente con un solo factor, un *polo* o *cero complejo* para filtros reales contribuye siempre con un par de factores.

Para el diseño de un filtro pasivo, es necesario que la función de transferencia tenga algunas características particulares de tal forma que el comportamiento de la respuesta en frecuencia sea el que se espera. Para diseño del filtro de acoplamiento del presente trabajo de tesis, la función de transferencia que lo describe debe ser:

- La función de transferencia es *estable*, es decir la señal de salida del filtro lineal está acotada para una señal de entrada acotada, donde $\check{p}_{\mathbb{R}_i} \wedge \Re\{\check{p}_{\mathbb{C}_i}\} > 0 \forall i := \{1, 2, \dots, n\}$.
- La función de transferencia es de *fase mínima* para no producir una alteración en el comportamiento de la fase del filtro lineal, tal que $\check{z}_{\mathbb{R}_j} \wedge \Re\{\check{z}_{\mathbb{C}_j}\} > 0 \forall j := \{1, 2, \dots, m\}$.
- La función de transferencia es *estrictamente propia* de forma que $n > m$ como se indicó en la **Sección 2.3.1**.
- La función de transferencia es *causal* donde la señal de salida depende únicamente de la señal de entrada, una consecuencia del enunciado anterior.

La representación de la función de transferencia como se muestra en (2.33) es de gran utilidad porque aísla los factores que conforman a los polinomios del numerador y denominador. Esta representación permite predecir con mayor facilidad la respuesta en frecuencia del filtro lineal utilizando un diagrama de Bode.

El **mapa de polos y ceros** es otra herramienta que permite visualizar la ubicación de los *polos y ceros* en el *plano complejo* \mathbb{C} . Es posible determinar la respuesta en frecuencia a través de una metodología diferente, sin embargo, se omite este análisis porque es suficiente con el diagrama de Bode para el propósito del presente trabajo de tesis.

2.3.5 Diagrama de Bode

La ganancia K de la ecuación (2.33) es una constante y traslada verticalmente el eje de referencia horizontal de la gráfica en términos de la amplitud $|H(\hat{j}\omega)|$ a través de:

$$(2.34) \quad K = 20 \log_{10} (H(0))$$

La gráfica en términos de la amplitud $|H(\hat{j}\omega)|$ ilustra la atenuación o la amplificación de una señal armónica en función de la velocidad angular ω . En el eje de las ordenadas se utiliza la escala [B] (*bel*) como una relación entre la potencia de salida y la potencia de entrada $\frac{P_o}{P_i}$. Considerando que en 1 [B] hay 10 [dB] (*decibels*) la relación está dada por [46]:

$$(2.35) \quad |H(\hat{j}\omega)| = 10 \log_{10} \left(\frac{P_o}{P_i} \right) [\text{dB}]$$

Sin embargo, usualmente se manipulan señales de tensión o de corriente que se relacionan con la potencia elevando al cuadrado cualquiera de estas dos cantidades tal que:

$$(2.36a) \quad |H(\hat{j}\omega)| = 10 \log_{10} \left(\frac{V_o^2}{V_i^2} \right) [\text{dB}] = 10 \log_{10} \left(\frac{V_o}{V_i} \right)^2 [\text{dB}] = 20 \log_{10} \left(\frac{V_o}{V_i} \right) [\text{dB}]$$

$$(2.36b) \quad |H(\hat{j}\omega)| = 10 \log_{10} \left(\frac{I_o^2}{I_i^2} \right) [\text{dB}] = 10 \log_{10} \left(\frac{I_o}{I_i} \right)^2 [\text{dB}] = 20 \log_{10} \left(\frac{I_o}{I_i} \right) [\text{dB}]$$

La gráfica en términos de fase $\angle H(\hat{j}\omega)$ ilustra el cambio de fase de una señal armónica en función de la velocidad angular ω . En el eje de las ordenadas se utiliza una escala que permita medir ángulos, por ejemplo, la escala sexagesimal en [$^\circ$], pero también puede utilizarse la escala circular en [πrad] [46].

En el eje de las abscisas de ambas gráficas se utiliza una escala logarítmica de la velocidad angular ω en $[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$. Esta escala avanza por **década** [déc] donde 1 [déc] es un cambio en la velocidad angular ω por un factor de 10. Ejemplificando: Sea $\omega_0 = 1 [\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$; entonces -1 [déc] quedaría expresado como $\omega_0^{-1} = 1 \times 10^{-1} [\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$ y -2 [déc] sería $\omega_0^{-2} = 1 \times 10^{-2} [\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$, mientras que $+1$ [déc] quedaría expresado como $\omega_0^{+1} = 1 \times 10^1 [\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$ y $+2$ [déc] sería $\omega_0^{+2} = 1 \times 10^2 [\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$ [46].

2.3.6 Respuesta en frecuencia

Un **filtro lineal** produce *atenuación* o una *amplificación* del ancho de banda deseado dentro del espectro en frecuencia. Se denomina ω_1 a la velocidad angular de corte donde comienza el efecto del filtro lineal tal que $\omega_1 = 2\pi f_1$ donde f_1 es la frecuencia de corte. Existen dos tipos de filtros lineales de esta clase:

- Un filtro lineal que *amplifica* el ancho de banda antes de ω_1 y *atenúa* el ancho de banda después de ω_1 ; denominado *pasa-bajas* o PB para $H^{\text{PB}}(s)$.
- Un filtro lineal que *atenúa* el ancho de banda antes de ω_1 y *amplifica* el ancho de banda después de ω_1 ; denominado *pasa-altas* o PA para $H^{\text{PA}}(s)$.

Para comprender mejor el efecto de un **filtro lineal** en la respuesta en frecuencia de una señal es de gran utilidad analizar individualmente los factores que constituyen a su función de transferencia, es decir, los *polos* ($s - p_j$) y *ceros* ($s - z_i$); este efecto puede clasificarse en dos categorías que se asocian al orden del filtro lineal [46].

- Respuesta en frecuencia de *1er. orden* (1°) para $H_{(1^\circ)}(s)$.
- Respuesta en frecuencia de *2do. orden* (2°) para $H_{(2^\circ)}(s)$.

Utilizando una combinación de la respuesta en frecuencia que produce un filtro lineal en términos de su tipo o del orden, se puede obtener el comportamiento deseado.

Para generalizar, $r \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ denota que un factor en la función de transferencia se repite tal que crece el orden del polinomio en una multiplicidad de r donde la forma de la respuesta en frecuencia no cambia pero si su valor (es decir, un *polo* $(s - p_j)^r$ o un *ceros* $(s - z_i)^r$ se repiten r -veces en la función de transferencia $H(s)$).

En la **Figura 2.5** se observa la respuesta en frecuencia de dos filtros simples $H_{(1^\circ)}^{\text{PB}}(s)$ (*pasa-bajas PB, 1er. orden (1°)*) y $H_{(1^\circ)}^{\text{PA}}(s)$ (*pasa-altas PA, 1er. orden (1°)*).

$$(2.37) \quad H_{(1^\circ)}^{\text{PB}}(s) = \frac{K}{(s + \check{p}_{\mathbb{R}})^r} = \frac{K}{(s + \omega_1)^r}$$

$$(2.38) \quad H_{(1^\circ)}^{\text{PA}}(s) = K(z + \check{z}_{\mathbb{R}})^r = K(s + \omega_1)^r$$

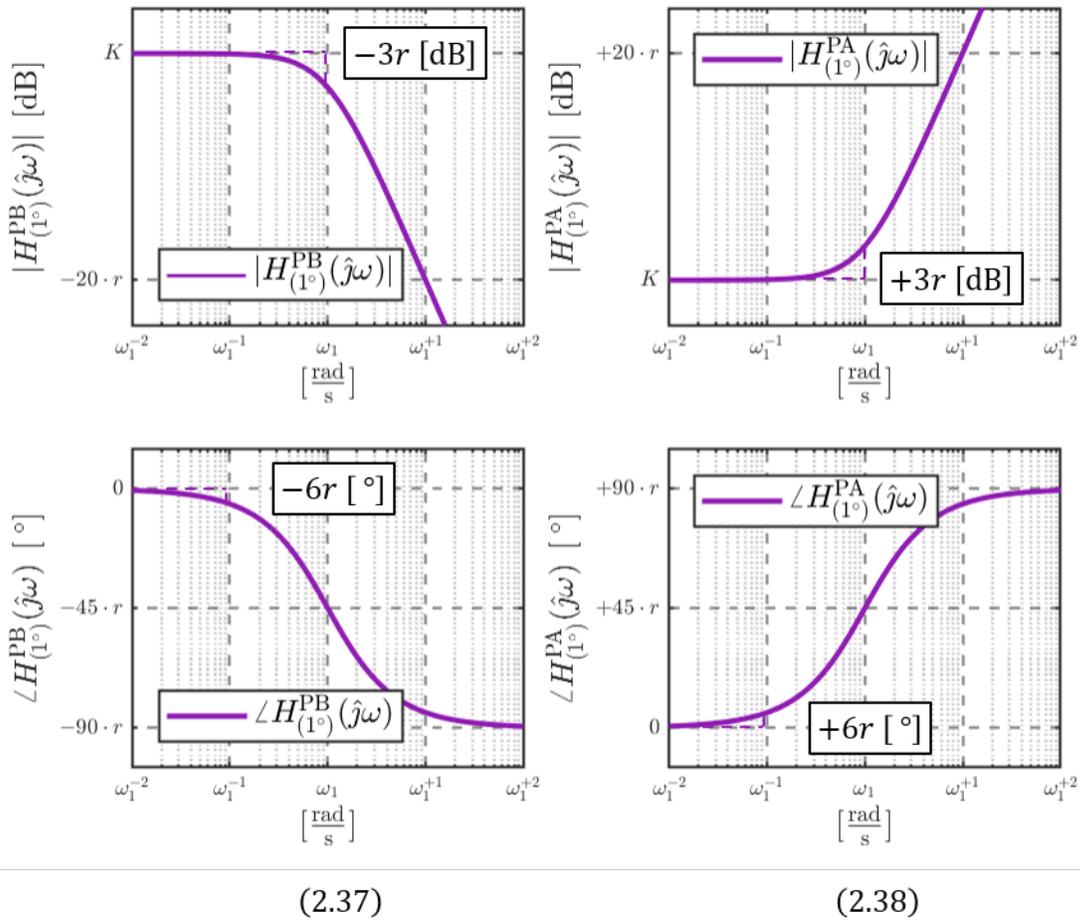
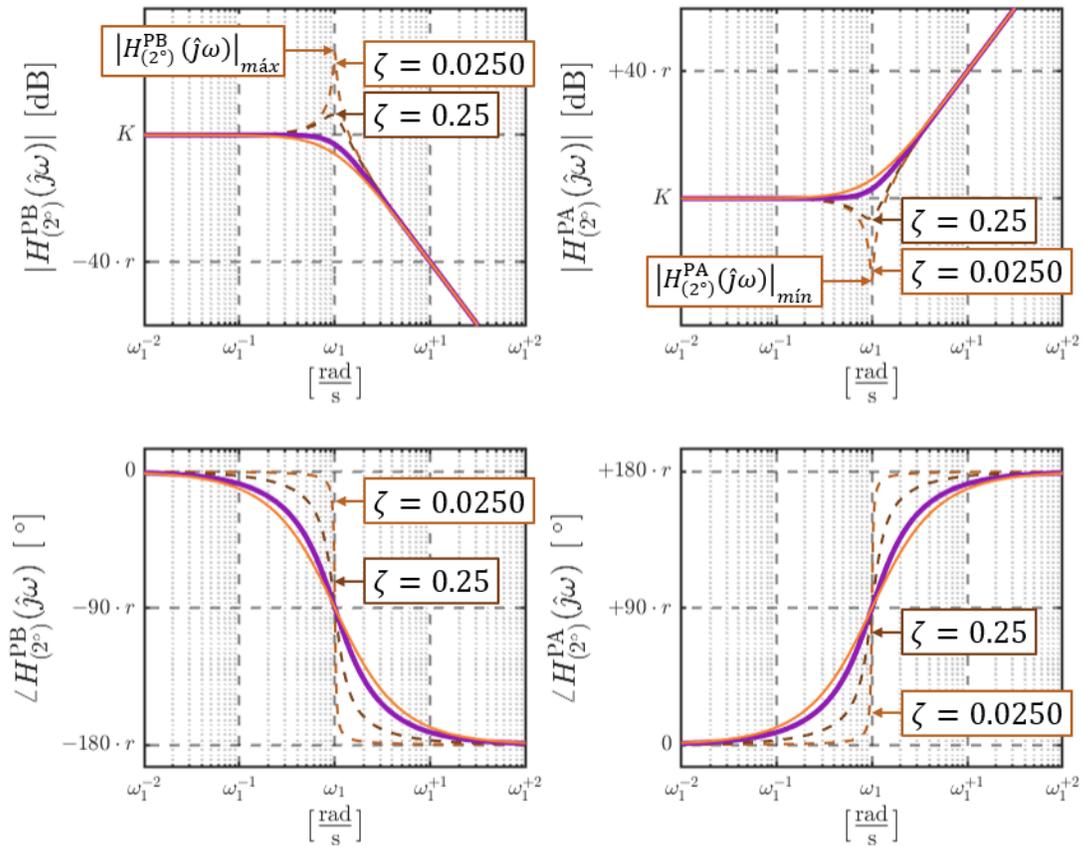


Figura 2.5
 Respuesta en frecuencia: $H_{(1^\circ)}^{\text{PB}}(s)$ y $H_{(1^\circ)}^{\text{PA}}(s)$

En la **Figura 2.6** se observa la respuesta en frecuencia de dos filtros simples $H_{(2^\circ)}^{\text{PB}}(s)$ (*pasa-bajas PB, 2do. orden (2°)*) y $H_{(2^\circ)}^{\text{PA}}(s)$ (*pasa-altas PA, 2do. orden (2°)*).

$$(2.39) \quad H_{(2^\circ)}^{\text{PB}}(s) = \frac{K}{((s + \check{p}_C)(s + \check{p}_C^*))^r} = \frac{K\omega_1^{2r}}{(s^2 + 2\zeta\omega_1 s + \omega_1^2)^r}; \text{ para } 0 < \zeta < 1$$

$$(2.40) \quad H_{(2^\circ)}^{\text{PA}}(s) = K((s + \check{z}_C)(s + \check{z}_C^*))^r = K\omega_1^{2r}(s^2 + 2\zeta\omega_1 s + \omega_1^2)^r; \text{ para } 0 < \zeta < 1$$



(2.39)

(2.40)



Figura 2.6

Respuesta en frecuencia: $H_{(2^\circ)}^{\text{PB}}(s)$ y $H_{(2^\circ)}^{\text{PA}}(s)$

En la **Tabla 2.2** se muestra una comparación de las características más importantes de la respuesta en frecuencia para los filtros simples que se mostraron anteriormente. En cuanto a la notación utilizada tenga en consideración su significado de acuerdo a lo que se muestra a continuación:

- $\Delta|H(\hat{j}\omega)|/1$ [déb] El cambio ideal de la atenuación o de la amplificación en función de la velocidad angular ω por 1 [déb].
- $|H(\hat{j}\omega_1)|$ Corrección de la atenuación o de la amplificación exactamente en la velocidad angular de corte ω_1 .
- $\Delta\angle H(\hat{j}\omega)/2$ [déb] El cambio ideal de la fase en función de la velocidad angular desde ω_1^{-1} hasta ω_1^{+1} , es decir, por 2 [déb].
- $\angle H(\hat{j}\omega_1^{-1})$ y $\angle H(\hat{j}\omega_1^{+1})$ Corrección del cambio de la fase en cuando la velocidad angular de corte es $\omega = \omega_1^{-1}$ y $\omega = \omega_1^{+1}$.

#	$\frac{\Delta H(s) }{1}$ [déb] [dB]	$ H(j\omega_1) $ [dB]	$\frac{\Delta\angle H(s)}{2}$ [déb] [°]	$\{\angle H(j\omega_1^{-1}), \angle H(j\omega_1^{+1})\}$ [°]
$H_{(1^\circ)}^{PB}(s)$	$-20r$	$-3r$	$-90r$	$\{-6r, +6r\}$
$H_{(1^\circ)}^{PB}(s)$	$+20r$	$+3r$	$+90r$	$\{+6r, -6r\}$
$H_{(2^\circ)}^{PA}(s)$	$-40r$	Tabla 2.3	$-180r$	—
$H_{(2^\circ)}^{PA}(s)$	$+40r$	Tabla 2.4	$+180r$	—

Tabla 2.2

Tabla comparativa de los filtros simples

Es necesario complementar la **Tabla 2.2** dado la respuesta en frecuencia para un filtro simple como $H_{(2^\circ)}^{PB}(s)$ y $H_{(2^\circ)}^{PA}(s)$ depende del factor de amortiguamiento ζ y requiere un análisis más a detalle para para $r = 1$ como se observa en la **Tabla 2.3** y la **Tabla 2.4** respectivamente; en cuanto a la notación utilizada ahora considere lo siguiente:

- $\frac{\omega_{m\acute{a}x/m\acute{i}n}}{\omega_1}$ Relación entre la velocidad angular $\omega_{m\acute{a}x/m\acute{i}n}$ y la la velocidad angular de corte ω_1 .
- $|H_{(2^\circ)}(\hat{j}\omega_1)|$ Corrección de la atenuación o de la amplificación exactamente en la velocidad angular de corte ω_1 para $\sigma \pm \hat{j}\omega$ con $\sigma = 0$.
- $\omega_{m\acute{a}x/m\acute{i}n}$ Ubicación en el eje de las abscisas donde se presenta la mayor amplificación o la mayor atenuación según sea el caso.
- $|H_{(2^\circ)}(\hat{j}\omega_{m\acute{a}x/m\acute{i}n})|$ Corrección de la atenuación o de la amplificación exactamente en la velocidad angular de corte $\omega_{m\acute{a}x/m\acute{i}n}$ según sea el caso.

ζ	$\frac{\omega_{m\acute{a}x}}{\omega_1}$	$ H_{(2^\circ)}^{PB}(\hat{j}\omega_1) $ [dB]	$\omega_{m\acute{a}x} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$	$ H_{(2^\circ)}^{PB}(\hat{j}\omega_{m\acute{a}x}) $ [dB]
0.0250	1 <i>aprox.</i>	+26 <i>aprox.</i>	1 <i>aprox.</i>	+26 <i>aprox.</i>
0.25	0.9340 <i>aprox.</i>	+7 <i>aprox.</i>	0.9340 <i>aprox.</i>	+7.64 <i>aprox.</i>
0.7071	0	-3	0	± 0
1	-	-6	-	-

Tabla 2.3

Corrección de la gráfica en magnitud para $H_{(2^\circ)}^{PB}(s)$

ζ	$\frac{\omega_{m\acute{i}n}}{\omega_1}$	$ H_{(2^\circ)}^{PA}(\hat{j}\omega_1) $ [dB]	$\omega_{m\acute{i}n} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$	$ H_{(2^\circ)}^{PA}(\hat{j}\omega_{m\acute{i}n}) $ [dB]
0.0250	1 <i>aprox.</i>	-26 <i>aprox.</i>	1 <i>aprox.</i>	-26 <i>aprox.</i>
0.25	0.9340 <i>aprox.</i>	-7 <i>aprox.</i>	0.9340 <i>aprox.</i>	-7.64 <i>aprox.</i>
0.7071	0	+3	0	± 0
1	-	+6	-	-

Tabla 2.4

Corrección de la gráfica en magnitud para $H_{(2^\circ)}^{PA}(s)$

De la **Tabla 2.3** y de la **Tabla 2.4** se observa que si se utiliza un factor de amortiguamiento de $\zeta = 0.7071$ se presenta una respuesta en frecuencia máximamente plana para el ancho de banda antes de ω_1 . Este comportamiento de la curva es similar a un filtro simple $H_{(1^\circ)}^{\text{PB}}(s)$ o $H_{(1^\circ)}^{\text{PA}}(s)$ con $r = 2$ pero utilizando *polos* o *ceros* complejos tal que $p_j, z_i \in \mathbb{C}$.

Las ecuaciones (2.33), (2.34), (2.37) y (2.39) son de utilidad para introducir el método de aproximación que se desea utilizar para diseñar un filtro de acoplamiento.

2.3.7 Aproximación de Butterworth

Es posible sintonizar un filtro de acoplamiento en términos de la **magnitud** combinando en cascada la respuesta en frecuencia de los filtros simples $H_{(1^\circ)}^{\text{PB}}(s)$, $H_{(1^\circ)}^{\text{PA}}(s)$, $H_{(2^\circ)}^{\text{PB}}(s)$ y $H_{(2^\circ)}^{\text{PA}}(s)$; sin embargo, existen métodos de aproximación que permiten obtener la función de transferencia de un filtro lineal utilizando un proceso bien definido.

La **aproximación de Butterworth** (en honor a S. Butterworth) es un método estructurado para sintonizar un filtro de acoplamiento. El beneficio de utilizar un método de aproximación se observa en la obtención de una función de transferencia con características bien definidas y particularidades consistentes para el proceso de diseño.

La idea es en formar una barrera de división entre el ancho de banda que se desea *amplificar* y el ancho de banda que se desea *atenuar* con una transición de un sector a otro lo más pequeño posible [45, p. 2-8]. En principio, se utiliza la *función de transferencia normalizada* $\check{H}_{(n^\circ)}^{\text{PB}}(s)$ de un filtro lineal del tipo *pasa-bajas* PB y de *orden definido* (n°).

Entre más grande sea el *orden definido* (n°) del filtro lineal, más pronunciada será la barrera de división en la respuesta en frecuencia. Por otro lado, es posible obtener un efecto distinto en la respuesta en frecuencia (no solo del tipo *pasa-bajas* o del tipo *pasa-altas*, si no también *band-pass* o *band-reject*).

La aproximación de Butterworth sintoniza la curva de la respuesta en frecuencia en términos de la **magnitud** a partir de una *función de transferencia* $\check{H}_{(n^\circ)}^{\text{PB}}(s)$ [48]:

$$(2.41) \quad |\check{H}_{(n^\circ)}^{\text{PB}}(\hat{j}\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}}$$

$$(2.42) \quad |\check{H}_{(n^\circ)}^{\text{PB}}(\hat{j}\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} ; \text{ donde } |\check{H}_{(n^\circ)}^{\text{PB}}(\hat{j}\omega)|^2 = \check{H}_{(n^\circ)}^{\text{PB}}(\hat{j}\omega)\check{H}_{(n^\circ)}^{\text{PB}}(-\hat{j}\omega)$$

Recordando que $s = \hat{j}\omega$ y aislando ω para sustituirlo en la ecuación (2.42) se obtiene $\omega = \frac{s}{\hat{j}}$ donde:

$$\check{H}_{(n^\circ)}^{\text{PB}}(s)\check{H}_{(n^\circ)}^{\text{PB}}(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\hat{j}}\right)^{2n}}$$

Los *polos* de $\check{H}_{(n^\circ)}^{\text{PB}}(s)\check{H}_{(n^\circ)}^{\text{PB}}(-s)$ son aquellos que hacen que la función de transferencia tienda a infinito tal que $\check{H}_{(n^\circ)}^{\text{PB}}(s)\check{H}_{(n^\circ)}^{\text{PB}}(-s) \rightarrow \infty$ donde $1 + \left(\frac{s}{\hat{j}}\right)^{2n} = 0$, es decir:

$$s^{2n} = -(\hat{j})^{2n}$$

De la **fórmula de Euler** (en honor L. Euler) se sabe que $-1 = e^{j\pi(2i-1)}$ y $\hat{j} = e^{\frac{j\pi}{2}}$ donde $i \subset \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ por lo tanto la ecuación anterior se convierte en:

$$s^{2n} = e^{j\pi(2i-1+n)}$$

Aislando s de la expresión anterior, se obtiene una ecuación que permite encontrar los *polos* de la *función de transferencia normalizada* $\check{H}_{(n^\circ)}^{\text{PB}}(s)\check{H}_{(n^\circ)}^{\text{PB}}(-s)$:

$$s_i = e^{\frac{j\pi}{2n}(2i-1+n)} ; \text{ para } i := \{1, 2, \dots, 2n\}$$

Los *polos* se localizan alrededor del *círculo unitario* en del *plano complejo* \mathbb{C} equidistantes uno de otro.

Para que la función de transferencia del filtro lineal sea *estable*, se descartan los *polos* $s_i \in \check{H}_{(n^\circ)}^{\text{PB}}(-s)$ tal que $\Re\{s_i\} > 0$ y se conserva únicamente aquellos *polos* que $s_i \in \check{H}_{(n^\circ)}^{\text{PB}}(s)$ tal que $\Re\{s_i\} < 0$ reduciendo a la mitad la cantidad de *polos* de forma que ahora $i := \{1, 2, \dots, n\}$ está asociado al *orden definido* (n°).

Entonces la aproximación de Butterworth parte de una *función de transferencia normalizada* $\check{H}_{(n^\circ)}^{\text{PB}}(s)$ como se muestra en (2.43) y (2.44):

$$(2.43) \quad \check{H}_{(n^\circ)}^{\text{PB}}(s) = \frac{1}{(s - s_1), (s - s_2) \cdots (s - s_i) \cdots (s - s_n)} ; \text{ donde } s_i \in \mathbb{C}$$

$$(2.44) \quad \check{H}_{(n^\circ)}^{\text{PB}}(s) = \frac{1}{\check{B}_{(n^\circ)}(s)} ; \text{ donde } s \in \mathbb{C}$$

Para la aproximación de Butterworth, se le conoce a $\check{B}_{(n^\circ)}(s')$ como *el polinomio característico normalizado de orden definido* (n°) y puede determinarse utilizando el procedimiento que se ilustra anteriormente en color gris o utilizando la **Tabla 2.5** como se realiza para el diseño del filtro de acoplamiento del inversor en el presente trabajo de tesis.

(n°)	$\check{B}_{(n^\circ)}(s')$
(1°)	$(s' + 1)$
(2°)	$(s'^2 + 1.4142 s' + 1)$; de (2.43) se sabe que $2\zeta = 1.4142$ con $\zeta = 0.7071$
(3°)	$(s' + 1) (s'^2 + s + 1)$
(4°)	$(s'^2 + 0.7654 s' + 1) (s'^2 + 1.8478 s' + 1)$

Tabla 2.5
Algunos ejemplos de $\check{B}_{(n^\circ)}(s')$

El método de aproximación para encontrar la función de transferencia que describe el filtro de acoplamiento consiste en:

1. Determinar la función de transferencia del filtro de acoplamiento donde el *orden definido* (n°) está dado por la cantidad de elemento pasivos que almacenan energía.
2. Ya que se conoce el *orden definido* (n°), se selecciona de la **Tabla 2.5** *el polinomio característico normalizado* $\check{B}_{(n^\circ)}(s')$ apropiado.
3. Para *desnormalizar* $\check{B}_{(n^\circ)}(s')$ se reemplaza s' por $\frac{s}{\omega_1}$ donde ω_1 es la velocidad angular de corte donde comienza el efecto de atenuación o amplificación.
4. Se asocia *el polinomio característico desnormalizado* a la función de transferencia original del filtro de acoplamiento para determinar sus parámetros.

2.3.8 Procedimiento de diseño y sintonización

Se considera el diseño de un filtro de acoplamiento para cada clase de inversor, respetando lo que se muestra en la **Figura 2.1** y en la **Figura 2.2** para el **inversor formador de red**

e **inversor alimentador** respectivamente. Sin embargo, para el **inversor de soporte** se considera en su lugar un filtro de acoplamiento del tipo *filtro-LCL* de *3er. orden* (3°).

La metodología de sintonización del filtro de acoplamiento requiere definir con antelación la velocidad angular de corte ω_1 y la carga de consumo R_L .

La selección de la velocidad angular de corte ω_1 se realiza en función de la frecuencia de corte f_1 . Se utilizaron dos estrategias para escoger f_1 donde $\omega_1 = 2\pi f_1$:

- a) La frecuencia de corte f_1 se define como 1 [déc] por *encima* de la frecuencia de la señal moduladora f_m tal que $f_1 = f_m \times 10^{+1}$.
- b) La frecuencia de corte f_1 se define como 1 [déc] por *debajo* de la frecuencia de la señal portadora f_p tal que $f_1 = f_p \times 10^{-1}$, donde $f_p = m_f f_m$.

La frecuencia nominal de la red f_0 en México es de 60 [Hz], por lo tanto, la frecuencia de la señal moduladora f_m conserva este valor de forma que $f_m = f_0$. En [9, p. 207-208] se menciona que un índice de modulación en frecuencia $m_f = 21$ es el umbral entre un valor pequeño y un valor grande; utilizando este valor, la frecuencia de la señal portadora f_p está dada por $f_p = m_f f_m$ donde $f_p = 1260$ [Hz]. Por lo tanto, el 1er. armónico para la **modulación unipolar** aparece en la frecuencia 2520 [Hz]. Este último valor se considera que está muy cercano a $f_0 = f_m$, por lo que es necesario seleccionar un m_f de valor más grande para que f_p aumente de forma proporcional.

Entonces, de ahora en adelante y para el presente trabajo de tesis, se considera que $m_f = 101$ de forma que $f_p = 6060$ [Hz]. Ahora el 1er. armónico para la misma técnica de modulación aparece hasta la frecuencia 12120 [Hz]. Por lo tanto, la velocidad angular de la señal moduladora es $\omega_m = 376.99$ [$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$] y la velocidad angular de la señal portadora es $\omega_p = 38076.10$ [$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$]. Para efectos de sintonización del filtro de acoplamiento se utiliza la opción *a*), por lo tanto $f_1 = 600$ [Hz] y $\omega_1 = 3769.91$ [$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$].

Por otro lado, la carga de consumo R_L determina el rango de operación del inversor. Para efectos de diseño puede definirse de dos formas.

- a) Se selecciona la carga de consumo en términos de la potencia real P_o y la potencia reactiva Q_o que debe de suministrar el inversor.
- b) Se selecciona directamente el valor de la impedancia que representa la carga de consumo conectada al inversor.

La tensión nominal de la red V_{sAC} en México es de $127 [V_{RMS}]$, por lo que la tensión máxima está dada por $\|V_{sAC}\|_{\infty} = \sqrt{2}V_{sAC}$, es decir $180 [V_p]$. Si se utiliza una **fente ideal ID** como fuente de alimentación V_{iDC} que suministra $220 [V]$, entonces se calcula el índice de modulación en amplitud mediante $m_a = \frac{\|V_{sAC}\|_{\infty}}{V_{iDC}}$ tal que $m_a = 0.8181$.

Para definir la carga de consumo se establece que el inversor debe de suministrar una potencia real P_o dada por $5 [kW]$. Entonces, la carga de consumo que absorbe dicha potencia está dada por la **ley de potencia** mediante la expresión $R_L = \frac{V_{sAC}^2}{P_o}$. Por lo tanto la carga de consumo R_L es de $3.2258 [\Omega]$.

$f_0 = 60 [Hz]$	$\omega_0 = 376.99 \left[\frac{rad}{s}\right]$	$m_a = \frac{\ V_{sAC}\ _{\infty}}{V_{iDC}} = 0.8181$	$V_{sAC} = 127 [V_{RMS}]$
$f_1 = 600 [Hz]$	$\omega_1 = 3769.91 \left[\frac{rad}{s}\right]$	$m_f = 101$	$\ V_{sAC}\ _{\infty} = 180 [V_p]$
$f_m = f_0$	$\omega_m = \omega_0$		$P_o = 5 [kW]$
$f_p = m_f f_m$	$\omega_p = m_f \omega_m$	$V_{iDC} = 220 [V]$	$R_L = \frac{V_{sAC}^2}{P_o} = 3.2258 [\Omega]$

Tabla 2.6

Parámetros para el diseño del filtro de acoplamiento

Los parámetros que se utilizan para el diseño del filtro de acoplamiento se resumen en la **Tabla 2.6** que se muestra arriba.

Cabe señalar que algunos de estos parámetros también serán utilizados para la validación de los modelos matemáticos en la **Sección 2.4**.

2.3.8.1 Filtro-LC

Se presenta el diseño del filtro de acoplamiento del tipo *filtro-LC* para un **inversor formador de red**; se caracteriza por ser *pasa-bajas* (PB) y de *2do. Orden* (2°).

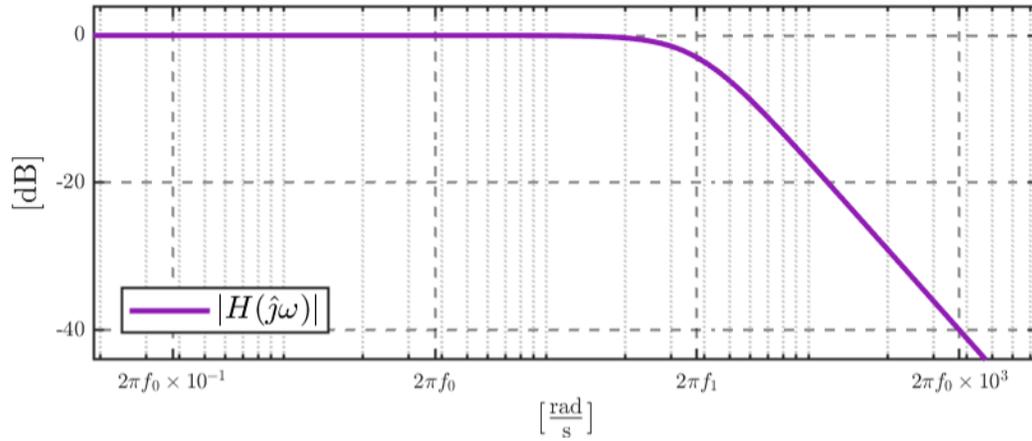


Figura 2.7

Respuesta en frecuencia en magnitud de un *filtro-LC*

1. Determinar la función de transferencia del filtro de acoplamiento donde el *orden definido* (n°) está dado por la cantidad de elemento pasivos que almacenan energía.

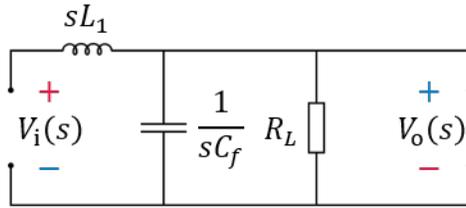


Figura 2.8

Topología de un *filtro-LC*

La función de transferencia del inductor L_f y del capacitor C_f (los elementos pasivos que almacenan energía) dada por las ecuaciones (2.45) y (2.46) respectivamente.

$$v(t) = L_f \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = C_f \frac{dv(t)}{dt}$$

$$V(s) = sL_f I(s)$$

$$I(s) = sC_f V(s)$$

$$(2.45) \quad \frac{V(s)}{I(s)} = sL_f$$

$$(2.46) \quad \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC_f}$$

Una forma para determinar la función de transferencia de un *filtro-LC* es a través de un divisor de tensión:

$$V_o(s) = \frac{Z_1}{sL_1 + Z_1} V_i(s) \text{ ; donde } Z_1 : R_L || sC_f$$

$$Z_1 = \frac{R_L \times \frac{1}{sC_f}}{R_L + \frac{1}{sC_f}} = \frac{R_L}{1 + sR_L C_f}$$

$$(2.47) \quad \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\left(\frac{1}{L_1 C_f}\right)}{s^2 + \left(\frac{1}{R_L C_f}\right)s + \left(\frac{1}{L_1 C_f}\right)}$$

2. Ya que se conoce el *orden definido* (n°), se selecciona de la **Tabla 2.5** el *polinomio característico normalizado* $\check{B}_{(n^\circ)}(s')$ apropiado.

$$(2^\circ) \quad \check{B}_{(2^\circ)}(s') = s'^2 + 1.4142 : s' + 1$$

3. Para *desnormalizar* $\check{B}_{(n^\circ)}(s')$ se reemplaza s' por $\frac{s}{\omega_1}$ donde ω_1 es la velocidad angular de corte donde comienza el efecto de atenuación o amplificación.

$$\check{B}_{(2^\circ)}\left(\frac{s}{\omega_1}\right) = \left(\frac{s}{\omega_1}\right)^2 + 1.4142\left(\frac{s}{\omega_1}\right) + 1$$

$$(2.48) \quad \check{B}_{(2^\circ)}\left(\frac{s}{\omega_1}\right) = s^2 + (1.4142\omega_1)s + \omega_1^2$$

4. Se asocia el *polinomio característico desnormalizado* a la función de transferencia original del filtro de acoplamiento para determinar sus parámetros.

$$(2.49a) \quad 1.4142\omega_1 = \frac{1}{R_L C_f} \qquad (2.50a) \quad C_f = \frac{1}{1.4142\omega_1 R_L}$$

$$(2.49b) \quad \omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C_f} \qquad (2.50b) \quad L_1 = \frac{1}{\omega_1^2 C_f}$$

2.3.8.2 Filtro-L

Se presenta el diseño del filtro de acoplamiento del tipo *filtro-L* para un **inversor alimentador**; se caracteriza por ser *pasa-bajas* (PB) y de *1er. Orden* (1°).

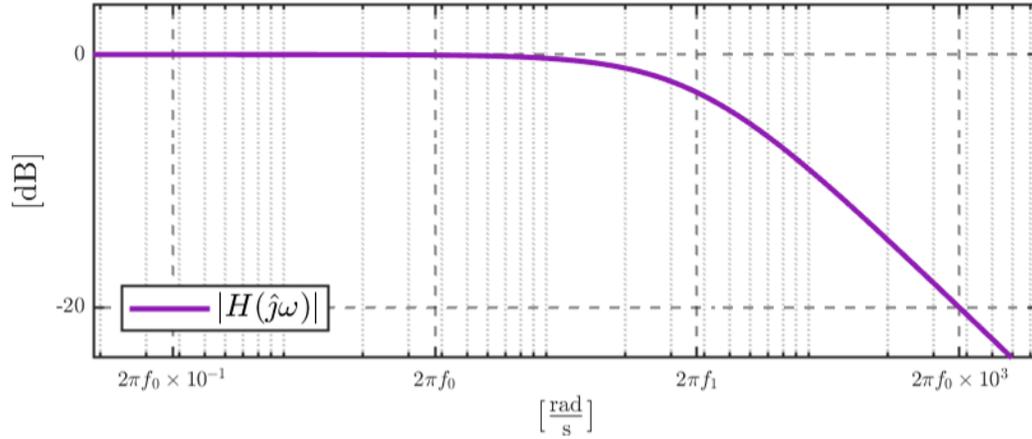


Figura 2.9

Respuesta en frecuencia en magnitud de un *filtro-L*

1. Determinar la función de transferencia del filtro de acoplamiento donde el *orden definido* (n°) está dado por la cantidad de elemento pasivos que almacenan energía.

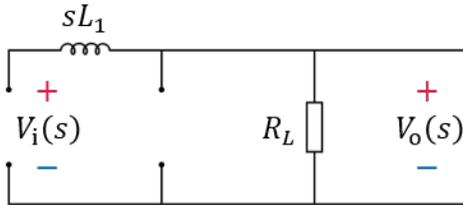


Figura 2.10

Topología de un *filtro-L*

Una forma para determinar la función de transferencia de un *filtro-L* es a través de un divisor de tensión:

$$V_o(s) = \frac{R_L}{sL_1 + R_L} V_i(s)$$

$$(2.51) \quad \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\left(\frac{R_L}{L_1}\right)}{s + \left(\frac{R_L}{L_1}\right)}$$

2. Ya que se conoce el *orden definido* (n°), se selecciona de la **Tabla 2.5** el *polinomio característico normalizado* $\check{B}_{(n^\circ)}(s')$ apropiado.

$$(1^\circ) \quad \check{B}_{(1^\circ)}(s') = s' + 1$$

3. Para *desnormalizar* $\check{B}_{(n^\circ)}(s')$ se reemplaza s' por $\frac{s}{\omega_1}$ donde ω_1 es la velocidad angular de corte donde comienza el efecto de atenuación o amplificación.

$$\check{B}_{(1^\circ)}\left(\frac{s}{\omega_1}\right) = \left(\frac{s}{\omega_1}\right) + 1$$

$$(2.52) \quad \check{B}_{(1^\circ)}\left(\frac{s}{\omega_1}\right) = s + \omega_1$$

4. Se asocia *el polinomio característico desnormalizado* a la función de transferencia original del filtro de acoplamiento para determinar sus parámetros.

$$(2.53) \quad \omega_1 = \frac{R_L}{L_1}$$

$$(2.54) \quad L_1 = \frac{R_L}{\omega_1}$$

2.3.8.3 Filtro-LCL

Se presenta el diseño del filtro de acoplamiento del tipo *filtro-LCL* para un **inversor de soporte**; se caracteriza por ser *pasa-bajas* (PB) y de *3er. Orden* (3°).

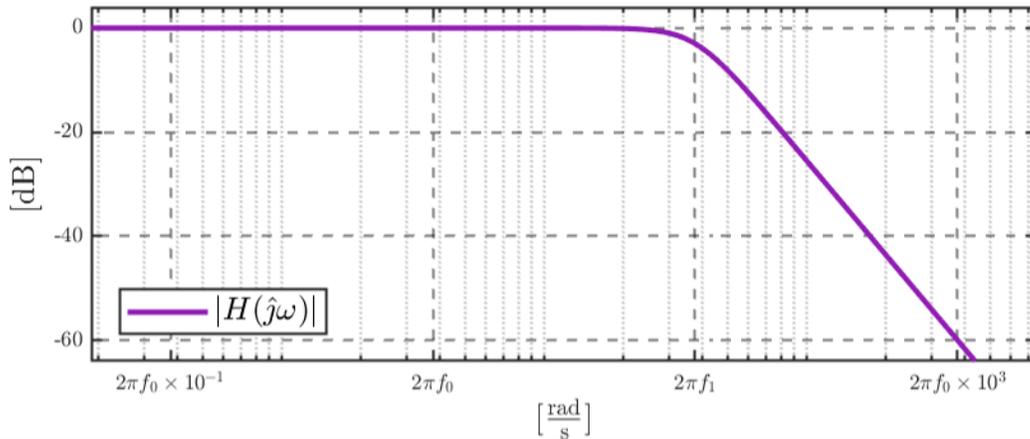


Figura 2.11

Respuesta en frecuencia en magnitud de un *filtro-LCL*

1. Determinar la función de transferencia del filtro de acoplamiento donde el *orden definido* (n°) está dado por la cantidad de elemento pasivos que almacenan energía.

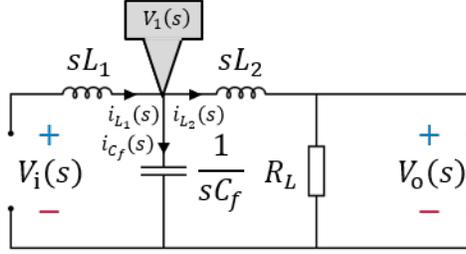


Figura 2.12
Topología de un *filtro-LCL*

Para determinar la función de transferencia de un *filtro-LCL* es necesario conocer la tensión en $V_1(s)$ mediante una *ley de corrientes de Kirchhoff* o **LCKs**:

$$\begin{aligned} \frac{V_i(s) - V_1(s)}{sL_1} &= \frac{V_1(s) - V_o(s)}{sL_2} + \frac{V_1(s)}{\frac{1}{sC_f}} \\ \frac{V_i(s)}{sL_1} + \frac{V_o(s)}{sL_2} &= V_1(s) \left(\frac{1}{sL_1} + \frac{1}{sL_2} + sC_f \right) \\ V_1(s) \left(\frac{s^2L_1L_2C_f + L_1 + L_2}{sL_1L_2} \right) &= \frac{L_2V_i(s) + L_1V_o(s)}{sL_1L_2} \\ V_1(s) &= \frac{L_2V_i(s) + L_1V_o(s)}{s^2L_1L_2C_f + L_1 + L_2} \end{aligned}$$

Una vez que se conoce la tensión en $V_1(s)$, entonces es posible conocer la función de transferencia del *filtro-LCL* a través de un divisor de tensión:

$$\begin{aligned} V_o(s) &= \frac{R_L}{sL_2 + R_L} V_1(s) \\ V_o(s) &= \frac{R_L}{sL_2 + R_L} \frac{L_2V_i(s) + L_1V_o(s)}{s^2L_1L_2C_f + L_1 + L_2} \\ (2.55) \quad \frac{V_o(s)}{V_i(s)} &= \frac{\frac{R_L}{L_1L_2C_f}}{s^3 + \left(\frac{R_L}{L_2}\right)s^2 + \left(\frac{L_1+L_2}{L_1L_2C_f}\right)s + \left(\frac{R_L}{L_1L_2C_f}\right)} \end{aligned}$$

2. Ya que se conoce el *orden definido* (n°), se selecciona de la **Tabla 2.5** el *polinomio característico normalizado* $\check{B}_{(n^\circ)}(s')$ apropiado.

$$(3^\circ) \quad \check{B}_{(3^\circ)}(s') = (s' + 1)(s'^2 + s' + 1) = s'^3 + 2s'^2 + 2s' + 1$$

3. Para *desnormalizar* $\check{B}_{(n^\circ)}(s')$ se reemplaza s' por $\frac{s}{\omega_1}$ donde ω_1 es la velocidad angular de corte donde comienza el efecto de atenuación o amplificación.

$$\check{B}_{(3^\circ)}\left(\frac{s}{\omega_1}\right) = \left(\frac{s}{\omega_1}\right)^3 + 2\left(\frac{s}{\omega_1}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_1}\right) + 1$$

$$(2.56) \quad \check{B}_{(3^\circ)}\left(\frac{s}{\omega_1}\right) = s^3 + (2\omega_1)s^2 + (2\omega_1^2)s + \omega_1^3$$

4. Se asocia *el polinomio característico desnormalizado* a la función de transferencia original del filtro de acoplamiento para determinar sus parámetros.

$$(2.57a) \quad 2\omega_1 = \frac{R_L}{L_2} \qquad (2.58a) \quad L_2 = \frac{R_L}{2\omega_1}$$

$$(2.57b) \quad 2\omega_1^2 = \frac{L_1 + L_2}{L_2 L_2 C_f} \qquad (2.58b) \quad L_1 = 3L_2$$

$$(2.57c) \quad \omega_1^3 = \frac{R_L}{L_1 L_2 C_f} \qquad (2.58c) \quad C_f = \frac{2}{\omega_1^2 L_1}$$

2.3.8.4 Tabla de resultados

Para conocer el valor de los elementos pasivos que almacenan energía en el filtro de acoplamiento de cada clase de inversor se utilizan los parámetros de diseño de la **Tabla 2.6** y las expresiones: (2.49), (2.50), (2.53), (2.54), (2.57) y (2.58) según sea el caso. El resultado de este procedimiento se muestra a continuación:

2.3.8.1 Filtro-LC	2.3.8.2 Filtro-L	2.3.8.3 Filtro-LCL
<i>2do. orden (2°) y pasa-bajas (PB)</i>	<i>1er. orden (1°) y pasa-bajas (PB)</i>	<i>3er. orden (3°) y pasa-bajas (PB)</i>
(2.50a) $C_f = 58.14[\mu\text{F}]$	(2.54) $L_1 = 855.67[\mu\text{H}]$	(2.58a) $L_2 = 427.83[\mu\text{H}]$
(2.50b) $L_1 = 1.21[\text{mH}]$		(2.58b) $L_1 = 1.2835[\mu\text{H}]$
		(2.58c) $C_f = 109.64[\mu\text{F}]$

Tabla 2.7
Parámetros de cada uno de los filtros de acoplamiento

2.4 Determinación del modelo matemático

Ahora que se procede a conocer el **modelo matemático** para cada clase de inversor, es importante recordar que el principal objetivo de un **modelo matemático** es reducir a una expresión numérica con una estructura definida el comportamiento en conjunto de un sistema dinámico.

Particularmente para el presente proyecto de tesis, adicionalmente se desea conocer si los convertidores de potencia instalados en una microrred eléctrica cuentan con las características y propiedades adecuadas para poder implementar el esquema de control propuesto, así como determinar la estabilidad y simular de forma numérica.

2.4.1 Procedimiento

Cabe resaltar que se utilizan las dos aproximaciones que se mencionaron al inicio de este capítulo para determinar el modelo matemático de cada clase de inversor:

1. Se obtiene el sistema de ecuaciones a partir de las **leyes de Kirchhoff** pero ajustando el conjunto de estados en términos de las coordenadas generalizadas.
2. Se obtiene el sistema de ecuaciones a partir del problema clásico de variaciones para las funciones de energía formando un **Sistema-EL** a partir de los **Parámetros-EL**.

En la *primera aproximación* cabe señalar que el modelo matemático no adquiere las características necesarias para validar si se puede utilizar con el esquema de control propuesto porque el conjunto de ecuaciones queda expresado a través de los estados asociados a los elementos que almacenan energía $i_{L_f}(t)$ y $v_{C_f}(t)$ de forma que:

$$(2.59a) \quad v_{L_f}(t) = L_f \frac{di_{L_f}(t)}{dt}$$

$$(2.59b) \quad i_{C_f}(t) = C_f \frac{dv_{C_f}(t)}{dt}$$

Para la implementación del esquema de control propuesto es necesario que el modelo matemático esté expresado en coordenadas generalizadas $q(t)$ y sus derivadas $\{\dot{q}, \ddot{q}\}$. Por lo tanto, se busca una relación entre los estados asociados a los elementos que almacenan energía y las coordenadas generalizadas como:

$$(2.60a) \quad \text{Se tiene que } i_{L_f}(t) = \dot{q}_{L_f}(t) \text{ ; por lo tanto } \frac{di_{L_f}(t)}{dt} = \ddot{q}_{L_f}(t)$$

$$(2.60b) \quad \text{Se sabe que } v_{C_f}(t) = \frac{q_{C_f}(t)}{C_f} \text{ donde } C_f \frac{d}{dt} \left(\frac{q_{C_f}(t)}{C_f} \right)$$

En cuanto a la *segunda aproximación*, se utiliza el formato que se muestra a continuación para determinar los **Parámetros-EL** utilizando (2.25), (2.26), (2.27) y (2.28):

q_i, \dot{q}_i	\mathcal{F}	$\frac{\partial \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$	$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)$	$\frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$	$\frac{\partial \mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$
------------------	---------------	--	--	--	--

Posteriormente, se procede a construir el **Sistema-EL** utilizando la expresión (2.16); cabe señalar que el término $\frac{\partial \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}}$ es 0 para cualquier clase de inductor de tal forma que la expresión original puede ser reducida eliminando dicho término obteniendo lo que se muestra a continuación:

$$(2.16) \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) + \frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \text{ ; para la ecuación (2.12)}$$

2.4.1.1 Inversor formador de red

Utilizando ambas aproximaciones, se determina el modelo matemático de un **inversor formador de red** que integra un filtro de acoplamiento del tipo *filtro-LC*.

1. Se obtiene el sistema de ecuaciones a partir de las **leyes de Kirchhoff** pero ajustando el conjunto de estados en términos de las coordenadas generalizadas.

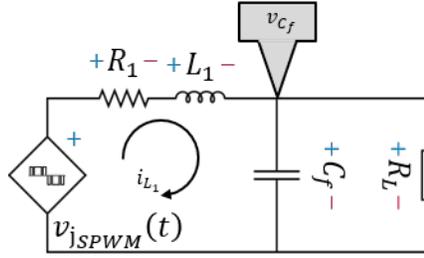


Figura 2.13

Inversor formador de red (utilizando la *primera aproximación*)

En la **Figura 2.13** se observan **dos** estados i_{L_1} y v_{C_f} , por lo tanto se espera que el modelo matemático esté constituido por un sistema de **dos** ecuaciones diferenciales.

Utilizando la *ley de corrientes de malla* o **LCKs** en i_{L_1} :

$$(2.61a) \quad v_j(t) = R_1 i_{L_1} + L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + v_{C_f}$$

Expresando la ecuación en términos de coordenadas generalizadas \mathbf{q} :

$$v_j(t) = R_1 \dot{q}_{L_1} + L_1 \frac{d\dot{q}_{L_1}}{dt} + \frac{q_{C_f}}{C_f}$$

Utilizando la *ley de tensiones en nodo* o **LVKs** de v_{C_f} :

$$(2.61b) \quad i_{L_1} = C_f \frac{dv_{C_f}}{dt} + \frac{v_{C_f}}{R_L}$$

Expresando la ecuación en términos de coordenadas generalizadas \mathbf{q} :

$$\dot{q}_{L_1} = \frac{dq_{C_f}}{dt} + \frac{q_{C_f}}{R_L C_f}$$

Realizando una manipulación algebraica de las expresiones que se muestran anteriormente dejando del lado derecho la derivada de la coordenada generalizada se tiene:

$$(2.62a) \quad \frac{d\dot{q}_{L_1}}{dt} = \frac{v_j(t)}{L_1} - \frac{R_1}{L_1} \dot{q}_{L_1} - \frac{q_{C_f}}{L_1 C_f}$$

$$(2.62b) \quad \frac{dq_{C_f}}{dt} = \dot{q}_{L_1} - \frac{q_{C_f}}{R_L C_f}$$

2. Se obtiene el sistema de ecuaciones a partir del problema clásico de variaciones para las funciones de energía formando un **Sistema-EL** a partir de los **Parámetros-EL**.

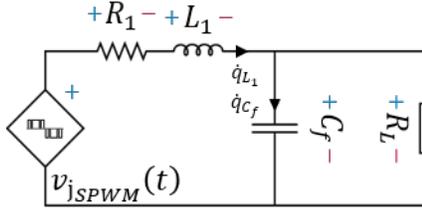


Figura 2.14

Inversor formador de red (utilizando la *segunda aproximación*)

En la **Figura 2.14** se observan las **dos** coordenadas generalizadas \dot{q}_{L_1} y q_{C_f} , por lo tanto se espera que el modelo matemático esté constituido por un sistema de **dos** ecuaciones.

q_i, \dot{q}_i	\mathcal{F}	$\frac{\partial \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$	$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)$	$\frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$	$\frac{\partial \mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$
\dot{q}_{L_1}	$v_j(t)$	$L_1 \dot{q}_{L_1}$	$L_1 \ddot{q}_{L_1}$	0	$R_1 \dot{q}_{L_1} + R_L (\dot{q}_{L_1} - \dot{q}_{C_f})$
q_{C_f}	0	0	0	$\frac{q_{C_f}}{C_f}$	$-R_L (\dot{q}_{L_1} - \dot{q}_{C_f})$

Ahora, utilizando los **Parámetros-EL** en combinación con la **Ecuación Euler-Lagrange** que se muestra en (2.16) se obtiene la ecuación:

$$(2.63a) \quad L_1 \ddot{q}_{L_1} = v_j(t) - R_1 \dot{q}_{L_1} - R_L (\dot{q}_{L_1} - \dot{q}_{C_f})$$

$$(2.63b) \quad \frac{q_{C_f}}{C_f} = R_L (\dot{q}_{L_1} - \dot{q}_{C_f})$$

Realizando una manipulación algebraica de la expresión que se muestra anteriormente dejando del lado derecho la derivada de la coordenada generalizada se tiene:

$$(2.64a) \quad \ddot{q}_{L_1} = \frac{v_j(t)}{L_1} - \frac{R_1}{L_1} \dot{q}_{L_1} - \frac{R_L}{L_1} (\dot{q}_{L_1} - \dot{q}_{C_f})$$

$$(2.64b) \quad \dot{q}_{C_f} = \dot{q}_{L_1} - \frac{q_{C_f}}{R_L C_f}$$

Se observa que ambas aproximaciones del modelo matemático, (2.62) y (2.64) respectivamente, son equivalentes.

El comportamiento de las señales \dot{q}_{L_1} y q_{C_f} se observa en la **Figura 2.19** y en la **Figura 2.20** respectivamente.

2.4.1.2 Inversor alimentador

Utilizando ambas aproximaciones, se determina el modelo matemático de un **inversor alimentador** que integra un filtro de acoplamiento del tipo *filtro-L*.

1. Se obtiene el sistema de ecuaciones a partir de las **leyes de Kirchhoff** pero ajustando el conjunto de estados en términos de las coordenadas generalizadas.

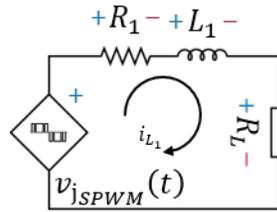


Figura 2.15

Inversor alimentador (utilizando la *primera aproximación*)

En la **Figura 2.15** se observa **un solo** estado i_{L_1} , por lo tanto se espera que el modelo matemático esté constituido por un sistema de **una** ecuación diferencial.

Utilizando la *ley de corrientes de malla* o **LCKs** en i_{L_1} :

$$(2.65) \quad v_j(t) = R_1 i_{L_1} + L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + R_L i_{L_1}$$

Expresando la ecuación en términos de coordenadas generalizadas \mathbf{q} :

$$v_j(t) = R_1 \dot{q}_{L_1} + L_1 \frac{d\dot{q}_{L_1}}{dt} + R_L \dot{q}_{L_1}$$

Realizando una manipulación algebraica de las expresiones que se muestran anteriormente dejando del lado derecho la derivada de la coordenada generalizada se tiene:

$$(2.66) \quad \frac{d\dot{q}_{L_1}}{dt} = \frac{v_j(t)}{L_1} - \left(\frac{R_1 + R_L}{L_1} \right) \dot{q}_{L_1}$$

2. Se obtiene el sistema de ecuaciones a partir del problema clásico de variaciones para las funciones de energía formando un **Sistema-EL** a partir de los **Parámetros-EL**.

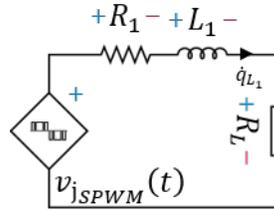


Figura 2.16

Inversor alimentador (utilizando la *segunda aproximación*)

En la **Figura 2.16** se observan la **única** coordenada generalizada \dot{q}_{L_1} , por lo tanto se espera que el modelo matemático esté constituido por un sistema de **una** ecuación.

q_i, \dot{q}_i	\mathcal{F}	$\frac{\partial \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$	$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)$	$\frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$	$\frac{\partial \mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$
\dot{q}_{L_1}	$v_j(t)$	$L_1 \dot{q}_{L_1}$	$L_1 \ddot{q}_{L_1}$	0	$(R_1 + R_L) \dot{q}_{L_1}$

Ahora, utilizando los **Parámetros-EL** en combinación con la **Ecuación Euler-Lagrange** que se muestra en (2.16) se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$(2.67) \quad L_1 \ddot{q}_{L_1} = v_j(t) - R_1 \dot{q}_{L_1} - R_L \dot{q}_{L_1}$$

Realizando una manipulación algebraica de las expresiones que se muestran anteriormente dejando del lado derecho la derivada de la coordenada generalizada se tiene:

$$(2.68) \quad \ddot{q}_{L_1} = \frac{v_j(t)}{L_1} - \left(\frac{R_1 + R_L}{L_1} \right) \dot{q}_{L_1}$$

Se observa que ambas aproximaciones del modelo matemático, (2.66) y (2.68) respectivamente, son idénticas.

El comportamiento de la señal \dot{q}_{L_1} se observa en la **Figura 2.21** utilizando una simulación por ordenador.

2.4.1.3 Inversor de soporte

Utilizando ambas aproximaciones, se determina el modelo matemático de un **inversor de soporte** que integra un filtro de acoplamiento del tipo *filtro-LCL*.

1. Se obtiene el sistema de ecuaciones a partir de las **leyes de Kirchhoff** pero ajustando el conjunto de estados en términos de las coordenadas generalizadas.

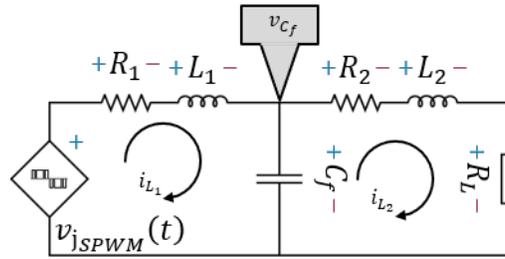


Figura 2.17

Inversor de soporte (utilizando la *primera aproximación*)

En la **Figura 2.17** se observan **tres** estados i_{L_1} , v_{C_f} e i_{L_2} , por lo tanto se espera que el modelo matemático esté constituido por un sistema de **tres** ecuaciones diferenciales.

Utilizando la *ley de corrientes de malla* o **LCKs** en i_{L_1} :

$$(2.69a) \quad v_j(t) = R_1 i_{L_1} + L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + v_{C_f}$$

Expresando la ecuación en términos de coordenadas generalizadas \mathbf{q} :

$$v_j(t) = R_1 \dot{q}_{L_1} + L_1 \frac{d\dot{q}_{L_1}}{dt} + \frac{q_{C_f}}{C_f}$$

Utilizando la *ley de tensiones en nodo* o **LVKs** de v_{C_f} :

$$(2.69b) \quad i_{L_1} = i_{L_2} + C_f \frac{dv_{C_f}}{dt}$$

Expresando la ecuación en términos de coordenadas generalizadas \mathbf{q} :

$$\dot{q}_{L_1} = \dot{q}_{L_2} + \frac{dq_{C_f}}{dt}$$

Utilizando la *ley de corrientes de malla* o **LCKs** en i_{L_2} :

$$(2.69c) \quad 0 = (R_2 + R_L) i_{L_2} + L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} - v_{C_f}$$

Expresando la ecuación en términos de coordenadas generalizadas \mathbf{q} :

$$0 = R_2 \dot{q}_{L_2} + R_L \dot{q}_{L_2} + L_2 \frac{d\dot{q}_{L_2}}{dt} - \frac{q_{C_f}}{C_f}$$

Realizando una manipulación algebraica de las expresiones que se muestran anteriormente dejando del lado derecho la derivada de la coordenada generalizada se tiene:

$$(2.70a) \quad \frac{d\dot{q}_{L_1}}{dt} = \frac{v_j(t)}{L_1} - \frac{R_1}{L_1} \dot{q}_{L_1} - \frac{q_{C_f}}{L_1 C_f}$$

$$(2.70b) \quad \frac{dq_{C_f}}{dt} = \dot{q}_{L_1} - \dot{q}_{L_2}$$

$$(2.70c) \quad \frac{d\dot{q}_{L_2}}{dt} = - \left(\frac{R_2 + R_L}{L_2} \right) \dot{q}_{L_2} + \frac{q_{C_f}}{L_2 C_f}$$

2. Se obtiene el sistema de ecuaciones a partir del problema clásico de variaciones para las funciones de energía formando un **Sistema-EL** a partir de los **Parámetros-EL**.

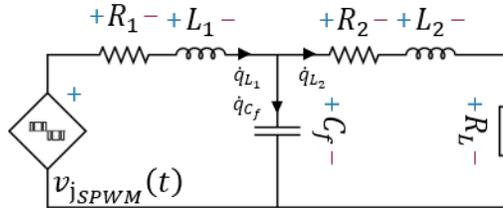


Figura 2.18

Inversor de soporte (utilizando la *segunda aproximación*)

En la **Figura 2.18** se observan las **tres** coordenadas generalizadas \dot{q}_{L_1} , q_{C_f} y \dot{q}_{L_2} , por lo tanto se espera que el modelo matemático esté constituido por un sistema de **tres** ecuaciones.

q_i, \dot{q}_i	\mathcal{F}	$\frac{\partial \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$	$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)$	$\frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$	$\frac{\partial \mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$
\dot{q}_{L_1}	$v_j(t)$	$L_1 \dot{q}_{L_1}$	$L_1 \ddot{q}_{L_1}$	0	$R_1 \dot{q}_{L_1} + R_L (\dot{q}_{L_1} - \dot{q}_{C_f})$
q_{C_f}	0	0	0	$\frac{q_{C_f}}{C_f}$	0
\dot{q}_{L_2}	0	$L_1 \dot{q}_{L_2}$	0	0	$(R_2 + R_L) \dot{q}_{L_2}$

Ahora, utilizando los **Parámetros-EL** en combinación con la **Ecuación Euler-Lagrange** que se muestra en (2.16) se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$(2.71a) \quad L_1 \ddot{q}_{L_1} = v_j(t) - R_1 \dot{q}_{L_1}$$

$$(2.71b) \quad \frac{q_{C_f}}{C_f} = 0$$

$$(2.71c) \quad L_2 \ddot{q}_{L_2} = -R_2 \dot{q}_{L_2} - R_L \dot{q}_{L_2}$$

Realizando una manipulación algebraica de las expresiones que se muestran anteriormente dejando del lado derecho la derivada de la coordenada generalizada se tiene:

$$(2.72a) \quad \ddot{q}_{L_1} = \frac{v_j(t)}{L_1} - \frac{R_1}{L_1} \dot{q}_{L_1}$$

$$(2.72b) \quad \dot{q}_{C_f} = 0$$

$$(2.72c) \quad \ddot{q}_{L_2} = - \left(\frac{R_2 + R_L}{L_2} \right) \dot{q}_{L_2}$$

Antes de continuar, para este caso en particular es necesario hacer un par de observaciones para ambas aproximaciones del modelo matemático:

- Aunque el modelo matemático expresado en (2.70) se compone de **tres** ecuaciones, cabe señalar que únicamente se debe de considerar solo **dos** de ellas. Dado que las ecuaciones (2.70a) y (2.70c) son de carácter *diferencial* y la ecuación restante (2.70b) es de carácter *algebraico*, esta última no forma parte del modelo matemático.

- Por otro lado, en el modelo matemático expresado en (2.72) se tiene que la ecuación (2.72b) anula la coordenada generalizada q_{C_f} y, por lo tanto, su derivada \dot{q}_{C_f} . Analizando el

circuito eléctrico, a simple vista puede observarse que esto no ocurre en ningún momento. Una forma de resolver esto consiste en modificar las referencias de corriente utilizadas en la **Figura 2.18**, sin embargo, esta solución no se profundiza a detalle dado que ya se cuenta con un modelo matemático.

Por lo tanto y para concluir el procedimiento para determinar el modelo matemático del **inversor de soporte** es importante señalar que de ahora en adelante se utilizará el que se observa nuevamente a continuación en (2.70). Adicionalmente y para efectos de validación, el comportamiento de la señal \dot{q}_{L_2} se observa en la **Figura 2.22**.

$$(2.70a) \quad \frac{d\dot{q}_{L_1}}{dt} = \frac{v_j(t)}{L_1} - \frac{R_1}{L_1} \dot{q}_{L_1} - \frac{q_{C_f}}{L_1 C_f}$$

$$(2.70b) \quad \frac{d\dot{q}_{L_2}}{dt} = - \left(\frac{R_2 + R_L}{L_2} \right) \dot{q}_{L_2} + \frac{q_{C_f}}{L_2 C_f}$$

2.4.1.4 Tabla de resultados

Finalmente y a modo de resumen, en la **Tabla 2.8**, se observa el modelo matemático que se utilizará para cada clase de inversor:

2.4.1.1 Inversor formador de red	
(2.62a)	$\frac{d\dot{q}_{L_1}}{dt} = \frac{v_j(t)}{L_1} - \frac{R_1}{L_1} \cdot \dot{q}_{L_1} - \frac{q_{C_f}}{L_1 C_f}$
(2.62b)	$\frac{dq_{C_f}}{dt} = \dot{q}_{L_1} - \frac{q_{C_f}}{R_L C_f}$
2.4.1.2 Inversor alimentador	
(2.66)	$\frac{d\dot{q}_{L_1}}{dt} = \frac{v_j(t)}{L_1} - \left(\frac{R_1 + R_L}{L_1} \right) \cdot \dot{q}_{L_1}$

2.4.1.3 Inversor de soporte

$$(2.70a) \quad \frac{d\dot{q}_{L1}}{dt} = \frac{v_j(t)}{L_1} - \frac{R_1}{L_1} \cdot \dot{q}_{L1} - \frac{qc_f}{L_1 C_f}$$

$$(2.70b) \quad \frac{d\dot{q}_{L2}}{dt} = -\left(\frac{R_2+R_L}{L_2}\right) \cdot \dot{q}_{L2} + \frac{qc_f}{L_2 C_f}$$

Tabla 2.8

Modelo matemático de cada clase de inversor

2.4.2 Validación

Es necesario realizar la validación del modelo matemático obtenido para cada clase de inversor que se tiene en consideración. Para ello, se realizan dos simulaciones por ordenador de un mismo modelo matemático a la par empleando diferentes herramientas del software **Powersim PSIM 9.1.1** con el fin de comparar ambos resultados.

Adicionalmente, en una sección más adelante se hace un análisis a frecuencia fundamental de dos clases de inversores conectados entre sí en paralelo con la carga de consumo.

La señal en color **naranja** es el resultado de la simulación por ordenador empleando únicamente elementos lógicos y aritméticos.



La señal en color **morado** es el resultado de la simulación por ordenador empleando los componentes eléctricos.



Utilizando los parámetros de cada uno de los filtros de acoplamiento que se observan en la **Tabla 2.7** y el modelo matemático de cada clase de inversor de la **Tabla 2.8**, se procede a realizar la validación mediante la simulación por ordenador como se describió anteriormente, utilizando además, los parámetros que se muestran a continuación:

$f_0 = 60$ [Hz]	$m_a = 0.8181$	$t_s = 1.6502 \times 10^{-6}$ [seg]	$t_i = 0$ [seg]
$V_{i_{DC}} = 220$ [V]	$m_f = 101$	Paso de integración para la simulación por ordenador	Tiempo inicial
$f_m = f_0$	$R_L = 3.2858$ [Ω]	 $T = 1$	$t_f = 0.6667$ [seg]
$f_p = m_f f_m$	$R_s : \{R_1, R_2\} = 0.10$ [m Ω]	Constante de tiempo del bloque integrador	Tiempo final

Tabla 2.9
Parámetros para la simulación por ordenador

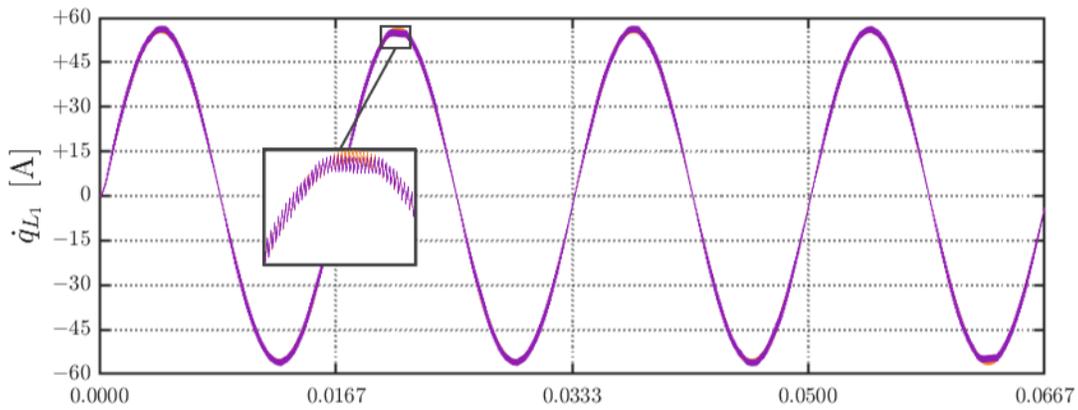


Figura 2.19
Comportamiento de la señal \dot{q}_{L_1} en el inversor formador de red

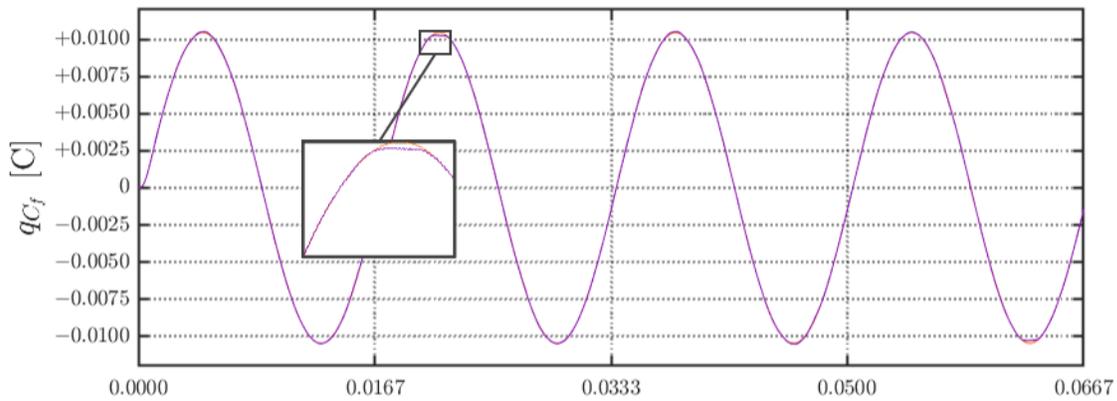


Figura 2.20
Comportamiento de la señal q_{C_f} en el inversor formador de red

En la **Figura 2.19** y en la **Figura 2.20** se observa el comportamiento de las señales \dot{q}_{L_1} y q_{C_f} , que corresponde a las coordenadas generalizadas que definen al modelo matemático del **inversor formador de red**. Nótese la presencia de componentes armónicas, principalmente en el comportamiento de la corriente eléctrica.

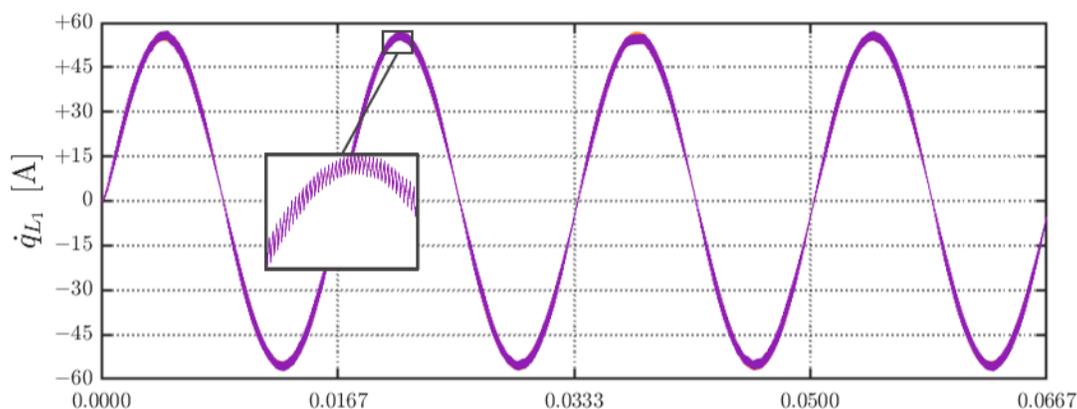


Figura 2.21

Comportamiento de la señal \dot{q}_{L_1} en el inversor alimentador

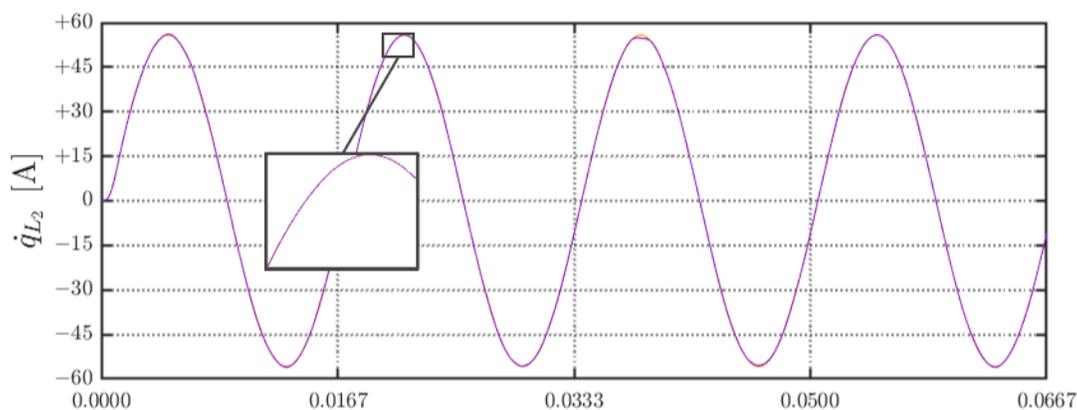


Figura 2.22

Comportamiento de la señal \dot{q}_{L_2} en el inversor de soporte



Por otra parte y a modo de comparación, el comportamiento de la corriente eléctrica a través del inductor L_1 del **inversor alimentador** en la **Figura 2.21** es muy similar al del **inversor**

formador de red. Sin embargo, debido a la presencia del inductor adicional L_2 del **inversor de soporte** en la **Figura 2.22**, el comportamiento de la corriente eléctrica a través de él sustancialmente atenúa las componentes armónicas porque el filtro de acoplamiento es de un orden superior.

Fundamentos de la teoría de estabilidad y de la teoría de grafos

En este capítulo se introducen los fundamentos utilizados para respaldar el esquema de control de agentes interconectados, es decir, la teoría que permite la obtención del **controlador** y analizar su **estabilidad** considerando que el sistema en cuestión tiene la estructura de un **Sistema-EL** en función de sus **Parámetros-EL**.

Cabe señalar que en este capítulo no se realiza una demostración formal del origen del **controlador** para *un solo agente* o para *múltiples agentes* que se propone en el presente trabajo de tesis, sino que se formalizan las herramientas matemáticas que son esenciales y que permiten, posteriormente, obtenerlo a partir de un análisis de la **estabilidad** del mismo.

Dado que el **controlador** propuesto en principio está diseñado para *sistemas no-lineales* o **NLSs**, en la **Sección 3.1** se establece la clase de sistema dinámico que se estudiará a lo largo de este capítulo, mencionando las características y las propiedades necesarias para respaldar el criterio de estabilidad en la **Sección 3.5** y el análisis por contracción en la **Sección 3.6**.

También se define cuando una función o matriz (*cuadrada*) se considera de signo definido; de la misma forma se hace una pequeña revisión de álgebra lineal.

En la **Sección 3.2** se expone la **teoría de grafos** como herramienta que permite visualizar la relación binaria entre un par de elementos, de la mano con el formalismo matemático de la **matriz laplaciana** \mathcal{L} . De esta forma, se describe el intercambio de información entre los agentes interconectados en un sistema dinámico [49, p. 9][50, p. 5].

En la **Sección 3.3** se introduce el concepto de **acoplamiento difuso**, que básicamente establece una forma de interacción para un grupo de agentes en función de la diferencia ponderada del comportamiento de sus estados y que es el punto de partida para la interpretación del fenómeno de sincronización [51, 52].

En la **Sección 3.4** se introduce también el fenómeno de **sincronización** donde se exhibe un comportamiento *colectivo* y *coherente* de un grupo de agentes. En los esquemas de control, este fenómeno se emplea con el objetivo de completar una actividad o tarea que tradicionalmente un agente no puede realizar por sí solo [53, p. 179][54, p. xi].

De forma elemental y puntal en la **Sección 3.5** se exhibe el **criterio de estabilidad Lyapunov** que permitirá en el **Capítulo 4** garantizar que el **controlador** para *un solo agente* es **estable globalmente** y **asintóticamente** para el seguimiento de una trayectoria deseada aprovechando la estructura que posee el modelo matemático [55, p. 577][56, p. 182-187].

Expuesto de la misma manera en la **Sección 3.6**, el **análisis por contracción** es empleado en el **Capítulo 5** para garantizar que el **controlador** para *múltiples agentes* es **estable globalmente** y **exponencialmente** para la sincronización del comportamiento de los estados utilizando un análisis basado en el **cálculo de variaciones** [57][58].

3.1 Introducción

Los *sistemas no-lineales* o **NLSs** pueden clasificarse a través de su estructura matemática, los **Sistemas-EL** son un claro ejemplo de ello.

Sin embargo, los **Sistemas-EL** solo reflejan una porción en particular del tipo de sistemas dinámicos que se estudiarán a lo largo de este capítulo; establecer las características y pro-

propiedades de los sistemas dinámicos sirve como punto de partida para respaldar el criterio de estabilidad y el análisis por contracción como se observa a continuación [55, p. 562][56, p. 183]:

Considere el sistema dinámico (3.1) donde $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un mapeo *uniformemente continuo* y $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto *abierto y acotado*; además se tiene que $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \wedge t \geq 0$.

$$(3.1) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

Ante una condición inicial dada por $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$, la trayectoria para el sistema dinámico en (3.1) queda expresada por $\mathbf{x}(t) := \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ como se muestra en (3.2).

$$(3.2) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0) \text{ donde la trayectoria queda expresada por } \mathbf{x}(t) := \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$$

D- 3.1.1. Tenga en consideración la notación especial para algunos vectores y matrices que se utilizarán en lo sucesivo:

$$(3.3a) \quad \mathbf{0}_n := (0, 0, \dots, 0)_n^\top$$

$$(3.3b) \quad \mathbf{1}_n := (1, 1, \dots, 1)_n^\top$$

$$(3.3c) \quad \underline{\mathbf{0}}_{n \times m} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n \times m}$$

$$(3.3d) \quad \underline{\mathbf{1}}_{n \times m} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times m}$$

D- 3.1.2. De la misma forma, a manera de recordatorio, se define a la matriz identidad $\underline{\mathbf{I}}_n$ como se muestra continuación:

$$(3.4) \quad \underline{\mathbf{I}}_n := \text{diag}(1, 1, \dots, 1)_n$$

Existe una clase en particular de matrices $\underline{\mathbf{W}}$ de dimensiones de $n \times n$ o matrices *cuadradas* que es importante definir:

D- 3.1.3. Se dice que una matriz *cuadrada* $\underline{\mathbf{W}}$ que está constituida por elementos $a_{ij} \in \mathbb{C}$ es *hermítica* si $\underline{\mathbf{W}} = \underline{\mathbf{W}}^*$ de forma que $a_{ij} = a_{ji}^* \forall i \neq j$ [55, p. 115].

A partir de la definición de una *matriz hermítica*, es posible particularizar para el caso cuando $a_{ij} \in \mathbb{R}$ en lugar de $a_{ij} \in \mathbb{C}$ donde se le conoce como *matriz simétrica*.

D- 3.1.4. En cambio, se dice que una matriz *cuadrada* $\underline{\mathbf{W}}$ que está constituida por elementos $a_{ij} \in \mathbb{R}$ es *simétrica* si $\underline{\mathbf{W}} = \underline{\mathbf{W}}^T$ de forma que $a_{ij} = a_{ji} \forall i \neq j$.

D- 3.1.5. Se define que $\lambda_i(\underline{\mathbf{W}})$ es el i -ésimo eigenvalor y que $\nu_i(\underline{\mathbf{W}})$ es el i -ésimo eigenvector (derecho) de la matriz *cuadrada* $\underline{\mathbf{W}}$ para $i := \{1, 2, \dots, n\}$; además, se asocia el i -ésimo eigenvalor λ_i al i -ésimo eigenvector (derecho) ν_i de forma que en todo momento se cumple la relación $\underline{\mathbf{W}}\nu_i = \lambda_i\nu_i$ [55, p. 44].

D- 3.1.6. Se dice que una matriz *cuadrada* $\underline{\mathbf{W}}$ es *no singular* si se cumple que el $\det(\underline{\mathbf{W}}) \neq 0$ [55, p. 21].

D- 3.1.7. Sea una función $\mathbf{V}(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ especificado en el dominio dado por $\mathfrak{D} : \|\mathbf{x}\| \leq h$ de forma que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge t \geq t_0$ donde $h > 0$ y sea otra función $\mathbf{U}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ especificada también para el dominio $\mathfrak{D} : \|\mathbf{x}\| \leq h$; entonces la función $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ se le considera de signo definido a partir de la función $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ como [55, p. 562]:

Si $\mathbf{U}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, y además...

$$(3.5a) \quad \mathbf{U}(\mathbf{x}) \succ \mathbf{0} \forall \|\mathbf{x}\| \succ \mathbf{0} \wedge \mathbf{V}(t, \mathbf{x}) \succeq \mathbf{U}(\mathbf{x}) \forall t \geq t_0$$

Se dice que $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ es *positiva definida*

$$(3.5b) \quad \mathbf{U}(\mathbf{x}) \prec \mathbf{0} \forall \|\mathbf{x}\| \succ \mathbf{0} \wedge \mathbf{V}(t, \mathbf{x}) \preceq \mathbf{U}(\mathbf{x}) \forall t \geq t_0$$

Se dice que $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ es *negativa definida*

$$(3.5c) \quad \mathbf{U}(\mathbf{x}) \succeq \mathbf{0} \forall \|\mathbf{x}\| \succ \mathbf{0} \wedge \mathbf{V}(t, \mathbf{x}) \succeq \mathbf{U}(\mathbf{x}) \forall t \geq t_0$$

Se dice que $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ es *semipositiva definida*

$$(3.5d) \quad \mathbf{U}(\mathbf{x}) \preceq \mathbf{0} \forall \|\mathbf{x}\| \succ \mathbf{0} \wedge \mathbf{V}(t, \mathbf{x}) \preceq \mathbf{U}(\mathbf{x}) \forall t \geq t_0$$

Se dice que $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ es *seminegativa definida*

D- 3.1.8. Sea una matriz $\underline{\mathbf{W}}$ *simétrica* y *no singular* donde sus elementos $a_{ij} \in \mathbb{R}$; se dice que $\underline{\mathbf{W}}$ es de signo definido si:

$$(3.6a) \quad \mathbf{x}^\top \underline{\mathbf{W}} \mathbf{x} > 0 \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \equiv \lambda_i(\underline{\mathbf{W}}) > 0 \forall i := \{1, 2, \dots, n\}$$

Se dice que $\underline{\mathbf{W}}$ es *positiva definida*

$$(3.6b) \quad \mathbf{x}^\top \underline{\mathbf{W}} \mathbf{x} < 0 \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \equiv \lambda_i(\underline{\mathbf{W}}) < 0 \forall i := \{1, 2, \dots, n\}$$

Se dice que $\underline{\mathbf{W}}$ es *negativa definida*

$$(3.6c) \quad \mathbf{x}^\top \underline{\mathbf{W}} \mathbf{x} \geq 0 \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \equiv \lambda_i(\underline{\mathbf{W}}) \geq 0 \forall i := \{1, 2, \dots, n\}$$

Se dice que $\underline{\mathbf{W}}$ es *semipositiva definida*

$$(3.6d) \quad \mathbf{x}^\top \underline{\mathbf{W}} \mathbf{x} \leq 0 \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \equiv \lambda_i(\underline{\mathbf{W}}) \leq 0 \forall i := \{1, 2, \dots, n\}$$

Se dice que $\underline{\mathbf{W}}$ es *seminegativa definida*

PP 3.1.9. En una matriz *simétrica* $\underline{\mathbf{W}}$ de orden n se cumple que $\lambda_i(\underline{\mathbf{W}}) \in \mathbb{R} \wedge \nu_i(\underline{\mathbf{W}}) \in \mathbb{R}^n$ para $i := \{1, 2, \dots, n\}$ [55, p. 46].

PP 3.1.10. En una matriz *simétrica* $\underline{\mathbf{W}}$ de orden n es posible ordenar los eigenvalores como $\lambda_1(\underline{\mathbf{W}}) \leq \lambda_2(\underline{\mathbf{W}}) \leq \dots \leq \lambda_n(\underline{\mathbf{W}}) \leq$ donde $\lambda_{\min} = \lambda_1(\underline{\mathbf{W}})$ y $\lambda_{\max} = \lambda_n(\underline{\mathbf{W}})$ [50, p. 18].

PP 3.1.11. En una matriz *simétrica* $\underline{\mathbf{W}}$ los eigenvectores que corresponden a eigenvalores diferentes son *linealmente independientes* [55, p. 47].

PP 3.1.12. En una matriz *simétrica* $\underline{\mathbf{W}}$ los eigenvectores que son *linealmente independientes* son *ortogonales* entre sí [55, p. 48].

La información que se ha expuesto anteriormente será utilizada en las secciones restantes de este capítulo. De la misma forma, permitirá garantizar la estabilidad en el **controlador** para *un solo agente* o para *múltiples agentes* según sea el caso, considerando la tarea de control que se realice.

Ahora, específicamente en el **controlador** para *múltiples agentes* será necesario también presentar el **lema de Barbalat** en el **L- 3.1.13** y la **descomposición espectral** en el **T- 3.1.14** para garantizar que la sincronización del comportamiento de los estados en el **controlador** para *múltiples agentes* es **estable globalmente** y **exponencialmente**.

L- 3.1.13. El **lema de Barbalat** establece que para un sistema dinámico $g(t)$ donde $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es un mapeo *globalmente y uniformemente continuo, continuamente diferenciable* una vez tal que $\mathcal{D} \in \mathcal{C}^1$, y además $\mathcal{D} : [0, \infty)$; entonces la ecuación (3.7) se cumple si el $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty g(t) dt = \alpha$ tal que $\alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha < \infty$ [8, p. 323].

$$(3.7) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

T- 3.1.14. Sea $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ el conjunto de eigenvalores *diferentes* entre sí y sea también $\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\}$ el conjunto de eigenvectores *ortogonales* entre sí de una matriz *simétrica* \mathbf{W} de orden n ; entonces la representación que se muestra en (3.8) es válida y se le conoce como **descomposición espectral** donde $\mathbf{\Lambda} := \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ y $\mathbf{N} := [\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n]$ [55, p. 48].

$$(3.8) \quad \mathbf{W} = \mathbf{N} \mathbf{\Lambda} \mathbf{N}^{-1}$$

3.2 Teoría de grafos

Un **grafo** es un diagrama que representa las relaciones binarias entre un par de elementos a través de puntos y líneas, tiene un gran número de aplicaciones en diversas áreas de la lógica y la matemática [59]. De forma general, un **grafo** consta de dos conjuntos, el primer conjunto es el de los *nodos* o *vértices* y el segundo conjunto es el de los *arcos* o *aristas*.

Formalmente, un grafo \mathcal{G} es el par ordenado $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ donde $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_P\}$ es el conjunto de *nodos* y $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ es el conjunto de *arcos*. Por otro lado, un grafo *finito* es aquel que tiene una cantidad determinada de *nodos* y en consecuencia, un cantidad determinada de *arcos*; se utiliza P para describir esta cantidad [49, p. 8][50, p. 5]. En el presente trabajo de tesis, los *nodos* de un grafo se emplean para indicar la presencia de un convertidor de potencia y los *arcos* de un grafo ilustran el acoplamiento o la interacción que existe entre ellos [50, p. 2].

3.2.1 Características elementales

Se dice que un grafo es *homogéneo* si todos sus *nodos* son iguales, mientras que se dice que un grafo es *heterogéneo* si al menos uno de sus *nodos* es distinto a los demás [39].

Un *arco dirigido* es un enlace de transmisión para v_i y es un enlace de recepción para v_j donde se traza una flecha de v_i hacia v_j . En el *arco* (v_i, v_j) se dice que v_i es la parte negativa y que v_j es la parte positiva. Si se tiene que $\{(v_i, v_j), (v_j, v_i)\} \in \mathcal{E}$, entonces se forma un *arco no dirigido* y es representado por una línea simple o una flecha bidireccional [49, p. 8]. Teniendo esto en consideración, se dice que un grafo es *dirigido* si al menos contiene un *arco dirigido* (propiamente también es llamado **digrafo**); en caso contrario, se dice que un grafo es *no dirigido* si únicamente contiene *arcos no dirigidos* (a esta clase se les conoce simplemente como **grafo**) [49, p. 8][50, p. 7].

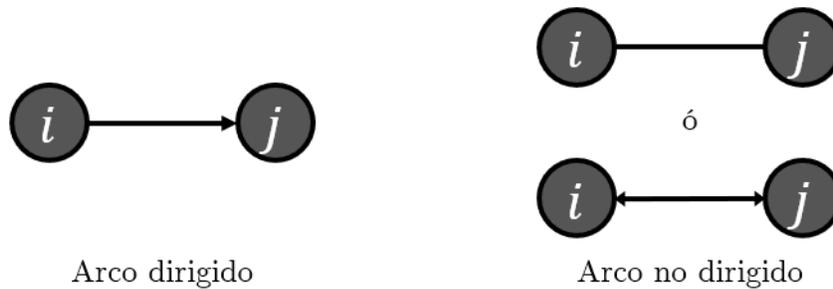


Figura 3.1
Ilustración de los tipos de arcos en un grafo

Un grafo *conectado* es aquel en el que existe una trayectoria (dirigida o no dirigida) de arcos entre cualquier par de nodos [49, p. 9]. En un grafo *ponderado*, los arcos tienen un valor numérico para denotar, por ejemplo, la fuerza del acoplamiento o la intensidad de la interacción entre dos sistemas dinámicos, en caso contrario se consideran arcos de valor unitario [50, p. 6].

La *distancia* d entre cualquier par de nodos está dada por el número de arcos (en un grafo *no ponderado*) o la adición del valor numérico de cada arco (en un grafo *ponderado*) a lo largo de una trayectoria dirigida; por otro lado, el *diámetro* $d_{máx}$ de un grafo es la distancia más grande que existe entre cualquier par de nodos [50, p. 7].

Un grafo es *fuertemente conectado* si existe una trayectoria entre cualquier par de nodos, pero teniendo en consideración la dirección o el sentido de los arcos. Por otro lado, un grafo es *débilmente conectado* si solo puede formarse una trayectoria entre cualquier par de nodos cambiando los arcos *dirigidos* por arcos *no dirigidos*.

Se dice que v_i es vecino de v_j si v_i envía información a v_j donde $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$. Sin embargo, esto no quiere decir que v_j sea vecino de v_i , para ello, también es necesario que v_j envíe información

a v_i para que $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$. El conjunto \mathcal{N}_i y el conjunto \mathcal{N}_j almacenan los *nodos* que son **vecinos** a v_i y v_j respectivamente; es decir, el subíndice de \mathcal{N}_x indica que el *nodo* v_x es el enlace de transmisión mientras que el contenido del conjunto corresponde a todos los enlaces de recepción asociados al *nodo* v_x [49, p. 8].

Para el caso específico de un grafo *no ponderado* existe la operación $|\mathcal{N}_x|$ que indica la cardinalidad del conjunto de vecindad \mathcal{N}_x [49, p. 9].

El **grado de salida** $d_o(v_x)$ corresponde a el total de enlaces de transmisión que egresan de v_x , mientras que el **grado de entrada** $d_i(v_x)$ corresponde a el total de enlaces de recepción que ingresan hacia v_x . En caso de que los arcos estén *ponderados*, se contabiliza la ponderación total de todos los enlaces según sea el caso [50, p. 9].

Un grafo se considera *regular* si todos los nodos tienen la misma cantidad de vecinos; de forma que $|\mathcal{N}_i| = |\mathcal{N}_j| = \dots = |\mathcal{N}_P|$ [39].

Un grafo se considera *balanceado* si el grado de salida $d_o(v_x)$ es igual al grado de entrada $d_i(v_x)$ para todos los nodos; de forma que $d_o(v_x) = d_i(v_x) \forall x = \{1, 2, \dots, P\}$ [50, p. 9].

3.2.2 Características matemáticas

La **matriz laplaciana** \mathcal{L} es un formalismo matemático que permite describir completamente un **grafo** $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ fusionando el álgebra lineal con la teoría de grafos [50, p. 8].

Esta representación puede ser utilizada para encontrar múltiples propiedades que posee un grafo de acuerdo a su topología.

D- 3.2.1. Considere un **grafo** $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ donde $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_P\}$ y $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, entonces la **matriz laplaciana** $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{P \times P}$ está dada por [49, p. 9][44]:

Para un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *no ponderado*:

$$(3.9a) \quad l_{ij} := \begin{cases} |\mathcal{N}_i| & ; \text{ si } i = j, \\ -1 & ; \text{ si } j \in \mathcal{N}_i, \\ 0 & ; \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Para un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *ponderado*:

$$(3.9b) \quad l_{ij} := \begin{cases} d_o(v_i) & ; \text{ si } i = j, \\ -\varpi & ; \text{ si } (v_i, v_j) \in \mathcal{E}, \\ 0 & ; \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

D- 3.2.2. Es posible definir la matriz laplaciana en términos de la **matriz de grado** y la **matriz de adyacencia** [50, p. 9]:

$$(3.10) \quad \mathcal{L} := \mathcal{D} - \mathcal{A}$$

D- 3.2.3. La **matriz de grado** $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{P \times P}$ es una matriz *diagonal* que contiene el grado de salida de cada uno de los nodos $d_o(v_i)$ [50, p. 9]:

Para un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *no ponderado*:

$$(3.11a) \quad \mathcal{D} = \text{diag}(|\mathcal{N}_i|) \quad \forall i = \{1, 2, \dots, P\}$$

Para un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *ponderado*:

$$(3.11b) \quad \mathcal{D} = \text{diag}(d_o(v_i)) \quad \forall i = \{1, 2, \dots, P\}$$

D- 3.2.4. La **matriz de adyacencia** $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{P \times P}$ es una matriz *cuadrada* que indica si un nodo es *adyacente* a otro [50, p. 9]:

Para un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *no ponderado*:

$$(3.12a) \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \text{ si } j \in \mathcal{N}_i, \\ 0 & ; \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Para un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *ponderado*:

$$(3.12b) \quad a_{ij} = \begin{cases} \varpi & ; \text{ si } (v_i, v_j) \in \mathcal{E}, \\ 0 & ; \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Si el conjunto de *nodos* puede expresarse como $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_x, \dots, v_P\}$, de la misma forma el conjunto de *arcos* puede expresarse como $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_y, \dots, e_M\}$; donde $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ y por lo tanto $e_y = (v_i, v_j) \forall y$ donde $y := \{1, 2, \dots, M\}$ y $M \leq P \times P$. Teniendo en consideración esto, es posible obtener una expresión matemática para describir un **grafo** asociando la incidencia entre el *nodo* v_x y el *arco* e_y .

La **matriz de incidencia** \mathcal{K} establece una relación entre el conjuntos de nodos \mathcal{V} y el conjunto de arcos \mathcal{E} .

D- 3.2.5. Considere un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ donde $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_P\}$ y $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_M\}$, entonces la **matriz de incidencia** $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{P \times M}$ está dada por [50, p. 9]:

Para un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *no ponderado*:

$$(3.13a) \quad k_{ij} = \begin{cases} -1 & ; \text{ si el arco } j \text{ comienza en el nodo } i, \\ 1 & ; \text{ si el arco } j \text{ termina en el nodo } i, \\ 0 & ; \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Para un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *ponderado*:

$$(3.13b) \quad k_{ij} = \begin{cases} -\varpi & ; \text{ si el arco } j \text{ comienza en el nodo } i, \\ \varpi & ; \text{ si el arco } j \text{ termina en el nodo } i, \\ 0 & ; \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

N- 3.2.6. De forma particular, es posible determinar la **matriz laplaciana** mediante la **matriz de incidencia** utilizando la expresión (3.14). Queda a criterio del lector profundizar en las características elementales del grafo, así como la arbitrariedad de la selección del sentido de los arcos *dirigidos* para que la expresión (3.14) sea válida [50, p. 9].

$$(3.14) \quad \mathcal{L} = \mathcal{K} \mathcal{K}^\top$$

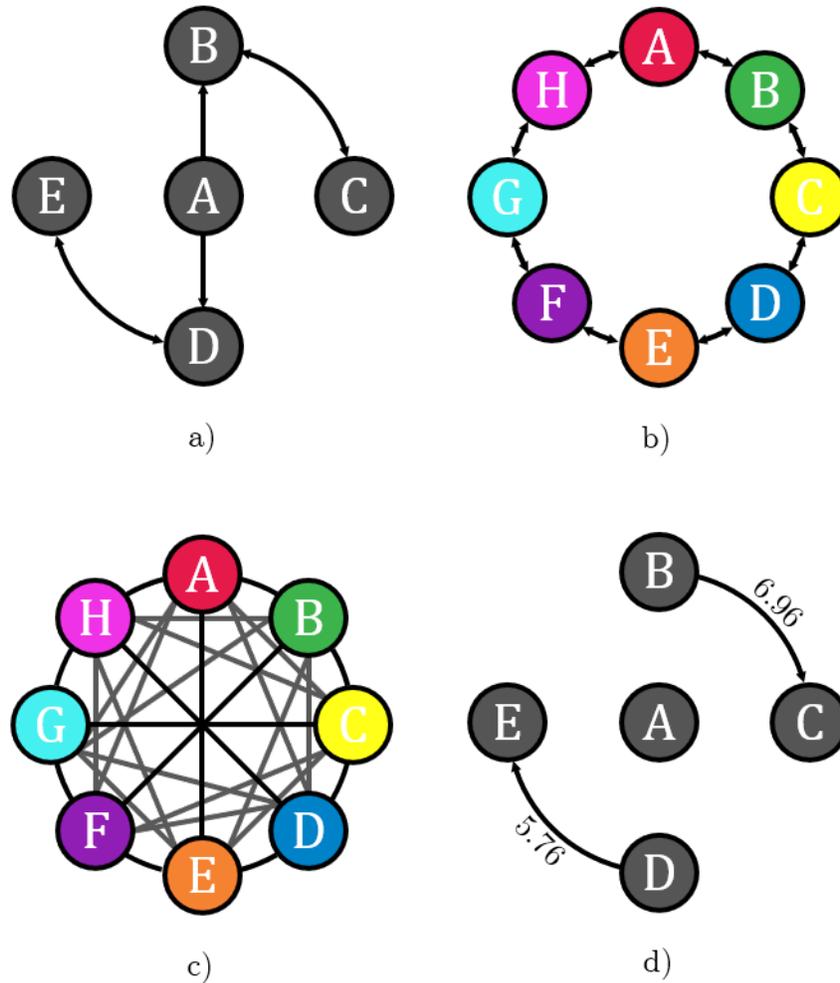


Figura 3.2
Ejemplos de diferentes de grafos

- a) Grafo caracterizado por ser: *homogéneo, dirigido, conectado y débilmente conectado.*
- b) Grafo caracterizado por ser: *heterogéneo, no dirigido, conectado y fuertemente conectado, además balanceado y regular.*
- c) Grafo caracterizado por ser: *heterogéneo, no dirigido, conectado y completo.*
- d) Grafo caracterizado por ser: *homogéneo, dirigido, no conectado y ponderado.*

A continuación se construye la **matriz laplaciana** \mathcal{L} de cada uno de los **grafos** $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ que se observan en la **Figura 3.2** utilizando la **D- 3.2.1**:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} & \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \text{b)} & \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix} \\
 \text{c)} & \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & 7 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & 7 & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 7 \end{bmatrix} \\
 \text{d)} & \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\beta & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +\delta & -\delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

N- 3.2.7. En lo sucesivo, se particularizará el análisis únicamente para grafos *no dirigidos* y *no ponderados* $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ porque son de especial interés para el presente trabajo de tesis.

PP 3.2.8. La matriz laplaciana \mathcal{L} de un grafo *no dirigido* $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tiene la propiedad de ser *simétrica* y *semipositiva definida* [49, p. 10].

D- 3.1.5 Se define que $\lambda_i(\mathcal{L})$ es el i -ésimo eigenvalor y que $\nu_i(\mathcal{L})$ es el i -ésimo eigenvector (derecho) de la matriz laplaciana \mathcal{L} para $i := \{1, 2, \dots, P\}$; además, se asocia el i -ésimo eigenvalor λ_i al i -ésimo eigenvector (derecho) ν_i de forma que en todo momento se cumple la relación $\mathcal{L}\nu_i = \lambda_i\nu_i$ [55, p. 44]

PP 3.1.10 En una matriz laplaciana \mathcal{L} de orden P es posible ordenar los eigenvalores como $\lambda_1(\mathcal{L}) \leq \lambda_2(\mathcal{L}) \leq \dots \leq \lambda_P(\mathcal{L}) \leq$ donde $\lambda_{\min} = \lambda_1(\mathcal{L})$ y $\lambda_{\max} = \lambda_P(\mathcal{L})$ [50, p. 18].

T- 3.2.9. El **Teorema de Gerschgorin** identifica una región en \mathbb{C} que contiene todos los eigenvalores de la matriz laplaciana \mathcal{L} donde se tiene que [60][61, p. 388-393]:

$$(3.15) \quad \bigcup_i \left\{ x : |\mathcal{L}_{ii} - x| \leq \sum_{j \neq i} |\mathcal{L}_{ji}| \right\}$$

PP 3.2.10. Del **T- 3.2.9** se sabe que los eigenvalores de la matriz laplaciana \mathcal{L} se localizan en una región centrada en $\max(d_o(v_i)) \pm \hat{\jmath}0$ de radio $\max(d_o(v_i))$ [62][50, p. 12]:

$$(3.16) \quad \lambda_{m\acute{a}x} \leq 2 \max(d_o(v_i))$$

PP 3.2.11. De acuerdo con la **D- 3.1.5** y la expresión (3.9), se observa que en la matriz laplaciana \mathcal{L} la adición de los elementos en un renglón es cero de forma que $\sum_j l_{ij} = 0$; por lo tanto, siempre existe un primer eigenvalor $\lambda_{m\acute{i}n} = 0$ asociado al eigenvector $\nu_1 = \mathbf{1}$ que corresponde al espacio nulo o al kernel de la matriz laplaciana \mathcal{L} tal que [50, p. 14][62]:

$$(3.17) \quad \mathcal{L}\mathbf{1} = \mathbf{0}$$

PP 3.2.12. El segundo eigenvalor más pequeño $\lambda_2(\mathcal{L})$ está asociado la *conectividad algebraica* de la matriz laplaciana \mathcal{L} . Es posible inferir una característica particular del grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ donde se sabe que $\lambda_2(\mathcal{L}) > 0$ si, y solo sí, el grafo es *conectado*; adicionalmente, se puede encontrar que la localización de los eigenvalores obedece la desigualdad [50, p. 19]:

$$(3.18) \quad \lambda_{m\acute{i}n} = 0 \leq \lambda_2 \leq \frac{P}{P-1} \min(d_o(v_i)) \leq \frac{P}{P-1} \max(d_o(v_i)) \leq \lambda_{m\acute{a}x}$$

3.3 Acoplamiento difuso

El concepto de **acoplamiento difuso** aparece durante el estudio de los esquemas de control de agentes interconectados para sistemas dinámicos idénticos uno de otro [51][52]. La **difusión** es una forma de interacción en donde existe una propagación del comportamiento dinámico hacia los agentes más cercanos, semejante al movimiento de entes en un punto de alta concentración a un punto de baja concentración.

En un esquema de control de agentes interconectados, el fenómeno de **sincronización** es una consecuencia del **acoplamiento difuso** entre los sistemas dinámicos [51].

Los sistemas dinámicos están *difusamente acoplados* si interactúan uno con otro a través de la expresión (3.19) donde $\xi > 0$ es una constante positiva que describe la fuerza de la interacción y y_i, y_j denota la señal de respuesta de los sistemas dinámicos i y j respectivamente como se muestra a continuación [51]:

$$(3.19) \quad u_i = \xi (y_j - y_i)$$

De igual manera, se dice que el esquema de control de agentes interconectados está *difusamente acoplada* si los sistemas dinámicos interactúan uno con otro a través de la expresión (3.20) donde adicionalmente ϖ corresponde a la ponderación de la interconexión y \mathcal{N}_i es el conjunto de vecindad del sistema dinámico i [51]:

$$(3.20) \quad u_i = \xi \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \varpi_{ij} (y_j - y_i)$$

3.4 Sincronización

La **sincronización** corresponde a la coordinación de una serie de eventos, cronometrados y definidos, para que un grupo de agentes actúe como un solo sistema dinámico [54, p. 7].

Tradicionalmente, en un sistema dinámico compuesto por *múltiples agentes*, el **controlador** de *un solo agente* únicamente conoce el comportamiento de sus estados. Esto quiere decir que cualquier incertidumbre o perturbación que se presente en el sistema dinámico será corregido únicamente por el agente afectado, degradando la coordinación y disminuyendo el desempeño. En consecuencia, los agentes restantes no responden a la incertidumbre o perturbación porque el **controlador** es incapaz de conocer cuándo y cómo se presenta este fenómeno indeseable.

La **sincronización** asegura que el comportamiento de los estados en todos los agentes presentes en un sistema dinámico estén gobernados por una *restricción* en común [54, p. 19].

La **sincronización** basada en el *acoplamiento cruzado* establece que la acción de control que efectúe el **controlador** de cada agente i está determinada por: en primer lugar, un *lazo de retroalimentación* para conocer el error entre el comportamiento de los estados \mathbf{x}_i y la trayectoria deseada \mathbf{x}^* ; y en segundo lugar, dos *lazos de retroalimentación* adicionales para conocer el error respecto al comportamiento de los estados de los agentes adyacentes \mathbf{x}_j (el agente antecesor $i - 1$ y el agente posterior $i + 1$) [54, p. 7].

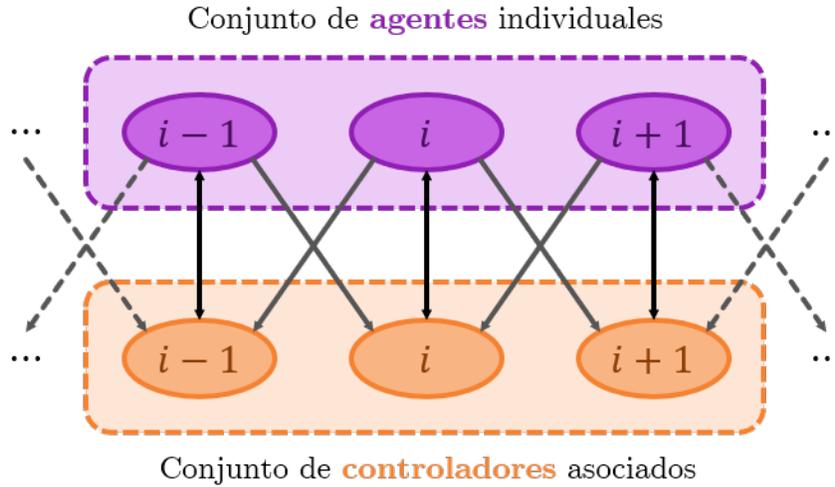


Figura 3.3
Sincronización basada en el acoplamiento cruzado

El **controlador** para *un solo agente* tradicionalmente tiene como principal objetivo de control que el comportamiento de los estados de un sistema dinámico $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ efectúen el seguimiento de una trayectoria deseada $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^N$, donde se utiliza la definición del error de seguimiento $\epsilon(t)$ de forma que eventualmente $\epsilon(t) \rightarrow 0$.

$$(3.21a) \quad \epsilon(t) = \mathbf{x}^*(t) - \mathbf{x}(t)$$

$$(3.21b) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = 0$$

Considere ahora un sistema dinámico compuesto por *múltiples agentes* donde se tiene el objetivo de control adicional de efectuar la sincronización del comportamiento de los estados de cada agente. Para ello, es necesario encontrar la *restricción asociada a la sincronización* que asegure el comportamiento coordinado de los estados en todos los agentes [54, p. 20-21].

La *restricción asociada a la sincronización* puede aparecer de distintas maneras y depende generalmente del objetivo de control. Como se mencionó anteriormente, usualmente se desea que el comportamiento de los estados $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^N$ de cada agente i con $i = \{1, 2, \dots, N\}$ efectúen el seguimiento una trayectoria deseada $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^N$; sin embargo, a veces es necesario considerar un desfaseamiento en el comportamiento de los estados para algunas situaciones en particular, como por ejemplo: durante la creación de una formación para un grupo de vehículos no tripulados en

movimiento o cuando un objeto con una geometría definida es cargado utilizando una serie de manipuladores robóticos.

En la **Figura 3.4** se observan dos manipuladores robóticos donde la *restricción asociada a la sincronización* queda determinada por la geometría del objeto que cargan [54, p. 22-23].

Una vez que se tiene el conocimiento de la *restricción asociada a la sincronización* es posible definir el *objetivo asociado a la sincronización* [54, p. 21].

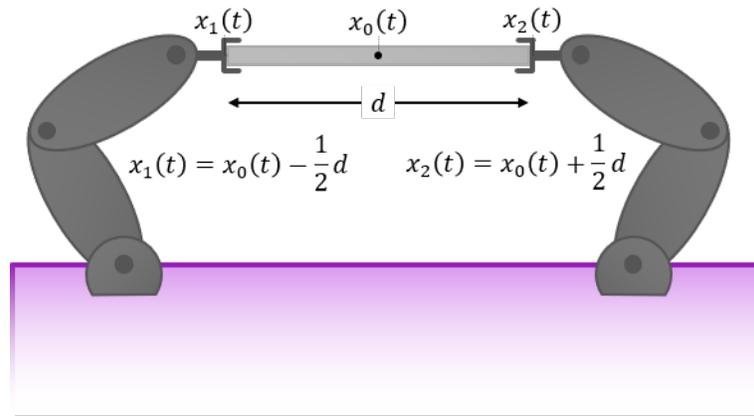


Figura 3.4

Sincronización de dos manipuladores robóticos

Si bien existe un método formal para conocer el *objetivo asociado a la sincronización* considerando el ejemplo del sistema dinámico de los dos manipuladores en [54, p. 22-23], sin pérdida de la generalidad es sencillo observar que ante la presencia de una incertidumbre o perturbación $x'_i(t)$, existe un efecto directo en el estado de referencia $x_0(t)$, independientemente del manipulador robótico i con $i = \{1, 2\}$ donde ocurra el fenómeno indeseable; para prevenir que el objeto caiga, es necesario que el **controlador** tenga como objetivo de control la sincronización del comportamiento de los estados de los agentes presentes. En este ejemplo en particular es necesario que el error de seguimiento $\epsilon_1(t)$ del primer manipulador robótico sea igual al error de seguimiento $\epsilon_2(t)$ del segundo manipulador robótico para mitigar los efectos $x'_i(t)$ en el escenario que se ha descrito.

Entonces la expresión que se muestra a continuación describe el *objetivo asociado a la sincronización*:

$$\epsilon_1(t) = \epsilon_2(t)$$

Realizando una manipulación algebraica del *objetivo asociado a la sincronización* se obtiene una expresión que es de mayor utilidad:

$$\epsilon_1(t) - \epsilon_2(t) = 0$$

Así como se utiliza la definición del error de seguimiento $\epsilon(t)$ como una medida de la evolución del seguimiento de una trayectoria deseada, se puede definir el error de sincronización $\epsilon(t)$ como una medida de la evolución de la sincronización del comportamiento de los estados de todos los agentes.

Cabe señalar que el error de sincronización $\epsilon(t)$ se debe de definir en función de la *restricción asociada a la sincronización* y del *objetivo asociado a la sincronización* [54, p. 26].

El **controlador** para *múltiples agentes* también tiene como objetivo de control que el comportamiento de los estados del agente i dados por $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^N$ efectúen la sincronización con el comportamiento de los estados del agente j dados por $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^N$, donde se utiliza la definición del error de sincronización $\epsilon_i(t)$ de forma que eventualmente $\epsilon_i(t) \rightarrow 0$.

$$(3.22a) \quad \epsilon_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [\epsilon_i(t) - \epsilon_j(t)]$$

$$(3.22b) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon_i(t) = 0$$

Entonces el **controlador** considera un objetivo *dual* en donde busca que el error de seguimiento y el error de sincronización sean cero, tal que $\epsilon_i(t) \rightarrow 0$ y que $\epsilon_i(t) \rightarrow 0$; De esta forma se efectúa el seguimiento de una trayectoria deseada y la sincronización del comportamiento de los estados de todos los agentes [54, p. 27].

Si bien la definición del error de seguimiento ϵ_i y del error de sincronización ϵ_i parecen ser exclusivas para el ejemplo de los dos manipuladores robóticos que se observa en la **Figura 3.4** (y en consecuencia, de la selección de la *restricción asociada a la sincronización* y del *objetivo asociado a la sincronización*), pueden aplicarse a otra clase de sistemas dinámicos.

La **sincronización** basada en el *acoplamiento cruzado* es descrita por **grafo** con una topología en forma de *anillo* como se muestra en el inciso *b)* de la **Figura 3.2**.

Bajo esta premisa, el esquema de control que se utiliza para el presente proyecto de tesis se caracteriza por formar un **grafo** con una topología en forma de *anillo*. Adicionalmente, el **controlador** que se utiliza de ahora en adelante se basa en el objetivo *dual* que se mencionó anteriormente, donde se emplean las definiciones del error de seguimiento y del error de sincronización que se presentaron a lo largo de esta sección porque están alineadas con la contribución de este trabajo.

3.5 Criterio de estabilidad de Lyapunov

El análisis de estabilidad de un sistema dinámico es una parte esencial en la ingeniería de control, y para el presente trabajo de tesis no es la excepción. Existen múltiples metodologías para determinar si un sistema dinámico es estable y difieren entre ellas de acuerdo a las condiciones con las que se realiza el análisis. El **criterio de estabilidad de Lyapunov** (en honor a A. M. Lyapunov) tradicionalmente realiza este estudio entorno a los *puntos de equilibrio* del sistema dinámico y permite demostrar si la solución está *acotada* [8, p. 111-112].

Un *punto de equilibrio* es **estable** si todas las soluciones que comienzan en una vecindad de dicho punto permanecen cerca de él; caso contrario, es **inestable**. El **criterio de estabilidad de Lyapunov** es una herramienta fundamental para los *sistemas no-lineales* o **NLSs** y establece condiciones suficientes para diferentes definiciones de estabilidad [8, p. 112].

D- 3.5.1. Se dice que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ es el **punto de equilibrio trivial** al *origen* si el sistema dinámico (3.1) satisface [55, p. 562]:

$$(3.23) \quad \mathbf{0} = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{0}) \text{ donde la trayectoria queda expresada por } \mathbf{x}(t) := \mathbf{x}(t; \mathbf{0}, t_0)$$

D- 3.5.2. Se dice que $\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0$ es un **punto de equilibrio** si el sistema dinámico (3.1) también satisface [55, p. 562]:

$$(3.24) \quad \mathbf{0} = \mathbf{f}(t_0, \bar{\mathbf{x}}_0) \text{ donde la trayectoria queda expresada por } \bar{\mathbf{x}}(t) := \bar{\mathbf{x}}(t; \bar{\mathbf{x}}_0, t_0)$$

Sin pérdida de la generalidad, cualquier punto de equilibrio puede trasladarse al origen a través de un cambio de variable. Tomando esto en cuenta, considere ahora el cambio de variable $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_0$ de forma que con la nueva variable \mathbf{y} el sistema dinámico (3.2) tiene el punto de equilibrio en el origen, de esta forma es posible estudiar la **estabilidad** de los puntos de equilibrio en el origen independientemente de donde se encuentren localizados originalmente [8, p. 112].

Si se tiene que:

$$(3.25a) \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}}$$

De la expresión anterior:

$$(3.25b) \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y} + \bar{\mathbf{x}}_0) \text{ donde } \mathbf{f}(t, \mathbf{y} + \bar{\mathbf{x}}_0) := \mathbf{g}(t, \mathbf{y})$$

Se dice que $\bar{\mathbf{V}}(t, \bar{\mathbf{x}})$ es una función *diferenciable* a lo largo de la trayectoria del sistema dinámico (3.1) dada por $\bar{\mathbf{x}}(t; \bar{\mathbf{x}}_0, t_0)$ y se calcula como [55, p. 563]:

De forma compacta:

$$(3.26a) \quad \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{V}}(t, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}(t, \bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{V}(t, \bar{\mathbf{x}})$$

Expandiendo los términos:

$$(3.26b) \quad \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{V}}(t, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}(t, \bar{\mathbf{x}}(t; \bar{\mathbf{x}}_0, t_0)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{V}(t, \bar{\mathbf{x}}(t; \bar{\mathbf{x}}_0, t_0))$$

D- 3.5.3. La **estabilidad del punto de equilibrio trivial** al *origen* del sistema dinámico (3.1) puede considerarse de diferentes formas, dos de ellas son [55, p. 563-564]:

- Es **estable localmente** si para cualquier constante $\eta > 0$ existe un tiempo $t'_0 \geq t_0 \geq 0$ y una vecindad $\vartheta(t'_0, \eta)$ tal que $\forall t \geq t_0$ se tiene que la norma *acotada* de la solución $\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)\|$ es menor que η , es decir que se cumple la desigualdad $\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)\| < \eta$ siempre que se tenga $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t'_0) \wedge \|\mathbf{x}_0\| < \vartheta$.
- Es **estable localmente y asintóticamente** si es **estable localmente** y además se tiene que el $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)\| = \mathbf{0}$.

T- 3.5.4. El **teorema de Lyapunov** (en honor a A.M. Lyapunov) formaliza el estudio de la **estabilidad del punto de equilibrio trivial** al *origen* del sistema dinámico (3.1) cuando se tiene el conocimiento de alguna trayectoria de la forma $\bar{\mathbf{x}}(t) := \bar{\mathbf{x}}(t; \bar{\mathbf{x}}_0, t_0)$ en una *función candidata* o *función de Lyapunov* $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ que cumple con las condiciones (i)-(iv); el resultado queda determinado ya sea por la condición (v) o por la condición (vi) que se observan a continuación [55, p. 566-569]:

- (i) La *función candidata* $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ está *definida* para $\|\mathbf{x}\| < h \wedge t \geq t_0$.
- (ii) Cuando $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, se tiene que la *función candidata* cumple que $\mathbf{V}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
- (iii) $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ es *continua*.
- (iv) $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ es *positiva definida*.
- (v) Es **estable localmente** si se tiene que $\bar{\mathbf{V}}(t, \bar{\mathbf{x}})$ decrece o no incrementa en $t \geq t_0 \forall \bar{\mathbf{x}}_0$ donde $\|\bar{\mathbf{x}}\| < h$.
- (vi) Es **estable localmente** y **asintóticamente** si se tiene que $\bar{\mathbf{V}}(t, \bar{\mathbf{x}})$ decrece monótonicamente hasta llegar a cero donde $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{V}}(t, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$.

D- 3.5.5. El **punto de equilibrio** de la **D- 3.5.3** es **estable globalmente** y **asintóticamente** si $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$ para cualquier $\bar{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ de norma *acotada* [55, p. 576].

T- 3.5.6. El **teorema de Barbashin-Krasovskii** (en honor a E.A. Barbashin y N.N. Krasovskii) amplía el resultado del **T- 3.5.4** donde el estudio de la **estabilidad del punto de equilibrio trivial** al *origen* del sistema dinámico (3.1) cuando la solución conocida de la forma $\bar{\mathbf{x}}(t) := \bar{\mathbf{x}}(t; \bar{\mathbf{x}}_0, t_0)$ en una *función candidata* o *función de Lyapunov* $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ que cumple con las condiciones (i)-(iv) y (vi) es ahora **estable globalmente** y **asintóticamente** si además $\bar{\mathbf{V}}(t, \bar{\mathbf{x}})$ es *radialmente no acotada* tal que el $\lim_{\|\bar{\mathbf{x}}\| \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{V}}(t, \bar{\mathbf{x}}) = \infty$ [55, p. 577].

N- 3.5.7. Observe que para utilizar el **criterio de estabilidad de Lyapunov** no es necesario que la *función candidata* o *función de Lyapunov* $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ sea *diferenciable*.

N- 3.5.8. Por otro lado, si la *función candidata* o *función de Lyapunov* $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ es *diferenciable*, entonces se tiene que $\dot{\mathbf{V}}(t, \dot{\mathbf{x}}) = \dot{\mathbf{V}}(t, \mathbf{f}(t, \mathbf{x}))$. Por lo tanto, ya no es necesario tener el conocimiento de alguna solución de la forma $\bar{\mathbf{x}}(t) := \bar{\mathbf{x}}(t; \bar{\mathbf{x}}_0, t_0)$ para realizar el estudio de la **estabilidad del punto de equilibrio trivial** al *origen* del sistema dinámico (3.1); el resultado

queda determinado por $\bar{V}(t, \bar{\mathbf{x}}) = \dot{V}(t, \mathbf{f}(t, \mathbf{x}))$ ya sea por la condición (v) o por la condición (vi) como se hace en el T- 3.5.4.

3.6 Análisis por contracción

El **análisis por contracción** permite estudiar la **estabilidad** de un sistema dinámico sin la necesidad de conocer algún *punto de equilibrio* o alguna *solución nominal*; un sistema dinámico es **estable** en una región de operación si las condiciones iniciales o las alteraciones temporales “desaparecen” [57][58].

Esto quiere decir cualquier trayectoria que tenga el comportamiento de los estados **converge** a una única solución. Básicamente el comportamiento de los estados es independiente de las condiciones iniciales o las alteraciones temporales, entonces es posible realizar un *análisis diferencial* para conocer si un *sistema no-lineales* o **NLSs** es **estable**; bajo esta última premisa, es útil considerar que el concepto de **convergencia** es homólogo al concepto de **estabilidad**, es decir, un sistema **contractivo** es un sistema **estable** [57, p. 1-8].

3.6.1 Sistemas dinámicos en una región de contracción

Para el desarrollo del **análisis por contracción** tenga en consideración también la información recuperada de otras secciones que se muestra a continuación:

D- 2.1.5 Un **desplazamiento virtual** $\delta\mathbf{x}$ ocurre cuando un sistema de coordenadas se desplaza una distancia infinitesimal para el mismo instante de tiempo.

De ahora en adelante se utiliza $\delta\mathbf{x}$ en lugar de $\delta\mathbf{r}$

De la **D- 2.1.5** se tiene que $\delta\mathbf{x}$ define una *forma diferencial tangencial lineal* y $\delta\mathbf{x}^\top\delta\mathbf{x}$ define una *forma cuadrática tangencial asociada*.

Considere dos trayectorias vecinas en el sistema dinámico (3.1) como se muestra en la **Figura 3.5**; por otro lado, se tiene que $\delta\mathbf{x}$ corresponde a un **desplazamiento virtual** entre las dos

trayectorias vecinas y que $\|\delta\mathbf{x}\|_2^2 = \delta\mathbf{x}^\top\delta\mathbf{x}$ es la **longitud de separación cuadrada** definida a través de la norma *euclídeana*.

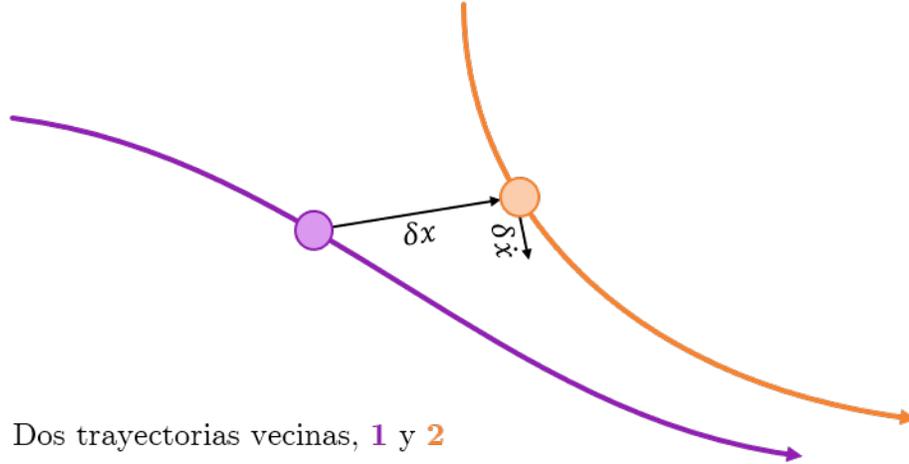


Figura 3.5

Dos trayectorias vecinas en el sistema dinámico (3.2)

A partir de las propiedades del sistema dinámico en (3.1), se puede asumir que es *continuamente diferenciable*; por lo tanto, para la *forma diferencial tangencial lineal* $\delta\mathbf{x}$:

$$(3.27) \quad \begin{aligned} \frac{d(\delta\mathbf{x})}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \delta\mathbf{x} \\ &= \delta\dot{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Si se hace lo mismo para la *forma cuadrática tangencial asociada* $\delta\mathbf{x}^\top\delta\mathbf{x}$ se obtiene la tasa de cambio como se muestra a continuación:

$$(3.28) \quad \frac{d(\delta\mathbf{x}^\top\delta\mathbf{x})}{dt} = \frac{d(\|\delta\mathbf{x}\|_2^2)}{dt} = 2(\delta\mathbf{x}^\top\delta\dot{\mathbf{x}}) = 2\delta\mathbf{x}^\top \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \delta\mathbf{x}$$

D- 3.6.1. Se le conoce como **matriz jacobiana** (en honor a C.G. Jacob Jacobi) a la matriz cuyos elementos son las derivadas parciales de primer orden de una función vectorial de varias variables; considerando el sistema dinámico que se muestra en (3.1), queda expresada de forma explícita como se observa a continuación [63]:

$$(3.29) \quad \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(t, \mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(t, \mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(t, \mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(t, \mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(t, \mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(t, \mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(t, \mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(t, \mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(t, \mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$= \mathfrak{F}(t, \mathbf{x})$$

D- 3.6.2. Cualquier matriz *cuadrada* $\underline{\mathbf{W}}$ puede escribirse como la adición de su *parte simétrica* $\underline{\mathbf{W}}_{\text{sim}}$ y su *parte antisimétrica* $\underline{\mathbf{W}}_{\text{ant}}$ donde [64]:

$$(3.30) \quad \underline{\mathbf{W}} = \underline{\mathbf{W}}_{\text{sim}} + \underline{\mathbf{W}}_{\text{ant}}$$

$$(3.30a) \quad \underline{\mathbf{W}}_{\text{sim}} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{W}} + \underline{\mathbf{W}}^\top)$$

$$(3.30b) \quad \underline{\mathbf{W}}_{\text{ant}} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{W}} - \underline{\mathbf{W}}^\top)$$

Analizando la expresión (3.28) y teniendo en consideración la **D- 3.6.1** y la **D- 3.6.2**: se observa que el término $\frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ corresponde a la **matriz jacobiana** $\mathfrak{F}(t, \mathbf{x})$ (de acuerdo con (3.29)); si originalmente no forma una matriz *simétrica*, entonces puede conocerse *parte simétrica* a través de $\mathfrak{F}_{\text{sim}}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} [\mathfrak{F}(t, \mathbf{x}) + \mathfrak{F}^\top(t, \mathbf{x})]$ (similar a (3.30a)).

Si se tiene que $\lambda_{\text{m}á\text{x}}(t, \mathbf{x}) = \lambda_n(\mathfrak{F}_{\text{sim}}(t, \mathbf{x}))$ donde:

$$(3.31a) \quad \frac{d(\delta \mathbf{x}^\top \delta \mathbf{x})}{dt} \leq 2 \lambda_{\text{m}á\text{x}}(t, \mathbf{x}) \delta \mathbf{x}^\top \delta \mathbf{x}$$

Entonces:

$$(3.31b) \quad \|\delta \mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\delta \mathbf{x}_0\|_2^2 e^{\int_0^t \lambda_{\text{m}á\text{x}}(t, \mathbf{x}) dt}$$

Se asume que $\lambda_{\text{m}á\text{x}}(t, \mathbf{x})$ es *uniformemente continua* y *definida negativa* tal que de la **D- 3.1.7** se selecciona una función *constante* $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \beta$ donde $\exists \beta > 0 \forall \mathbf{x} \wedge t \geq 0$ tal que $\lambda_{\text{m}á\text{x}}(t, \mathbf{x}) \leq -\beta < 0$; entonces para cualquier desplazamiento virtual $\delta \mathbf{x}$ se tiene que la longitud de separación cuadrada $\|\delta \mathbf{x}\|_2^2$ converge exponencialmente a cero.

D- 3.6.3. Sea el sistema dinámico (3.1), se dice que una región (un conjunto *abierto* y *conexo*) del espacio de estados es una **región de contracción** si se cumple que [57, p. 4]:

Considere que $\exists \beta \in \mathbb{R} > 0 \forall \mathbf{x} \wedge t \geq 0$ es una función *constante*

$$(3.32) \quad \tilde{\mathfrak{F}}_{\text{sim}}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top \right] \preceq -\beta \mathbf{I} \prec \mathbf{0}$$

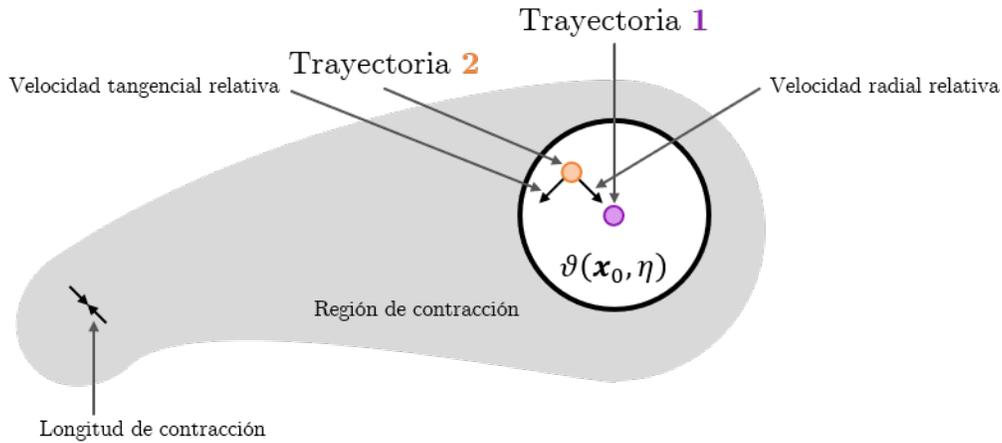


Figura 3.6

Región de contracción en el sistema dinámico (3.1)

Considere ahora una vecindad centrada en alguna trayectoria \mathbf{x}_0 de radio constante η denotada por $\vartheta(\mathbf{x}, \eta)$ que permanece en la **región de contracción** en todo momento; dado que la longitud de separación cuadrada $\|\delta \mathbf{x}\|_2^2$ decrece de forma exponencial tal que el $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\delta \mathbf{x}\|_2^2 = 0$ en la **región de contracción**, esto implica que cualquier otra trayectoria $\mathbf{x}'(t; \mathbf{x}'_0, t_0)$ que comience en la vecindad $\vartheta(\mathbf{x}, \eta)$ permanece también dentro de ella en todo momento y **converge localmente** y **exponencialmente** a la primera trayectoria $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ dada.

T- 3.6.4. Sea el sistema dinámico (3.2) y una vecindad centrada en alguna trayectoria de radio constante; si una trayectoria adicional comienza dentro de la vecindad y se mantiene en la **región de contracción** en todo momento, entonces la trayectoria adicional permanece dentro de la vecindad y **converge localmente** y **exponencialmente** a la trayectoria original. Si todo el espacio de estados es una **región de contracción** entonces cualquier otra trayectoria adicional **converge globalmente** y **exponencialmente** a la trayectoria original [57, p. 4].

El **T- 3.6.4** establece condiciones suficientes para el **criterio de convergencia**, sin embargo, es posible extenderlo a través de una generalización de la longitud de separación cuadrada donde se obtienen condiciones necesarias y suficientes; de forma general se presenta el procedimiento para lo anterior y que puede encontrarse en [57, p. 1-8].

Cabe señalar que muchos conceptos no se exponen apropiadamente dado que exceden los límites del presente trabajo de tesis como: *análisis generalizado de eigenvalores, análisis de métricas, tensores, espacios topológicos*, entre otros; queda a criterio del lector profundizar en ellos para comprender la justificación detrás del **análisis por contracción**.

El **desplazamiento virtual** $\delta \mathbf{x}$ entre dos trayectorias vecinas puede ser expresado también como una *transformación en coordenadas diferenciales* donde $\underline{\Theta}(t, \mathbf{x})$ es una matriz *cuadrada*.

$$(3.33) \quad \delta \mathbf{w} = \underline{\Theta}(t, \mathbf{x}) \delta \mathbf{x}$$

Esto lleva a una generalización de la **longitud de separación cuadrada** $\|\delta \mathbf{x}\|_2^2 = \delta \mathbf{x}^\top \delta \mathbf{x}$ donde $\underline{\Upsilon}(t, \mathbf{x}) = \underline{\Theta}^\top(t, \mathbf{x}) \underline{\Theta}(t, \mathbf{x})$ es una **métrica** caracterizada por ser *simétrica, continuamente diferenciable*, y que se asume *uniformemente continua y definida positiva*; de tal forma que si $\delta \mathbf{w}$ **converge exponencialmente** a $\mathbf{0}$ implica que $\delta \mathbf{x}$ también lo haga a $\mathbf{0}$.

$$(3.34) \quad \begin{aligned} \|\delta \mathbf{w}\|_2^2 &= \delta \mathbf{w}^\top \delta \mathbf{w} \\ &= \delta \mathbf{x}^\top \underline{\Upsilon}(t, \mathbf{x}) \delta \mathbf{x} \end{aligned}$$

De forma similar al procedimiento realizado en (3.27), la derivada en el tiempo de (3.33) está dada por:

$$(3.35) \quad \delta \dot{\mathbf{w}} = \frac{d(\delta \mathbf{w})}{dt} = \dot{\underline{\Theta}} \delta \mathbf{x} + \underline{\Theta} \delta \dot{\mathbf{x}} = \left(\dot{\underline{\Theta}} + \underline{\Theta} \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) \underline{\Theta}^{-1} \delta \mathbf{w}$$

Continuando con el procedimiento, a partir de lo que se hace (3.28), la derivada en el tiempo de (3.34) queda expresada como:

$$(3.36) \quad \frac{d(\delta \mathbf{w}^\top \delta \mathbf{w})}{dt} = \frac{d(\|\delta \mathbf{w}\|_2^2)}{dt} = 2(\delta \mathbf{w}^\top \delta \dot{\mathbf{w}}) = 2 \delta \mathbf{w}^\top \left(\dot{\underline{\Theta}} + \underline{\Theta} \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) \underline{\Theta}^{-1} \delta \mathbf{w}$$

Entonces la ecuación (3.36) describe la tasa de cambio de la **longitud de separación cuadrada** a través de las *coordenadas diferenciales* $\delta\mathbf{w}$; de ahí, el término $\mathfrak{F}'(t, \delta\mathbf{w}, \mathbf{x}) = (\underline{\dot{\Theta}} + \underline{\Theta} \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}) \underline{\Theta}^{-1} \delta\mathbf{w}$ se asocia a la **matriz jacobiana** y se le conoce formalmente como la **derivada covariante** (ver [57, p. 6]) de $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ a través de las *coordenadas diferenciales* $\delta\mathbf{w}$.

Homólogo al razonamiento que se hace en la **D- 3.6.3** y en el **T- 3.6.4**, se tiene que $\delta\mathbf{w}$, y por ende, $\delta\mathbf{x}$, **convergen localmente y exponencialmente** a $\mathbf{0}$ en alguna **región de contracción** del espacio de estados que se puede encontrar cuando la **derivada covariante** $\mathfrak{F}'(t, \delta\mathbf{w}, \mathbf{x})$ es *uniformemente continua y negativa definida*.

La ecuación (3.35) puede ser expresada en las coordenadas originales $\delta\mathbf{x}$ como se muestra a continuación:

$$(3.37) \quad \underline{\Theta}^\top \delta \dot{\mathbf{w}} = \underline{\Theta}^\top \frac{d(\delta \mathbf{w})}{dt} = \underline{\Upsilon} \delta \dot{\mathbf{x}} + \underline{\Theta}^\top \underline{\dot{\Theta}} \delta \mathbf{x} = \left(\underline{\Upsilon} \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \underline{\Theta}^\top \underline{\dot{\Theta}} \right) \delta \mathbf{x}$$

Se le conoce formalmente a $\underline{\Upsilon} \delta \dot{\mathbf{x}} + \underline{\Theta}^\top \underline{\dot{\Theta}} \delta \mathbf{x}$ como el **covariante diferencial de velocidad** (ver [57, p. 8]); entonces, la tasa de cambio para la longitud de separación está dada por:

$$(3.38) \quad \frac{d(\delta \mathbf{w}^\top \delta \mathbf{w})}{dt} = \delta \mathbf{x}^\top \left[\left(\frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top \underline{\Upsilon} + \underline{\dot{\Upsilon}} + \underline{\Upsilon} \left(\frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) \right] \delta \mathbf{x}$$

Recordando que la tasa de cambio de la longitud de separación a partir de la ecuación (3.34) quedaría definida como:

$$(3.39) \quad \frac{d(\delta \mathbf{w}^\top \delta \mathbf{w})}{dt} = \frac{d(\delta \mathbf{x}^\top \underline{\Upsilon}(t, \mathbf{x}) \delta \mathbf{x})}{dt} ; \quad \underline{\Upsilon}(t, \mathbf{x}) = \underline{\Theta}^\top(t, \mathbf{x}) \underline{\Theta}(t, \mathbf{x})$$

D- 3.6.5. Sea el sistema dinámico (3.1), se dice que una región (un conjunto *abierto* y *conexo*) del espacio de estados es una **región de contracción** si se cumple que [57, p. 8]:

Considere que $\exists \beta \in \mathbb{R} > 0 \forall \mathbf{x} \wedge t \geq 0$ es una función *constante*

$$(3.40) \quad \left(\frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top \underline{\Upsilon} + \underline{\dot{\Upsilon}} + \underline{\Upsilon} \left(\frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) \preceq -\beta \underline{\Upsilon}$$

Así como la **D- 3.6.5** es una generalización de la **D- 3.6.3**, el **T- 3.6.6** es también una generalización del **T- 3.6.4**.

T- 3.6.6. Sea el sistema dinámico (3.1) y una vecindad centrada en alguna trayectoria de radio constante respecto a una **métrica** $\underline{\mathbf{Y}}(t, \mathbf{x})$ caracterizada por ser *simétrica, continuamente diferenciable*, y que se asume *uniformemente continua y definida positiva*; si una trayectoria adicional comienza dentro de la vecindad y se mantiene en la **región de contracción** en todo momento, entonces la trayectoria adicional permanece dentro de la vecindad y **converge localmente y exponencialmente** a la trayectoria original. Si todo el espacio de estados es una **región de contracción** respecto a la **métrica** $\underline{\mathbf{Y}}(t, \mathbf{x})$, entonces cualquier otra trayectoria adicional **converge globalmente y exponencialmente** a la trayectoria original [57, p. 8].

3.6.2 Combinación de sistemas dinámicos

El **análisis por contracción** para *sistemas no-lineales* o **NLSs** tiene beneficio en particular de que puede extenderse para diferentes combinaciones de un número arbitrario de sistemas dinámicos; por mencionar algunos ejemplos de combinaciones, los sistemas dinámicos pueden conectarse en serie o paralelo. Esto quiere decir que si en al menos dos sistemas dinámicos se ha identificado una **región de contracción** donde cualquier trayectoria **converge exponencialmente** (ya sea **localmente** o **globalmente**) una con otra, entonces para una combinación en específico de ambos, la propiedad de **convergencia** se conserva [65, 66].

A continuación se presenta el desarrollo para una combinación jerárquica de dos sistemas dinámicos, que es el caso que es de especial interés para el presente trabajo de tesis.

Considere dos sistemas dinámicos de la forma (3.1) denotados por $i := \{1, 2\}$ tal que se tiene $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}_1)$ y $\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}_2)$ posiblemente de diferente *dimensión* n_i y de diferente *métrica* $\underline{\mathbf{Y}}_i$ conectados en serie donde el comportamiento dinámico queda expresado en *coordenadas virtuales* de la forma [66]:

$$(3.41) \quad \begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{w}}_1 \\ \delta \dot{\mathbf{w}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{w}_1 \\ \delta \mathbf{w}_2 \end{bmatrix}$$

Analizando el formato del sistema dinámico (3.41), se observa claramente que la primera ecuación no depende de la segunda. Utilizando la **D- 3.6.3** se puede demostrar que $\mathbf{W}_{11}\delta\mathbf{w}_1$ **converge exponencialmente a 0** si \mathbf{W}_{11} es *negativa definida*; y lo mismo puede ocurrir para $\mathbf{W}_{22}\delta\mathbf{w}_2$ si las condiciones también se cumplen. Por otro lado, $\mathbf{W}_{21}\delta\mathbf{w}_1$ es una *perturbación*

que se desvanece de *forma exponencial*, por lo tanto, el sistema dinámico 3.41 **converge exponencialmente** a $\mathbf{0}$ [57].

T- 3.6.7. El sistema dinámico (3.41) es un sistema **contractivo** siempre y cuando \mathbf{W}_{21} este *acotado* [65, 66].

Este resultado puede extenderse para sistemas dinámicos de más de dos ecuaciones, utilizándolo de forma recursiva como se muestra anteriormente.

EM3.6.8. En el control por modos deslizantes puede interpretarse una combinación jerárquica para la variable compuesta ς de magnitudes físicas como *posición* \tilde{x} y *velocidad* $\dot{\tilde{x}}$ (en términos del error) como $\varsigma = \dot{\tilde{x}} + \gamma\tilde{x}$ donde el **T- 3.6.7** provee de un marco de referencia para realizar el análisis por contracción de dos ecuaciones como [65, 66]:

$$(3.42a) \quad \dot{\varsigma} = \tau(\varsigma, t) \quad \text{Sistema } \mathbf{contractivo} \text{ debido a la selección de la } \textit{ley de control}$$

$$(3.42b) \quad \varsigma = \dot{\tilde{x}} + \gamma\tilde{x} \quad \text{Sistema } \mathbf{contractivo} \text{ por la definición de } \varsigma$$

3.6.3 Contracción parcial

El concepto de **contracción parcial** permite extender el **análisis por contracción** cuando no se puede encontrar una **región de contracción**. Originalmente se desea saber si cualquier trayectoria de un sistema dinámico **converge exponencialmente** (ya sea **localmente** o **globalmente**) una con otra; sin embargo, la **contracción parcial** realiza una interpretación más relajada donde busca **convergencia** a propiedades específicas (como *igualdad en las componentes de los estados* o *permanencia en una subvariedad*) [58].

La contracción parcial es una herramienta especialmente poderosa para estudiar el fenómeno de sincronización en un esquema de control de agentes interconectados.

Considere el sistema *original* en (3.43a) y el sistema *auxiliar* en (3.43b); cabe señalar que el sistema dinámico (3.43b) es un sistema **contractivo** con respecto a \mathbf{y} .

$$(3.43a) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)$$

$$(3.43b) \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)$$

T- 3.6.9. Si en una solución en particular del sistema *auxiliar* (3.44) se verifica una propiedad específica de *diferenciabilidad* y/o *suavidad*, entonces para cualquier trayectoria del sistema *original* (3.44) se valida la misma propiedad pero de forma **exponencial** y se categoriza como un sistema **parcialmente contractivo** [58].

Como se mencionó anteriormente, la *permanencia en una subvariedad* es otra de las propiedades específicas que puede verificar el concepto de **contracción parcial**. En [67, p. 121] y en [68] se puede encontrar un par de ejemplos de la forma de verificar la existencia una *subvariedad lineal e invariante* del espacio de estados.

3.6.4 Sincronización y contracción parcial

Ahora se extiende el concepto de contracción parcial como una interpretación del fenómeno de sincronización; considere dos sistemas dinámicos acoplados $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, t)$ y $\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, t)$.

T- 3.6.10. Si se satisface la expresión (3.44) y se tiene que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, t)$ es un sistema **contractivo** independientemente de **métrica** que se seleccione, entonces \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 **convergen exponencialmente** independientemente de las condiciones iniciales o alteraciones temporales [67, p. 56].

$$(3.44) \quad \dot{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, t) = \dot{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, t)$$

Matemáticamente, la **sincronización concurrente** verifica la existencia una *subvariedad lineal e invariante* del espacio de estados [67, p. 56].

Esquema de control para el caso de un solo agente

La síntesis de un controlador para *sistemas no-lineales* o **NLSs** generalmente solo es posible para casos muy particulares. Esto se debe evidentemente a la complejidad del modelo matemático del sistema dinámico que incorpora elementos no-lineales, pero también principalmente a que no existe una estructura definida para el modelo matemático en muchos casos.

Independientemente de ello, se ha logrado identificar una clase en particular de *sistemas no-lineales* o **NLSs** que se estudiaron en el **Capítulo 2** denominados **Sistemas-EL**. Bajo esta premisa, dado que ahora se conoce una estructura en particular, se facilita el desarrollo de metodologías para la síntesis de controladores.

Como se mencionó previamente, esta clase de sistemas dinámicos abarcan una amplia gama de aplicaciones en diferentes ramas de la ingeniería, incluyendo la electricidad y la electrónica.

Gran parte del desarrollo de las metodologías para la síntesis de controladores en los **Sistemas-EL** se ha suscitado en la rama de la robótica; sin embargo, dado que se maneja una estructura en particular con características bien definidas, debe de ser posible utilizarlo en algún otro tipo de sistema dinámico siempre que se tenga en consideración los requisitos para su implementación.

El **controlador** propuesto está orientado específicamente a manipuladores robóticos donde se utiliza un modelo matemático por energía formando un **Sistema-EL** en función de sus **Parámetros-EL**. A pesar de ello y retomando lo anterior, dado que se considera una estructura en particular, esto no impide que se pueda utilizar también, por ejemplo, para los convertidores de potencia instalados en una microrred eléctrica donde ya se obtuvo el modelo matemático por energía para diferentes clases de inversores en el **Capítulo 2**.

Posteriormente, se extiende el desarrollo para incluir la sincronización del comportamiento de los estados como una tarea de control adicional.

El **controlador** para *un solo agente* que se utiliza en el presente trabajo de tesis está inspirado en el *controlador adaptivo de Slotine* (en honor a J.J. Slotine) [41, 42]; está sintonizado para realizar dos tareas de control en específico como se muestra a continuación donde se garantiza un comportamiento **estable globalmente** y **asintóticamente**:

1. El seguimiento de una trayectoria deseada $\mathbf{q}^*(t)$ para establecer el comportamiento de los estados.
2. La estimación de parámetros desconocidos $\boldsymbol{\theta}$ para compensar incertidumbres o perturbaciones en el modelo matemático

4.1 Controlador para un solo agente

Antes de presentar el **controlador** para *un solo agente* considere algunas de las propiedades que posee un **Sistema-EL** en términos de sus **Parámetros-EL**.

PP 2.1.25 El **Sistema-EL** de la N- **2.1.18** mediante una manipulación apropiada puede tener una representación alternativa como se muestra en (2.21) donde $\underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ se conoce como la *matriz de fuerzas centrífugas/de coriolis* y $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$ es una fuerza o par (generalizado) que aparece debido a la presencia de campos de potencia [39, 40].

$$(2.21) \quad \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

PP 2.1.26 El **Sistema-EL** de la forma (2.21) puede ser parametrizado linealmente mediante una *matriz de regresión* de funciones conocidas $\underline{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ y un vector que contiene los *parámetros desconocidos* $\boldsymbol{\theta}$ tal que $\underline{\Phi} \in \mathbb{R}^{N \times R}$ y $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^R$ para la implementación de una *ley de estimación* en el esquema de control como se verá más adelante [19, p. 29][39-42].

$$(2.22) \quad \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) = \underline{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\theta}$$

Sea una trayectoria deseada $\mathbf{q}^*(t) \in \mathbb{R}^N$ y sean algunos o todos los parámetros desconocidos $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^R$, se deriva una *ley de control* que permite realizar el seguimiento de la trayectoria deseada en (4.1) y una *ley de estimación* que a la vez puede ejecutar la estimación de los parámetros desconocidos en (4.2) donde $\underline{\mathbf{A}}$ y $\underline{\mathbf{B}}$ son matrices *constantes y positivas definidas*.

$$(4.1) \quad \tau(t) = \widehat{\underline{\mathbf{M}}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}' + \widehat{\underline{\mathbf{C}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}') \dot{\mathbf{q}}' + \widehat{\underline{\mathbf{G}}}(\mathbf{q}) - \underline{\mathbf{B}}\varsigma$$

$$(4.2) \quad \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(t) = -\underline{\mathbf{A}} \underline{\Phi}^\top(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}', \ddot{\mathbf{q}}') \varsigma$$

De la *ley de control* en (4.1), el operador $\widehat{\cdot}$ se emplea para distinguir a un objeto matemático donde se realizó una estimación parámetros; es decir, $\widehat{\underline{\mathbf{M}}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}' + \widehat{\underline{\mathbf{C}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}') \dot{\mathbf{q}}' + \widehat{\underline{\mathbf{G}}}(\mathbf{q})$ (ignore por el momento $\{\dot{\mathbf{q}}'(t), \ddot{\mathbf{q}}'(t)\}$) denota que en el **Sistema-EL** se ha sustituido el *valor actual de los parámetros desconocidos* $\boldsymbol{\theta}$ por la *estimación de los parámetros desconocidos* $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$.

Por otro lado, de la *ley de estimación* en (4.2) se tiene que $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(t)$ contiene el comportamiento dinámico de la *estimación de los parámetros desconocidos*.

El operador $\tilde{\cdot}$ se emplea para denotar el error de una variable como una relación entre un valor actual y, un valor deseado o un valor estimado. En consecuencia, es posible definir que $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ es el error de seguimiento para el comportamiento de la posición y $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)$ es el error de estimación como se muestra a continuación:

$$(4.3a) \quad \tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^*(t)$$

$$(4.3b) \quad \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \boldsymbol{\theta}$$

Teniendo en consideración la ecuación (4.3b), para el **Sistema-EL** también es posible definir que:

$$(4.4) \quad \widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) = \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) ; \quad \widetilde{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \widehat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) ; \quad \widetilde{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) = \widehat{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) - \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{q})$$

La *ley de control* garantiza que el error de seguimiento para el comportamiento de la posición converge tal que el $\lim_{t \rightarrow \infty} \widetilde{\mathbf{q}}(t) = 0$, de esta forma, no existe error en estado estable. Esto es posible si el comportamiento de los estados se restringe a permanecer en una *superficie deslizante* que modifica la trayectoria deseada de la velocidad $\dot{\mathbf{q}}^*(t)$ en términos del error de seguimiento para el comportamiento de la posición como se muestra en (4.5) donde $\underline{\mathbf{\Gamma}}$ es una matriz *constante y positiva definida*.

$$(4.5) \quad \ddot{\widetilde{\mathbf{q}}}(t) + \underline{\mathbf{\Gamma}}\widetilde{\mathbf{q}}(t) = 0$$

Entonces, teniendo en consideración la expresión anterior, se define $\mathbf{q}'(t)$ y sus derivadas $\{\dot{\mathbf{q}}', \ddot{\mathbf{q}}'\}$ como coordenadas auxiliares en (4.6).

$$(4.6) \quad \mathbf{q}'(t) = \mathbf{q}^*(t) - \underline{\mathbf{\Gamma}} \int_0^t \widetilde{\mathbf{q}}(t) dt$$

$$(4.6a) \quad \dot{\mathbf{q}}'(t) = \dot{\mathbf{q}}^*(t) - \underline{\mathbf{\Gamma}}\widetilde{\mathbf{q}}(t)$$

$$(4.6b) \quad \ddot{\mathbf{q}}'(t) = \ddot{\mathbf{q}}^*(t) - \underline{\mathbf{\Gamma}}\dot{\widetilde{\mathbf{q}}}(t)$$

Por otro lado, la parametrización lineal del en términos de la ecuación (2.22) de la **PP 2.1.26** para el **Sistema-EL** en coordenadas auxiliares quedaría como:

$$(4.7) \quad \widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}' + \widetilde{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}' + \widetilde{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) = \underline{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}', \ddot{\mathbf{q}}') \widetilde{\boldsymbol{\theta}}$$

Finalmente, $\boldsymbol{\varsigma}$ puede interpretarse como una medida de la precisión del seguimiento de la trayectoria deseada $\mathbf{q}^*(t)$ y se asemeja a lo que se observó en el **EM3.6.8**.

$$(4.8) \quad \boldsymbol{\varsigma} = \dot{\mathbf{q}}(t) - \dot{\mathbf{q}}'(t) \\ = \dot{\widetilde{\mathbf{q}}}(t) + \underline{\mathbf{\Gamma}}\dot{\widetilde{\mathbf{q}}}(t)$$

En la **Figura 4.1** se observa el diagrama de bloques del **controlador** para *un solo agente* que integra la *ley de control* y la *ley de estimación* que se utiliza en el presente trabajo de tesis.

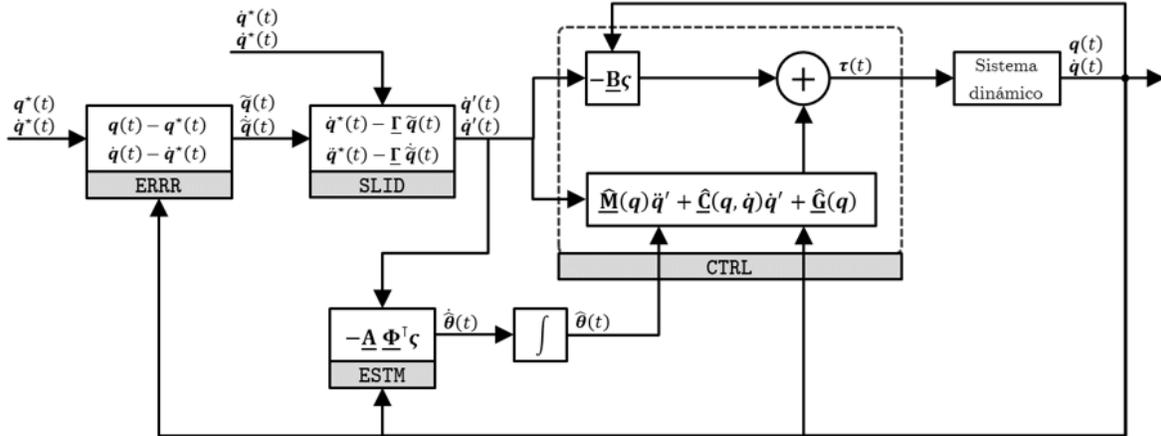


Figura 4.1
Controlador para un solo agente

Cabe señalar que el **controlador** para *un solo agente* no requiere de la estimación del comportamiento de la aceleración $\ddot{q}(t)$ para determinar la acción de control $\tau(t)$. Cada uno de los dos lazos que aparecen en el diagrama de bloques de la **Figura 4.1** es responsable de una tarea de control diferente como se describe a continuación:

1. Un lazo de retroalimentación de acción proporcional-derivativa diseñado para garantizar la **estabilidad** del sistema y el seguimiento de una trayectoria.
2. Un lazo de realimentación diseñado para compensar el comportamiento dinámico del sistema completo de la mano con una *ley de estimación* para la estimación de los parámetros desconocidos y compensar la incertidumbre paramétrica como un control adaptativo para aumentar la robustez del modelo matemático.

4.2 Demostración

La síntesis del **controlador** para *un solo agente* utiliza el **criterio de estabilidad de Lyapunov** como herramienta matemática que permite deducir la *ley de control* y la *ley de*

estimación, además de garantizar que es **estable globalmente** y **asintóticamente**; por ello, tenga en consideración lo que se revisó en la **Sección 3.5**:

- **T- 3.5.4.**
- **T- 3.5.6.**
- **N- 3.5.7.**
- **N- 3.5.8.**

Adicionalmente tenga en cuenta la **PP 2.1.28** que permitirá reducir y simplificar las ecuaciones para obtener el **controlador** propuesto.

PP 2.1.28 En el **Sistema-EL** de la forma (2.21) es necesario que la matriz de fuerzas centrífugas/de coriolis $\underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ esté definida de tal forma que se cumpla cualquiera de las dos ecuaciones (2.23) y (2.24) (son ecuaciones equivalentes); esta propiedad es fundamental para demostrar la estabilidad del **controlador** para un solo *agente* [39-42].

$$(2.23) \quad \underline{\dot{\mathbf{M}}}(\mathbf{q}) = \underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \underline{\mathbf{C}}^\top(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

$$(2.24) \quad \underline{\Psi} = \underline{\dot{\mathbf{M}}} - 2\underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \text{ forma una } \textit{matriz antisimétrica} \text{ tal que } \underline{\Psi} = -\underline{\Psi}^\top$$

Considere la *función candidata* en (4.9) con las características que se mencionan en el **T- 3.5.4** y en la **N- 3.5.7** donde $\underline{\mathbf{K}}$ es una matriz *constante y definida positiva*. Adicionalmente, tenga en cuenta la definición de $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ como el error de seguimiento en (4.3a) y de $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)$ como el error de estimación en (4.3b).

$$(4.9) \quad \mathbf{V}(t) = \frac{1}{2} \left(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{q}}^\top \underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \underline{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \right)$$

Dado que $\mathbf{V}(t)$ es *diferenciable*, es posible utilizar la **N- 3.5.8** para verificar la **estabilidad**; diferenciando $\mathbf{V}(t)$ se tiene que:

$$(4.10) \quad \dot{\mathbf{V}}(t) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \underline{\dot{\mathbf{M}}}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{q}}^\top \underline{\dot{\mathbf{K}}} \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \underline{\dot{\mathbf{A}}} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$$

Si el **Sistema-EL** queda descrito por:

$$(4.11) \quad \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

Entonces despejando $\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}$ se tiene que:

$$(4.12) \quad \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} - \underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{q})$$

Se realiza una manipulación de la derivada de la *función candidata* como se muestra a continuación:

$$(4.13a) \quad \dot{V}(t) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \underline{\mathbf{M}}(\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}^*) + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{\underline{\mathbf{M}}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \underline{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$$

$$(4.13b) \quad = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \underline{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \underline{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}}^* + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{\underline{\mathbf{M}}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \underline{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$$

Para realizar el estudio de la **estabilidad** como se describe en la **N- 3.5.8**, se sustituye la ecuación (4.12) en la expresión anterior; de la misma forma, observe como se emplea la **PP 2.1.28** en las ecuaciones (4.14a) y (4.14b) para reducir y simplificar el procedimiento que se está realizando para obtener el **controlador** propuesto.

$$(4.14a) \quad \dot{V}(t) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T [\boldsymbol{\tau} - \underline{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{q}} - \underline{\mathbf{G}}] - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \underline{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}}^* + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{\underline{\mathbf{M}}} + (-\underline{\mathbf{C}} + \underline{\mathbf{C}}) \right] \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \underline{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$$

$$(4.14b) \quad = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T [\boldsymbol{\tau} - \underline{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{q}} - \underline{\mathbf{G}}] - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \underline{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}}^* + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \left[\frac{1}{2} (\dot{\underline{\mathbf{M}}} - 2\underline{\mathbf{C}}) + \underline{\mathbf{C}} \right] \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \underline{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$$

$$(4.14c) \quad = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T [\boldsymbol{\tau} - \underline{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{q}} - \underline{\mathbf{G}}] - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \underline{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}}^* + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \underline{\mathbf{C}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \underline{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$$

$$(4.14d) \quad = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T [\boldsymbol{\tau} - \underline{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}}^* - \underline{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{q}} + \underline{\mathbf{C}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \underline{\mathbf{G}}] + \tilde{\mathbf{q}}^T \underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \underline{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$$

$$(4.14e) \quad = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T [\boldsymbol{\tau} - \underline{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}}^* - \underline{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{q}} + \underline{\mathbf{C}} (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^*) - \underline{\mathbf{G}}] + \tilde{\mathbf{q}}^T \underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \underline{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$$

$$(4.14f) \quad = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T [\boldsymbol{\tau} - \underline{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}}^* - \underline{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{q}} + \underline{\mathbf{C}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \underline{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{q}}^* - \underline{\mathbf{G}}] + \tilde{\mathbf{q}}^T \underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \underline{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$$

Entonces, el resultado de la derivada de la *función candidata* es:

$$(4.15) \quad \dot{V}(t) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top [\boldsymbol{\tau} - \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}^* - \underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}^* - \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{q})] + \tilde{\mathbf{q}}^\top \underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \underline{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$$

Si se selecciona la *ley de control* $\boldsymbol{\tau}(t)$ como:

$$(4.16) \quad \boldsymbol{\tau}(t) = \widehat{\underline{\mathbf{M}}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}^* + \widehat{\underline{\mathbf{C}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}^* + \widehat{\underline{\mathbf{G}}}(\mathbf{q}) - \underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}} - \underline{\mathbf{B}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

Sustituyendo el término $\boldsymbol{\tau}(t)$ de la derivada de la *función candidata* en (4.15) por la *ley de control* en (4.16) de forma que:

$$(4.17a) \quad \dot{V}(t) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \left[\left(\widehat{\underline{\mathbf{M}}} \ddot{\mathbf{q}}^* + \widehat{\underline{\mathbf{C}}} \dot{\mathbf{q}}^* + \widehat{\underline{\mathbf{G}}} - \underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}} - \underline{\mathbf{B}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right) - \underline{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}}^* - \underline{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{q}}^* - \underline{\mathbf{G}} + \underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}} \right] + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \underline{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$$

$$(4.17b) \quad = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \left[\left(\widehat{\underline{\mathbf{M}}} - \underline{\mathbf{M}} \right) \ddot{\mathbf{q}}^* + \left(\widehat{\underline{\mathbf{C}}} - \underline{\mathbf{C}} \right) \dot{\mathbf{q}}^* + \left(\widehat{\underline{\mathbf{G}}} - \underline{\mathbf{G}} \right) - \underline{\mathbf{B}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}} + \underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}} \right] + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \underline{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$$

Si se utilizan las ecuaciones de (4.4) en (4.17b) para simplificar se tiene que:

$$(4.18) \quad \dot{V}(t) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \left[\widetilde{\underline{\mathbf{M}}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}^* + \widetilde{\underline{\mathbf{C}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}^* + \widetilde{\underline{\mathbf{G}}}(\mathbf{q}) - \underline{\mathbf{B}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right] + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \underline{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$$

La selección de la *ley de control* en (4.16) cancela los términos asociados a los *parámetros conocidos*, de forma que solo los *parámetros desconocidos* son retenidos; utilizando la ecuación (2.22) de la **PP 2.1.26** es posible parametrizar linealmente el **Sistema-EL** de la expresión (4.18) en términos de:

$$(4.19) \quad \widetilde{\underline{\mathbf{M}}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}^* + \widetilde{\underline{\mathbf{C}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}^* + \widetilde{\underline{\mathbf{G}}}(\mathbf{q}) = \underline{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}^*, \ddot{\mathbf{q}}^*) \tilde{\boldsymbol{\theta}}$$

A partir de la expresión anterior, se realiza una manipulación de la derivada de la *función candidata* donde:

$$(4.20a) \quad \dot{V}(t) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \left[\underline{\boldsymbol{\Phi}} \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \underline{\mathbf{B}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right] + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \underline{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$$

$$(4.20b) \quad = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \underline{\boldsymbol{\Phi}} \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \underline{\mathbf{B}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \underline{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$$

$$(4.20c) \quad = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \underline{\boldsymbol{\Phi}} \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \underline{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \underline{\mathbf{B}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

$$(4.20d) \quad = \left(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \underline{\boldsymbol{\Phi}} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \right)^\top + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \underline{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \underline{\mathbf{B}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

$$(4.20e) \quad = \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \underline{\boldsymbol{\Phi}}^\top \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \underline{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \underline{\mathbf{B}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

$$(4.20f) \quad = \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \left[\underline{\boldsymbol{\Phi}}^\top \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \underline{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \right] - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \underline{\mathbf{B}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

Si se selecciona una *ley de estimación* $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ tal que:

$$(4.21) \quad \underline{\boldsymbol{\Phi}}^\top (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}^*, \ddot{\mathbf{q}}^*) \hat{\tilde{\mathbf{q}}} + \underline{\mathbf{A}} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$$

Entonces la *ley de estimación* estaría dada por:

$$(4.22) \quad \dot{\hat{\tilde{\mathbf{q}}}}(t) = -\underline{\mathbf{A}}^{-1} \underline{\boldsymbol{\Phi}}^\top (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}^*, \ddot{\mathbf{q}}^*) \hat{\tilde{\mathbf{q}}}; \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}$$
 para parámetros desconocidos constantes

Finalmente, el resultado de la derivada de la *función candidata* sería:

$$(4.23) \quad \dot{\mathbf{V}}(t) = -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \underline{\mathbf{B}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

Donde se observa que se cumple la siguiente propiedad:

$$(4.24) \quad \dot{\mathbf{V}}(t) \preceq \mathbf{0}$$

Por lo tanto, la *ley de control* en (4.16) y la *ley de estimación* en (4.22) conforma un **controlador estable globalmente**.

La propiedad en (4.24) implica que el error en estado estable para el comportamiento de la velocidad es cero; sin embargo, esto no necesariamente garantiza que ocurra lo mismo para el comportamiento de la posición. Por lo tanto, se modifica la *ley de control* en (4.16) y la *ley de estimación* en (4.22) para resolver este problema.

De la **Sección 4.1** se sabe que si el comportamiento de los estados se restringe a permanecer en un *superficie deslizante* descrita por la ecuación (4.5), se elimina el error estado estable para el el comportamiento de la posición; para ello, considere nuevamente la definición de $\mathbf{q}'(t)$ y sus derivadas $\{\dot{\mathbf{q}}', \ddot{\mathbf{q}}'\}$ en (4.6) como coordenadas auxiliares.

De la misma forma, considere también la variable compuesta $\boldsymbol{\varsigma}$ definida en (4.8) para la selección de la *ley de control* y la *ley de estimación*.

Sea la *ley de control* dada por:

$$(4.25) \quad \boldsymbol{\tau}(t) = \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}' + \widehat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}' + \widehat{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) - \mathbf{B}\boldsymbol{\varsigma}$$

Y la *ley de estimación* expresada como:

$$(4.26) \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{\Phi}^\top(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}', \ddot{\mathbf{q}}')\boldsymbol{\varsigma}; \quad \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}$$
 para parámetros desconocidos constantes

Si se utiliza la *función candidata* que se muestra a continuación:

$$(4.27) \quad \mathbf{V}(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varsigma}^\top \mathbf{M}(\mathbf{q})\boldsymbol{\varsigma} + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{A}\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}$$

El resultado la derivada de la *función candidata* sería:

$$(4.28) \quad \dot{\mathbf{V}}(t) = -\boldsymbol{\varsigma}^\top \mathbf{B}\boldsymbol{\varsigma}$$

El error de seguimiento para el comportamiento de la posición converge a la *superficie deslizante* descrita en (4.5).

Observe además que la ganancia \mathbf{K} no aparece en la *función candidata*, esto se debe a que ya está incluido en la definición de las coordenadas auxiliares $\mathbf{q}'(t)$ y sus derivadas $\{\dot{\mathbf{q}}', \ddot{\mathbf{q}}'\}$.

Esto implica que:

$$(4.29) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

Por lo tanto, se puede verificar también que se cumple la siguiente propiedad:

$$(4.30) \quad \dot{\mathbf{V}}(t) \preceq \mathbf{0}$$

4.3 Condiciones para el controlador

En la implementación del **controlador** para *un solo agente* es necesario que el modelo matemático del sistema dinámico esté caracterizado de cierta forma. Independientemente de que el modelo matemático posea la estructura de un **Sistema-EL** en términos de sus **Parámetros-EL**, adicionalmente, es requisito que:

- (i) El modelo matemático es únicamente una función de $\mathbf{q}(t)$ y sus derivadas $\{\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}\}$.
- (ii) El sistema dinámico es *completamente actuado*.
- (iii) La matriz de inercia/masa generalizada $\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$ tiene las propiedades del **T- 2.1.19**.
- (iv) La matriz de fuerzas centrífugas/de coriolis $\underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ obedece la **PP 2.1.28**.

4.3.1 Sistemas dinámicos sub-actuados

Existe una clasificación para los sistemas dinámicos en términos de la relación que se tiene entre el número de grados de libertad $N = \dim(\mathbf{q}(t))$ y el número de entradas de control $\dim(\boldsymbol{\tau}(t))$. Evidentemente, el número de entradas de control está asociado al número de actuadores que posee el sistema dinámico.

En los sistemas eléctricos, un actuador corresponde a una fuente de alimentación que puede estar asociada a distintas formas de suministro energía como se observa en la **Figura 1.1**. Independientemente de la clase del inversor que se ha presentado en el **Capítulo 2**, todos cuentan con una, y solo una fuente de alimentación.

D- 4.3.1. Un sistema dinámico *completamente actuado* es aquel que tiene el mismo número de coordenadas generalizadas que de entradas de control tal que $\dim(\mathbf{q}(t)) = \dim(\boldsymbol{\tau}(t))$.

D- 4.3.2. Un sistema dinámico *sub-actuado* es aquel que tiene mayor número coordenadas de generalizadas que de entradas de control tal que $\dim(\mathbf{q}(t)) > \dim(\boldsymbol{\tau}(t))$.

4.3.2 Segmentación del controlador

En la síntesis del **controlador** para *un solo agente* es necesario que el modelo matemático del sistema dinámico esté alineado con la **PP 2.1.28**; como se observó en las ecuaciones (4.14a) y (4.14b), es fácil identificar que se utilizó la expresión (2.24), aunque hay que puntualizar, (2.23) y (2.24) son expresiones equivalentes.

La ausencia de esta propiedad elimina la posibilidad de implementar el **controlador** para *un solo agente* porque no se puede garantizar la **estabilidad** del sistema dinámico en lazo cerrado. Cabe señalar que ningún modelo matemático para las diferentes clases de inversores que se presentaron en el **Capítulo 2** están alineados con la **PP 2.1.28**.

Sin embargo, es posible segmentar la *ley de control* de forma que una parte se encargue del algoritmo para ejecutar las tareas de control mientras que otra parte sea responsable de modificar el sistema de ecuaciones en el modelo matemático para que adquiera características necesarias y cumpla con los requisitos que se mencionaron anteriormente.

La **segmentación** del **controlador** consiste básicamente en separar la señal de control $\tau(t)$ como $\tau'(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$; por un lado, $\mathbf{u}(t)$ se encarga del algoritmo original asociado a la *ley de control* para ejecutar las tareas de control mientras que $\mathbf{v}(t)$ modifica el sistema de ecuaciones del modelo matemático.

4.4 Re-estructuración del modelo matemático

Considerando lo que se mencionó en la **Sección 4.3.1** y la **Sección 4.3.2**, se puede deducir que ninguno de los modelos matemáticos que se tienen para las diferentes clases de inversores cubren con los requisitos mínimos necesarios para tener la posibilidad de implementar el **controlador** para *un solo agente*.

Haciendo una revisión rápida de los modelos matemáticos obtenidos para las diferentes clases de inversores se sabe lo siguiente:

- **Inversor formador de red.**

Modelo matemático descrito en las ecuaciones (2.62a) y (2.62a).

- | | | | | | | | |
|-----|---|------|---|-------|---|------|---|
| (i) | ✓ | (ii) | ✗ | (iii) | ✓ | (iv) | ✗ |
|-----|---|------|---|-------|---|------|---|

- **Inversor alimentador.**

Modelo matemático descrito en la ecuación (2.66).

(i) ✓ (ii) ✓ (iii) ✓ (iv) ✗

- **Inversor de soporte.**

Modelo matemático descrito en las ecuaciones (2.70a), (2.70b) y (2.70c).

(i) ✓ (ii) ✗ (iii) ✓ (iv) ✗

La **re-estructuración del modelo matemático** consiste en realizar las acciones pertinentes para asegurar que el sistema de ecuaciones de los modelos matemáticos que se tienen cubran con los requisitos mínimos necesarios; con base en la información presentada anteriormente, se presta especial atención a las condiciones (ii) y (iv).

4.4.1 Procedimiento

Ahora, se desarrolla el procedimiento que rescata la posibilidad de implementar el **controlador** para *un solo agente*.

(ii) El sistema dinámico es *completamente actuado*.

(iv) La matriz de fuerzas centrífugas/de coriolis $\underline{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ obedece la **PP 2.1.28**.

Si la re-estructuración del modelo matemático permite que se cubran los requisitos mínimos necesarios para alguna clase de inversor en específico, será posible desarrollar la *ley de control* y la *ley de estimación* que será empleada en la implementación del **controlador** para *un solo agente*.

En cualquier caso, se considera que la carga de consumo R_L es el parámetro desconocido para la *ley de estimación*.

(ii) El sistema dinámico es *completamente actuado*.

Si el sistema dinámico es *sub-actuado* de acuerdo a lo que se menciona en la **D- 4.3.2**, es posible hacer sustituciones hacia atrás en el sistema de ecuaciones del modelo matemático ;

esto permite que se reduzca la dimensión de $\mathbf{f}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ hasta que tenga la misma dimensión que $\boldsymbol{\tau}(t)$, tal que $\dim(\mathbf{f}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)) = \dim(\boldsymbol{\tau}(t))$.

Por otro lado, esto implica que se pierda la observación de las coordenadas generalizadas $\mathbf{q}(t)$ y sus derivadas $\{\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}\}$ que se hayan sido sustituidas en el modelo matemático.

(iv) La matriz de fuerzas centrífugas/de coriolis $\underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ obedece la **PP 2.1.28**.

Como se describe en la **Sección 4.3.2**, la **segmentación del controlador** como $\boldsymbol{\tau}'(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$ permite cambiar la estructura del modelo matemático a través de la señal $\mathbf{v}(t)$ y asegurar que esté alineado con la **PP 2.1.28** para que pueda considerarse formalmente como un **Sistema-EL**.

Si bien, (2.24) es la que se utiliza en la síntesis del **controlador**, en la segmentación del mismo es más sencillo utilizar (2.23) para determinar $\mathbf{v}(t)$.

Dado que la matriz de inercia/masa generalizada $\underline{\mathbf{M}}(q)$ que se obtuvo en los diferentes modelos matemáticos es *constante*, se tiene que $\dot{\underline{\mathbf{M}}} = \mathbf{0}$; por lo tanto, para (2.23):

$$(4.31) \quad \mathbf{0} = \underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \underline{\mathbf{C}}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

Entonces, para que los diferentes modelo matemáticos estén alineados con la **PP 2.1.28** es necesario que:

$$(4.32) \quad \mathbf{v}(t) = \underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

4.4.1.1 Inversor formador de red

Se recupera el sistema ecuaciones que se obtuvo a partir de las **leyes de Kirchhoff** para el **inversor formador de red**:

Utilizando la *ley de corrientes de malla* o **LCKs** en i_{L_1} :

$$(2.61a) \quad v_j(t) = R_1 i_{L_1} + L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + v_{C_f}$$

Utilizando la *ley de tensiones en nodo* o **LVKs** de v_{C_f} :

$$(2.61b) \quad i_{L_1} = C_f \frac{dv_{C_f}}{dt} + \frac{v_{C_f}}{R_L}$$

(ii) El sistema dinámico es *completamente actuado*.

Se observa a continuación el procedimiento para realizar las sustituciones hacia atrás en el sistema de ecuaciones del modelo matemático del **inversor formador de red**:

Derivando la ecuación (2.61b):

$$(4.33a) \quad \frac{di_{L_1}}{dt} = C_f \frac{d^2v_{C_f}}{dt^2} + \frac{1}{R_L} \frac{dv_{C_f}}{dt}$$

En (2.61a) se sustituye i_{L_1} de (2.61b) y $\frac{di_{L_1}}{dt}$ de (4.33a):

$$(4.33b) \quad v_j(t) = R_1 \left(C_f \frac{dv_{C_f}}{dt} + \frac{v_{C_f}}{R_L} \right) + L_1 \left(C_f \frac{d^2v_{C_f}}{dt^2} + \frac{1}{R_L} \frac{dv_{C_f}}{dt} \right) + v_{C_f}$$

Reduciendo la expresión anterior:

$$(4.33c) \quad v_j(t) = L_1 C_f \frac{d^2v_{C_f}}{dt^2} + \left(R_1 C_f + \frac{L_1}{R_L} \right) \frac{dv_{C_f}}{dt} + \left(\frac{R_1}{R_L} + 1 \right) v_{C_f}$$

En coordenadas generalizadas:

$$(4.33d) \quad v_j(t) = C_f \frac{d^2 \left(\frac{q_{C_f}}{C_f} \right)}{dt^2} + \left(R_1 C_f + \frac{L_1}{R_L} \right) \frac{d \left(\frac{q_{C_f}}{C_f} \right)}{dt} + \left(\frac{R_1}{R_L} + 1 \right) \left(\frac{q_{C_f}}{C_f} \right)$$

Entonces, la re-estructuración del modelo matemático original del **inversor formador de red** queda descrito ahora por **una sola** ecuación como:

$$(4.34) \quad v_j(t) = L_1 \ddot{q}_{C_f} + \left(\frac{R_1 R_L C_f + L_1}{R_L C_f} \right) \dot{q}_{C_f} + \left(\frac{R_1 + R_L}{R_L C_f} \right) q_{C_f}$$

- **Inversor formador de red.**

Modelo matemático descrito en la ecuación (4.34).

- (i) ✓ (ii) ✓ (iii) ✓ (iv) ✗
-

(iv) La matriz de fuerzas centrífugas/de coriolis $\underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ obedece la **PP 2.1.28**.

A partir de la expresión (4.25), la *ley de control explícita* $\tau(t)$ para el **inversor formador de red** se muestra en (4.35):

$$(4.35) \quad \tau(t) = L_1 \ddot{q}_{C_f}' + \left(\frac{R_1 R_L C_f + L_1}{R_L C_f} \right) \dot{q}_{C_f}' + \left(\frac{R_1 + R_L}{R_L C_f} \right) q_{C_f} + \beta_{C_f}$$

De acuerdo ahora con la expresión (4.26), la *ley de estimación* $\dot{\hat{\theta}}$ para el **inversor formador de red** se observa en (4.36):

$$(4.36) \quad \dot{\hat{G}}_L(t) = -\alpha \left(\frac{\dot{q}_{C_f}' + R_1 q_{C_f}}{C_f} \right)_{C_f} \text{ donde } \hat{G}_L = \frac{1}{\hat{R}_L}$$

Una vez que se ha determinado la *ley de control* en (4.35) y la *ley de estimación* en (4.36), la **segmentación del controlador** $\tau'(t) = u(t) + v(t)$ está dada por:

$$(4.37a) \quad u(t) = L_1 \ddot{q}_{C_f}' + \left(\frac{R_1 \hat{R}_L C_f + L_1}{\hat{R}_L C_f} \right) \dot{q}_{C_f}' + \left(\frac{R_1 + \hat{R}_L}{\hat{R}_L C_f} \right) q_{C_f} + \beta_{C_f}$$

$$(4.37b) \quad v(t) = \left(\frac{R_1 \hat{R}_L C_f + L_1}{\hat{R}_L C_f} \right) \dot{q}_{C_f}$$

Por último, en (4.38) se muestra la parametrización lineal que se empleó para la *ley de estimación* a partir de la **PP 2.1.26**:

$$(4.38) \quad \Phi(q_{C_f}, \dot{q}_{C_f}') = \frac{\dot{q}_{C_f}' + R_1 q_{C_f}}{C_f} \text{ con } \theta = G_L$$

- **Inversor formador de red.**

Considere además la segmentación del controlador en (4.37a) y (4.37b).

- (i) ✓ (ii) ✓ (iii) ✓ (iv) ✓
-

4.4.1.2 Inversor alimentador

Se recupera el modelo matemático del **inversor alimentador** que queda descrito por **una sola** ecuación:

$$(2.66) \quad \frac{d\dot{q}_{L_1}}{dt} = \frac{v_j(t)}{L_1} - \left(\frac{R_1 + R_L}{L_1} \right) \dot{q}_{L_1}$$

$$v_j(t) = L_1 \ddot{q}_{L_1} + (R_1 + R_L) \dot{q}_{L_1}$$

(iv) La matriz de fuerzas centrífugas/de coriolis $\underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ obedece la **PP 2.1.28**.

A partir de la expresión (2.66), la *ley de control explícita* $\tau(t)$ para el **inversor alimentador** se muestra en (4.39):

$$(4.39) \quad \tau(t) = L_1 \ddot{q}'_{L_1} + (R_1 + R_L) \dot{q}'_{L_1}$$

De acuerdo ahora con la expresión (4.26), la *ley de estimación* $\hat{\theta}$ para el **inversor alimentador** se observa en (4.40):

$$(4.40) \quad \dot{\hat{R}}_L(t) = -\alpha \dot{q}'_{L_1} \varsigma_{L_1}$$

Una vez que se ha determinado la *ley de control* en (4.39) y la *ley de estimación* en (4.40), la **segmentación del controlador** $\tau'(t) = u(t) + v(t)$ está dada por:

$$(4.41a) \quad u(t) = L_1 \ddot{q}'_{L_1} + (R_1 + \hat{R}_L) \dot{q}'_{L_1}$$

$$(4.41b) \quad v(t) = (R_1 + \hat{R}_L) \dot{q}'_{L_1}$$

Por último, en (4.42) se muestra la parametrización lineal que se empleó para la *ley de estimación* a partir de la **PP 2.1.26**:

$$(4.42) \quad \Phi(\dot{q}'_{L_1}) = \dot{q}'_{L_1} \text{ con } \theta = R_L$$

- **Inversor alimentador.**

Considere la segmentación del controlador en (4.41a) y (4.41b).

- (i) ✓ (ii) ✓ (iii) ✓ (iv) ✓

4.4.1.3 Inversor de soporte

Se recupera el sistema ecuaciones que se obtuvo a partir de las **leyes de Kirchhoff** para el **inversor de soporte**:

Utilizando la *ley de corrientes de malla* o **LCKs** en i_{L_1} :

$$(2.69a) \quad v_j(t) = R_1 i_{L_1} + L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + v_{C_f}$$

Utilizando la *ley de tensiones en nodo* o **LVKs** de v_{C_f} :

$$(2.69b) \quad i_{L_1} = i_{L_2} + C_f \frac{dv_{C_f}}{dt}$$

Utilizando la *ley de corrientes de malla* o **LCKs** en i_{L_2} :

$$(2.69c) \quad 0 = (R_2 + R_L) i_{L_2} + L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} - v_{C_f}$$

-
- (ii) El sistema dinámico es *completamente actuado*.

Se observa a continuación una forma para realizar las sustituciones hacia atrás en el sistema de ecuaciones del modelo matemático del **inversor de soporte**:

Se despeja i_{L_2} de la ecuación (2.69b):

$$(4.43a) \quad i_{L_2} = i_{L_1} - C_f \frac{dv_{C_f}}{dt}$$

Derivando la ecuación (4.43a):

$$(4.43b) \quad \frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{di_{L_1}}{dt} - C_f \frac{d^2v_{C_f}}{dt^2}$$

En (2.69c) se sustituye i_{L_2} de (4.43a) y $\frac{di_{L_2}}{dt}$ de (4.43b):

$$(4.43c) \quad 0 = (R_2 + R_L) \left(i_{L_1} - C_f \frac{dv_{C_f}}{dt} \right) + L_2 \left(\frac{di_{L_1}}{dt} - C_f \frac{d^2v_{C_f}}{dt^2} \right) - v_{C_f}$$

Reduciendo la expresión anterior y despejando $\frac{di_{L_1}}{dt}$:

$$(4.43d) \quad \frac{di_{L_1}}{dt} = C_f \frac{d^2v_{C_f}}{dt^2} + \left(\frac{R_2C_f + R_1C_f}{L_2} \right) \frac{dv_{C_f}}{dt} + \frac{v_{C_f}}{L_2} - \left(\frac{R_2 + R_L}{L_2} \right) i_{L_1}$$

En (2.69a) se sustituye $\frac{di_{L_1}}{dt}$ de (4.43d):

$$(4.43e) \quad v_j(t) = R_1 i_{L_1} + L_1 \left(C_f \frac{d^2v_{C_f}}{dt^2} + \left(\frac{R_2C_f + R_1C_f}{L_2} \right) \frac{dv_{C_f}}{dt} + \frac{v_{C_f}}{L_2} - \left(\frac{R_2 + R_L}{L_2} \right) i_{L_1} \right) + v_{C_f}$$

Reduciendo la expresión anterior:

$$(4.43f) \quad v_j(t) = L_1 C_f \frac{d^2v_{C_f}}{dt^2} + \left(\frac{R_2L_1C_f + R_1L_1C_f}{L_2} \right) \frac{dv_{C_f}}{dt} + \left(\frac{L_1 + L_2}{L_2} \right) v_{C_f} + \left(\frac{R_1L_2 - L_1(R_2 + R_L)}{L_2} \right) i_{L_1}$$

En coordenadas generalizadas:

$$(4.43g) \quad v_j(t) = L_1 C_f \frac{d^2 \left(\frac{q_{C_f}}{C_f} \right)}{dt^2} + \left(\frac{R_2L_1C_f + R_1L_1C_f}{L_2} \right) \frac{d \left(\frac{q_{C_f}}{C_f} \right)}{dt} + \left(\frac{L_1 + L_2}{L_2} \right) \left(\frac{q_{C_f}}{C_f} \right) + \left(\frac{R_1L_2 - L_1(R_2 + R_L)}{L_2} \right) (\dot{q}_{L_1})$$

La expresión final se puede ver como $v_j(t) = f(q_{C_f}, \dot{q}_{C_f}, \ddot{q}_{C_f}) + g(\dot{q}_{L_1})$:

$$(4.43h) \quad v_j(t) = L_1 \ddot{q}_{C_f} + \left(\frac{R_2L_1 + R_1L_1}{L_2} \right) \dot{q}_{C_f} + \left(\frac{L_1 + L_2}{L_2 C_f} \right) q_{C_f} + \left(\frac{R_1L_2 - L_1(R_2 + R_L)}{L_2} \right) \dot{q}_{L_1}$$

En resumen, si bien la re-estructuración del modelo matemático permite alinearse con la condición (ii) se pierde la propiedad descrita por la condición (i).

- **Inversor de soporte.**

Modelo matemático descrito en la ecuación (4.43h).

- (i) ✗ (ii) ✓ (iii) ✓ (iv) ◆

Dado que no se tuvo éxito, se realiza nuevamente el mismo procedimiento de una forma diferente en el sistema de ecuaciones del modelo matemático del **inversor de soporte**:

Se despeja i_{L_1} de la ecuación (2.69b):

$$(4.44a) \quad i_{L_1} = i_{L_2} + C_f \frac{dv_{C_f}}{dt}$$

Derivando la ecuación (4.44a):

$$(4.44b) \quad \frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{di_{L_2}}{dt} + C_f \frac{d^2v_{C_f}}{dt^2}$$

En (2.69a) se sustituye i_{L_1} de (4.44a) y $\frac{di_{L_1}}{dt}$ de (4.44b):

$$(4.44c) \quad v_j(t) = R_1 \left(i_{L_2} + C_f \frac{dv_{C_f}}{dt} \right) + L_1 \left(\frac{di_{L_2}}{dt} + C_f \frac{d^2v_{C_f}}{dt^2} \right) + v_{C_f}$$

Reduciendo la expresión anterior y despejando $\frac{di_{L_2}}{dt}$:

$$(4.44d) \quad \frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{v_j(t)}{L_1} - C_f \frac{d^2v_{C_f}}{dt^2} - \left(\frac{R_1 C_f}{L_1} \right) \frac{dv_{C_f}}{dt} - \frac{v_{C_f}}{L_1} - \left(\frac{R_1}{L_1} \right) i_{L_2}$$

En (2.69c) se sustituye $\frac{di_{L_2}}{dt}$ de (4.44d):

$$(4.44e) \quad 0 = (R_2 + R_L) i_{L_2} + L_2 \left(\frac{v_j(t)}{L_1} - C_f \frac{d^2v_{C_f}}{dt^2} - \left(\frac{R_1 C_f}{L_1} \right) \frac{dv_{C_f}}{dt} - \frac{v_{C_f}}{L_1} - \left(\frac{R_1}{L_1} \right) i_{L_2} \right) - v_{C_f}$$

Reduciendo la expresión anterior:

$$(4.44f) \quad v_j(t) = L_1 C_f \frac{d^2v_{C_f}}{dt^2} + \left(\frac{R_1 L_1 C_f}{L_2} \right) \frac{dv_{C_f}}{dt} + (L_1 + 1) v_{C_f} + \left(\frac{R_1 L_2 - L_1 (R_2 + R_L)}{L_2} \right) i_{L_2}$$

En coordenadas generalizadas:

$$(4.44g) \quad v_j(t) = L_1 C_f \frac{d^2 \left(\frac{q_{C_f}}{C_f} \right)}{dt^2} + \left(\frac{R_1 L_1 C_f}{L_2} \right) \frac{d \left(\frac{q_{C_f}}{C_f} \right)}{dt} + (L_1 + 1) \left(\frac{q_{C_f}}{C_f} \right) + \left(\frac{R_1 L_2 - L_1 (R_2 + R_L)}{L_2} \right) (\dot{q}_{L_2})$$

La expresión final se puede ver como $v_j(t) = f(q_{C_f}, \dot{q}_{C_f}, \ddot{q}_{C_f}) + g(\dot{q}_{L_2})$:

$$(4.44h) \quad v_j(t) = L_1 \ddot{q}_{C_f} + \left(\frac{R_1 L_1}{L_2} \right) \dot{q}_{C_f} + \left(\frac{L_1 + 1}{C_f} \right) q_{C_f} + \left(\frac{R_1 L_2 - L_1 (R_2 + R_L)}{L_2} \right) \dot{q}_{L_2}$$

Nuevamente, si bien la re-estructuración del modelo matemático permite alinearse con la condición (ii) se pierde la propiedad descrita por la condición (i).

- **Inversor de soporte.**

Modelo matemático descrito en la ecuación (4.43h).

(i) ✗ (ii) ✓ (iii) ✓ (iv) ◆

4.4.1.4 Tabla de resultados

Como resumen, se muestra la re-estructuración del modelo matemático para cada clase de inversor en específico, siempre y cuando sea posible implementar el **controlador** para *un solo agente*; así mismo, se muestra también la *ley de control* y la *ley de estimación* que se obtuvo según sea el caso.

Cabe aclarar que dada la naturaleza del resultado de la re-estructuración del modelo matemático del **inversor de soporte**, no es posible implementar el **controlador** para *un solo agente*; por lo tanto y de ahora en adelante, no será considerado para los capítulos restantes de este documento.

4.4.1.1 Inversor formador de red	
Modelo matemático	
(4.34)	$v_j(t) = L_1 \ddot{q}_{C_f} + \left(\frac{R_1 R_L C_f + L_1}{R_L C_f} \right) \dot{q}_{C_f} + \left(\frac{R_1 + R_L}{R_L C_f} \right) q_{C_f}$
Ley de estimación $\dot{\hat{\theta}}(t)$	
(4.36)	$\dot{\hat{G}}_L(t) = -\alpha \left(\frac{\dot{q}'_{C_f} + R_1 q_{C_f}}{C_f} \right) \zeta_{C_f} \text{ donde } \hat{G}_L = \frac{1}{\hat{R}_L}$
Ley de control $\tau'(t) = u(t) + v(t)$	
(4.37a)	$u(t) = L_1 \ddot{q}'_{C_f} + \left(\frac{R_1 \hat{R}_L C_f + L_1}{\hat{R}_L C_f} \right) \dot{q}_{C_f} + \left(\frac{R_1 + \hat{R}_L}{\hat{R}_L C_f} \right) q_{C_f} + \beta \zeta_{C_f}$
(4.37b)	$v(t) = \left(\frac{R_1 \hat{R}_L C_f + L_1}{\hat{R}_L C_f} \right) \dot{q}_{C_f}$

4.4.1.2	Inversor alimentador
	Modelo matemático
(2.66)	$v_j(t) = L_1 \ddot{q}_{L_1} + (R_1 + R_L) \dot{q}_{L_1}$
	Ley de estimación $\hat{\theta}(t)$
(4.40)	$\dot{\hat{R}}_L(t) = -\alpha \dot{q}_{L_1} \varsigma_{L_1}$
	Ley de control $\tau'(t) = u(t) + v(t)$
(4.41a)	$u(t) = L_1 \ddot{q}'_{L_1} + (R_1 + \hat{R}_L) \dot{q}_{L_1} + \beta \varsigma_{L_1}$
(4.41b)	$v(t) = (R_1 + \hat{R}_L) \dot{q}_{L_1}$

Tabla 4.1
Implementación del controlador para un solo agente

Esquema completo de sincronización y control

Uno de los principales objetivos de un esquema de control de agentes interconectados es la operación en conjunto de todas las entidades presentes. Como se describió en la **Sección 3.4**, el fenómeno de **sincronización** asegura que el comportamiento de los estados en todos los agentes presentes en un sistema dinámico estén gobernados por una *restricción* en común.

Para efectuar la sincronización del comportamiento de los estados de *múltiples agentes* es necesario que el **controlador** propuesto considere el intercambio de información.

La información se propaga a través de un *acoplamiento difuso* donde existe una comunicación inmediata de la información con los agentes más cercanos, y de ahí, sucesivamente a los demás. El *acoplamiento cruzado* consiste en mantener un enlace únicamente con los dos agentes más cercanos como se observó en la **Sección 3.3** y **Sección 3.4**.

Bajo esta premisa, el **controlador** propuesto es capaz de incorporar adicionalmente la tarea de control asociada a la sincronización del comportamiento de los estados de *múltiples agentes* en un sistema dinámico mediante el intercambio de información a través de un *acoplamiento cruzado* para una operación en conjunto de todas las entidades presentes.

El **controlador** para *múltiples agentes* está inspirado en un esquema de control orientado a la cooperación (*control cooperativo*) [39, 40]. Dicho controlador es una extensión del *control adaptivo de Slotine*, por lo tanto, de forma aislada se puede encontrar síntesis del mismo en el **Capítulo 4**.

Hay dos aspectos fundamentales a considerar en el **controlador** para *múltiples agentes* que se pueden resumir de la siguiente manera:

1. El comportamiento dinámico individual de cada agente.
2. La interacción que existe entre cada uno de los agentes.

Considerando lo que se ha revisado previamente a lo largo del documento, solo resta profundizar en el segundo aspecto de la lista anterior. La **teoría de grafos** permite estudiar el comportamiento dinámico del intercambio de información en la red de agentes interconectados como se presentó en la **Sección 3.2**: visualmente, un **grafo** $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ permite reconocer los enlaces donde existe un intercambio de información; matemáticamente, la **matriz laplaciana** \mathcal{L} describe dichos enlaces mediante el álgebra lineal.

Bajo la misma línea, el **controlador** para *múltiples agentes* está originalmente diseñado específicamente para un conjunto de manipuladores robóticos ubicados dentro de una celda automática; invariablemente, dado que está sintetizado para una clase en particular de sistemas dinámicos, no impide que sea empleado en otras situaciones.

En este sentido, se emplea el **controlador** propuesto para los convertidores de potencia instalados en una microrred eléctrica.

Dado que el **controlador** para *múltiples agentes* es una extensión del **controlador** para *un solo agente*, también goza de los mismos beneficios. Adicionalmente, el **controlador** para *múltiples agentes* considera la tarea de control asociada a la sincronización del comportamiento de los estados donde se garantiza que:

1. Es estable **globalmente** y **exponencialmente** para el caso *sin adaptabilidad*.
2. Es estable **globalmente** y **asintóticamente** para el caso *con adaptabilidad*.

5.1 Controlador para múltiples agentes

El **controlador** para *múltiples agentes (sin adaptabilidad)* para el agente i que ejecuta el seguimiento de una trayectoria deseada $\mathbf{q}^*(t) \in \mathbb{R}^N$, pero además permite la sincronización del comportamiento de los estados en una red de agentes interconectados a través del acoplamiento cruzado para el intercambio de información con los dos agentes $i - 1$ e $i + 1$ más cercanos al agente original se muestra en la ecuación (5.1), donde $\underline{\mathbf{K}}_1$ y $\underline{\mathbf{K}}_2$ son matrices *constantes y positivas definidas*.

$$(5.1) \quad \boldsymbol{\tau}_i(t) = \underline{\mathbf{M}}_i(\mathbf{q}_i) \ddot{\mathbf{q}}'_i + \underline{\mathbf{C}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}'_i + \underline{\mathbf{G}}_i(\mathbf{q}_i) - \underline{\mathbf{K}}_1 \boldsymbol{\varsigma}_i + \underline{\mathbf{K}}_2 \boldsymbol{\varsigma}_{i-1} + \underline{\mathbf{K}}_2 \boldsymbol{\varsigma}_{i+1}$$

Entonces, la dinámica en lazo cerrado del agente i en (4.11) con el **controlador** en (5.1) está dada por la expresión:

$$(5.2) \quad \underline{\mathbf{M}}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\boldsymbol{\varsigma}}_i + \underline{\mathbf{C}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \boldsymbol{\varsigma}_i + \underline{\mathbf{K}}_1 \boldsymbol{\varsigma}_i - \underline{\mathbf{K}}_2 \boldsymbol{\varsigma}_{i-1} - \underline{\mathbf{K}}_2 \boldsymbol{\varsigma}_{i+1} = \mathbf{0}$$

D- 5.1.1. Tenga en consideración la definición de las siguientes matrices *cuadradas* de dimensión $P \times P$:

$$(5.3a) \quad [\mathcal{L}'_{\{a,b\}}] := \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}_{P \times P}$$

$$(5.3b) \quad [\mathcal{W}'_{\{b\}}] := \begin{bmatrix} b & b & \cdots & b \\ b & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & b \end{bmatrix}_{P \times P}$$

D- 5.1.2. Partiendo de la **matriz laplaciana** \mathcal{L} , se define como la **matriz laplaciana modificada** o *alternativa* a $[\mathcal{L}'_{\{\underline{\mathbf{K}}, -\underline{\mathbf{K}}_2\}}]$ en términos de la **D- 5.1.1**. Esta representación indica la fuerza de interacción que tiene el agente i con los demás agentes adyacentes a través de la ganancia $\underline{\mathbf{K}}_2$.

Es posible representar la dinámica en lazo cerrado de todos los agentes utilizando la definición de la **matriz laplaciana modificada** o *alternativa* $[\mathcal{L}'_{\{\mathbf{K}, -\mathbf{K}_2\}}]$ como se observa en la expresión en (5.4), donde $[\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q})] = \text{diag}(\underline{\mathbf{M}}_1(\mathbf{q}_1), \underline{\mathbf{M}}_2(\mathbf{q}_2), \dots, \underline{\mathbf{M}}_P(\mathbf{q}_P))$ y $[\underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] = \text{diag}(\underline{\mathbf{C}}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1), \underline{\mathbf{C}}_2(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2), \dots, \underline{\mathbf{C}}_P(\mathbf{q}_P, \dot{\mathbf{q}}_P))$, además $\boldsymbol{\varsigma}' = (\boldsymbol{\varsigma}_1^\top, \boldsymbol{\varsigma}_2^\top, \dots, \boldsymbol{\varsigma}_P^\top)^\top$.

$$(5.4) \quad [\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q})] \dot{\boldsymbol{\varsigma}}' + [\underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \boldsymbol{\varsigma}' + \left([\mathcal{L}'_{\{\mathbf{K}, -\mathbf{K}_2\}}] + [\mathcal{U}'_{\{\mathbf{K}_2\}}] \right) \boldsymbol{\varsigma}' = [\mathcal{U}'_{\{\mathbf{K}_2\}}] \boldsymbol{\varsigma}'$$

Un grafo se considera *regular* si todos los nodos tienen la misma cantidad de vecinos; de forma que $|\mathcal{N}_i| = |\mathcal{N}_j| = \dots = |\mathcal{N}_P|$ [39].

Un grafo se considera *balanceado* si el grado de salida $d_o(v_x)$ es igual al grado de entrada $d_i(v_x)$ para todos los nodos; de forma que $d_o(v_x) = d_i(v_x) \forall x = \{1, 2, \dots, P\}$ [50, p. 9].

N- 5.1.3. La topología del grafo de un esquema de control de agentes interconectados donde se utiliza el *acoplamiento cruzado* para el intercambio de información tiene la propiedad de ser un grafo *balanceado* y *regular*, donde ambas propiedades son necesarias para la implementación del **controlador** para *múltiples agentes*.

N- 5.1.4. Nótese que la **matriz laplaciana modificada** o *alternativa* $[\mathcal{L}'_{\{\mathbf{K}, -\mathbf{K}_2\}}]$ debe de ser *positiva definida* para el análisis de **estabilidad** del **controlador** para *múltiples agentes*; es decir, a diferencia de la **matriz laplaciana** \mathcal{L} , $[\mathcal{L}'_{\{\mathbf{K}, -\mathbf{K}_2\}}]$ no tiene eigenvalor *nulo* $\lambda_1 = 0$ asociado al eigenvector (derecho) $\nu_1 = \mathbf{1}$.

El **controlador** para *múltiples agentes* (*con adaptabilidad*) para el agente i que ejecuta el seguimiento de una trayectoria deseada $\mathbf{q}^*(t) \in \mathbb{R}^N$ y la estimación de los parámetros desconocidos $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, pero además permite la sincronización del comportamiento de los estados en una red de agentes interconectados a través del *acoplamiento cruzado* para el intercambio de información con los dos agentes $i - 1$ e $i + 1$ más cercanos al agente original se muestra en la ecuación (5.5) y (5.6), donde \mathbf{K}_1 y \mathbf{K}_2 son matrices *constantes* y *positivas definidas*.

$$(5.5) \quad \boldsymbol{\tau}_i(t) = \widehat{\underline{\mathbf{M}}}_i(\mathbf{q}_i) \ddot{\mathbf{q}}'_i + \widehat{\underline{\mathbf{C}}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}'_i + \widehat{\underline{\mathbf{G}}}_i(\mathbf{q}_i) - \mathbf{K}_1 \boldsymbol{\varsigma}_i + \mathbf{K}_2 \boldsymbol{\varsigma}_{i-1} + \mathbf{K}_2 \boldsymbol{\varsigma}_{i+1}$$

$$(5.6) \quad \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_i = -\underline{\mathbf{A}} \underline{\boldsymbol{\Phi}}^\top(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}^*, \ddot{\mathbf{q}}^*)_i \boldsymbol{\varsigma}_i$$

Donde y a manera de recordatorio, la parametrización lineal del agente i queda determinada de la siguiente forma:

$$(5.7) \quad \underline{\mathbf{M}}_i(\mathbf{q}_i) \ddot{\mathbf{q}}_i + \underline{\mathbf{C}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}_i + \underline{\mathbf{G}}_i(\mathbf{q}_i) = \underline{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}' \ddot{\mathbf{q}}') \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Entonces, la dinámica en lazo cerrado de todos los agentes con el **controlador** descrito por la *ley de control* en (5.5) y la *ley de estimación* en (5.6) está dada por la expresión (5.8), donde adicionalmente $[\underline{\mathbf{A}}^{-1}] = \text{diag}(\underline{\mathbf{A}}^{-1})_P$ y $[\underline{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}' \ddot{\mathbf{q}}')] = \text{diag}(\underline{\mathbf{\Phi}}_1, \underline{\mathbf{\Phi}}_2, \dots, \underline{\mathbf{\Phi}}_P)$, pero también $\tilde{\boldsymbol{\theta}}' = (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1^\top, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2^\top, \dots, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_P^\top)^\top$.

$$(5.8) \quad \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{M}}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\underline{\mathbf{A}}^{-1}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\zeta}}' \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}' \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{C}}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\zeta}' \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}' \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathcal{L}'_{\{\underline{\mathbf{K}}_1, -\underline{\mathbf{K}}_2\}}] & -[\underline{\mathbf{\Phi}}] \\ -[\underline{\mathbf{\Phi}}]^\top & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\zeta}' \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}' \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

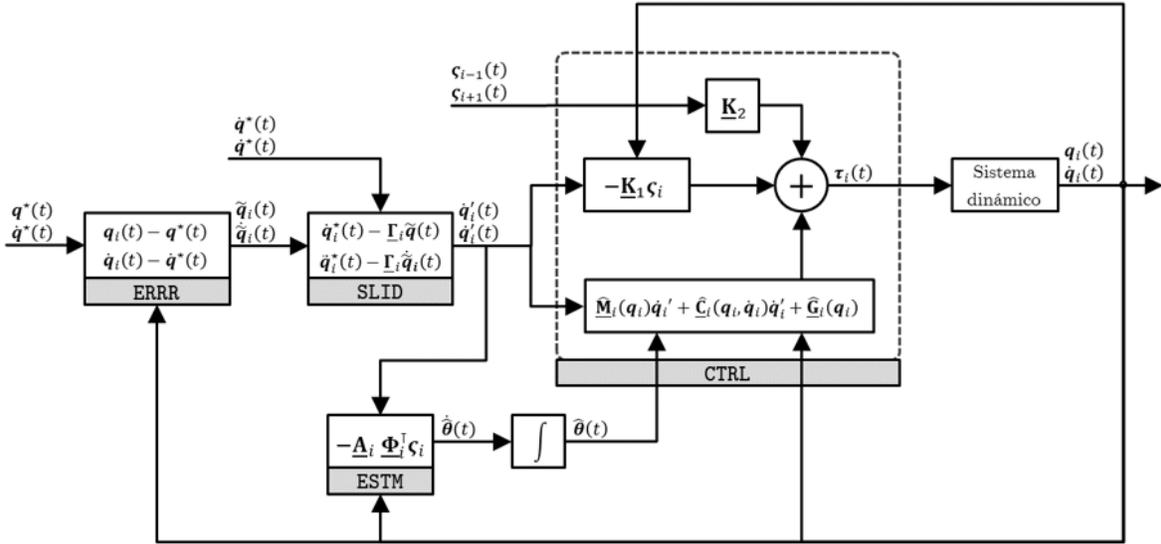


Figura 5.1
Controlador para múltiples agentes

N- 5.1.5. La topología del **grafo** de la red de agentes interconectados debe de tener una forma de *anillo* en la implementación del **controlador** para *múltiples agentes*, esto quiere

decir que en el *acoplamiento cruzado*, el último agente tiene un enlace de comunicación con el primer agente y viceversa como se observa en el inciso b) de la **Figura 3.2**.

N- 5.1.6. En la **Figura 5.2** se observa el escenario de simulación del **controlador** para *múltiples agentes*.

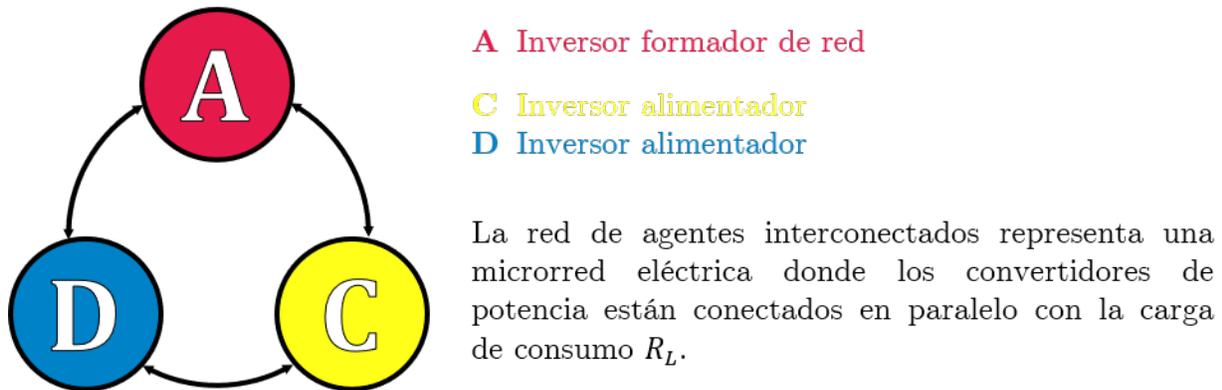


Figura 5.2

Escenario de simulación para el presente trabajo de tesis

Es importante señalar que para la red de agentes interconectados representa una microrred eléctrica donde los convertidores de potencia están conectados en paralelo con la carga de consumo R_L , es decir, independientemente de la clase de inversor que se tenga en consideración, se puede incluir en el modelo matemático la caracterización de la carga.

Para mantener el orden del filtro lineal en la microrred y evitar la aparición de múltiples frecuencias de resonancia, se considera un solo **inversor formador de red** representado por el **agente A** mientras que los dos convertidores de potencia restantes son **inversores alimentadores** que están representados por el **agente C** y el **agente D** respectivamente.

Dado que la carga de consumo R_L está en paralelo con cualquier convertidor de potencia instalado en la microrred, lo mismo ocurre para el capacitor de acoplamiento C_f del **inversor formador de red**, por lo tanto, es necesario que todos los agentes describan el modelo matemático del **inversor formador de red**.

Esto es posible dado que los parámetros del filtro de acoplamiento se calcularon para una misma carga de consumo R_L . Independientemente de que todos los agentes describan un mismo

modelo matemático, se respetan los parámetros que se obtuvieron en la **Sección 2.3.8.4** y que se pueden observar en la **Tabla 2.7** para cada uno de los convertidos de potencia.

5.2 Seguimiento de un trayectoria deseada

La síntesis del **controlador** para *múltiples agentes* utiliza el **análisis por contracción** como herramienta matemática que permite estudiar su **estabilidad**; por ello, es importante que tenga en consideración lo que se revisó en la **Sección 3.6**, especialmente lo que se muestra a continuación:

- **D- 3.6.5.**
- **T- 3.6.6.**
- **T- 3.6.7.**
- **EM3.6.8.**
- **T- 3.6.9.**
- **T- 3.6.10.**

Adicionalmente tenga en cuenta la **PP 2.1.28** que permitirá reducir y simplificar las ecuaciones para obtener el **controlador** propuesto.

PP 2.1.28 En el **Sistema-EL** de la forma (2.21) es necesario que la matriz de fuerzas centrífugas/de coriolis $\underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ esté definida de tal forma que se cumpla cualquiera de las dos ecuaciones (2.23) y (2.24) (son ecuaciones equivalentes); esta propiedad es fundamental para demostrar la estabilidad del **controlador** para un solo *agente* [39-42].

$$(2.23) \quad \underline{\dot{\mathbf{M}}}(\mathbf{q}) = \underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \underline{\mathbf{C}}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

$$(2.24) \quad \underline{\Psi} = \underline{\dot{\mathbf{M}}} - 2\underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \text{ forma una } \textit{matriz antisimétrica} \text{ tal que } \underline{\Psi} = -\underline{\Psi}^T$$

Se realiza el estudio de la **estabilidad** de la tarea de control asociada al seguimiento de una trayectoria deseada $\mathbf{q}^*(t)$ en el **controlador** propuesto.

T- 5.2.1. Si la **matriz laplaciana modificada** o **alternativa** $[\mathcal{L}'_{\{\underline{\mathbf{K}}, -\underline{\mathbf{K}}_2\}}]$ es **positiva definida**, entonces el **controlador** para **múltiples agentes** en una red de agentes interconectados realiza la tarea de control asociada al seguimiento de una trayectoria deseada $\mathbf{q}^*(t)$ de forma **estable globalmente** y **exponencialmente**.

Demostración

T- 5.2.1

De (5.4) se cancela el término $[\mathcal{U}'_{\{\underline{\mathbf{K}}_2\}}] \boldsymbol{\varsigma}'$ en ambos lados de la ecuación para obtener (5.9) como abajo:

$$(5.9) \quad [\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q})] \dot{\boldsymbol{\varsigma}}' + [\underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \boldsymbol{\varsigma}' + [\mathcal{L}'_{\{\underline{\mathbf{K}}, -\underline{\mathbf{K}}_2\}}] \boldsymbol{\varsigma}' = \mathbf{0}$$

La expresión (5.9) corresponde al problema tradicional del seguimiento de una trayectoria deseada $\mathbf{q}^*(t)$. Se utiliza el **análisis por contracción** para probar que $\boldsymbol{\varsigma}'(t)$ **converge globalmente** y **exponencialmente** a cero tal que el $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varsigma}'(t) = \mathbf{0}$. Con base en el **T- 3.6.9**, considere el sistema *auxiliar* que se obtiene al remplazar $\boldsymbol{\varsigma}'(t)$ por $\mathbf{y}(t)$ en (5.9):

$$(5.10) \quad [\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{y}} + [\underline{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \mathbf{y} + [\mathcal{L}'_{\{\underline{\mathbf{K}}, -\underline{\mathbf{K}}_2\}}] \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

El sistema *auxiliar* tiene dos soluciones en particular que se pueden observar (5.11a) en y (5.11b):

$$(5.11a) \quad \mathbf{y}_1 = (\boldsymbol{\varsigma}_1^\top, \boldsymbol{\varsigma}_2^\top, \dots, \boldsymbol{\varsigma}_P^\top)^\top$$

$$(5.11b) \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{0}$$

Partiendo del **T- 3.6.6**, el **análisis por contracción** a través de la **longitud de separación cuadrada** con respecto a la métrica $[\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{q})]$ *positiva definida* está dado por:

Sea la definición de la **longitud de separación cuadrada** como:

$$(5.12a) \quad = \frac{d}{dt} (\delta \mathbf{y}^\top [\underline{\mathbf{M}}] \delta \mathbf{y})$$

Efectuando la operación de derivada en el tiempo:

$$(5.12b) \quad = 2\delta \mathbf{y}^\top [\underline{\mathbf{M}}] \delta \dot{\mathbf{y}} + \delta \mathbf{y}^\top [\dot{\underline{\mathbf{M}}}(\mathbf{q})] \delta \mathbf{y}$$

$$(5.12c) \quad = -2\delta\mathbf{y}^\top \left([\underline{\mathbf{C}}] \delta\mathbf{y} + \left[\mathcal{L}'_{\{\underline{\mathbf{K}}, -\underline{\mathbf{K}}_2\}} \right] \delta\mathbf{y} \right) + \delta\mathbf{y}^\top \left[\underline{\dot{\mathbf{M}}} \right] \delta\mathbf{y}$$

$$(5.12d) \quad = \delta\mathbf{y}^\top \left[\underline{\dot{\mathbf{M}}} \right] \delta\mathbf{y} - 2\delta\mathbf{y}^\top [\underline{\mathbf{C}}] \delta\mathbf{y} - 2\delta\mathbf{y}^\top \left[\mathcal{L}'_{\{\underline{\mathbf{K}}, -\underline{\mathbf{K}}_2\}} \right] \delta\mathbf{y}$$

Utilizando la **PP 2.1.28** para simplificar la expresión anterior:

$$(5.12e) \quad = \delta\mathbf{y}^\top \left(\left[\underline{\dot{\mathbf{M}}} \right] - 2[\underline{\mathbf{C}}] \right) \delta\mathbf{y} - 2\delta\mathbf{y}^\top \left[\mathcal{L}'_{\{\underline{\mathbf{K}}, -\underline{\mathbf{K}}_2\}} \right] \delta\mathbf{y}$$

El resultado del **análisis por contracción** está dado por:

$$(5.12f) \quad = -2\delta\mathbf{y}^\top \left[\mathcal{L}'_{\{\underline{\mathbf{K}}, -\underline{\mathbf{K}}_2\}} \right] \delta\mathbf{y}$$

Esto quiere decir que para una **matriz laplaciana modificada o alternativa** $\left[\mathcal{L}'_{\{\underline{\mathbf{K}}, -\underline{\mathbf{K}}_2\}} \right]$ *positiva definida*, implica que el sistema *auxiliar* es un sistema **contractivo** tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$, y de acuerdo con el **T- 3.6.9**, entonces todas las soluciones del sistema *original* **convergen** a una sola trayectoria de forma **estable globalmente y exponencialmente**.

Por la definición de la variable compuesta $\boldsymbol{\varsigma}$ en (4.8) y la información presentada en el **EM3.6.8** relacionada con **análisis por contracción** para una combinación de sistemas dinámicos, se tiene que cualquier trayectoria del sistema *original* **converge** en todo momento a la trayectoria deseada $\mathbf{q}^*(t)$.

C- 5.2.2. Sea $\underline{\mathbf{K}}_1 > 0$ y $\underline{\mathbf{K}}_2 > 0$, es suficiente que $\underline{\mathbf{K}}_1 - 2\underline{\mathbf{K}}_2 > 0$ para que la **matriz laplaciana modificada o alternativa** $\left[\mathcal{L}'_{\{\underline{\mathbf{K}}, -\underline{\mathbf{K}}_2\}} \right]$ sea *positiva definida*.

De esta forma concluye el **análisis de estabilidad** de la tarea de control asociada al seguimiento de una trayectoria deseada $\mathbf{q}^*(t)$ del **controlador** para *múltiples agentes*.

5.3 Escala de tiempo del controlador propuesto

Si bien, **controlador** para *múltiples agentes* ejecuta diversas tareas de control al mismo tiempo, puede darse el caso de que alcance el objetivo de control para instantes de tiempo diferentes. Por ejemplo, bajo ciertas condiciones puede alcanzarse antes la sincronización del comportamiento de los estados que el seguimiento de una trayectoria deseada.

Dado que la **matriz laplaciana modificada o alternativa** a $\left[\mathcal{L}'_{\{\underline{\mathbf{K}}, -\underline{\mathbf{K}}_2\}} \right]$ es una matriz *simétrica* se puede efectuar la descomposición espectral. En dichos términos es posible aislar el eigenvector

asociado al seguimiento de una trayectoria deseada y los eigenvectores que corresponden a la ejecución de la sincronización del comportamiento de los estados.

L- 3.1.13 El **lema de Barbalat** establece que para un sistema dinámico $g(t)$ donde $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es un mapeo *globalmente y uniformemente continuo, continuamente diferenciable* una vez tal que $\mathcal{D} \in \mathcal{C}^1$, y además $\mathcal{D} : [0, \infty)$; entonces la ecuación (3.7) se cumple si el $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty g(t) dt = \alpha$ tal que $\alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha < \infty$ [8, p. 323].

$$(2.23) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

T- 3.1.14 Sea $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ el conjunto de eigenvalores *diferentes* entre sí y sea también $\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\}$ el conjunto de eigenvectores *ortogonales* entre sí de una matriz *simétrica* $\underline{\mathbf{W}}$ de orden n ; entonces la representación que se muestra en (3.8) es válida y se le conoce como **descomposición espectral** donde $\underline{\mathbf{\Lambda}} := \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ y $\underline{\mathbf{N}} := [\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n]$ [55, p. 48].

$$(2.24) \quad \underline{\mathbf{W}} = \underline{\mathbf{N}} \underline{\mathbf{\Lambda}} \underline{\mathbf{N}}^{-1}$$

En [39] y [67, p. 121-127] se puede encontrar la demostración matemática de este comportamiento que queda a criterio del lector revisar a profundidad.

5.4 Sincronización del comportamiento de los estados

La sincronización del comportamiento de los estados corresponde a la tarea de control de garantizar que un grupo de agentes operen en conjunto a través del intercambio de información. Dado que esta tarea de control está asociada al comportamiento dinámico de una variable, es necesario estudiar su estabilidad.

De igual, queda a criterio del lector de revisar la deducción de los siguientes teoremas en [39] y [67, p. 121-127] donde se utiliza al definición de **longitud de separación cuadrada** como se realizó una demostración previa para el seguimiento de una trayectoria deseada $\mathbf{q}^*(t)$ de la mano con los formalismos **L- 3.1.13** y **T- 3.1.14** que se presentaron anteriormente.

5.4.1 Controlador sin estimación de parámetros

T- 5.4.1. Si el **T- 5.2.1** es verdad, entonces un grupo de agentes ejecutan la sincronización de forma **estable globalmente** y **exponencialmente** si:

$$(5.13) \quad \left[\mathcal{L}'_{\{\mathbf{K}, -\mathbf{K}_2\}} \right] + \left[\mathcal{W}'_{\{\mathbf{K}_2\}} \right] > \mathbf{0}$$

5.4.2 Controlador con estimación de parámetros

T- 5.4.2. Si el **T- 5.2.1** es verdad, entonces un grupo de agentes ejecutan la sincronización de forma **estable globalmente** y **asintóticamente** si:

$$(5.14) \quad \left[\mathcal{L}'_{\{\mathbf{K}, -\mathbf{K}_2\}} \right] + \left[\mathcal{W}'_{\{\mathbf{K}_2\}} \right] > \mathbf{0}$$

Simulación y resultados

La validación del esquema de control consiste en realizar múltiples simulaciones para visualizar el comportamiento del **controlador** en lazo cerrado con el sistema dinámico. Se utiliza el software **MathWorks MATLAB R2017b** en combinación con **MathWorks SIMULINK R2017b**, de donde se toma la librería `simscapepowersystems_ST` en específico.

Se considera un escenario tradicional, es decir, un escenario donde no ocurren incidencias para observar el comportamiento dinámico del **controlador** en condiciones óptimas; sin embargo, más adelante se introducen en el sistema dinámico incidencias como cambios de carga, cargas no caracterizadas, perturbaciones y desconexión abrupta del sistema de potencia.

De forma general, el objetivo de control establece que la señal de la tensión eléctrica en el **punto de conexión común** o **PCCs** está definida por la trayectoria deseada. Es decir, la tensión en el capacitor del filtro de acoplamiento $v_{C_f}(t)$ asociado al **inversor formador de red** corresponde a la variable de control.

En coordenadas generalizadas, si $v_{C_f}(t) = \frac{q_{C_f}(t)}{C_f}$, entonces la variable de control ahora está denotada por $q_{C_f}(t)$ y sus derivadas $\{\dot{q}_{C_f}, \ddot{q}_{C_f}\}$.

La tensión nominal de la red V_{sAC} en México es de 127 [V_{RMS}], por lo que la tensión máxima está dada por $\|V_{sAC}\|_{\infty} = \sqrt{2}V_{sAC}$, es decir 180 [V_p]. Bajo esta premisa, se define la trayectoria

deseada $q_{C_f}^*(t)$ en términos de la tensión máxima $\|V_{sAC}\|_\infty$ como se muestra a continuación en (6.1):

$$(6.1) \quad \|V_{sAC}\|_\infty \sin(2\pi f_0 t) = \frac{q_{C_f}(t)}{C_f} \rightarrow q_{C_f}(t) = C_f \|V_{sAC}\|_\infty \sin(2\pi f_0 t)$$

Por lo tanto, la trayectoria deseada $q_{C_f}^*(t)$ y sus derivadas $\{\dot{q}_{C_f}^*, \ddot{q}_{C_f}^*\}$ están dadas por las expresiones:

$$(6.2) \quad q_{C_f}^*(t) = C_f \|V_{sAC}\|_\infty \sin(2\pi f_0 t)$$

$$(6.2a) \quad \dot{q}_{C_f}^*(t) = C_f \|V_{sAC}\|_\infty (2\pi f_0) \cos(2\pi f_0 t)$$

$$(6.2b) \quad \ddot{q}_{C_f}^*(t) = -C_f \|V_{sAC}\|_\infty (2\pi f_0)^2 \sin(2\pi f_0 t)$$

En la **Sección 6.1** se muestran los resultados obtenidos para las simulaciones realizadas del **controlador** para *un solo agente*. En esta parte se busca demostrar el desempeño de la ejecución de cada una de las tareas de control, es decir, el seguimiento de la trayectoria deseada $q_{C_f}^*(t)$ y la estimación para la carga de consumo \hat{R}_L como un parámetro desconocido.

Por otro lado, en la **Sección 6.2** se exhiben los resultados obtenidos para diferentes escenarios de operación; la intención es observar el comportamiento dinámico en conjunto y de forma sincronizada de los convertidores de potencia instalados en la microrred eléctrica para alcanzar el objetivo de control ante la presencia de perturbaciones o fallas en el sistema de potencia.

El **controlador** propuesto está diseñado en el tiempo continuo donde introducir el fenómeno de conmutación introduce un comportamiento indeseado. Esto se debe a que la que el fenómenos de conmutación involucra utilizar un número discreto de estados tal que para la señal de control $\tau(t)$ independientemente de la forma que tenga, oscilará entre estados saturados.

Los parámetros empleados para la simulación siguen la misma línea que se ha presentado a lo largo del documento, es decir, se han conservado idénticos independientemente de que ahora se esté simulando el **controlador** propuesto en lazo cerrado con el sistema dinámico de interés.

Se realiza la validación utilizando dos tipos de fuentes de alimentación de forma como se muestra en la **Figura 6.1**:

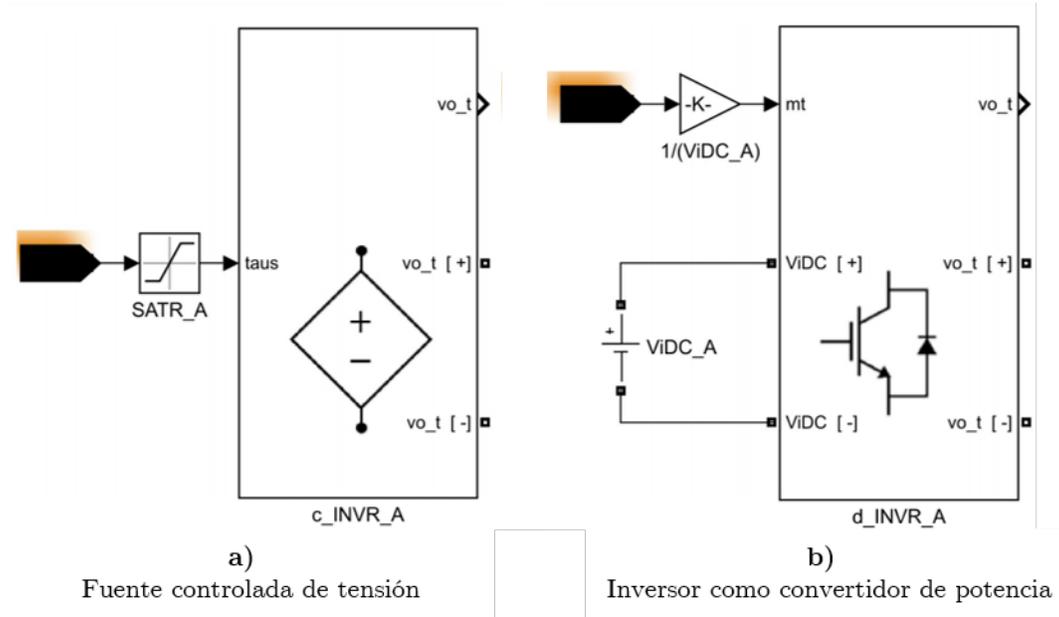


Figura 6.1
Tipos de fuentes de alimentación

De la misma forma, en la **Tabla 6.1** se muestran los parámetros utilizados para las diferentes simulaciones:

Inversor formador de red	Inversor alimentador	$R_L = 3.2858[\Omega]$ Paso de integración [seg] $t_s = 1.6501 \times 10^{-8}$ $R_s = 1.75[\Omega]$ Tiempo final [seg] $L_s = 0.44$ [mH] $t_f = 0.1333$ Tensión de la fuente en corriente directa SOLVER Ode15s $V_{iDC} = 220[V]$ Tensión máxima de la red de suministro $V_{sAC} = 180[V_p]$ $f_0 = 60[Hz]$ $m_f = 101$
<i>filtro-LC</i>	<i>filtro-L</i>	
Agente A	Agente C + Agente D	
$C_f = 58.14[\mu F]$ $L_1^A = 1.21$ [mH]	$L_1^X = 855.67[\mu H]$ $R_1^A = 0.10$ [m Ω] = $R_1^C = R_1^D$	

Tabla 6.1
Parámetros para las diferentes simulaciones

6.1 Controlador para un solo agente

En la **Figura 6.2** se muestra el sistema dinámico empleado en lazo cerrado con el **controlador** para *un solo agente*.

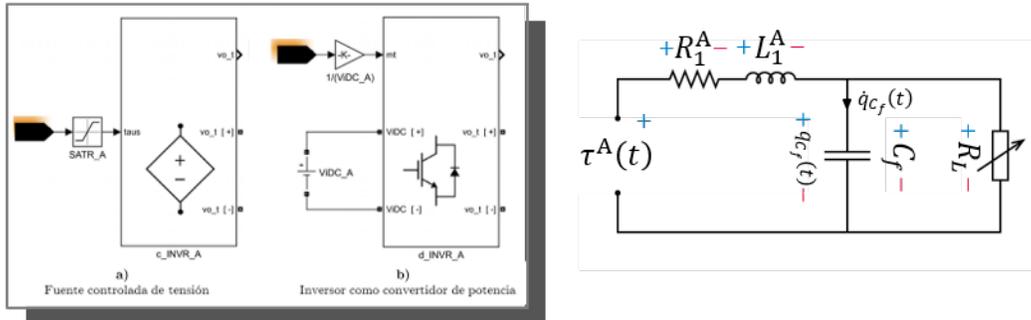


Figura 6.2
Inversor formador de red

6.1.1 Simulación con el inversor como convertidor de potencia

El primer escenario de simulación consiste en simplemente emplear el **controlador** para *un solo agente* en lazo cerrado con el **inversor formador de red** para evaluar su desempeño para el seguimiento de una trayectoria deseada $q_{C_f}^*(t)$ y la estimación de la carga de consumo \hat{R}_L .

Se utiliza como fuente de alimentación la opción: b) Inversor como convertidor de potencia, donde se induce naturalmente el fenómeno de conmutación.

Ganancias del **controlador** para *un solo agente*.

$$\gamma = 80$$

$$\alpha = 4$$

$$\beta = 160$$

Observe en la **Figura 6.3** y en la **Figura 6.4** que se realiza con éxito el seguimiento de la trayectoria deseada $q_{C_f}^*(t)$ a pesar de la presencia de componentes de alta frecuencia debido al fenómeno de conmutación: Sin embargo, revisando la señal de control $\tau(t)$, se alcanza a ver como aparece ese comportamiento entre tres estados de saturación (**Figura 6.5**); invariablemente, la tensión en el capacitor de acoplamiento $v_{C_f}(t)$ está en parámetros nominales (**Figura 6.6**).

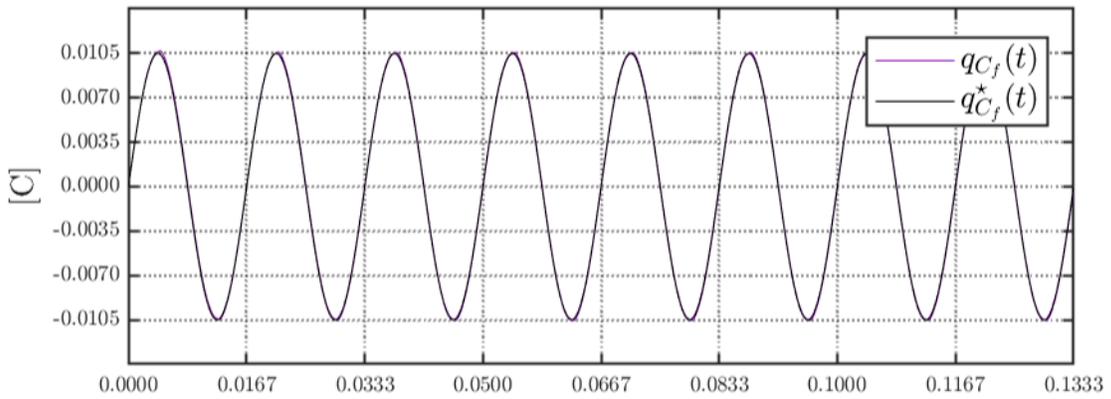


Figura 6.3
Comportamiento de $q_{C_f}(t)$ contra $q_{C_f}^*(t)$

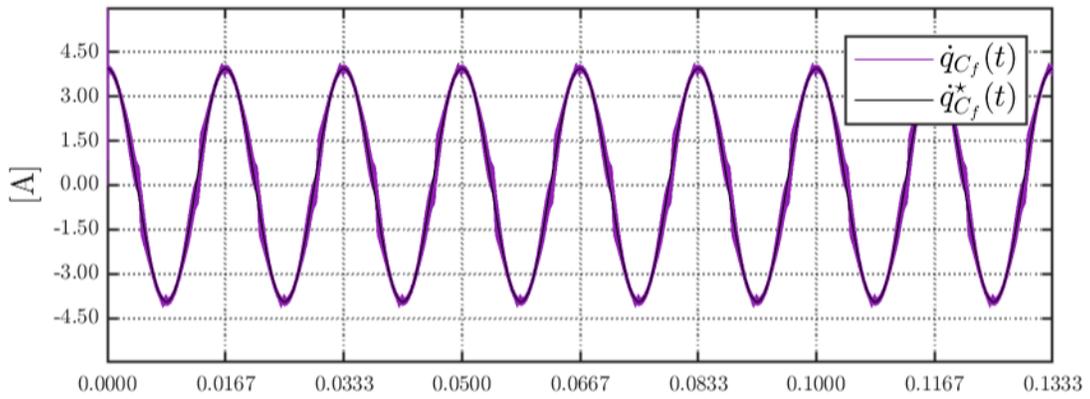


Figura 6.4
Comportamiento de $\dot{q}_{C_f}(t)$ contra $\dot{q}_{C_f}^*(t)$

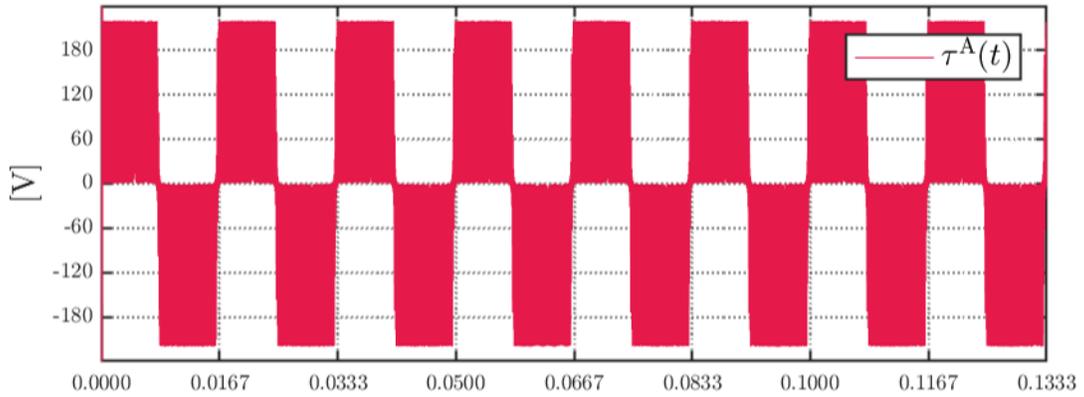


Figura 6.5
Señal de control $\tau(t)$

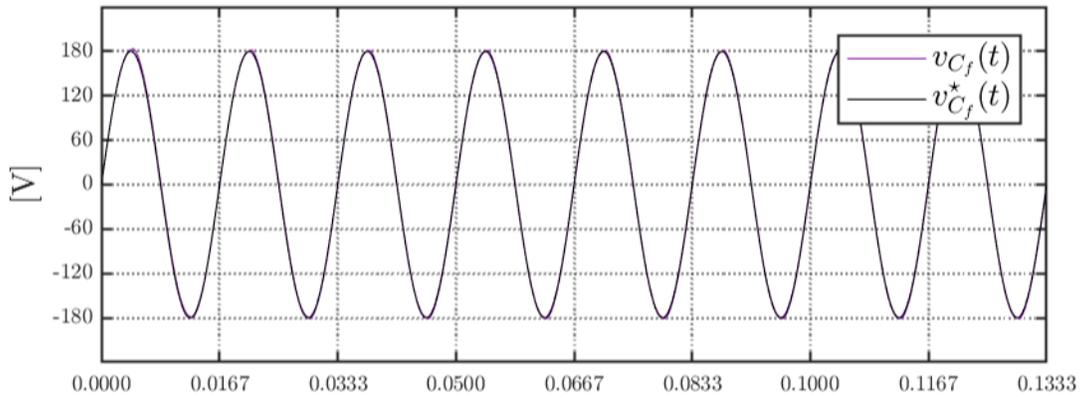


Figura 6.6
Tensión nominal en el capacitor de acoplamiento $v_{C_f}(t)$

6.1.2 Simulación con fuente controlada de tensión

El segundo escenario de simulación utiliza ahora como fuente de alimentación la opción: a) Fuente controlada de tensión, donde se obtiene un resultado más suave de las curvas.

Ganancias del **controlador** para *un solo agente*.

$$\gamma = 8$$

$$\alpha = 4$$

$$\beta = 16$$

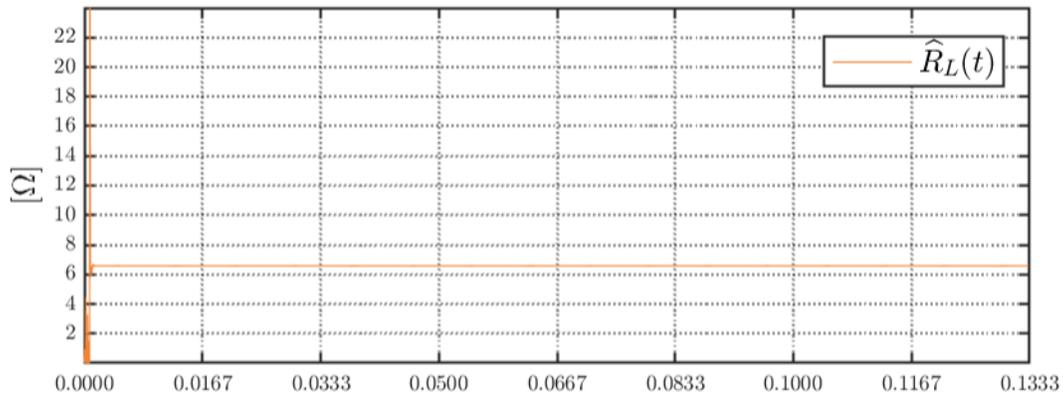


Figura 6.7
Estimación de la carga de consumo R_L

En la **Figura 6.7** vale la pena destacar el comportamiento dinámico de la *ley de estimación* para identificar cómo es empleado el algoritmo en el tiempo.

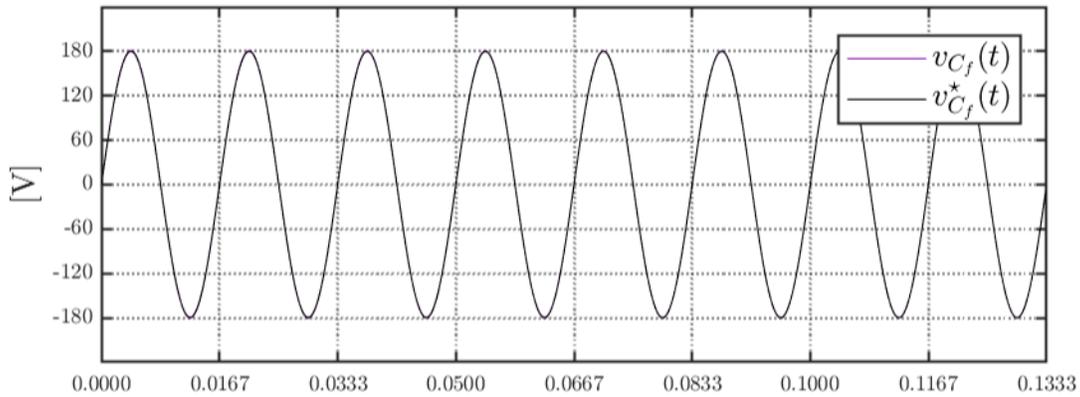


Figura 6.8

Tensión nominal en el capacitor de acoplamiento $v_{C_f}(t)$

En la **Figura 6.8** evidentemente se alcanza el objetivo de control más importante y con mayor facilidad dado el tipo de fuente de alimentación utilizada.

6.1.3 Carga de consumo variante en el tiempo

Ahora se presenta la situación en donde ocurre un cambio en la carga de consumo, de tal forma que después de los 0.0666 [seg] la carga de consumo posee la mitad de su valor nominal.

Ganancias del **controlador** para *un solo agente*.

$$\gamma = 80$$

$$\alpha = 4$$

$$\beta = 160$$

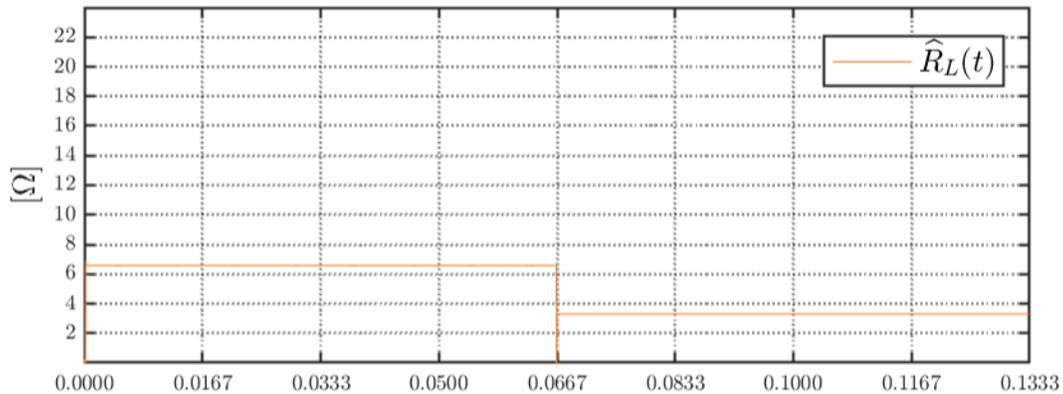


Figura 6.9

Estimación de la carga de consumo R_L

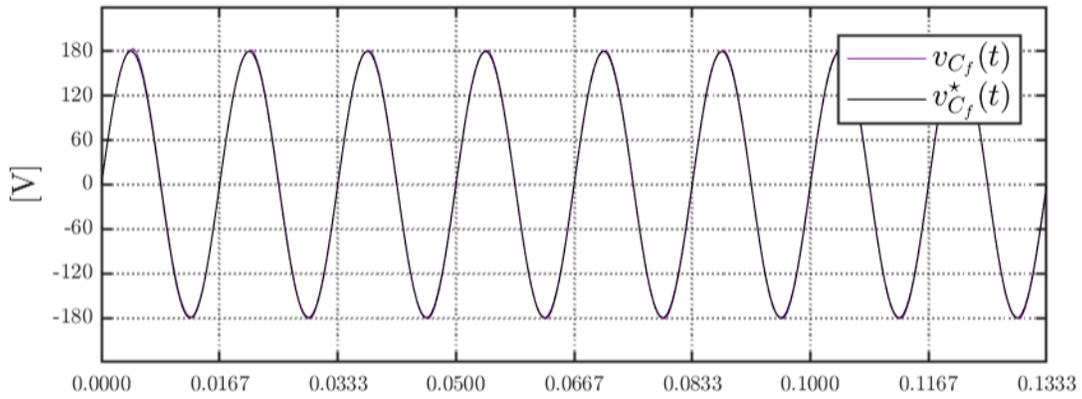


Figura 6.10
Señal de control $\tau(t)$

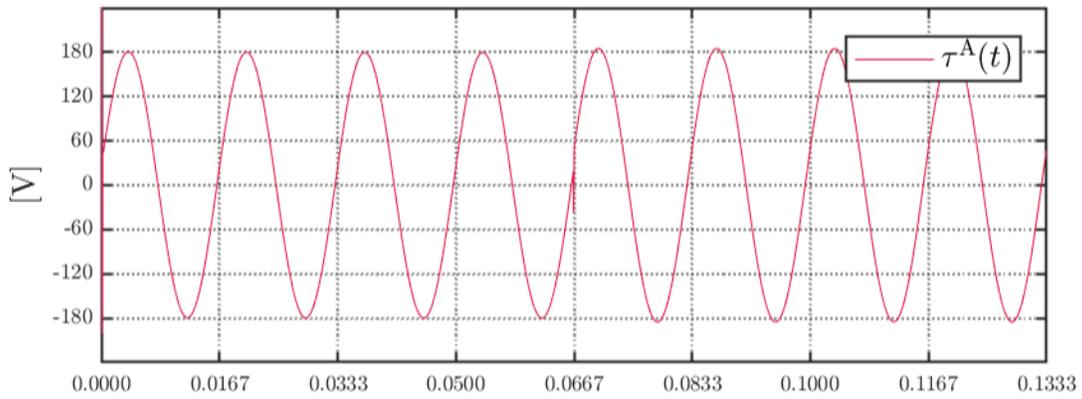


Figura 6.11
Corriente eléctrica a través de la impedancia en serie $i_{Z_1}(t)$

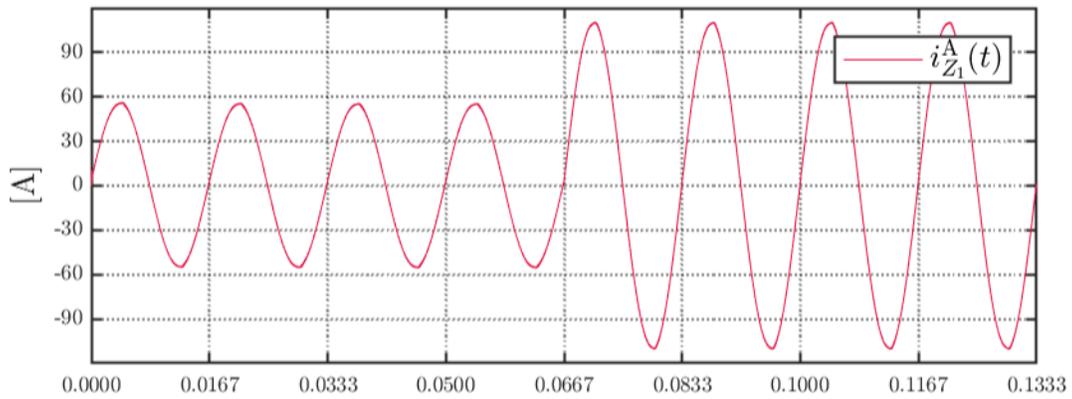


Figura 6.12
Tensión nominal en el capacitor de acoplamiento $v_{C_f}(t)$

6.1.4 Carga de consumo no caracterizada

Por otra parte, ahora se introduce una carga de consumo no caracterizada; es decir, la *ley de estimación* considera que es de carácter puramente resistiva, sin embargo, sin modificar *ley de estimación* se conecta una impedancia de la forma $R_L + L_L$ que consume 5000 [VA] de potencia aparente con un factor de potencia de 0.9781.

Ganancias del **controlador** para *un solo agente*.

$$\gamma = 8$$

$$\alpha = 4$$

$$\beta = 16$$

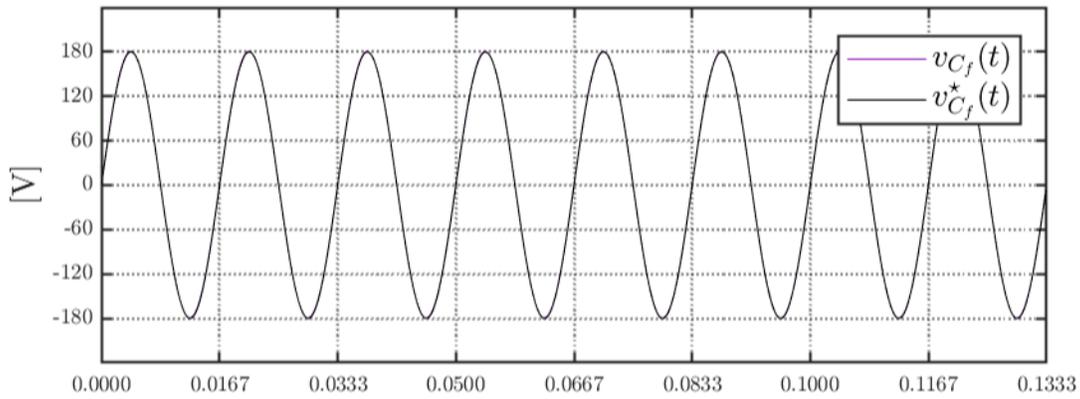


Figura 6.13

Tensión nominal en el capacitor de acoplamiento $v_{C_f}(t)$

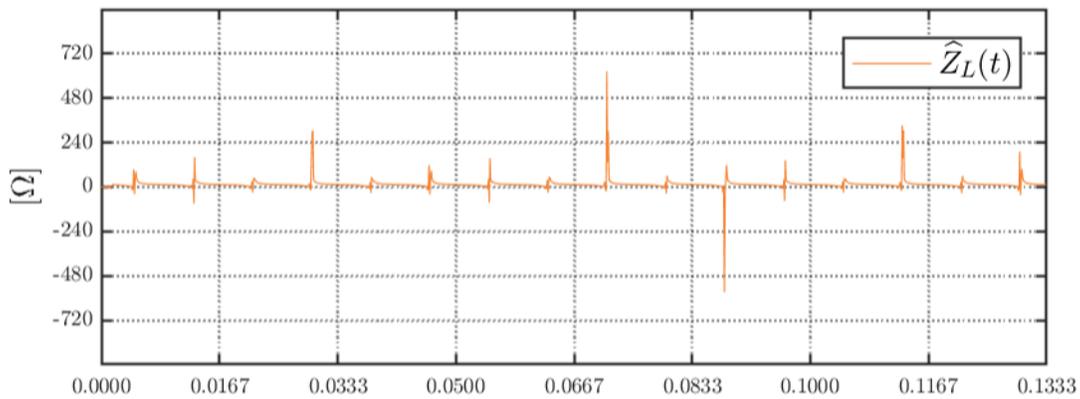


Figura 6.14

Estimación de la carga de consumo R_L

6.2 Controlador para múltiples agentes

En la **Figura 6.2** se muestra el sistema dinámico empleado en lazo cerrado con el **controlador** para *múltiples agentes*.

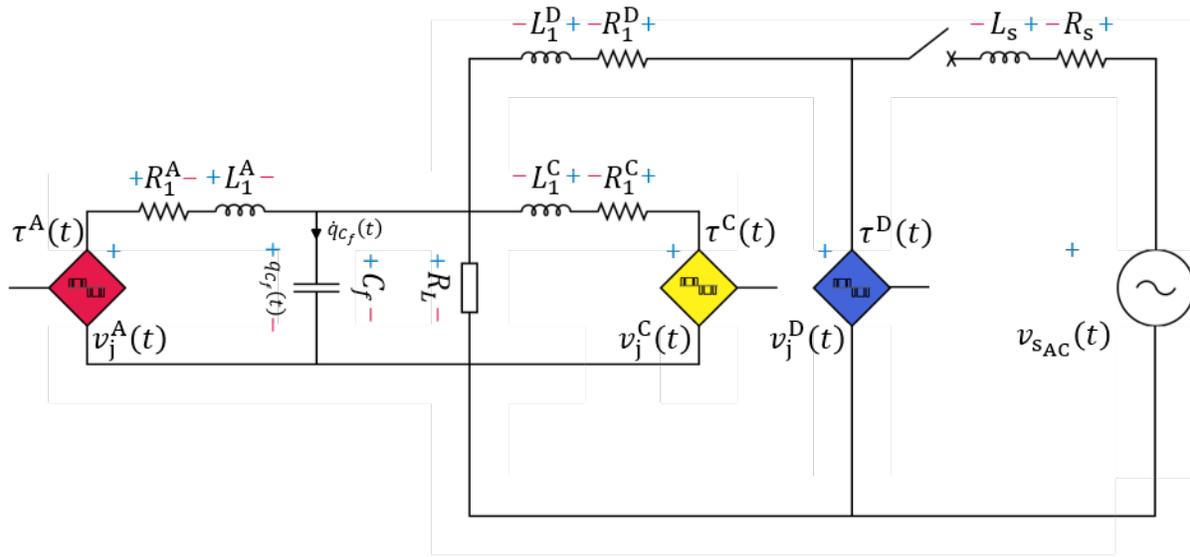


Figura 6.15

Inversor formador de red

Si bien, en el primer escenario no se aprovecha la capacidad del **controlador** para *múltiples agentes* de ejecutar la sincronización del comportamiento de los estados dado que la coordenada generaliza $q_{C_f}(t)$ y sus derivadas $\{\dot{q}_{C_f}, \ddot{q}_{C_f}\}$ están acopladas en el modelo matemático de todos los inversores instalados en la microrred donde el error de sincronización siempre es 0 no quiere decir que no se pueda sacar ventaja del **controlador** propuesto para diferentes escenarios reales de operación.

Primero se estudia el escenario donde la microrred eléctrica se desconecta de la red de suministro para operar de forma aislada. Por otro lado, posteriormente se considera la situación en donde la red de suministro presenta fallas asociado a la desconexión intermitente por poco periodos de tiempo.

6.2.1 Desconexión de la red de suministro

Como se mencionó anteriormente, en $t = 0.0666$ [seg] la red de suministro de energía eléctrica se desconecta de la microrred eléctrica habilitando la operación en modo aislado donde se tienen los siguientes resultados:

Ganancias del **controlador** para *múltiples agentes*.

$$\gamma = 8$$

$$\alpha = 4$$

$$K_1 = 16$$

$$K_2 = 0$$

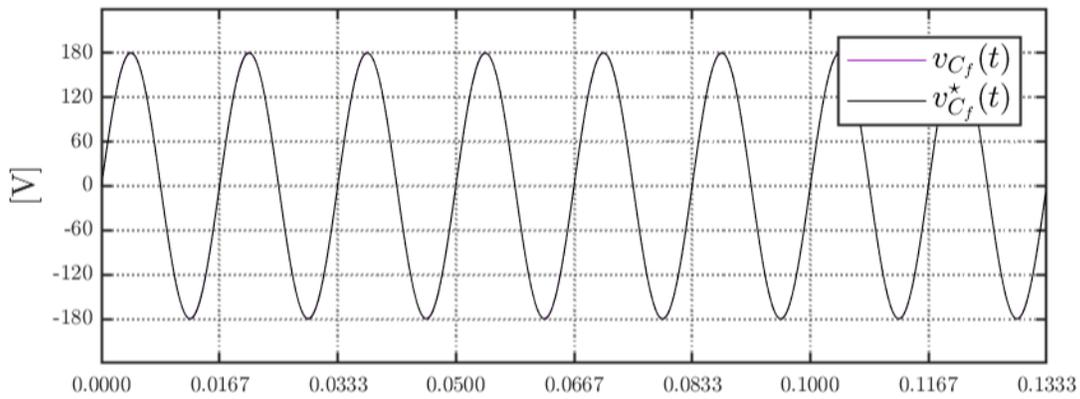


Figura 6.16

Tensión nominal en el capacitor de acoplamiento $v_{C_f}(t)$

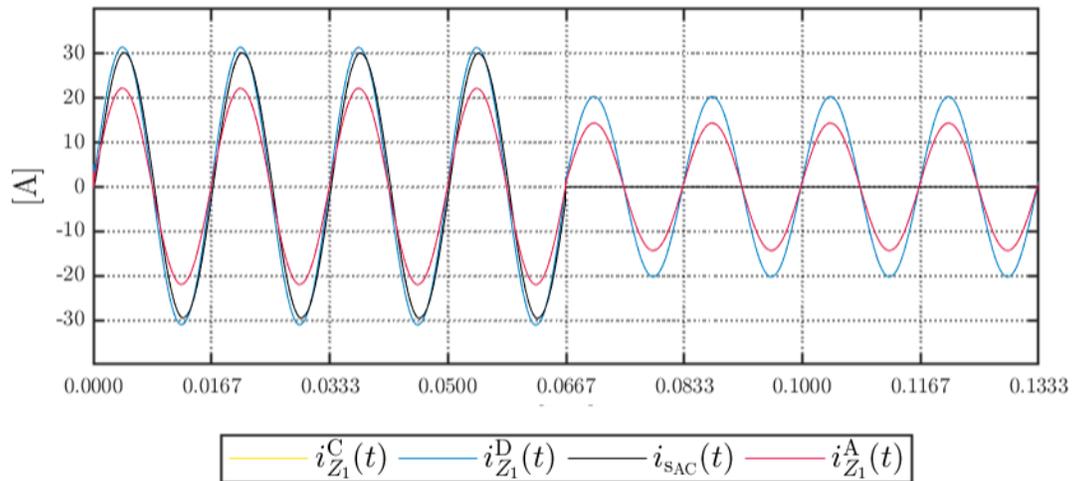


Figura 6.17

Corriente eléctrica a través de todas las impedancias $i_{Z_1}^X$.

6.2.2 Micro-cortes en la red de suministro

Adicionalmente, en $t = 0.0666$ [seg] la red de suministro de energía eléctrica presenta micro-cortes (*flickering*) donde se tienen los siguientes resultados:

Ganancias del **controlador** para *múltiples agentes*.

$$\gamma = 8$$

$$\alpha = 4$$

$$K_1 = 16$$

$$K_2 = 0$$

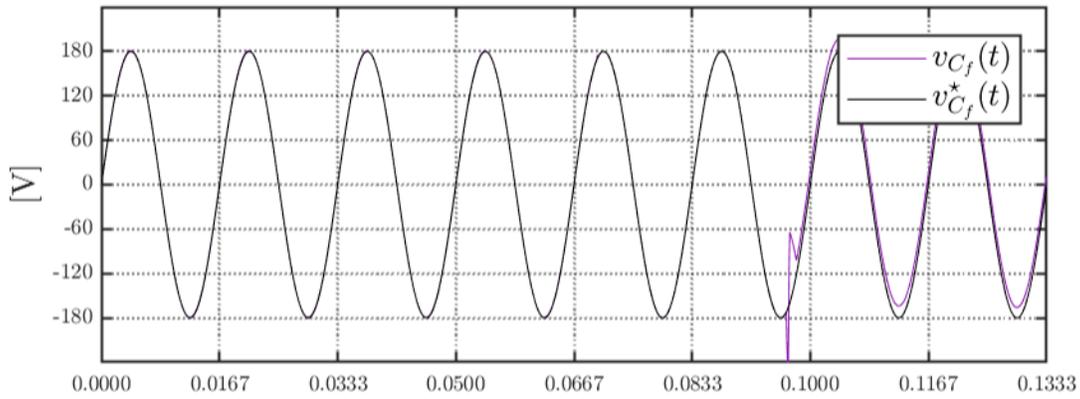


Figura 6.18

Tensión nominal en el capacitor de acoplamiento $v_{C_f}(t)$

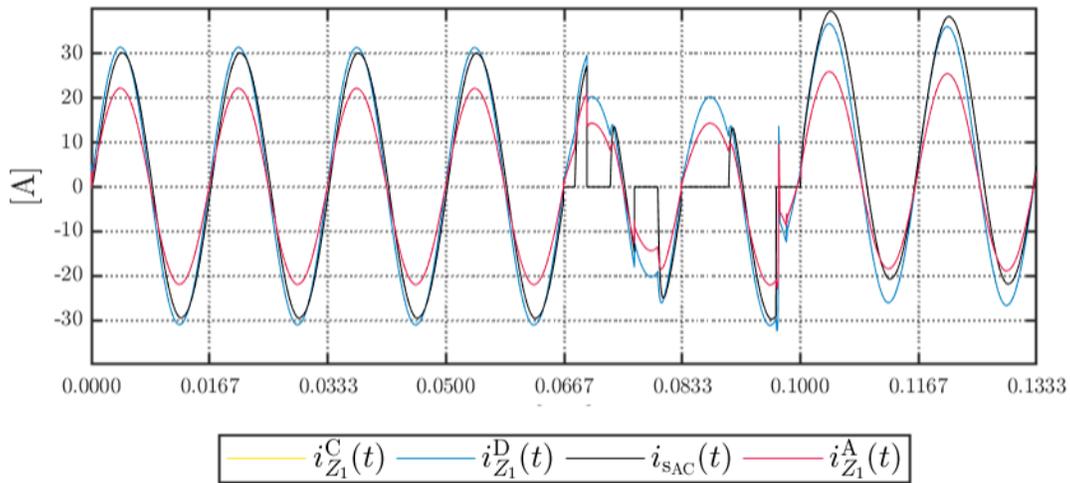


Figura 6.19

Corriente eléctrica a través de todas las impedancias $i_{Z_1}^X$.

6.2.3 Sincronización del comportamiento de estados con $K_2 \neq 0$

Finalmente, sean tres convertidores de potencia desacoplados para que exista una diferencia en el comportamiento de sus estados; es posible ejecutar la sincronización si se considera un **controlador** para *múltiples agentes* de tal forma que cada uno informa a los inversores adyacentes el comportamiento de la coordenada generaliza $q_{C_f}(t)$ y sus derivadas $\{\dot{q}_{C_f}, \ddot{q}_{C_f}\}$. Es decir, para evitar el flujo de corrientes parásitas en el caso de que los convertidores de potencia se llegarán a conectar entre si, ante cualquier perturbación en el comportamiento de los estados de algún inversor, el **controlador** para *múltiples agentes* permite una acción sincronizada para que los tres agentes posean la misma trayectoria.

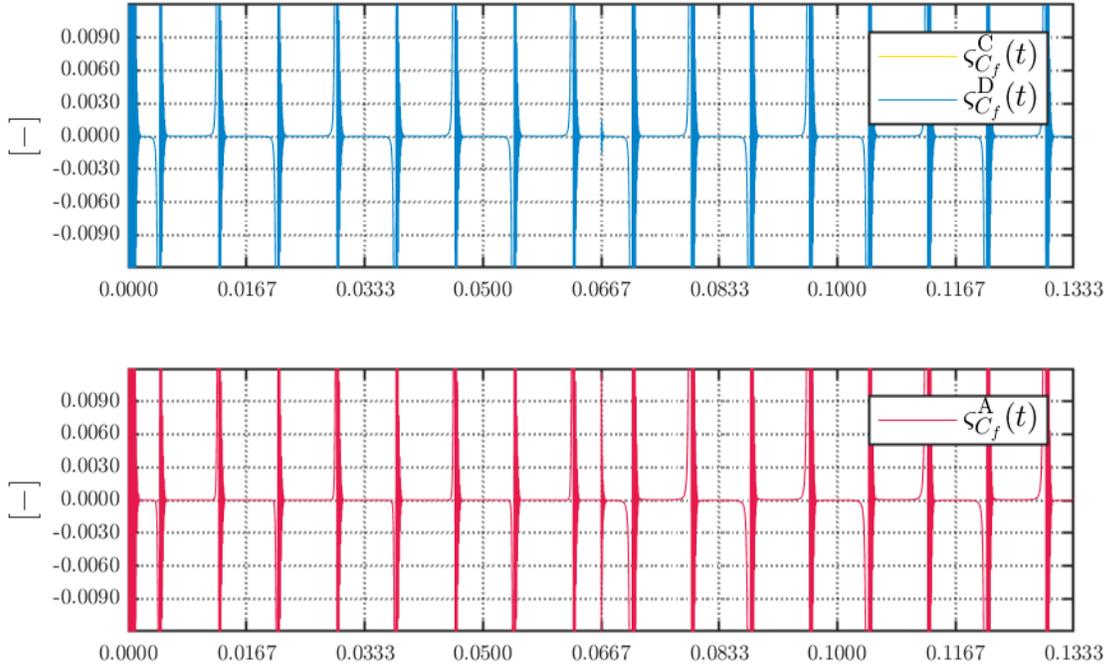


Figura 6.20

Ejecución de la sincronización del comportamiento de los estados

Ganancias del **controlador** para *múltiples agentes*.

$$\gamma = 8$$

$$\alpha = 4$$

$$K_1 = 16$$

$$K_2 = 6$$

Considere el esquema de control de agentes interconectados que se describe en la N- **5.1.6**

representado en la **Figura 5.2**.

En la **Figura 6.20** se observa que el agente **A** tiene una perturbación cuando $t = 0.0666$ [seg], donde los agentes adyacentes **C** y **D** efectúan un cambio en la trayectoria original en función de la ganancia K_2 ; nótese que explícitamente se está evaluando el comportamiento de la variable compuesta ς_{C_f} que determina la acción de control de forma general.

6.2.4 Sincronización del comportamiento de estados con $K_2 = 0$

Como punto de comparación, para el ejercicio anterior ahora considere que desaparece la ganancia asociada a la sincronización del comportamiento de los estados K_2 .

Ganancias del **controlador** para *múltiples agentes*.

$$\gamma = 8$$

$$\alpha = 4$$

$$K_1 = 16$$

$$K_2 = 0$$

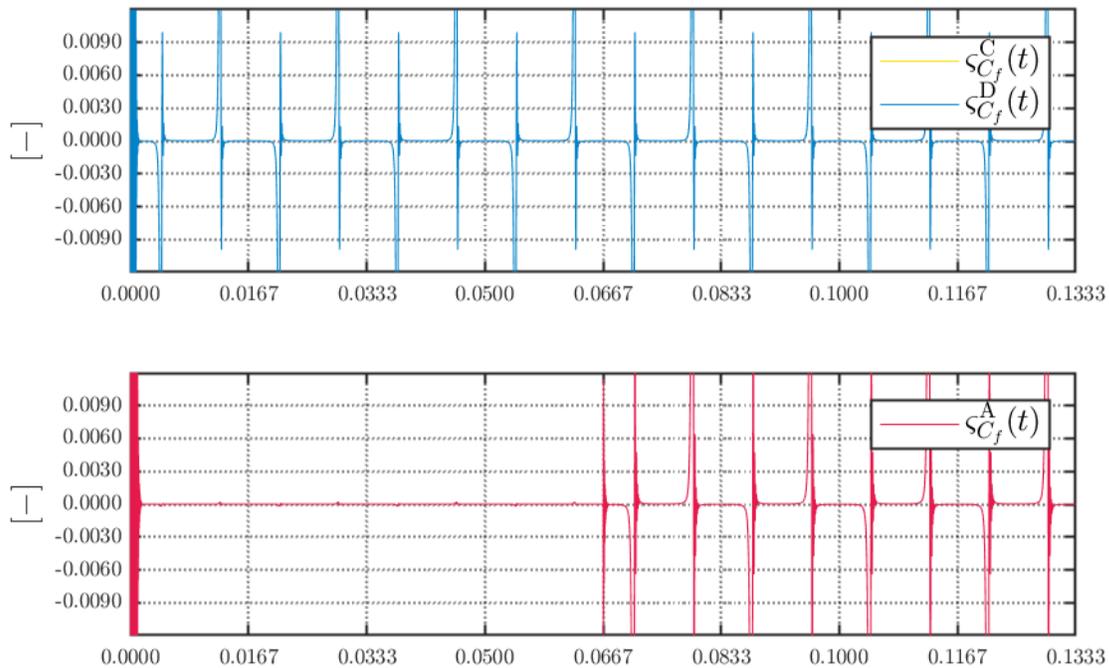


Figura 6.21

Ausencia de la sincronización del comportamiento de los estados

De la **Figura 6.21** se observa que, dada la ausencia del intercambio de información entre los convertidores de potencia, las trayectorias que determinan la acción de control no se encuentran sincronizadas y en el evento de que se desee interconectar los inversores en paralelo, se producirán corrientes parásitas debido a la diferencia de potencial que existe entre ellos. Dado que los agentes **C** y **D** conservan el inductor en serie de un *filtro-L*, el **agente A** invariablemente sincroniza su comportamiento con el resto de los agentes como se observa en la figura anterior, sin embargo, claramente esto no ocurre aquí, sin mencionar que para la perturbación en el **agente A** cuando $t = 0.0666$ [seg] el resto de los agentes no modificaron su comportamiento.

Conclusiones

Para finalizar, se presenta un breve resumen de lo aprendido a durante la realización del presente trabajo de tesis y que marco un inicio de una línea de investigación.

De la misma forma, se profundiza en el trabajo que se puede realizar posteriormente afín de perfeccionar la implementación del **controlador** propuesto.

7.1 Conclusiones

En los sistemas eléctricos/electrónicos, dada la naturaleza *lineal e invariante* de los modelos matemáticos, parece excesivo utilizar algún controlador para *sistemas no-lineales* o **NLSs**. De forma elusiva, también existen metodologías que simplifican el proceso mediante diferentes herramientas matemáticas.

La tarea de control asociada al seguimiento de una trayectoria de referencia convierte un sistema *invariante*, en un sistema *no autónomo* en lazo cerrado con el controlador; sin embargo, como se mencionó anteriormente, la transformación a diferentes coordenadas de referencia, el análisis en el dominio de la frecuencia, e inclusive, la linealización o la superposición del modelo matemático son herramientas matemáticas que permiten que este tipo de problemas puedan atacarse a través de controladores donde es más fácil estudiar su estabilidad.

Independientemente de ello, utilizar estas herramientas matemáticas tiene implicaciones severas que restan la flexibilidad que puede tener un controlador sobre un sistema dinámico.

En este sentido, existe una fuerte motivación por emplear un controlador que tenga la mayor flexibilidad posible, de forma que no quede a la sombra de las restricciones que impone, por ejemplo, la linealización en un punto de operación o la superposición a través de un gran cantidad de componentes armónicas.

Por ello, resulta interesante tomar un controlador en el que se verificado su funcionamiento para sistemas dinámicos “más complicados”. En esencia, el *controlador adaptivo de Slotine* tiene un gran número de aplicaciones en el área de la robótica, no solo porque puede ejecutar un algoritmo para el seguimiento de una trayectoria de referencia o para la estimación de parámetros desconocidos, si no porque puede incorporar el comportamiento no-lineal inherente para esta clase de sistemas dinámicos.

Aunque los sistemas eléctricos/electrónicos no poseen las características que hagan que su modelo matemático sea difícil de estudiar, como ocurre con los *sistemas no-lineales* o **NLSs**, esto no impide utilizar el controlador propuesto y aprovechar su potencial ya que puede realizar múltiples de tareas de control, inclusive en un sistema lineal.

Por lo tanto, desde un inicio el objetivo del presente trabajo de tesis fue utilizar este esquema de control en los convertidores de potencia de un microrred, no por la amplia presencia de no linealidades en el sistema dinámico, si no porque es un controlador que tiene la flexibilidad de cubrir múltiples propósitos.

Evidentemente el reto estuvo en cubrir las condiciones que requiere el controlador, a pesar de ello, fue posible aprovechar todos sus beneficios, que van desde el seguimiento de una trayectoria deseada arbitraria y la estimación de parámetros para compensar incertidumbre o perturbaciones, hasta la sincronización del comportamiento dinámico de los estados.

El presente trabajo de tesis busca marcar un punto de partida en donde se explore un controlador diferente, un criterio de estabilidad menos restrictivo a partir del análisis por contracción.

Múltiples problemas pueden resolverse utilizando este controlador siempre y cuando se explore de la forma apropiada, quizás las aplicaciones más interesantes corresponden al comportamiento coordinado de los agentes de forma que se garantice que no existan corrientes parásitas en la interconexión de un convertidor de potencia con la red de suministro, o con otros agentes.

Este trabajo representó la oportunidad de profundizar en el modelado por energía, de entender mejor el diseño de un filtro de acoplamiento, de conocer el funcionamiento a detalle de un inversor como convertidor de potencia, de aprender nuevas herramientas matemáticas, de estudiar un criterio de estabilidad poco conocido, entre otras cosas. Para cerrar, solo resta dejar el camino libre y comentar que las posibilidades para este controlador son infinitas. El desarrollo que ha tenido para manipuladores robóticos es una prueba de ello, donde todo lo que se ha realizado puede imitarse para sistemas eléctricos como se ha hecho en principio a lo largo de este trabajo de tesis.

7.2 Trabajo a futuro

Como se mencionó en la conclusión, el presente trabajo de tesis marca un inicio para la implementación del controlador propuesto donde aún queda mucho por imitar del trabajo que se ha realizado en manipuladores robóticos. Por lo tanto, de forma breve se menciona algunas líneas para continuar con lo que se ha desarrollado hasta ahora:

- Considerar dos convertidores de potencia conectados en paralelo como un solo agente permite ampliar el número de fuentes de alimentación en el modelo matemático, por lo tanto resulta interesante esta aproximación para tener mayor flexibilidad a la hora de establecer las coordenadas generalizadas que se pueden controlar.
- En cuanto al intercambio de información, se ha explorado la situación en donde exista un ancho de banda limitado o retardos en la comunicación como una aproximación más real de lo que puede ocurrir cuando se desea efectuar la sincronización del comportamiento de los estados en una red de agentes interconectados.
- Extender el análisis de estabilidad a partir del análisis por contracción para sistemas eléctricos/electrónicos.
- La desratización del controlador para una implementación más apropiada en los convertidores de potencia.

Ecuación de Euler-Lagrange

En la **Sección 2.1.1** se utiliza el cálculo de variaciones de forma que la función $w = w(t)$ en el intervalo $[a, b]$ que permite encontrar la extrema de un funcional $\mathfrak{W}(\mathbf{r})$ necesariamente satisface la **Ecuación de Euler-Lagrange**. Sin embargo, utilizando principios de la mecánica clásica, también es posible derivar la **Ecuación de Euler-Lagrange**.

- Partiendo del principio de d’Alambert [20, p. 39-42].
- Partiendo del principio de Hamilton [19, p. 487-488][26].

A.1 Partiendo del principio de d’Alambert

Demostración

T- 2.1.8

En su tratado *Mecanique Analytique* [1788] (Mecánica Analítica), J-L. Lagrange buscaba una expresión para $m\dot{v}$ invariante en función de las coordenadas generalizadas como (2.4). Si se considera un pequeño incremento en el desplazamiento dr_i entonces el incremento correspondiente del trabajo para fuerzas externas \mathbf{F}_i^e esta dado por:

$$(A.1) \quad \delta W^e \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^e d\mathbf{r}_i \equiv \sum_{i,j=1}^{N,n} \mathbf{F}_i^e \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} dq_j \equiv \sum_{j=1}^n \mathcal{Q}_j dq_j$$

Donde $\mathcal{Q}_j = \mathcal{Q}'_j + \mathcal{Q}''_j$ representa la **fuerza generalizada** para $j = \{1, 2, \dots, n\}$ debido a la transformación a coordenadas generalizadas.

- \mathcal{Q}'_j *Fuerza conservativa.*
- \mathcal{Q}''_j *Fuerza no conservativa.*

Por otro lado, se define la **energía cinética** total como la expresión que se muestra en (A.2) a continuación:

$$(A.2) \quad \mathcal{T} := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{v}_i|^2$$

El cambio de energía cinética en función del momento debido al incremento del desplazamiento $d\mathbf{r}_i$ en el primer término de la expresión (2.5) esta dado por:

$$(A.3) \quad \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{v}}_i d\mathbf{r}_i = \sum_{i,j=1}^{N,n} m_i \left(\mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} dq_j \right)$$

Utilizando la *regla del producto* para la operación de diferenciación que se observa en la expresión (A.4) se tiene:

$$(A.4) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) &\equiv \dot{\mathbf{v}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \mathbf{v}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \\ &\equiv \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \end{aligned}$$

También, diferenciando para coordenadas generalizadas se obtienen las identidades que se muestran a continuación:

$$(A.5a) \quad \mathbf{v}_i \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

$$(A.5b) \quad \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

Utilizando las expresiones (A.5a) y (A.5b), se observa que:

$$\begin{aligned}
 (A.6) \quad \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{v}}_i d\mathbf{r}_i &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{v}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) dq_j \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right) \right) dq_j \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right) \right) dq_j \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{v}_i|^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{v}_i|^2 \right) \right) dq_j
 \end{aligned}$$

Entonces el **principio de d'Alambert** es equivalente a:

$$(A.7) \quad \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_j} - \mathcal{Q}_j \right) dq_j = 0$$

$$(A.8) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_j} - \mathcal{Q}_j = 0 \text{ para coordenadas independientes } q_j$$

■

De la mano de la **AS 2.1.20** y si se asume que el trabajo realizado depende únicamente de la configuración inicial y final; entonces el trabajo está constituido únicamente por *fuerzas conservativas* donde $\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}'_i$ donde existe un diferencial de **energía potencial** $\mathcal{V} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ como se muestra a continuación:

$$\mathcal{Q}'_j = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_j}$$

De **D- 2.1.11** se sabe que el **lagrangiano** contiene la información relacionada con el intercambio de energía. Utilizando la expresión anterior se puede deducir que:

$$\mathcal{L}(t; \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \mathcal{T} - \mathcal{V}$$

A.2 Partiendo del principio de Hamilton

Demostración

T- 2.1.14

Sea $\mathbf{q}(t)$ la evolución de la trayectoria de un sistema dinámico en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ entre dos estados $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}(t_1)$ y $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}(t_2)$ y sea $\boldsymbol{\mu}(t)$ una pequeña perturbación que es cero en los extremos de la trayectoria tal que $\boldsymbol{\mu}_1(t_1) := 0$ y $\boldsymbol{\mu}_2(t_2) := 0$, entonces el cambio de primer orden en $\boldsymbol{\mu}_1(t)$ produce un cambio el funcional de **acción** $\delta\mathcal{S}(\mathbf{q})$ como:

$$(A.9) \quad \delta\mathcal{S}(\mathbf{q}) = \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{L}(t; \mathbf{q} + \boldsymbol{\mu}, \dot{\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\mu}}) - \mathcal{L}(t; \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\boldsymbol{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) dt$$

Aplicando *integración por partes*:

$$(A.10) \quad \delta\mathcal{S}(\mathbf{q}) = \left[\boldsymbol{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\boldsymbol{\mu} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \boldsymbol{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \right) dt$$

Sean las condiciones de frontera $\boldsymbol{\mu}_1(t_1) := 0$ y $\boldsymbol{\mu}_2(t_2) := 0$ se tiene que:

$$(A.11) \quad \delta\mathcal{S}(\mathbf{q}) = \left| - \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\mu} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \right) dt \right|$$

El **principio de Hamilton** requiere que el primer orden de cambio de $\delta\mathcal{S}(\mathbf{q})$ sea cero para cualquiera $\boldsymbol{\mu}(t)$ para un **punto estacionario**; esto solo ocurre cuando:

$$(A.12) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = 0 \text{ para } \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T$$

■

Anexo de bloques: Simulación y resultados

En la obtención de resultados para las diferentes simulaciones realizadas se utilizaron múltiples recursos que se observa a lo largo de esta parte del documento.

En la sección **Sección B.1** se muestra el diagrama de bloques para efectuar la conmutación unipolar de una señal en **Powersim PSIM 9.1.1** y en **MathWorks SIMULINK R2017b**. Por otro lado, en la **Sección B.2** se muestra el código de programación de los bloques en el **controlador** para *un solo agente* (**Figura 4.1**) y para *múltiples agentes* (**Figura 5.1**).

B.1 Bloques para la modulación unipolar

En la **Figura B.1** se muestra el diagrama de bloques para efectuar la conmutación unipolar de una señal en el software **Powersim PSIM 9.1.1**.

En la **Figura B.2** se muestra el diagrama de bloques para efectuar la conmutación unipolar de una señal en el software **MathWorks SIMULINK R2017b**.

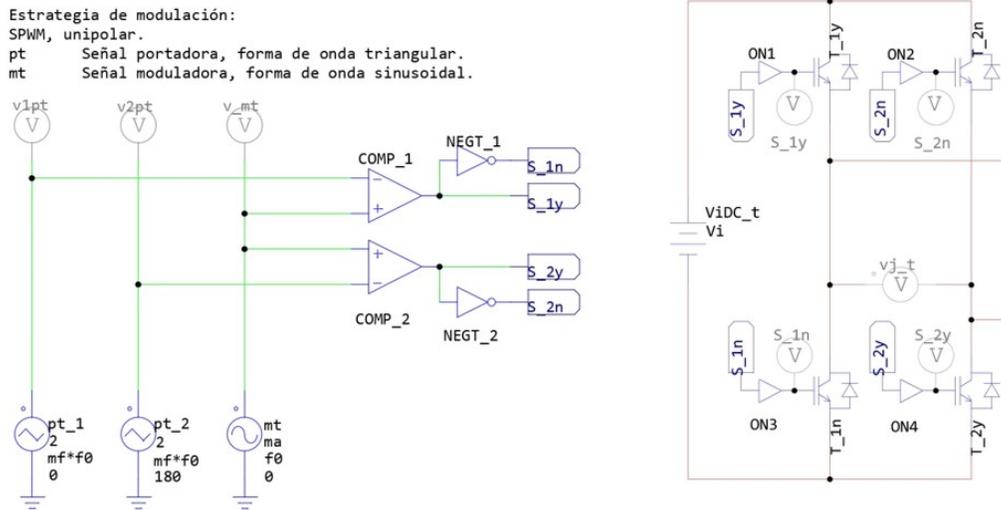


Figura B.1

Diagrama de bloques, en Powersim PSIM 9.1.1

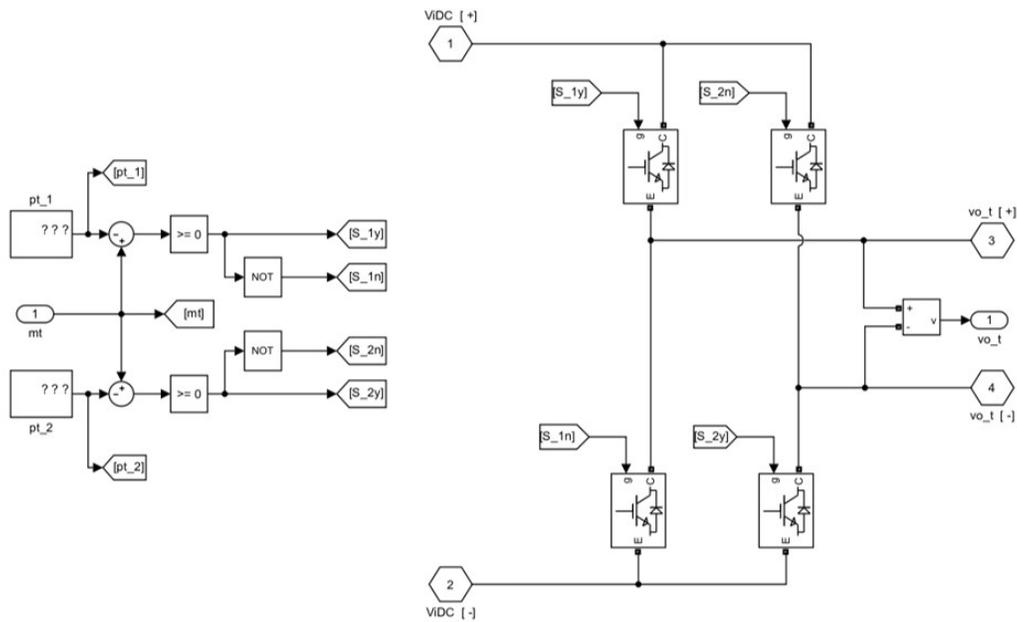


Figura B.2

Diagrama de bloques, en MathWorks SIMULINK R2017b

B.2 Bloques para el controlador

- Código de programación para el bloque **ERRR** en el **controlador** par

```
1 function [qe0X,qe1X] = ERRR(qa0X,qa1X,qd0B,qd1B)
2 %-
3
4 % ERRR Error del comportamiento de las coordenadas generalizadas
5
6
7 qe0X = qa0X-qd0B; % Calculo del error de la posicion generalizada
8 qe1X = qa1X-qd1B; % Calculo del error de la velocidad generalizada
```

- Código de programación para el bloque **SLID** en el **controlador**:

```
1 function [qr1X,qr2X,qh_X] = SLID(qa1X,gama,qd1B,qd2B,qe0X,qe1X)
2 %-
3
4 % SLID Variable compuesta para describir una superficie deslizando
5
6
7 % gama = [ ?];
8 % Ganancia asociada a la posicion en la variable compuesta
9
10
11 qr1X = qd1B-gama*qe0X;
12 qr2X = qd2B-gama*qe1X;
13
14 qh_X = qa1X-qr1X;
```

- Código de programación para el bloque **ESTM** en el **controlador**:

```
1 function d_GLX = ESTM(qa0X,qr1X,alfa,qh_X)
2 %-
3
4 % ESTM Ley de estimacion
5
6
7 % alfa = [ ?];
8 % Ganancia para la ley de estimacion
9
10
11 % RL = 1/GL;
12 d_GLX = -alfa*((qr1X/Cf)+((R1*qa0X)/Cf))*qh_X;
```

- Código de programación para el bloque CTRL en el **controlador** para *un solo agente*:

```
1 function      taus_X                                = CTRL(qa0X,qa1X,qr1X,qr2X,RL_X,beta,qh_X)
2 %-
3
4 % CTRL Ley de control
5
6
7 % beta = [ ?];
8 % Ganancia para la ley de control
9
10
11 ut          = L1*qr2X+((R1*qr1X)+((L1*qr1X)/(RL_X*Cf)))+(((R1*qa0X)/(RL_X*Cf))+(qa0X/Cf))-beta*qh_X;
12 vt          = ((R1*qa1X)+((L1*qa1X)/(RL_X*Cf)));
13
14 taus_X      = ut+vt;
```

- Código de programación para el bloque CTRL en el **controlador** para *múltiples agentes*:

```
1 function      taus_X                                = CTRL(qa0X,qa1X,qr1X,qr2X,RL_X,qh_X,K1,K2,qh_i,qh_j)
2 %-
3
4 % CTRL Ley de control
5
6
7 % K1      = [ ?];
8 % Ganancia para el seguimiento de una trayectoria deseada
9 % K2      = [ ?];
10 % Ganancia para la sincronizacion del comportamiento de los estados
11
12
13 ut          = L1*qr2X+((R1*qr1X)+((L1*qr1X)/(RL_X*Cf)))+(((R1*qa0X)/(RL_X*Cf))+(qa0X/Cf))-K1*qh_X+K2*qh_i+K2*qh_j;
14 vt          = ((R1*qa1X)+((L1*qa1X)/(RL_X*Cf)));
15
16 taus_X      = ut+vt;
```

Bibliografía

- [1] Christo Papadopoulos. *Solid-State Electronic Devices, An Introduction*. New York, New York: Springer, 2014. Cap. 1, págs. 1-11. ISBN: 978-1-4614-8836-1. DOI: 10.1007/978-1-4614-8836-1.
- [2] Daniel W. Hart. *Power Electronics*. Valparaiso, Indiana: McGraw Hill, 2010. Cap. 1,8, págs. 15-19, 331-386. ISBN: 978-0-07-338067-4.
- [3] Víctor Manuel Cárdenas Galindo. “Filtros Activos Híbridos para Compensación Armónica de Corriente y Corrección de Factor de Potencia en Sistemas Trifásicos”. Cuernavaca, Morelos: Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, CENIDET, mayo de 1999. Cap. 1-2, págs. 1-22.
- [4] Janeth Aurelia Alcalá Rodríguez. *Estudio del Convertidor Back-to-Back*. Avenidad Universidad 333, C.P. 28040, Colima, Colima: Universidad de Colima, abr. de 2016. Cap. 1, págs. 15-19. ISBN: 978-607-8356-73-7.
- [5] Juan Alejandro González Rivera. “Desarrollo e Implementación de una Microrred Aislada con Generación Fotovoltaica”. San Luis Potosí, San Luis Potosí: Universidad Autónoma de San Luis Potosí, UASLP, ene. de 2020. Cap. 1, págs. 1-25.
- [6] Fernando Isidoro Quiroz Vázquez. “Desarrollo de un Inversor Fotovoltaico con Funciones Autónomas para Generación Eléctrica Distribuida”. San Luis Potosí, San Luis Potosí: Universidad Autónoma de San Luis Potosí, UASLP, dic. de 2020. Cap. 1, págs. 1-31.
- [7] Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. 3rd. New York, New York: Oxford University Press, 1998. Cap. 1, págs. 1-4. ISBN: 0-19-511777-8.
- [8] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. 3rd. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2002. ISBN: 0-13-067389-7.
- [9] Robbins W. Mohan N. Undeland T. *Power Electronics: Converters, Applications and Design*. 2nd. John Wiley & Sons Inc., 1995. Cap. 8,17, págs. 200-248, 460-480. ISBN: 0-471-58408-8.

- [10] Seddik Bacha, Iulian Munteanu y Antoneta Iuliana Bratcu. *Power Electronic Converters Modeling and Control*. London, Reino Unido: Springer, 2014. Cap. 2, págs. 9-26. ISBN: 978-1-4471-5478-5. DOI: 10.1007/978-1-4471-5478-5.
- [11] PennState Department of Energy y Mineral Engineering. *EME 812 Utility Solar Power and Concentration - 6.6. Switching Devices*. URL: <https://www.e-education.psu.edu/eme812/node/7122> (visitado 02-01-2021).
- [12] Roberto Marani Gianluca Sena y Anna Gina Perri. "Power Semiconductors Devices for Industrial PWM Inverters: State of Art". En: *International Journal of Advances in Engineering & Technology* 10.February (2017), págs. 52-65. URL: https://www.researchgate.net/publication/318569763_POWER_SEMICONDUCTORS_DEVICES_FOR_INDUSTRIAL_PWM_INVERTERS_STATE_OF_ART.
- [13] By FARLEX & McGraw-Hill Dictionaty of Scientific The Free Dictionaty y Tecnical Terms 6th Ed. *modulating signal*. URL: <https://encyclopedia2.thefreedictionary.com/modulating+signal> (visitado 02-01-2021).
- [14] Tutorialspoint. *Principles of Communication - Modulation*. URL: https://www.tutorialspoint.com/principles_of_communication/principles_of_communication_modulation.htm (visitado 02-01-2021).
- [15] Britannica. *Harmonic analysis*. URL: <https://www.britannica.com/science/harmonic-analysis> (visitado 02-01-2021).
- [16] Irina Dolguntseva. "Application of Fourier Series Expansion to Electrical Power Conversion". En: *INTECH* (2017), págs. 119-145. DOI: 10.5772/66581. URL: <https://cdn.intechopen.com/pdfs/53640.pdf>.
- [17] O. May Tzuc y col. *Artificial Neural Networks for Engineering Applications*. Academic Press, 2019. Cap. 10, págs. 127-138. ISBN: 9780128182475. DOI: 10.1016/B978-0-12-818247-5.00019-8.
- [18] Daniel Lawson & Glenn Marion. *An Introduction to Mathematical Modelling*. 2018. URL: https://people.maths.bris.ac.uk/~madjl/course_text.pdf.
- [19] Per Johan Nicklasson Romeo Ortega Antonio Lorfa y Hebertt Sira-Ramírez. *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*. Chicago, Illinois: Springer, 1998. Cap. 2, págs. 16-38. ISBN: 978-1-84996-852-2.
- [20] Simon J.A. Malham. *An Introduction to Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*. 23 de ago. de 2016. URL: <http://www.macs.hw.ac.uk/~simonm/mechanics.pdf>.

- [21] Britannica. *Calculus of variations*. URL: <https://www.britannica.com/science/calculus-of-variations-mathematics> (visitado 20-01-2021).
- [22] Britannica. *Extremum*. URL: <https://www.britannica.com/science/extremum> (visitado 20-01-2021).
- [23] Louis N. Hand y Janet D. Finch. *Analytical Mechanics*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 1998. Cap. 1,2, págs. 1-66. ISBN: 052-1-57327-0.
- [24] BYJU'S The Learning App. *D'Alembert's Principle*. URL: <https://byjus.com/physics/dalemberts-principle/> (visitado 20-01-2021).
- [25] LibreTexts Libraries y US Department of Education & UC Davis University of California. *Principle of Least Action*. 18 de mayo de 2020. URL: [https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Electrical_Engineering/Electro-Optics/Book%3A_Direct_Energy_\(Mitofsky\)/11%3A_Calculus_of_Variations/11.02%3A_Principle_of_Least_Action](https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Electrical_Engineering/Electro-Optics/Book%3A_Direct_Energy_(Mitofsky)/11%3A_Calculus_of_Variations/11.02%3A_Principle_of_Least_Action).
- [26] LibreTexts Libraries y US Department of Education & UC Davis University of California. *Derivation of the Euler-Lagrange Equation*. 18 de mayo de 2020. URL: [https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Electrical_Engineering/Electro-Optics/Book%3A_Direct_Energy_\(Mitofsky\)/11%3A_Calculus_of_Variations/11.03%3A_Derivation_of_the_Euler-Lagrange_Equation](https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Electrical_Engineering/Electro-Optics/Book%3A_Direct_Energy_(Mitofsky)/11%3A_Calculus_of_Variations/11.03%3A_Derivation_of_the_Euler-Lagrange_Equation).
- [27] Herbett Sira-Ramirez, Romeo Ortega y Gerardo Escobar. "Lagrangian Modeling of Switch Regulated DC-to-DC Power Converters". En: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control* 4.December (dic. de 1996), págs. 4492-4495. ISSN: 01912216. DOI: 10.1109/cdc.1996.577568.
- [28] Herbett Sira-Ramirez, R. A. y Ortega. "Passivity-based Controllers for the Stabilization of DC-to-DC Power Converters". En: *Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control* (dic. de 1995), págs. 499-513. ISSN: 00051098. DOI: 10.1016/S0005-1098(96)00207-5.
- [29] Kun Mu y col. "A New Nonlinear Control Strategy for Three-Phase Photovoltaic Grid-Connected Inverter". En: *Proceedings of 2011 International Conference on Electronic and Mechanical Engineering and Information Technology, EMEIT 2011* 9 (2011), págs. 4611-4614. DOI: 10.1109/EMEIT.2011.6024002.
- [30] Herbett Sira-Ramirez y Marisol Delgado de Nieto. "A Lagrangian Approach to Average Modeling of Pulsewidth-Modulation Controlled DC-to-DC Power Converters". En: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 43.5 (mayo de 1996), págs. 427-430.

- [31] Tzann Shin Lee. “Lagrangian Modeling and Passivity-based Control of Three-phase AC/DC Voltage-source Converters”. En: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 51.4 (ago. de 2004), págs. 892-902. ISSN: 02780046. DOI: 10.1109/TIE.2004.831753.
- [32] Guangjun Tan, Hongjun Chen y Xiaohua Zhang. “Comments on ”Lagrangian Modeling and Passivity-Based Control of Three-Phase AC/DC Voltage-Source Converters””. En: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 55.4 (abr. de 2008), págs. 1881-1882. ISSN: 02780046. DOI: 10.1109/TIE.2008.917065.
- [33] J. M.A. Scherpen, D. Jeltsema y J. B. Klaassens. “Lagrangian Modeling and Control of Switching Networks with Integrated Ccoupled Magnetics”. En: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control* 4 (2000), págs. 4054-4059. DOI: 10.1109/cdc.2000.912349.
- [34] Hüseyin Alpaslan Yildiz y Leyla Gören-Sümer. “Lagrangian Modeling of DC-DC Buck-Boost and Flyback Converters”. En: *ECCTD 2009 - European Conference on Circuit Theory and Design Conference Program* 5 (2009), págs. 245-248. DOI: 10.1109/ECCTD.2009.5274937.
- [35] Romeo Ortega, Zhong P. Jiang y David J. Hill. “Passivity-based Control of Nnonlinear Systems: A Tutorial”. En: *Proceedings of the American Control Conference* (jun. de 1997), págs. 2633-2637. ISSN: 07431619. DOI: 10.1109/acc.1997.611933.
- [36] Zhaohua Yang y Leitao Wu. “A New Passivity-based Control Method and Simulation for DC/DC Converter”. En: *Proceedings of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA)* 6 (15 de jun. de 2004), págs. 5582-5585. DOI: 10.1109/wcica.2004.1343803.
- [37] Jorge V. José y Eugene J. Saletan. *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 1998. Cap. 3, págs. 129-130. ISBN: 052-1-57327-0.
- [38] LibreTexts Libraries y US Department of Education & UC Davis University of California. *Conservative and Non-Conservative Forces*. 5 de nov. de 2020. URL: [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/Book%3A_University_Physics_\(OpenStax\)/Map%3A_University_Physics_I_-_Mechanics_Sound_Oscillations_and_Waves_\(OpenStax\)/08%3A_Potential_Energy_and_Conservation_of_Energy/8.03%3A_Conservative_and_Non-Conservative_Forces](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/Book%3A_University_Physics_(OpenStax)/Map%3A_University_Physics_I_-_Mechanics_Sound_Oscillations_and_Waves_(OpenStax)/08%3A_Potential_Energy_and_Conservation_of_Energy/8.03%3A_Conservative_and_Non-Conservative_Forces).
- [39] Soon-Jo Chung y Jean-Jacques E. Slotine. “Cooperative Robot Control and Concurrent Synchronization of Lagrangian Systems”. En: *IEEE Transactions on Robotics* 25.3 (2009), págs. 686-700. DOI: 10.1109/tro.2008.2014125.

- [40] Emmanuel Nuño y col. “Synchronization of Networks of Nonidentical Euler-Lagrange Systems with Uncertain Parameters and Communication Delays”. En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 56.4 (2011), págs. 935-941. DOI: 10.1109/TAC.2010.2103415.
- [41] Jean-Jacques E. Slotine y Weiping Li. “On the Adaptive Control of Robot Manipulators.” En: *International Journal of Robotics Research* 6.3 (1987), págs. 49-59. DOI: 10.1177/027836498700600303.
- [42] Jean-Jacques E. Slotine y Weiping Li. “Adaptive Manipulator Control: A Case Study”. En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 33.11 (1988), págs. 995-1003. DOI: 10.1109/9.14411.
- [43] L. Sciavicco y B. Siciliano. *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Springer, 1996. Cap. 4.2, págs. 141-143. ISBN: 978-1-4471-0449-0. DOI: 10.1007/978-1-4471-0449-0.
- [44] Anatoli A. Pervozvanski y Leonid B. Freidovich. “Robust Sstabilization of Robotic Manipulators by PID Controllers”. En: *Dynamics and Control* 9.3 (1999), págs. 203-222. DOI: 10.1023/A:1008321920742.
- [45] Wai-Kai Chen. *The Circuits and Filters Handbook: Passive, active, and digital filters*. Chicago, Illinois: CRC Press, 2009. Cap. I.1-I.2, págs. 1-64. ISBN: 978-1-4200-5885-7.
- [46] Bob York. *1 - Frequency Response and Bode Plots*. URL: https://web.njit.edu/~levkov/classes_files/ECE232/Handouts/Frequency%20Response.pdf.
- [47] Wai-Kai Chen, P.K. Rajan y Arun Sekar. “1 - Linear Circuit Analysis”. En: *The Electrical Engineering Handbook*. Academic Press, 2005, págs. 3-29. ISBN: 978-0-12-170960-0. DOI: 10.1016/B978-012170960-0/50004-9.
- [48] DEng. Adam Panagos. *Butterworth Filter Design Review*. URL: <https://www.adampanagos.org/dt-butterworthfilters> (visitado 28-01-2021).
- [49] He Bai, Murat Arcak y John Wen. *Cooperative Control Design: A Systematic, Passivity-Based Approach*. New York, New York: Springer, 2011. Cap. 1, págs. 1-18. ISBN: 978-1-4614-0013-4. DOI: 10.1007/978-1-4614-0014-1.
- [50] ChaiWah WU. *Synchronization in Complex Networks of Nonlinear Dynamical Systems*. 5 Toh Tuck Link, Singapore 596224: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2007. Cap. 1-2, págs. 1-30. ISBN: 978-981-270-973-8.

- [51] C. Murguia, R. H. B. Fey y H. Nijmeijer. “Network Synchronization by Dynamic Diffusive Coupling”. En: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 23.04 (2013), pág. 1350076. DOI: 10.1142/S0218127413500764.
- [52] Tiago Pereira y col. “Towards a theory for diffusive coupling functions allowing persistent synchronization”. En: *Nonlinearity* 27.3 (feb. de 2014), págs. 501-525. DOI: 10.1088/0951-7715/27/3/501.
- [53] J. C. Jauregui. “7 - Synchronization of nonlinear systems”. En: *Parameter Identification and Monitoring of Mechanical Systems*. Elsevier Limited, 2014, págs. 177-193. ISBN: 978-1-78242-165-8. DOI: 10.1533/9781782421665.177.
- [54] Dong Sun. *Synchronization and control of multiagent systems*. 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300: CRC Press, 2011. Cap. 1-2, págs. 1-28. ISBN: 978-1-4398-2047-6.
- [55] Alexander S. Poznyak. *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers, Volume 1: Deterministic Techniques*. 1st. Jordan Hill, Oxford: Elsevier, 2008, págs. 1-227. ISBN: 978-0-08-044674-5.
- [56] Shankar Sastry. *Nonlinear systems : analysis, stability, and control*. New York, New York: Springer, 1999. Cap. 5, págs. 182-234. ISBN: 0-387-98513-1.
- [57] Winfried Lohmiller y Jean Jacques E. Slotine. “On contraction analysis for non-linear systems”. En: *Automatica* 34.6 (1998), págs. 683-696. DOI: 10.1016/S0005-1098(98)00019-3.
- [58] Wei Wang y Jean Jacques E. Slotine. “On partial contraction analysis for coupled nonlinear oscillators”. En: *Biological Cybernetics* 92.1 (2005), págs. 38-53. DOI: 10.1007/s00422-004-0527-x.
- [59] Real Academia Española. *grafo*. URL: <https://dle.rae.es/grafo> (visitado 27-05-2021).
- [60] Wolfram MathWorld. *Gershgorin Circle Theorem*. URL: <https://mathworld.wolfram.com/GershgorinCircleTheorem.html> (visitado 21-05-2021).
- [61] Roger A. Horn y Charles R. Johnson. *Matrix Analysis*. 2nd. New York, New York: Cambridge University Press, 2013. Cap. 6, págs. 387-424. ISBN: 978-0-521-83940-2.
- [62] Reza Olfati-Saber, J. Alex Fax y Richard M. Murray. “Consensus and Cooperation in Networked Multi-agent Systems”. En: 95.1 (2007), págs. 215-233. DOI: 10.1109/JPROC.2006.887293.

- [63] Wolfram MathWorld. *Jacobian*. URL: <https://mathworld.wolfram.com/Jacobian.html> (visitado 19-07-2021).
- [64] Wolfram MathWorld. *Symmetric Part*. URL: <https://mathworld.wolfram.com/SymmetricPart.html> (visitado 19-07-2021).
- [65] Jean Jacques E. Slotine. “Modular stability tools for distributed computation and control”. En: *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 17.6 (2003), págs. 397-416. ISSN: 08906327. DOI: 10.1002/acs.754.
- [66] J. J. Slotine y W. Lohmiller. “Modularity, evolution, and the binding problem: A view from stability theory”. En: *Neural Networks* 14.2 (2001), págs. 137-145. ISSN: 08936080. DOI: 10.1016/S0893-6080(00)00089-7.
- [67] Soon-Jo Chung. “Nonlinear Control and Synchronization of Multiple Lagrangian Systems with Application to Tethered Formation Flight Spacecraft”. Massachusetts Institute of Technology, mayo de 2007, pág. 228. URL: <http://dspace.mit.edu/handle/1721.1/40304>.
- [68] Quang Cuong Pham y Jean Jacques E. Slotine. “Stable concurrent synchronization in dynamic system networks”. En: *Neural Networks* 20.1 (2007), págs. 62-77. DOI: 10.1016/j.neunet.2006.07.008.