



Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Facultad de Ingeniería

Centro de Investigación y Estudios de Posgrado

**Modelado del fenómeno piezoeléctrico para el diseño de
un recolector de energía**

TESIS

**Que para obtener el grado de:
Maestro en Ingeniería Mecánica**

Presenta:

Ing. Jorge Andrés Álvarez Costa

Asesor:

Dr. Gilberto Mejía Rodríguez

San Luis Potosí, S. L. P.

Enero del 2016





Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Facultad de Ingeniería

Centro de Investigación y Estudios de Posgrado

**Modelado del fenómeno piezoeléctrico para el diseño de
un recolector de energía**

TESIS

Que para obtener el grado de:

Maestro en Ingeniería Mecánica

Presenta:

Ing. Jorge Andrés Álvarez Costa

Asesor:

Dr. Gilberto Mejía Rodríguez

San Luis Potosí, S.L.P.

Enero del 2016





UASLP

Universidad Autónoma
de San Luis Potosí

26 de noviembre de 2015

**AL ING. JORGE ANDRÉS ÁLVAREZ COSTA
P R E S E N T E.**

En atención a su solicitud de Temario, presentada por el **Dr. Gilberto Mejía Rodríguez**, Asesor de la Tesis que desarrollará Usted, con el objeto de obtener el Grado de **Maestro en Ingeniería Mecánica**, me es grato comunicarle que en la Sesión del H. Consejo Técnico Consultivo celebrada el día 26 de noviembre del presente, fue aprobado el Temario propuesto:

TEMARIO:

"Modelado del fenómeno piezoeléctrico para el diseño de un recolector de energía"

- Introducción.
1. Recolectores de energía.
 2. Modelos analíticos existentes.
 3. Modelo propuesto y comparativa.
 4. Diseño del recolector de energía.
- Conclusiones
Referencias.
Anexos.

"MODOS ET CUNCTARUM RERUM MENSURAS AUDEBO"

A T E N T A M E N T E



M. I. JORGE ALBERTO PÉREZ GONZÁLEZ
DIRECTOR.
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE SAN LUIS POTOSÍ
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIRECCION



**FACULTAD DE
INGENIERÍA**

Av. Manuel Nava 8
Zona Universitaria • CP 78290
San Luis Potosí, S.L.P.
tel. (444) 826 2330 al39
fax (444) 826 2336
www.uaslp.mx

Copia. Archivo.
*etn.

Agradecimientos

Quiero agradecer especialmente a mi asesor, Dr. Gilberto Mejía Rodríguez por su grandiosa supervisión y apoyo en la redacción de esta tesis. He aprendido bastante. Agradezco también a mis maestros de posgrado en especial a mis sinodales por sus valiosas recomendaciones en esta tesis.

De igual forma agradezco a todos mis compañeros del posgrado por sus consejos y compañía en los tiempos de trabajo y estudio.

Especialmente quiero agradecer a mi padre Ing. Julio Armando Alvarez Tamayo, a mi madre Ing. Ma. Emma Costa González y a mi hermano Ing. Julio Armando Alvarez Costa por su gran apoyo incondicional y sus sabios consejos.

Contenido

Lista de Figuras.....	i
Lista de Tablas	iii
Nomenclatura.....	iv
Resumen.....	i
Introducción	1
1. Recolectores de energía.....	3
1.1. Recolectores de energía electroestáticos	4
1.2. Recolectores de energía electromagnéticos.....	5
1.3. Recolectores de energía piezoeléctricos.....	6
1.4. Conclusiones.....	7
2. Modelos analíticos existentes	10
2.1. Modelo de un solo grado de libertad.....	11
2.1.1. <i>Modelo analítico electromecánico 1-D.....</i>	<i>13</i>
2.2. Modelo sumatoria de energías	20
2.3. Modelado electromecánico con parámetros distribuidos para un recolector de energía piezoeléctrico en cantiléver	29
2.3.1. <i>Fundamentos del modelado electromecánico acoplado con parámetros distribuidos.....</i>	<i>29</i>
2.3.2. <i>Conexión en serie de las láminas piezocerámicas</i>	<i>39</i>
2.3.3. <i>Ecuación del circuito eléctrico acoplado en paralelo.....</i>	<i>41</i>
2.3.4. <i>Representación equivalente de conexiones en serie o en paralelo</i>	<i>44</i>
2.3.5. <i>Función de respuesta a la frecuencia para multi-modos y un solo modo</i>	<i>46</i>
2.4. Conclusiones.....	50
3. Modelo propuesto y comparativa.....	52
3.1. Propuesto 1	52
3.2. Propuesto 2	55
3.3. Propuesto 3	58
3.4. Comparativa de los modelos para recolectores de energía piezoeléctricos	59
3.4.1. <i>Comparativa de los modelos existentes</i>	<i>59</i>
3.4.2. <i>Comparativa de modelos entre modelos propuestos.....</i>	<i>61</i>
3.4.3. <i>Comparativa de los modelos Propuesto 3 y parámetros distribuidos.....</i>	<i>63</i>
3.5. Conclusiones.....	65
4. Diseño del recolector de energía	68

4.1.	Componentes de nodo sensores a energizar	68
4.1.1.	<i>Resistencia requerida del nodo sensor (R_I)</i>	70
4.2.	Problema de optimización	73
4.2.1.	<i>Planteamiento del problema de optimización</i>	73
4.2.2.	<i>Solución del problema optimización</i>	77
4.2.3.	<i>Comparación de resultados</i>	79
4.3.	Análisis de sensibilidad.....	81
4.4.	Conclusiones.....	83
Conclusiones		86
Referencias.....		88
Anexos.....		91
1.	Anexo. Obtención de los modos de vibración de una viga en cantiléver con una masa en la punta	91
2.	Anexo. Ortogonalidad de las eigenfunciones y obtención de la constante modal (A_r).....	95
2.1.	<i>Anexo Obtención de la constante A_r</i>	96
3.	Anexo. Respuesta a una fuerza externa.....	98
4.	Anexo. Polaridad para conexiones en serie o paralelo	100
5.	Anexo. Obtención de la ecuación diferencial parcial gobernante del método de parámetros distribuidos.....	102

Lista de Figuras

Figura 1.1 Ejemplo de un recolector de energía electroestático.....	4
Figura 1.2 Recolector de energía electromagnético estudiado por Lee et al [11].....	6
Figura 1.3 Recolector de energía con forma de viga en cantiléver de dos láminas piezocerámicas y con masa adjunta en la punta.....	7
Figura 1.4 Densidad de potencia contra voltaje de diferentes fuentes de energía (de Cook-Chennault et al.) [1].	8
Figura 2.1 Modelo para analizar la generación de energía de los recolectores de energía por vibración.....	11
Figura 2.2 Energía disipada por el mecanismo.....	13
Figura 2.3 Modelo de un elemento piezoeléctrico el cual es excitado por su base [3].	14
Figura 2.4 Potencia contra frecuencia normalizada, variando la resistencia de carga para el modelo 1-D de la Figura 2.3.	18
Figura 2.5 Posición contra frecuencia normalizada, variando la resistencia de carga para el modelo 1-D de la Figura 2.3.	19
Figura 2.6 Voltaje contra frecuencia normalizada, variando la resistencia de carga para el modelo 1-D de la Figura 2.3.	20
Figura 2.7 Viga bimorfa excitada desde la base sin masa adjunta en el extremo libre.	27
Figura 2.8 Potencia contra frecuencia de trabajo, variando la resistencia de carga.	28
Figura 2.9 Posición contra frecuencia de trabajo, variando la resistencia de carga.....	28
Figura 2.10 Voltaje contra frecuencia de trabajo, variando la resistencia de carga.....	29
Figura 2.11 Configuración de un recolector de energía piezoeléctrico bimorfo, a) conectado en serie, b) conectado en paralelo, c) sección transversal.	30
Figura 2.12 a) Viga en cantiléver bimorfa con una placa conectada a la resistencia de carga, y b) el circuito eléctrico correspondiente con la respectiva fuente de corriente independiente [16].37	
Figura 2.13 Representación del circuito eléctrico con conexión en serie de las láminas piezoeléctricas con dos correspondientes fuentes de corriente dependientes.	39
Figura 2.14 Representación del circuito eléctrico, láminas piezocerámicas conectadas en paralelo con dos fuentes de corriente independiente.....	42
Figura 2.15 Voltaje multimodal, y para el primer, segundo y tercer modo.....	49

Figura 2.16 Comparación de voltaje de salida multimodal con a) primer modo y b) segundo modo.	49
Figura 3.1 Viga en cantiléver bimorfa con una fuerza en la punta.	53
Figura 3.2 Representación de la deformación y en la punta de la viga modelada.....	55
Figura 3.3 Representación del problema para el problema de recolectores de energía excitados desde la base.....	56
Figura 3.4 Voltaje de salida contra frecuencia normalizada para los modelos parámetros distribuidos y sumatoria de energías.	61
Figura 3.5 a) Gráfica de voltaje contra frecuencia normalizada de modelos propuestos, y b) acercamiento de la gráfica en la zona de resonancia.	63
Figura 3.6 Comportamiento del Propuesto 3 y Parámetros distribuidos en corto circuito.....	64
Figura 3.7 Comportamiento del Propuesto 3 y Parámetros distribuidos con resistencia de carga de 4600, 9700 y 331000 ohms.	65
Figura 4.1 Circuito de la resistencia pull up.	71
Figura 4.2 Recolector de energía piezoeléctrico conectado a un rectificador AC-DC de onda completa.....	71
Figura 4.3 a) Respuesta ideal deseada, y b) posible resultado de acuerdo a la física del problema.	74
Figura 4.4 Variables a dimensionar del recolector de energía piezoeléctrico a diseñar.	76
Figura 4.5 Cumplimiento de los criterios de convergencia del problema de optimización.....	77
Figura 4.6 Gráfica de voltaje y potencia contra rango de frecuencia, usando los datos obtenidos del problema resuelto.....	80
Figura 4.7 Análisis de sensibilidad para los modelos de Parámetros distribuidos y Propuesto3	81
Figura A4.0.1 a) Campo eléctrico generado de un cuerpo piezoeléctrico rectangular debido al esfuerzo aplicado, b) ejemplo de la conexión en paralelo.....	100
Figura A4.0.2 a) Campo eléctrico generado de un cuerpo piezoeléctrico rectangular debido al esfuerzo aplicado, b) ejemplo de la conexión en serie.	101
Figura A5.0.3 a) Viga en vibración transversal, b) Diagrama de cuerpo libre de un elemento de la viga.	102

Lista de Tablas

Tabla 1.1 Lista de fuentes de vibración.....	3
Tabla 1.2 Resultados de trabajos en recolectores de energía (ES: energía electroestática, EM: energía electromagnética, P: energía piezoeléctrica).....	8
Tabla 2.1 Datos del problema mostrado en la Figura 2.3.	18
Tabla 2.2 Dimensiones y propiedades del material del dispositivo resuelto por Sodano <i>et al</i> [33].	27
Tabla 2.3 Capacitancia y acoplamiento electromecánico modal equivalente para un recolector de energía bimorfo en cantiléver con conexiones en serie y paralelo.	46
Tabla 2.4 Dimensiones y propiedades del material del recolector resuelto por Erturk et al [16]....	48
Tabla 3.1 Dimensiones y propiedades para el caso resuelto por Erturk et al [16].	60
Tabla 3.2 Características de los métodos para los recolectores de energía piezoeléctricos.	66
Tabla 4.1 Datos de sensores y circuitos integrados encontrados en la literatura.	69
Tabla 4.2 Resistencia de los nodos.....	72
Tabla 4.3 Diferencia porcentual entre la frecuencia natural y propia para distintos valores del coeficiente de amortiguamiento.....	75
Tabla 4.4 Propiedades geométricas y del material PSI-5A.....	75
Tabla 4.5 Respuesta al problema propuesto con ambos nodos.	78
Tabla 4.6 Área bajo la curva de los resultados obtenidos y sus respectivas resistencias de carga óptima y la resistencia de carga usada.	79
Tabla 4.7 Área bajo la curva del análisis de sensibilidad para el largo de la viga	82

Nomenclatura

- $\alpha(\omega)$ – Voltaje de salida por aceleración de traslación de la base [Vs^2/m].
- $\beta(\omega, x)$ – Desplazamiento relativo transversal por aceleración transversal de la base [ms^2/m].
- $\delta(x)$ – Función de Dirac [-].
- δ_{rs} – Delta de Kronecker [-].
- ε – Permitividad del piezoeléctrico F/m.
- ζ_T – Suma de coeficientes de amortiguamiento [-].
- $\zeta_{e,opt}$ – Coeficiente de amortiguamiento eléctrico óptimo [-].
- ζ_e – Coeficiente de amortiguamiento eléctrico [-].
- ζ_m – Coeficiente de amortiguamiento [-].
- $\zeta_{m, struct}$ – Coeficiente amortiguamiento estructural [-].
- $\zeta_{m, sup}$ – Coeficiente amortiguamiento de soporte [-].
- $\zeta_{m,drag}$ – Coeficiente amortiguamiento de fuerza del aire [-].
- $\zeta_{m,squeeze}$ – Coeficiente amortiguamiento de fuerza de apriete [-].
- ζ_m – Coeficiente de amortiguamiento mecánico [-].
- $\eta_r^p(t)$ – Coordenadas mecánicas modales para una conexión en paralelo [-].
- $\eta_r^s(t)$ – Coordenadas mecánicas modales para una conexión en serie [-].
- θ – Término de acoplamiento electromecánico [N/V].
- θ_0 – Amplitud de la pequeña rotación de la base [m].
- ϑ_p – Coeficiente de acoplamiento hacia atrás en paralelo [N/V].
- ϑ_s – Coeficiente de acoplamiento hacia atrás en serie [N/V].
- κ_r – Término de acoplamiento hacia adelante [Vs/m].
- λ_r – Eigenvalores del sistema [-].
- μ – Viscosidad del aire [Pa s].
- $\mu(\omega)$ – Voltaje de salida por aceleración rotacional de la base [Vs^2/m].
- π – Numero pi [-].
- ρ_{air} – Densidad del aire [kg/m^3].
- ρ_p – Densidad del piezocerámico [kg/m^3].
- ρ_s – Densidad del shim [kg/m^3].
- ρ_{viga} – Densidad de la viga [kg/m^3].
- σ_f – Esfuerzo aplicado [Pa].
- σ_a – Esfuerzo permisible [Pa].
- φ_j – Potencial eléctrico [V].
- ϕ – Modo de vibración [-].
- ϕ_1 – Primer modo de vibración [-].
- χ_r^s – Acoplamiento electromecánico modal en serie [Vs/m].
- χ_r^p – Acoplamiento electromecánico modal en paralelo [Vs/m].
- $\psi(\omega, x)$ – Desplazamiento relativo transversal por aceleración rotacional de la base [ms^2/m].
- ω_N – Frecuencia natural [rad/s].

ω_1 –Primera frecuencia de resonancia [rad/s].
 ω –Frecuencia de trabajo [rad/s].
 Ω –Frecuencia normalizada a la frecuencia natural ω/ω_N [-].
 Ω_{oc} – Frecuencia normalizada a la frecuencia de circuito abierto [-].
 Ω_{sc} – Frecuencia normalizada a la frecuencia de circuito cerrado [-].
 A_p –Área de la sección transversal [m²].
 A_r –Constantes de amplitud modal [-].
 b –Ancho de la viga [m].
 B_f –Vector de fuerza [N].
 C_p^{eq} –Capacitancia del piezocerámico equivalente [F].
 C_e –Capacitador de filtrado [F].
 C_p –Capacitancia del piezoeléctrico [F].
 c^E –Elasticidad del piezoeléctrico [Pa].
 c_{eq} –Amortiguamiento equivalente [Ns²/m].
 c_s –Amortiguamiento de velocidad de deformación [Ns²/m].
 c_s –Amortiguamiento del aire [Ns²/m].
 C –Término de amortiguamiento viscoso [Ns²/m].
 D_x – Desplazamiento eléctrico en la dirección x [C/m²].
 d – Coeficiente piezoeléctrico [C/N].
 E_x –Campo eléctrico en la dirección x [N/C].
 e – Constante piezoeléctrica [C/m²].
 $f_r(t)$ –Función de fuerza modal [N].
 $F(\omega, t)$ –Función de fuerza en la punta debida a la inercia de la viga y masa adjunta [N].
 f –Amplitud de la fuerza en la punta debida a la inercia de la viga y masa adjunta [N].
 $g(t)$ –Desplazamiento transversal de la base [m].
 $h_{\bar{p}}$ –Espesor de cada piezocerámico [m].
 $h_{\bar{s}}$ –Espesor de la lámina de soporte (shim) [m].
 $h(t)$ –Pequeño desplazamiento rotacional de la base [m].
 $H(x)$ –Función de Heaviside [-].
 I_t –Momento de inercia de la masa adjunta [kg m].
 I –Segundo momento de inercia [m⁴].
 i –Corriente [C/s].
 j –Unidad del número imaginario [-].
 k_{eq} –Rigidez equivalente [N/m].
 K –Rigidez efectiva [N/m].
 L –Largo de la viga [m].
 m_{eq} –Masa equivalente [Kg].
 m –Masa por unidad de longitud de la viga [Kg/m].
 m_p –Masa del piezocerámico [kg].
 M_T – Masa total aproximada del sistema [kg].
 $M(x, t)$ – Momento de flexión interno [Nm].

$M(x)$ – Momento flexionante generado por la fuerza [Nm].
 M_t –Masa adjunta [kg].
 M –Masa del piezoeléctrico más masa adjunta [kg].
 P_e –Potencia generada [W].
 P_{out} –Potencia eléctrica obtenida [W].
 q –Carga de cada electrodo [C].
 Q_s –Densidad de carga en corto circuito [C/m].
 $R_{opt,sc}$ –Resistencia de carga óptima en corto circuito [Ω].
 R_n –Resistencia de carga del nodo sensor [Ω].
 R_{eq} –Resistencia equivalente [Ω].
 R_l –Resistencia de carga [Ω].
 $R_{opt,oc}$ –Resistencia de carga óptima en condiciones de circuito abierto [Ω].
 $R_{opt,sc}$ –Resistencia de carga óptima en condiciones de corto circuito [Ω].
 R_p –Resistencia de fuga [Ω].
 R_{pu} –Resistencia pull up [Ω].
 s^E –Flexibilidad elástica en campo eléctrico constante (elastic compliance) [m/N].
 S –Área superficial de cada electrodo [m²].
 S_x –Deformación en la dirección x [m].
 t_p –Espesor del piezocerámico [m].
 t_s –Espesor del shim [m].
 $T_1^{\tilde{p}}$ –Componente de esfuerzo en la dirección x en el piezocerámico [Pa].
 $T_1^{\tilde{s}}$ –Componente de esfuerzo en la dirección x en el shim [Pa].
 T_x –Esfuerzo en la dirección x [Pa].
 T_k –Energía cinética [J].
 $\mathbf{u}(x, t)$ –Desplazamiento relativo [m].
 U –Energía potencial interna [J].
 v –Voltaje [V].
 v_c –Voltaje rectificado [V].
 v_p – Voltaje obtenido con una conexión en paralelo [V].
 v_p –Voltaje generado por el piezoeléctrico [V].
 v_s –Voltaje obtenido con una conexión en serie [V].
 \ddot{w}_B –Aceleración de la base [m/s²].
 \ddot{w}_{rel} –Aceleración relativa de la punta con respecto a la base [m/s²].
 \dot{w}_{rel} –Velocidad relativa de la punta con respecto a la base [m/s].
 w_B –Desplazamiento de la base [m].
 w_{rel} –Posición relativa de la punta con respecto a la base [m].
 w_{rel}^p –Desplazamiento transversal relativo a la base en una conexión en paralelo [m].
 w_{rel}^s –Desplazamiento transversal relativo a la base en una conexión en serie [m].
 W –Trabajo externo [j].
 W_0 –Amplitud de la traslación de la base [m].
 W_B –Amplitud de la base [m].

W_e –Energía eléctrica [J].

$x(t)$ –Respuesta del desplazamiento absoluto de la masa [m].

$y(t)$ –Desplazamiento relativo respecto a la base [m].

Y_0 –Amplitud del desplazamiento relativo respecto a la base [m].

Y_s –Elasticidad del shim [Pa].

YI –Término de rigidez flexional [$N\ m^2$].

$z(t)$ –Desplazamiento armónico de la base [m].

Z_0 –Amplitud del desplazamiento de la base [m].

Resumen

El interés sobre los recolectores de energía piezoeléctricos se debe a su densidad de potencia (W/cm^3), la cual es comparable con las baterías de iones de litio de película delgada y de película gruesa, también son los medios más simples para obtener energía directamente de las vibraciones estructurales, los componentes adicionales que se requieren son pocos y su geometría es simple para la realización de dispositivos electrónicos viables [1].

Debido a estas ventajas los recolectores de energía piezoeléctricos han atraído gran atención para energizar, dispositivos electrónicos pequeños, cargar baterías y sensores inalámbricos. Para que esto sea posible los recolectores de energía piezoeléctricos deben mejorar su eficiencia en la parte mecánica y eléctrica. Por lo que el objetivo general del presente trabajo propone modelar y diseñar un recolector de energía piezoeléctrico.

Se analizaron y reprodujeron modelos analíticos existentes, concluyendo que los modelos no se adecuan a nuestro propósito, ya que SDOF presenta un error significativo fuera de la zona de resonancia, y el de sumatoria de energías y parámetros distribuidos representan un costo computacional significativo debido al cálculo de eigenvalores.

Por lo que se propusieron tres modelos analíticos, con el fin de calcular de una manera más sencilla y a un costo computacional bajo, la potencia y el voltaje generados, y así poder optimizar el recolector de energía piezoeléctrico en un rango de frecuencias que se encuentran en el medio ambiente. Los modelos propuestos calculan el voltaje y potencia alternante y consideran a la masa adjunta en la punta como una masa concentrada ignorando la forma geométrica.

Se compararon los modelos analíticos, los existentes y propuestos, resumiendo diferentes características de los modelos que fueron presentados en los capítulos 2 y 3. Se determinó que el modelo de parámetros distribuidos es el modelo más robusto y el cual nos servirá como punto de comparación para los modelos propuestos. También se dieron ciertas características a considerar al escoger que método utilizar para la reproducción del fenómeno piezoeléctrico.

Se propusieron nodos-sensores los cuales fueran posibles energizar usando alguno de los modelos propuesto, con el fin de optimizar su recolección de energía en un rango de frecuencias que se encuentran en el medio ambiente. Los resultados obtenidos con el modelo Propuesto 3 fueron comparados con los resultados del modelo de parámetros distribuidos. La discrepancia entre los resultados obtenidos de ambos modelos, se debe a la diferencia entre la resistencia de carga óptima y la resistencia de carga usada. Además, el tiempo de optimización para el Propuesto 3 es menor al 0.5% del tiempo que le toma al parámetros distribuidos.

Finalmente se concluyó que para obtener el mismo resultado en el modelo Propuesto 3 y el modelo de parámetros distribuidos se necesita incluir en el modelo Propuesto 3 una función de

acoplamiento electromecánico, la cual incluya la retroalimentación del dominio eléctrico al dominio mecánico debido a la energía generada.

Introducción

La recolección de energía basada en vibraciones ha recibido una creciente atención en la última década. La motivación de investigación en este campo se debe a la alta necesidad de energizar pequeños componentes electrónicos, tales como las redes de sensores inalámbricos (WSN, por sus siglas en inglés) utilizadas en aplicaciones de monitoreo. Un WSN consiste en un conjunto de nodos autónomos distribuidos espaciadamente, los cuales envían información a un punto principal para lograr una tarea en común. El objetivo final de los recolectores es alimentar esos pequeños dispositivos electrónicos mediante el uso de la energía de las vibraciones disponibles en su entorno. Si esto se puede lograr, el requisito de una fuente de alimentación externa, así como los costos de mantenimiento para la sustitución periódica de la batería y los residuos químicos de las baterías convencionales se pueden reducir.

Los dispositivos de recolección de energía piezoeléctrica son los medios más simples para obtener energía directamente de las vibraciones estructurales por varias razones. Se requieren pocos componentes adicionales y geometrías relativamente simples para la realización de dispositivos electrónicos viables [1].

Los tres modelos primarios analíticos disponibles en la literatura para modelar la recolección de energía son presentados, los cuales son: el modelo de un solo grado de libertad (SDOF, por sus siglas en inglés) también conocido como de parámetros concentrados, el modelo de aproximación de modelos distribuidos (uso del método de Rayleigh-Ritz para los eigenvalores) mencionado en este artículo como sumatoria de energías, y el modelo de parámetros distribuidos [2].

El presente trabajo presenta el diseño de un recolector de energía piezoeléctrica bimorfo en cantiléver excitado desde la base. El recolector de energía trabajará en un rango de frecuencias de 100 a 300 Hz. En el diseño se buscará maximizar la potencia recolectada en el rango de frecuencias. Dado que los modelos en la literatura no se adecuan a nuestro propósito, ya que SDOF presenta un error significativo fuera de la zona de resonancia, y el de sumatoria de energías y parámetros distribuidos representan un costo computacional significativo debido al cálculo de los eigenvalores, se decidió proponer un modelo confiable que permita aproximar el voltaje y potencia recolectados con un costo computacional menor a los modelos existentes.

Objetivo general

- Modelar y diseñar un recolector de energía piezoeléctrico.

Objetivos particulares

- Analizar modelos analíticos existentes de recolectores de energía piezoeléctricos.
- Reproducción de resultados de modelos existentes.
- Proponer un modelo analítico de bajo costo computacional.
- Diseño óptimo de un recolector de energía.

Estructura de la tesis

La presente tesis se encuentra organizada de la siguiente forma:

El *capítulo 1* describe algunos de los diferentes tipos de recolectores de energía por vibraciones y compara las ventajas y desventajas entre ellos. Concluyendo que los recolectores de energía piezoeléctricos son el medio más fácil de extraer energía de las vibraciones, y además que su densidad de potencia es comparable a las baterías de iones de litio de película delgada y de película gruesa, y generadores termoeléctricos.

El *capítulo 2* describe la formulación de los principales modelos analíticos encontrados en la literatura para predecir la recolección de energía. Además se reprodujo cada modelo con un problema propuesto, concluyendo con una comparación entre las características particulares de cada modelo.

En el *capítulo 3* se plantean y desarrollan tres modelos propuestos, los cuales llamaremos Propuesto 1, Propuesto 2 y Propuesto 3. Se propone un problema para la comparación de los modelos propuestos con los modelos existentes en la literatura. Finalmente se resumen diferentes características de los modelos, describiendo algunas características a considerar al escoger un modelo a ser usado para la reproducción del fenómeno piezoeléctrico.

El *capítulo 4* presenta la selección de un nodo-sensor el cual pueda ser energizado, al diseñársele una viga piezoeléctrica apropiada por medio del modelo Propuesto 3. Además se describe la formulación de un problema de optimización, y se comparan los resultados obtenidos con el modelo de parámetros distribuidos.

1. Recolectores de energía

Los recolectores de energía por vibraciones pueden ser divididos en dos grupos, aparatos de resonancia y de no resonancia. Los dispositivos de no resonancia se aplican a las vibraciones de muy baja frecuencia [3]. Para los dispositivos de resonancia, existen tres recolectores de energía básicos para pequeños dispositivos electrónicos, los cuales estos son por transducción electromagnética, electrostática y piezoeléctrica [4].

La primera virtud de las vibraciones mecánicas aleatorias como una fuente potencial de potencia es que están presentes casi en cualquier lugar. Las vibraciones mecánicas ocurren en diferentes ambientes como edificios, transportes, electrodomésticos, actividades humanas, industrias, dispositivos mecánicos, etc. Sus características son muchas, tales como la forma del espectro de baja a alta frecuencia, la amplitud y la duración son múltiples dependiendo de los alrededores.

Otro punto fuerte es que los recolectores de energía por vibraciones es una fuente de energía renovable. Para establecer que tanta potencia se puede obtener de la excitación por vibraciones, Roundy *et al.* [5] realizaron una caracterización de los ambientes más comunes, como en edificios de oficinas, plantas de manufactura, maquinas, actividades humanas y electrodomésticos, etc. duToit [6] realizó mediciones de fuentes de vibraciones en lugares donde no es fácil el acceso de energía eléctrica como en un ducto de A/C, un puente, árboles, concluyendo que las fuentes de vibraciones ambientales para los recolectores de energía están por debajo de los 300Hz. De igual manera duToit [6] estableció un límite inferior de frecuencia de resonancia de 100Hz, debido a que frecuencias más bajas es difícil diseñar un recolector de energía. Un resumen de los resultados obtenidos por Roundy, Paradiso y duToit se encuentran en la Tabla 1.1.

Tabla 1.1 Lista de fuentes de vibración.

Fuente de Vibración	Pico de Aceleración (m/s^2)	Pico de Frecuencia (Hz)	Referencia
Base de una máquina de 5HP	10	70	[5]
Marco de una puerta	3	125	[5]
Horno de microondas	2.25	121	[5]
Máquina de amasar	1.03	121	[5]
Exterior de una ventana	0.7	100	[5]
Laptop al leer un CD-ROM	0.6	75	[5]
Segundo piso de un edificio	0.2	100	[5]
Refrigerador	0.1	240	[5]
Ducto A/C centro nivel bajo	0.0254	171.9	[6]
Ducto A/C a un lado nivel alto	0.0159	170.6	[6]
Ducto A/C centro nivel alto	0.0366	173.1	[6]
Puente Harvard	0.0215	171.3	[6]
Árbol mediano	0.000229	115.3	[6]
Árbol pequeño	0.000465	293.1	[6]

1.1.Recolectores de energía electrostáticos

Los recolectores de energía electrostáticos están basados en el concepto de un capacitor variable. Un capacitor variable consiste de dos conductores separados por un material dieléctrico. Cuando los conductores están bajo un campo eléctrico y los conductores se mueven uno respecto al otro, se genera la corriente.

Una descripción general de las propiedades de las diferentes configuraciones para los recolectores de energía electrostáticos fue descrito por Meninger *et al.* [7]. La mayor desventaja de este método es que necesita una fuente de voltaje independiente para crear un campo eléctrico [8]. Por otro lado, la configuración del capacitor es fácil de ser integrado a un micro sistema usando los procesos estándar de manufactura para sistemas micro-electromecánicos (MEMS, por sus siglas en inglés) [6].

Roundy *et al.* [8] realizaron investigaciones sobre recolectores de energía vibratorios, inicialmente concentrados en recolectores de energía electrostáticos. Diferentes configuraciones fueron comparadas, encontrando una configuración óptima. Algunos resultados se encuentran en la Tabla 1.2. Sterken *et al.* [9] utilizó un electreto (material dieléctrico dotado de una carga eléctrica casi permanente, el cual genera dos campos eléctricos, uno interno y otro externo) como una fuente de carga constante, esto eliminaría la necesidad de una fuente de voltaje independiente. Sin embargo, la vida del electreto es limitada y la carga se degrada al pasar el tiempo.

Las configuraciones más comunes de los recolectores de energía electrostáticos están basadas en la estructura de un capacitor variable [10]. Una de las configuraciones más comunes es, el movimiento en el plano del traslape (in-plane overlap converter) como se muestra en la Figura 1.1. Esta configuración fue estudiada por Meninger *et al.* [7] y Roundy *et al.* [8].

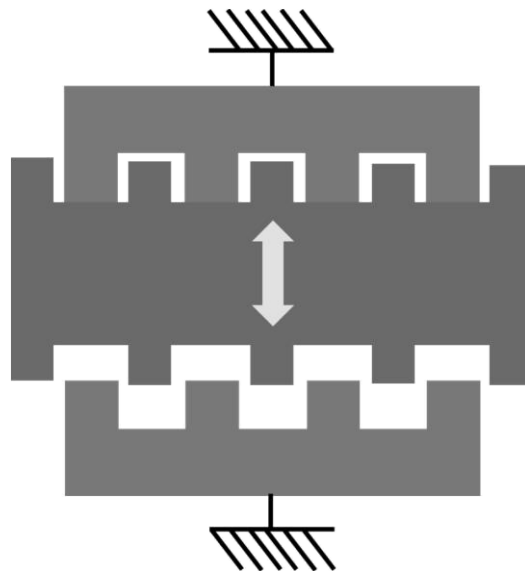


Figura 1.1 Ejemplo de un recolector de energía electrostático.

1.2.Recolectores de energía electromagnéticos

Cuando se mueve una bobina dentro de un campo magnético, la corriente fluye acorde a la ley de Faraday. Este mecanismo es utilizado para convertir movimiento (vibraciones) en energía eléctrica y tiene las siguientes propiedades [8]:

- No se requiere una fuente de voltaje externa.
- Un campo magnético es necesario. Los imanes permanentes son normalmente voluminosos y escalan mal a un tamaño de MEMS.
- El voltaje de salida es normalmente alrededor de 0.1-0.2 V por lo que es necesario transformar el voltaje a niveles utilizables para nodos sensores.

En la Tabla 1.2 se muestran resultados de trabajos en lo que respecta a la recolección de energía electromagnética. Lee *et al.* [11] reportan un dispositivo electromecánico con un tamaño de 4 cm^3 (el cual incluye el circuito de transformador) y un recolector de energía de 1 cm^3 . Es importante notar que la porción de espacio que requiere el circuito (para transformar el voltaje a niveles usables) y el soporte eléctrico es de aproximadamente 3 cm^3 . Kaluah *et al* [12] realizaron una pequeña variación al dispositivo de Lee *et al* [11], usando frecuencias superiores. Vibraciones a baja frecuencia son magnéticamente convertidas a una frecuencia de oscilación más alta utilizando un imán grande como una masa sísmica de un oscilador de baja frecuencia. La baja frecuencia de resonancia de la estructura de masa de gran tamaño se adapta a la frecuencia de vibración. Un conjunto de pequeñas vigas en cantiléver, con bobinas de inducción para la conversión de energía, se coloca cerca del campo magnético creado por la masa sísmica. Al moverse la masa de gran tamaño hacia el arreglo de pequeñas vigas, las vigas son atrapadas por el campo magnético y desviadas hacia la masa sísmica. Cuando la masa sísmica mueve el arreglo, las pequeñas vigas son liberadas y vibran en frecuencias de resonancia elevadas. Este movimiento puede ser usado para recolectores de energía. La energía generada de $2.5\mu\text{W}$ por viga en cantiléver fue predicha por Kaluah *et al.* [12] a una frecuencia baja de 10 Hz.

En la Figura 1.2 se muestra el recolector de energía estudiado por Lee *et al* [11]. Este diseño cuenta con cinco componentes principales: 1) Cubierta externa e interna, llevan el sistema de generación de energía y la estructura resonante respectivamente, 2) Resorte, es el elemento que permite al recolector de energía entrar en resonancia, 3) Imán, genera un campo magnético conocido, 4) Bobina, donde el imán se va estar moviendo, 5) Circuito, es usado para aumentar el voltaje de salida y almacenar energía.

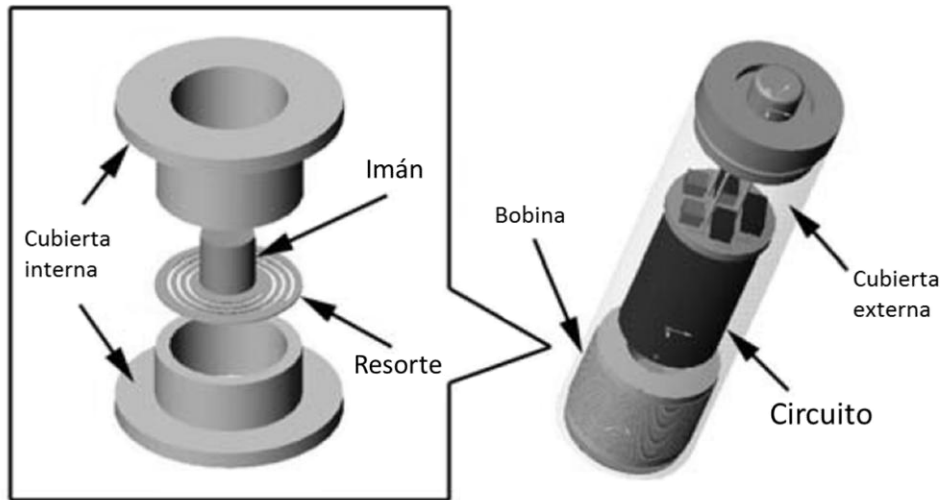


Figura 1.2 Recolector de energía electromagnético estudiado por Lee *et al* [11].

1.3. Recolectores de energía piezoeléctricos

El interés por los recolectores de energía piezoeléctricos para convertir energía mecánica en energía eléctrica ha aumentado drásticamente en los últimos años. Un panorama general de la investigación en este campo es dado por Sodano *et al.* [13], en el cual discute la investigación realizada en los recolectores de energía piezoeléctricos y objetivos futuros que deben ser alcanzado para que los recolectores de energía puedan ser usados. En los primeros trabajos, la energía predicha de un recolector de energía bimorfo de Polifluoruro de vinilideno (PVDF) fue tan pequeña que parecía imposible de considerarse como una fuente de energía, esto en el año de 1986 [14]. Este resultado causó una pausa en la investigación de la aplicación de recolectores de energía piezoeléctricos.

Algunos autores han considerado utilizar la energía obtenida de recolectores de energía piezoeléctricos para almacenar energía en baterías [15], capacitores y pequeños circuitos que no requieran una gran demanda de energía [16].

Con la disminución de demanda de energía en sensores, la aplicación de los recolectores de energía se ha convertido en algo posible de alcanzar. Se han usado diferentes tipos de configuraciones de recolectores de energía piezoeléctricos para este propósito. La mayoría de los recolectores de energía piezoeléctricos tienen forma de viga en cantiléver con una o dos láminas de piezocerámicas, tal como se muestra en la Figura 1.3, la cual es la configuración estudiada en el presente trabajo. Esta configuración tiene las ventajas que es compatible con los procesos de fabricación para sistemas micro-electromecánicos (MEMS, por sus siglas en inglés), su análisis es relativamente sencillo y su estructura es muy elástica (permitiendo frecuencias de resonancia bajas).

La viga es localizada sobre una estructura vibratoria y la deformación dinámica inducida en la lámina piezocerámica(s) resulta en una salida de corriente alterna CA. Un voltaje alternante de salida es obtenido debido al movimiento armónico aplicado a la estructura. Es común en el estudio de los recolectores de energía piezoeléctricos considerar una resistencia de carga en el dominio eléctrico, el cual representa el circuito que se va alimentar.

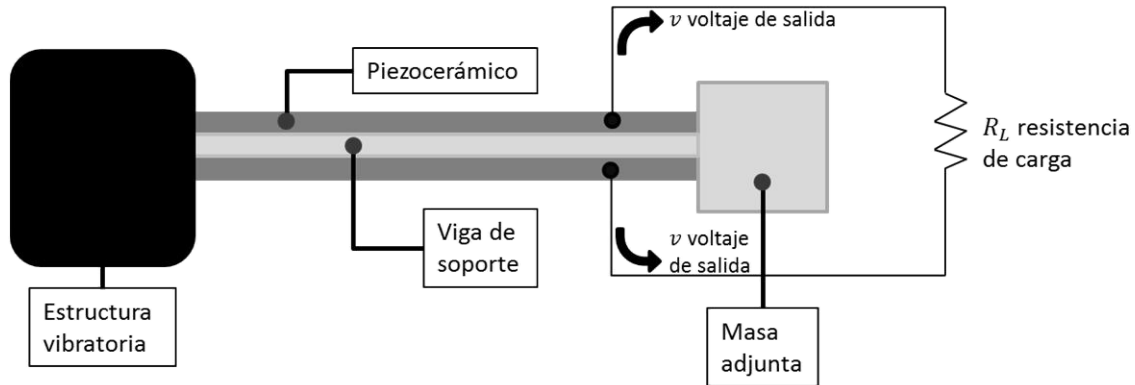


Figura 1.3 Recolector de energía con forma de viga en cantiléver de dos láminas piezocerámicas y con masa adjunta en la punta.

Otros tipos de configuraciones de recolectores usando elementos piezoeléctricos, incluyen a estructuras de membrana para recolectar energía de fuentes de pulsos de presiones, como por ejemplo convertir energía del caminado de las personas [17] [18] [19].

Entre las ventajas del recolector de energía piezoeléctrico por vibraciones se encuentra que es el más eficiente mecanismo de transducción, obteniendo una máxima eficiencia del 52% [13], no se requiere una fuente de voltaje externa y el voltaje obtenido es del orden de 3-8 V. La mayor desventaja es la complejidad para integrar configuraciones de material piezoeléctrico en micro-sistemas ya que el material necesita ser polarizado en un campo eléctrico fuerte ($> 1 \text{ kV/mm}$ [20]).

1.4. Conclusiones

Las principales ventajas de los materiales piezoeléctricos en la recolección de energía (en comparación con el uso de los otros dos mecanismos básicos de transducción) son sus grandes densidades de potencia y facilidad de aplicación. La comparación de la densidad de potencia contra voltaje en la Figura 1.4 (Cook-Chennault *et al.* [1]) muestra que la densidad de potencia extraída de los recolectores piezoeléctricos cubre el área más grande con valores de densidad de potencia comparable a las baterías de iones de litio de película delgada y de película gruesa, y generadores termoeléctricos.

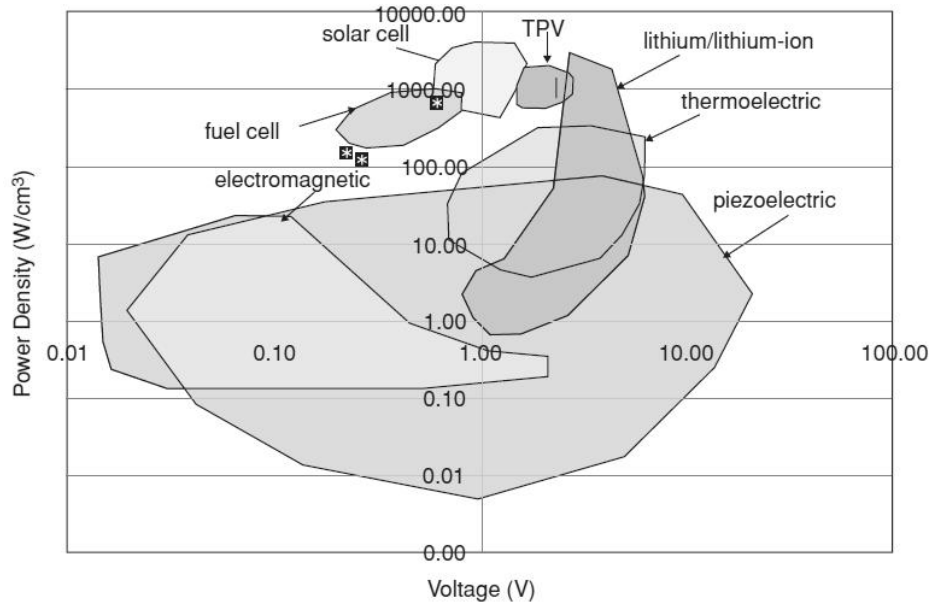


Figura 1.4 Densidad de potencia contra voltaje de diferentes fuentes de energía (de Cook-Chennault *et al.*)[1].

En la Tabla 1.2 se muestran resultados de trabajos sobre recolectores de energía. Las abreviaciones ES, EM y P corresponden a los recolectores de energía electrostáticos, electromagnéticos y piezoeléctricos respectivamente. Las abreviaciones Sim. y Exp., corresponden a si el valor fue obtenido por simulación o por experimentación respectivamente.

Tabla 1.2 Resultados de trabajos en recolectores de energía (ES: energía electrostática, EM: energía electromagnética, P: energía piezoeléctrica).

Tipo R.E.	Energía (μW)	Volumen (cm^3)	Frecuencia (Hz)	Amplitud (μm)	Aceleración (m/s^2)	Densidad ($\mu\text{W}/\text{cm}^3$)	Sim. o Exp.	Ref.
ES	58	0.5	120	4	2.25	116	Sim	[21]
ES	5.6	1	2520	-	-	5.6	Sim	[7]
EM	200	75	28	6.46	0.2	2.67	Exp	[22]
EM	3600	75	28	32.31	1	48	Exp	[22]
EM	1	0.025	70	30	5.8	40	Sim	[4]
EM	100	0.025	330	30	12	4000	Sim	[4]
EM	530	0.24	322	25	102	2208.33	Exp	[23]
EM	830	11	110	150	71.7	75.45	Exp	[11]
EM	1000	-	102	8	3.29	-	Exp	[24]
P	93	0.5	120	3.96	2.25	186	Sim	[8]
P	130	0.5	120	3.96	2.25	260	Sim	[8]
P	121	0.5	120	3.96	2.25	242	Sim	[8]
P	138.5	0.5	120	3.96	2.25	277	Sim	[8]
P	60	1	100	5.7	2.25	60	Sim	[8]
P	2	0.9	80	-	-	2.22	Exp	[25]

Se puede notar en la Tabla 1.2 que con los recolectores de energía piezoeléctricos se obtiene una mayor potencia de salida con un volumen menor, a frecuencias de excitación que están dentro de las frecuencias que se pueden encontrar en la naturaleza (hasta 300Hz).

En la Tabla 1.2 se puede notar que el recolector de energía electrostática tiene el número más grande de densidad de potencia ($\mu\text{W}/\text{cm}^3$). Se debe tomar en cuenta que este recolector utiliza un circuito para aumentar el voltaje de salida. Las frecuencias que se usaron para estos recolectores son mayores a las que se encuentran en la naturaleza. También se debe tomar en cuenta que cuando se trata de la recolección de energía electrostática, un voltaje o una carga de entrada tiene que ser aplicado de manera que el movimiento vibratorio relativo de los elementos del capacitor cree una salida de corriente alterna [16]. Por otro lado, el voltaje de salida en la recolección de energía piezoeléctrica emerge del comportamiento inherente del material, lo que elimina la necesidad de una entrada de voltaje externa.

Debido a estas ventajas que tienen los recolectores de energía piezoeléctricos sobre los otros dos tipos de recolectores, los recolectores de energía piezoeléctricos han atraído gran atención para energizar los dispositivos portátiles electrónicos pequeños, cargar baterías y sensores inalámbricos que pueden ser colocados en lugares remotos como por ejemplo, puentes, arboles, sistema de posicionamiento global en animales, etc. Para que esto sea posible los recolectores de energía piezoeléctricos deben mejorar su eficiencia en la parte mecánica y eléctrica. Por lo que este trabajo propone maximizar el voltaje de salida al dimensionar el piezocerámico y la masa adjunta en el extremo libre.

El desarrollo de modelos matemáticos confiables y económicos computacionalmente para recolectores piezoeléctricos son necesarios para la predicción del comportamiento de estos dispositivos, dado que proporcionan un camino para la optimización de la energía eléctrica obtenida. En el siguiente capítulo se presentaran los tres modelos primarios disponibles en la literatura, los cuales son: el modelo de un solo grado de libertad (SDOF, por sus siglas en inglés) también conocido como parámetros concentrados, el modelo de aproximación de modelos distribuidos (uso del método de Rayleigh-Ritz para los eigenvalores) mencionado en este artículo como sumatoria de energías, por último el modelo de parámetros distribuidos [2].

2. Modelos analíticos existentes

El primer modelo matemático que fue desarrollado para predecir la dinámica de un sistema acoplado a un recolector de energía piezoeléctrica es el modelo de un solo grado libertad (llamado también como 1-D), y se emplearon soluciones de parámetros concentrados [16]. Los parámetros concentrados es un método que simplifica el análisis de un sistema real espacialmente distribuido, mediante la creación de una topología de elementos discretos que aproximan el comportamiento de los componentes distribuidos reales bajo ciertas restricciones.

Los parámetros concentrados es un enfoque de modelado conveniente desde el dominio eléctrico, ya que consta de: un capacitor, debido a la capacitancia interna (o inherente) del piezocerámico, y un resistor debido a una resistencia de carga externa. Por lo tanto, el único requisito es el de obtener los parámetros concentrados que representan el dominio mecánico, de manera que el equilibrio mecánico y las ecuaciones de los circuitos eléctricos pueden acoplarse a través de las ecuaciones constitutivas piezoeléctricas [16], y una relación de transformación puede establecerse. Este fue el procedimiento de Roundy and Wright [26], y duToit *et al* [3].

El modelo de parámetros concentrados es una aproximación limitada a un solo tipo de vibración y carece de algunos aspectos importantes del sistema físico acoplado, tales como la forma y la distribución precisa de la deformación, así como sus efectos en la respuesta eléctrica.

Como mejora para el modelado de parámetros concentrados, el método de Rayleigh-Ritz [27] de formulación discreta fue usado por Hagood *et al.* [28] para la actuación piezoeléctrica (usando el principio generalizado de Hamilton para sistemas electromecánicos obtenido por Crandall *et al.* [29]), y a este modelo se le llamará de sumatoria de energías.

Con el fin de obtener otras expresiones analíticas, varios autores han utilizado el análisis modal para obtener las formas de los modos de vibración obtenidos a partir de la teoría de la viga de Euler-Bernoulli, junto con la ecuación constitutiva del piezoeléctrico que da el desplazamiento eléctrico para relacionar las salidas eléctricas a los modos de vibración. A este tipo de modelos se les llamará de parámetros distribuidos, y deficiencias importantes en estos intentos de modelamiento matemático han sido resumidos en la literatura, entre los cuales se incluyen la falta de consideración del fenómeno de resonancia, la ignorancia de la expansión modal, la mala interpretación del forzamiento debido a la excitación, el modelado muy simplificado del acoplamiento del piezoeléctrico a la ecuación de la viga como el amortiguamiento viscoso, y el uso de las ecuaciones de detección/accionamiento estáticas en un problema fundamentalmente dinámico [6].

Las soluciones analíticas basadas en el modelado electromecánico con parámetros distribuidos fueron dadas por Erturk e Inman [7], junto con las validaciones experimentales. El modelado de parámetros distribuidos es un método que permite el análisis de sistemas cuyo espacio de estado es de dimensión infinita.

2.1. Modelo de un solo grado de libertad

Un modelo básico de 1-D es ilustrado en la Figura 2.1, el cual es un modelo muy común para analizar la generación de energía de los recolectores de energía por vibración. Este modelo es válido para recolectores donde el término de amortiguamiento eléctrico es lineal y proporcional a la velocidad, y además es útil para entender la importancia del sistema (estructural y eléctrico) y los parámetros de entrada.

Le energía eléctrica es extraída del sistema mecánico, el cual es excitado por una entrada mecánica. Esta extracción no es necesariamente lineal, o proporcional a la velocidad, sin embargo, es un proceso disipativo y en general puede verse como un amortiguamiento eléctrico, como se muestra en el modelo presentado en la Figura 2.1.

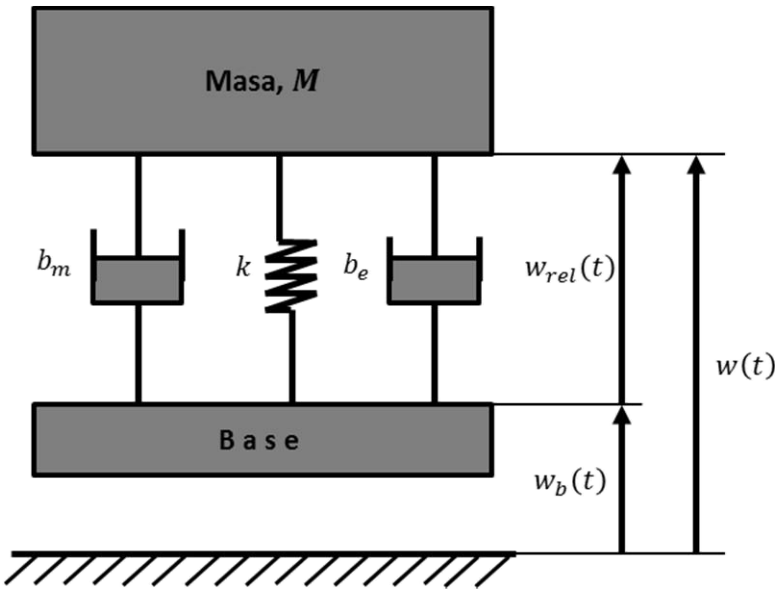


Figura 2.1 Modelo para analizar la generación de energía de los recolectores de energía por vibración.

La dinámica del sistema de la Figura 2.1 es descrita como:

$$\ddot{w}_{rel} + 2(\zeta_m + \zeta_e)\omega_n\dot{w}_{rel} + \omega_n^2 w_{rel} = -\ddot{w}_B \quad (2.1)$$

Donde el desplazamiento relativo es w_{rel} , los puntos indican el número de derivadas con respecto al tiempo, la frecuencia natural es definida como $\omega_n = \sqrt{k/M}$, y la relación de amortiguamiento b está relacionado con el coeficiente de amortiguamiento ζ , $b = 2M\omega_n\zeta$. El amortiguamiento total, ζ_T , es la suma del amortiguamiento mecánico y eléctrico, ζ_m y ζ_e respectivamente. La excitación de la base se puede expresar como $w_B(t) = W_B e^{j\omega t}$, donde W_B es la amplitud del desplazamiento de la base, j es la unidad imaginaria y ω es la frecuencia de entrada de la base.

La potencia eléctrica extraída se obtiene a través del amortiguamiento eléctrico b_e , y puede determinarse como, $|P_e| = 1/2 b_e \dot{w}_{rel}^2$, y puede escribirse en términos de parámetros de entrada.

Para esto se despejó la velocidad de la ecuación (2.1) y se sustituyó en la ecuación de la potencia eléctrica, además se sustituyeron los valores de frecuencia natural, coeficiente de amortiguamiento y velocidad de la base. Para simplificar se uso \ddot{w}_B , que es la magnitud de aceleración de la base y es relacionada con el desplazamiento de la base, $\ddot{w}_B = \omega^2 W_B$ para entradas armónicas. También se hizo uso de la razón de frecuencias, $\Omega = \omega/\omega_n$, lo que resulta en:

$$|P_e| = \frac{M\zeta_e\Omega^2\omega^4W_B^2}{\omega_n[(1-\Omega^2)^2 + (2\zeta_T\Omega)^2]} = \frac{M\zeta_e\Omega^2\ddot{w}_B^2}{\omega_n[(1-\Omega^2)^2 + (2\zeta_T\Omega)^2]} \quad (2.2)$$

La potencia eléctrica obtenida puede ser maximizada determinando la razón óptima de frecuencia de operación.

$$(\omega_{opt,Pe}/\omega_n)^2 = 2(1 - 2\zeta_T^2) \pm \sqrt{4(2\zeta_T^2 - 1)^2 - 3} \quad (2.3)$$

Cuando el coeficiente de amortiguamiento total es muy pequeño en la ecuación (2.3), $\omega_{opt} \approx \omega_n$. Un segundo óptimo es $\omega_{opt} \approx \omega_n\sqrt{3}$ pero un mínimo local. Dado que comúnmente el amortiguamiento total es muy pequeño $\omega_{opt} = \omega_n$ o $\Omega = 1$.

La potencia eléctrica puede ser maximizada con respecto al amortiguamiento eléctrico óptimo.

$$\zeta_{e,opt} = \sqrt{\zeta_m^2 + (\Omega^2 - 1)^2/4\Omega^2} \quad (2.4)$$

Cuando $\Omega = 1$, el amortiguamiento eléctrico óptimo es $\zeta_{e,opt} = \zeta_m$, estas simplificaciones se pueden sustituir en la ecuación (2.2).

$$|P_e| = \frac{M\dot{W}_B^2}{16\zeta_{e,opt}\omega_n} \quad (2.5)$$

Para poder interpretar los resultados se debe considerar que la relación de amortiguamiento mecánico tiene cuatro componentes dominantes para los MEMS con viga en cantiléver, las cuales son: fuerza del aire (airflow force), fuerza de apriete (squeeze-force), perdidas de soporte (support losses) y amortiguamiento estructural (structural damping), ver Figura 2.2.

$$\zeta_m = \zeta_{m, drag} + \zeta_{m, squeeze} + \zeta_{m, struct} + \zeta_{m, sup} \quad (2.6)$$

El coeficiente de amortiguamiento $\zeta_{m, drag}$ representa el flujo de aire alrededor del oscilador, y se describe por la ecuación de Navier-Stokes. Dada que la ecuación que describe el fenómeno no puede ser resulta analíticamente se introduce una aproximación. La primera máxima velocidad es calculada estimando el número de Reynolds y número de Velensi [30], y se expresa como:

$$\zeta_{m, drag} = \frac{3\pi\mu d + \frac{3}{4}\pi b^2\sqrt{2\rho_{air}\mu\omega}}{2\rho_{viga}bhl\omega} \quad (2.7)$$

El coeficiente de amortiguamiento $\zeta_{m, squeeze}$ representa cuando el oscilador está cerca de una pared rígida y el flujo de aire es diferente debido a ese espacio (squeeze-force) [30], y se expresa como:

$$\zeta_{m, squeeze} = \frac{\mu b^2}{2\rho_{viga}g_0^3h\omega} \quad (2.8)$$

El coeficiente de amortiguamiento $\zeta_{m, sup}$ por pérdidas de soporte (support losses) representa la mayor parte de las perdidas, se genera por la fricción entre las superficies conectadas, tales como uniones atornilladas [30], y se expresan como:

$$\zeta_{m, sup} = \frac{0.23h^3}{l^3} \quad (2.9)$$

El coeficiente de amortiguamiento $\zeta_{m, struct}$ representa el amortiguamiento estructural dado por la fricción interna molecular del material [30].

$$\zeta_{m, struct} = \frac{\eta}{2} \quad (2.10)$$

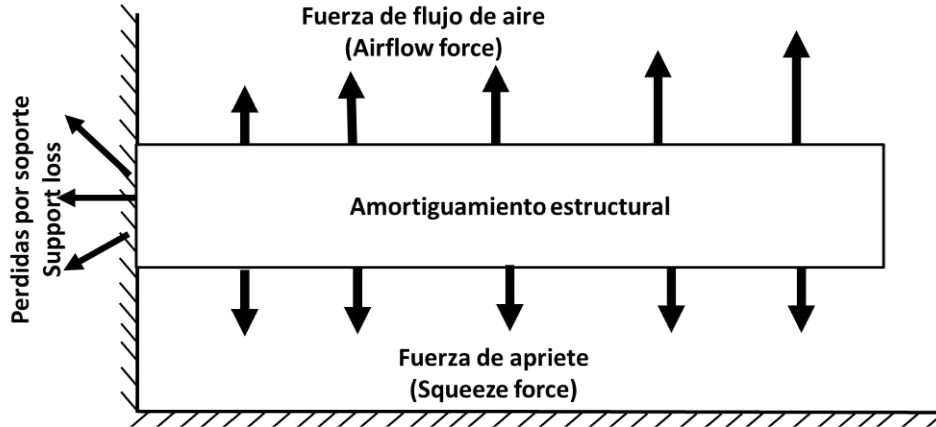


Figura 2.2 Energía disipada por el mecanismo.

En las ecuaciones anteriores μ es la viscosidad del aire, ρ_{air} y ρ_{viga} son las densidades del aire y de la viga respectivamente, η es factor de amortiguamiento de la estructura para el material de la viga, g_0 es el espacio entre la superficie inferior de la viga y un piso fijo, h es la altura de la viga, b es el ancho de la viga y l el largo de la viga. La frecuencia operativa es ω que coincide con la frecuencia natural.

2.1.1. Modelo analítico electromecánico 1-D

Un modelo de 1-D electromecánico, tal como el mostrado en la Figura 2.3, fue desarrollado para capturar la respuesta básica del recolector piezoeléctrico, y es útil en la interpretación de los modelos en 2-D.

Este modelo presenta un elemento piezoeléctrico el cual es excitado por la base w_B . La masa del piezocerámico es m_p , y es conectado a un circuito recolector de energía que es simplificado como un resistor. La masa adjunta se denota por M . Note que toda la estructura es electromecánica, mientras que en recolectores de energía, tales como vigas uniformes /bimorfa, una porción de la estructura será un sustrato no piezoeléctrico (viga de apoyo o shim). El desplazamiento relativo w_{rel} es el desplazamiento relativo con respecto a la base, w es el desplazamiento del dispositivo, w_b es el desplazamiento de la base, P es la polaridad del piezocerámico y E es la dirección del campo eléctrico resultante.

Para 1-D, podemos simplificar las relaciones constitutivas [31]:

$$\begin{Bmatrix} T \\ D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^E & -e^t \\ e & \varepsilon^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S \\ E \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} T_3 &= c_{33}^E S_3 - e_{33}^t E_3 \\ D_3 &= e_{33} S_3 - \varepsilon_{33}^S E_3 \end{aligned} \quad (2.12)$$

D, E, S y T son definidos como desplazamiento eléctrico, campo eléctrico, deformación y esfuerzo, respectivamente, ε es la permitividad del piezoeléctrico y e es la constante piezoeléctrica del material relacionada a la densidad de carga y deformación, c es el coeficiente de elasticidad. Los superíndices E y S denotan que las respectivas constantes son evaluadas en un campo eléctrico constante y a deformación constante respectivamente, mientras que t indica la transpuesta de la matriz.

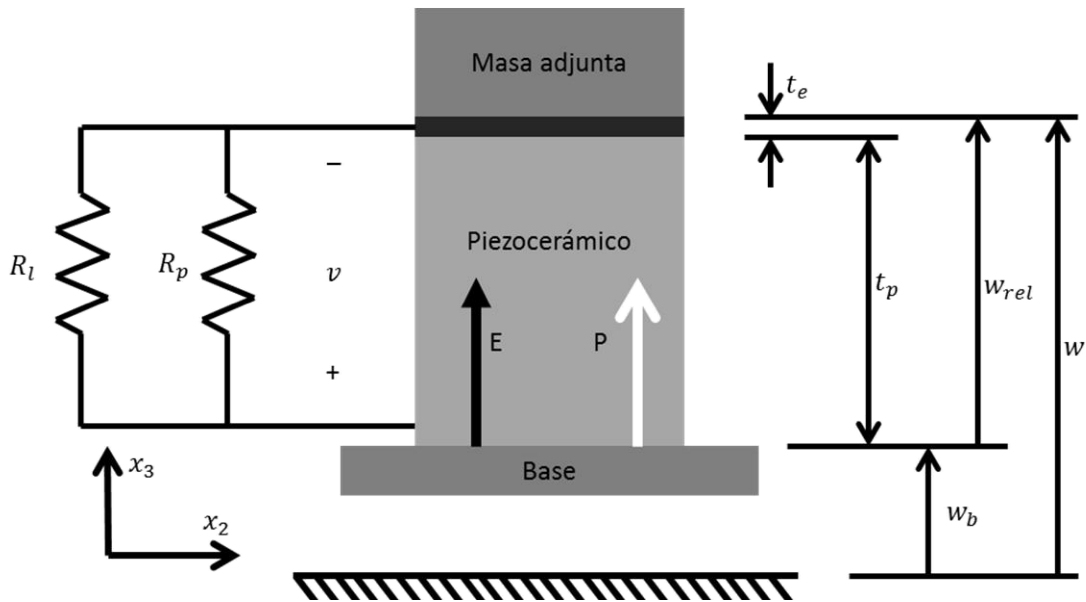


Figura 2.3 Modelo de un elemento piezoeléctrico el cual es excitado por su base [3].

En la Figura 2.3 el elemento piezoeléctrico es polarizado en la dirección de x_3 . La deformación es relacionada a los parámetros del dispositivo, la deformación es definida como $S_3 = w_{rel}/t_p$, y el campo eléctrico como $E_3 = -v/t_p$. Donde w_{rel} es el desplazamiento relativo, t_p es el largo del

piezocerámico y v es el voltaje de salida. La masa total aproximada del sistema es $M_T = M + \frac{1}{3}m_p$ y $m_e = M_T/A_p$ es la masa total por unidad de área de la sección transversal del piezocerámico. El esfuerzo $T_3 = -M_T(\ddot{w}_{rel} + \ddot{w}_B)/A_p = -m_e(\ddot{w}_{rel} + \ddot{w}_B)$, donde \ddot{w}_B es la aceleración de la base. Los puntos superiores indican el número de derivadas de la variable respecto al tiempo. El desplazamiento eléctrico D_3 representa la carga en los electrodos por unidad de área. La resistencia equivalente R_{eq} , es la resistencia paralela de la resistencia de carga y la resistencia de fuga presentes, R_l y R_p respectivamente. Normalmente la resistencia a la fuga R_p es mayor que el de la carga por que la resistencia equivalente es $R_{eq} \approx R_l$.

Sustituyendo las expresiones anteriores en la Ecuación (2.12) se obtienen:

$$m_e \ddot{w}_{rel} + c_{33}^E \frac{w}{t_p} + e_{33} \frac{v}{t_p} = -m_e \ddot{w}_B \quad (2.13)$$

$$D_3 = e_{33} \frac{w}{t_p} - \varepsilon_{33}^S \frac{v}{t_p} = \frac{q}{A_p} \quad (2.14)$$

Al multiplicar las ecuaciones (2.13) y (2.14) por A_p , se obtiene un término de acoplamiento electromecánico, $\theta = -e_{33}A_p/t_p$, una rigidez efectiva $K = c_{33}^E A_p/t_p$ y la capacitancia queda definida en términos de la permitividad, $C_p = \varepsilon_{33}^S A_p/t_p$.

El material piezoeléctrico tiene dos efectos, el directo, el cual es la generación de una carga eléctrica como resultado de una fuerza aplicada, el segundo es el efecto inverso, el cual se presenta cuando un campo eléctrico es inducido y como resultado se obtiene una deformación del piezocerámico. Estos efectos están presentes en el término de acoplamiento hacia atrás “backward coupling” θ en la ecuación (2.15), y representa los efectos eléctricos inducidos en la estructura del recolector de energía debido al efecto piezoeléctrico inverso (la retroalimentación del dominio eléctrico al dominio mecánico debido a la energía generada). El término de acoplamiento hacia adelante “forward coupling” θ en la ecuación (2.16), es el término debido al efecto piezoeléctrico directo (retroalimentación del dominio mecánico al eléctrico).

La ecuación (2.14) al derivarla respecto al tiempo puede ser escrita en términos de la corriente $i = dq/dt$, de igual manera la corriente es relacionada con el voltaje y la resistencia equivalente $i = v/R_{eq}$, donde la resistencia de carga equivalente es definida igual a la resistencia de carga $R_{eq} = R_l$ por lo que las ecuaciones se pueden describir como:

$$M_T \ddot{w} + K w - \theta v = -M_T \ddot{w}_B \quad (2.15)$$

$$\theta \dot{w} + C_p \dot{v} + \frac{1}{R_l} v = 0 \quad (2.16)$$

Usando la definición de frecuencia de resonancia, $\omega_n^2 = K/M_T = c_{33}^E/m_e t_p$, e incluyendo el término de amortiguamiento a través del coeficiente de amortiguamiento mecánico ζ_m , la ecuación (2.15) se convierte en:

$$\ddot{w} + 2\zeta_m \omega_n \dot{w} + \omega_n^2 w - \frac{\theta}{M_T} v = -\ddot{w}_B \quad (2.17)$$

Usando la transformada de Laplace en las ecuaciones (2.16) y (2.17), se obtiene el desplazamiento relativo y el voltaje, y la potencia eléctrica se obtiene con $P_{out} = v^2/R_l$. Las ecuaciones se normalizaron con respecto a la fuerza de excitación dejando las ecuaciones en función de la frecuencia, estas ecuaciones son conocidas como funciones de respuesta a la frecuencia (FRF, por sus siglas en inglés).

Los parámetros adimensionales $r = \omega_n R_l C_p$ y $\Omega = \omega/\omega_n$, y el coeficiente de acoplamiento electromecánico alternante $k_e^2 = k_{33}^2/(1 - k_{33}^2) = e_{33}^2/(c_{33}^E \epsilon_{33}^S)$ son usados para simplificar las ecuaciones (2.18), (2.19) y (2.20). Donde $k_{33}^2 = d_{33}^2/s_{33}^E \epsilon_{33}^T$ es el coeficiente de acoplamiento electromecánico, que relaciona la energía eléctrica saliente con la energía mecánica entrante.

$$\left| \frac{w}{M_T \ddot{w}_B} \right| = \frac{1}{K} \frac{\sqrt{1 + (r\Omega)^2}}{\sqrt{[1 - (1 + 2\zeta_m r)\Omega^2]^2 + [(1 + k_e^2)r\Omega + 2\zeta_m \Omega - r\Omega^3]^2}} \quad (2.18)$$

$$\left| \frac{v}{M_T \ddot{w}_B} \right| = \frac{1}{|\theta|} \frac{r k_e^2 \Omega}{\sqrt{[1 - (1 + 2\zeta_m r)\Omega^2]^2 + [(1 + k_e^2)r\Omega + 2\zeta_m \Omega - r\Omega^3]^2}} \quad (2.19)$$

$$\left| \frac{P_{out}}{(M_T \ddot{w}_B)^2} \right| = \frac{\omega_n}{K} \frac{r k_e^2 \Omega^2}{[1 - (1 + 2\zeta_m r)\Omega^2]^2 + [(1 + k_e^2)r\Omega + 2\zeta_m \Omega - r\Omega^3]^2} \quad (2.20)$$

Las ecuaciones anteriores (2.18)-(2.20) representan el desplazamiento relativo de la viga con respecto a la base, el voltaje obtenido del recolector piezoeléctrico, y la potencia eléctrica del recolector piezoeléctrico, respectivamente. Las ecuaciones se normalizaron con respecto a la fuerza de excitación dejando las ecuaciones en función de la frecuencia, estas ecuaciones son conocidas como funciones de respuesta a la frecuencia (FRF, por sus siglas en inglés).

Considerando la resistencia de fuga R_p mucho más grande que la resistencia de carga R_l se optimiza la potencia eléctrica extraída, ecuación (2.20), con respecto a la resistencia de carga R_l , o de manera equivalente con respecto al parámetro adimensional r , resultando en:

$$r_{opt} = \frac{\Omega^4 + (4\zeta_m^2 - 2)\Omega^2 + 1}{\Omega^6 + (4\zeta_m^2 - 2[1 + k_e^2])\Omega^4 + [1 + k_e^2]^2 \Omega^2} \quad (2.21)$$

Dado que el elemento piezoeléctrico tiene cierta rigidez tanto para un circuito abierto así como para cortó circuito, esto debido a la energía eléctrica extraída, habrá dos frecuencias óptimas de operación que deben ser consideradas. Para la rigidez en corto circuito $R_l \rightarrow 0$, sustituyendo la resistencia en el parámetro adimensional en la ecuación (2.21) y despejando la frecuencia, se obtiene la frecuencia en corto circuito la cual denotaremos con un subíndice sc.

$$\Omega_{sc} = 1 \quad \text{o} \quad \omega_{sc} = \sqrt{c_{33}^E A_p / m_{eff} h} \quad (2.22)$$

La ecuación (2.22) anteriormente se había definido como frecuencia de resonancia. Para el análisis de circuito abierto se realizara el mismo procedimiento pero con $R_l \rightarrow \infty$.

$$\Omega_{oc} = \sqrt{1 + k_e^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + k_{33}^2}} \quad \text{o} \quad \omega_{oc} = \sqrt{c_{33}^D A_p / m_{eff} h} \quad (2.23)$$

La frecuencia de la ecuación (2.23) es conocida como frecuencia en circuito abierto denotada por un subíndice oc, y está en función del coeficiente de acoplamiento electromecánico del dispositivo. Nótese que $\Omega_{oc} > \Omega_{sc}$. Usando estas frecuencias, es posible obtener la resistencia óptima con la ecuación (2.21). El parámetro adimensional óptimo en resonancia es determinado al sustituir el valor de $\Omega_{sc} = 1$ en la ecuación (2.21).

$$r_{opt,sc} = \frac{4\zeta_m^2}{4\zeta_m^2 + k_e^2} \quad (2.24)$$

Usando la relación del parámetro adimensional $r = \omega_n R_l C_p$, la resistencia equivalente óptima en corto circuito es

$$R_{opt,sc} = \frac{4\zeta_m^2}{4\zeta_m^2 + k_e^2} \frac{1}{\omega_n C_p} \quad (2.25)$$

Haciendo el mismo procedimiento para la frecuencia en circuito abierto Ω_{oc}

$$r_{opt,oc} = \frac{k_e^2}{2\zeta_m(1 + k_e^2)} \quad (2.26)$$

Por lo que la resistencia equivalente óptima en circuito abierto será

$$R_{opt,oc} = \frac{k_e^2}{2\zeta_m(1 + k_e^2)} \frac{1}{\omega_n C_p} \quad (2.27)$$

Resolviendo el problema de la Figura 2.3 con los datos de la Tabla 2.1, la potencia (ecuación (2.20)) contra la razón de frecuencias Ω es graficada en la Figura 2.4. Los dos picos más grandes que se muestran en la Figura 2.4, en color azul y morado, corresponden a la frecuencia en corto circuito y circuito abierto respectivamente, los cuales se consigue variando la resistencia de carga.

Tabla 2.1 Datos del problema mostrado en la Figura 2.3.

Datos del dispositivo	Propiedades del material PZT-5H
$M = 0.01 \text{ Kg}$	$d_{33} = 593 \times 10^{-12} \text{ m/V}$
$h = 0.01 \text{ m}$	$e_{33} = 28.64 \text{ C/m}^2$
$A_p = 0.0001 \text{ m}^2$	$\epsilon_{33}^S = 1.317 \times 10^{-8} \text{ f/m}$
$\zeta_m = 0.05$	$k_{33}^2 = 0.56$
$\omega_n = 196,570 \text{ rad/s}$	$k_e^2 = 1.286$
$m = 0.0075 \text{ Kg}$	$S_{33}^E = 2.070 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}$
$t_e = 0$	$c_{33}^E = 48.3 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
	$R_p = 5 \times 10^9 \text{ Ohm}$

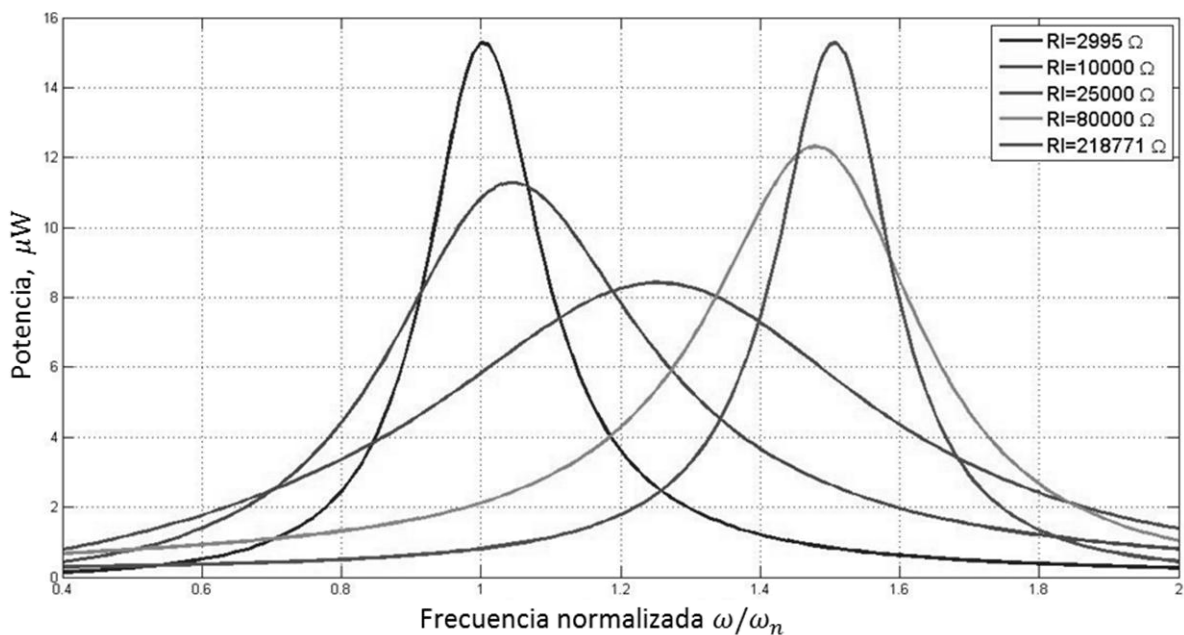


Figura 2.4 Potencia contra frecuencia normalizada, variando la resistencia de carga para el modelo 1-D de la Figura 2.3.

En la Figura 2.4 se puede ver que la potencia incrementa conforme la frecuencia de trabajo se acerca a la frecuencia de resonancia, y después de alcanzar su máximo cae a un mínimo, la cual corresponde a un desplazamiento mínimo de la masa adjunta. La potencia se incrementa a un segundo máximo, la cual es correspondiente a la frecuencia en circuito abierto. Mientras que la potencia predicha es igual en estos dos picos, el voltaje y la corriente difieren.

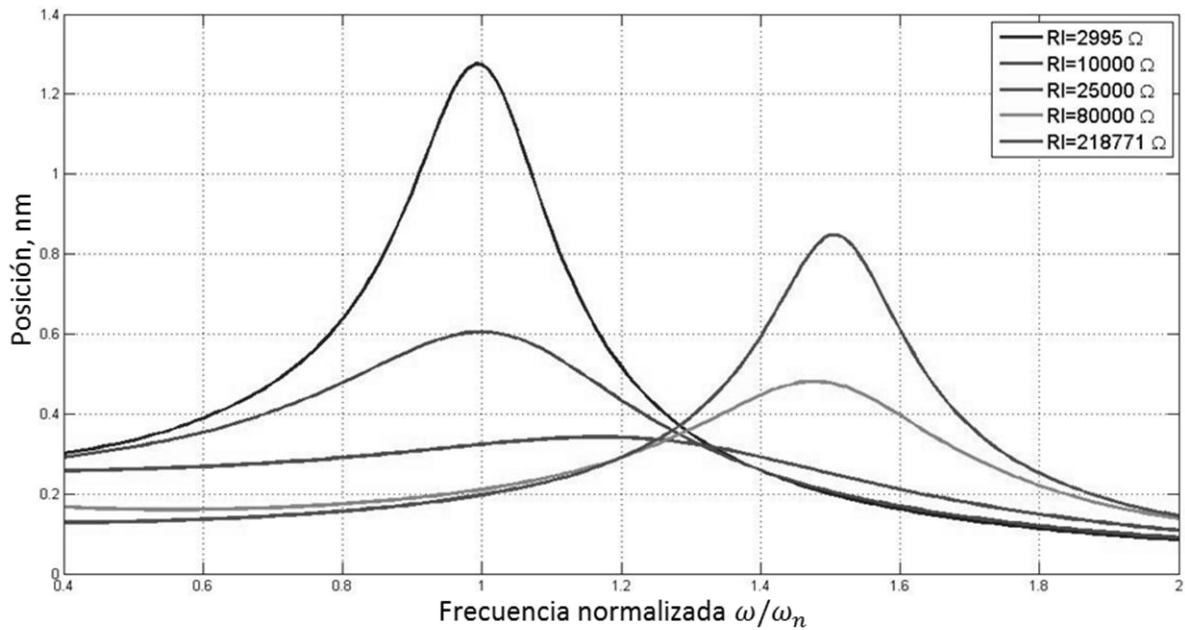


Figura 2.5 Posición contra frecuencia normalizada, variando la resistencia de carga para el modelo 1-D de la Figura 2.3.

El desplazamiento relativo de la masa adjunta se muestra en la Figura 2.5. A diferencia de la potencia, el desplazamiento es mayor en la frecuencia de corto circuito que en la de circuito abierto. Operar en el segundo pico puede ser ventajoso dado que el desplazamiento de la masa adjunta es más pequeño.

El voltaje es graficado contra la relación de frecuencias en la Figura 2.6, y se puede observar como los voltajes generados para la frecuencia en corto circuito y circuito abierto difieren por cerca de un orden de magnitud, siendo más grande en circuito abierto. Dado que la potencia generada en estas frecuencias es la misma, y la potencia se relaciona con el voltaje v y la corriente i por la ecuación (2.28) (para una resistencia de carga), entonces la corriente en corto circuito va ser de mayor orden de magnitud que en circuito abierto.

$$P_{out} = iv \quad i = \frac{P_{out}}{v} \quad (2.28)$$

La capacidad de un elemento piezoeléctrico para cargar una batería ya ha sido investigada previamente [15]. De lo cual se concluyó que ciertos piezocerámicos no son muy adecuados para esta aplicación, ya que la generación de corriente es insuficiente. Pero al operarlas en la frecuencia de resonancia o corto circuito se puede mitigar este problema.

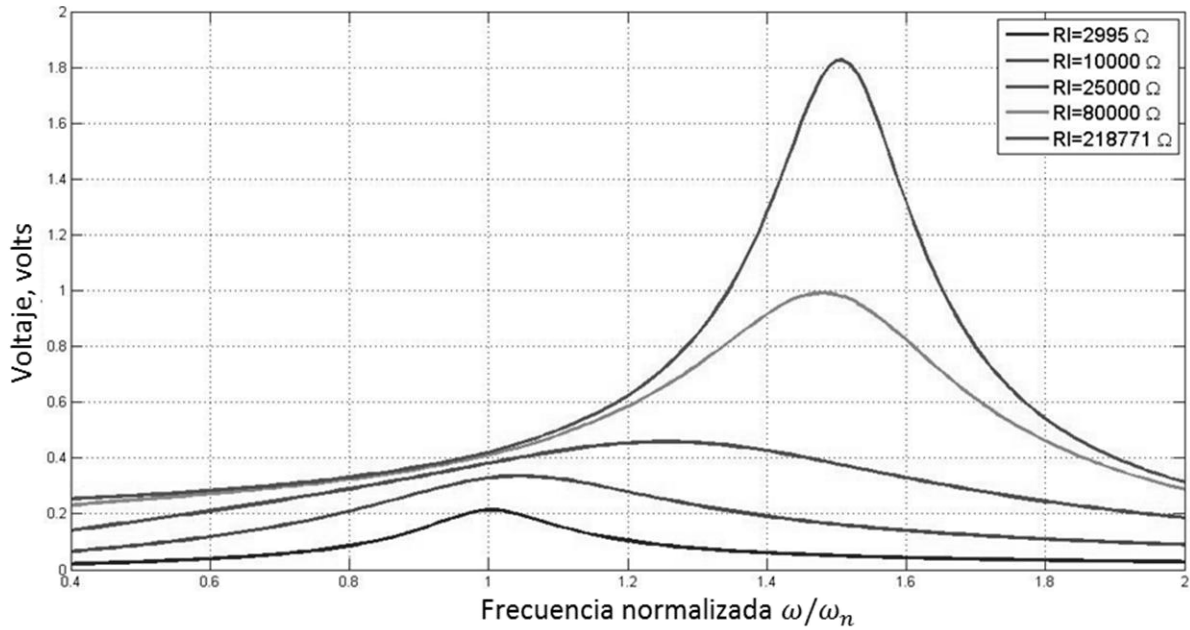


Figura 2.6 Voltaje contra frecuencia normalizada, variando la resistencia de carga para el modelo 1-D de la Figura 2.3.

Sin embargo para la aplicación de carga de baterías un circuito rectificador es necesario, el cual tiene un requisito mínimo de voltaje para operar, con lo cual al operar el dispositivo en la frecuencia de circuito abierto puede ser ventajoso.

Sodano *et al* [15] estudiaron la capacidad de varios elementos piezoeléctricos para cargar una batería, de lo cual se concluyó que ciertos materiales no son adecuados para esta aplicación. Pero el principal problema de los materiales piezocerámicos aptos para la carga de baterías es que generan una corriente insuficiente para la carga de baterías, por lo que se recomienda el uso de los recolectores de energía piezoeléctricos en la frecuencia de resonancia.

2.2. Modelo sumatoria de energías

Un método que puede ser utilizado para modelar el comportamiento de una viga en cantiléver es el análisis de equilibrio de fuerzas, el cual conduce a la teoría de vigas de Euler-Bernoulli (Anexo 5) [32]. Otro método se basa en energías el cual fue adoptado por N. W. Hagood *et al.* [28].

La forma generalizada del principio de Hamilton para un sistema electromecánico, despreciando los términos magnéticos y definiendo la energía cinética (T_k), energía potencial interna (U), la energía eléctrica (W_e) y el trabajo externo (W) se definen como:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T_k - U + W_e) + \delta W] dt = 0 \quad (2.29)$$

Donde δ indica la primera variación de la función, los términos de cada energía son definidos como:

$$T_K = \int_{V_s} \frac{1}{2} \rho_s \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{u}} dV_s + \int_{V_p} \frac{1}{2} \rho_p \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{u}} dV_p \quad (2.30)$$

$$U = \int_{V_s} \frac{1}{2} \mathbf{S}^t \mathbf{T} dV_s + \int_{V_p} \frac{1}{2} \mathbf{S}^t \mathbf{T} dV_p \quad (2.31)$$

$$W_e = \int_{V_p} \frac{1}{2} \mathbf{E}^t \mathbf{D} dV_p \quad (2.32)$$

Los subíndices p y s indican que son parte del elemento piezoeléctrico y de la sección inactiva que funciona como soporte, respectivamente. El desplazamiento relativo es denotado por $\mathbf{u}(x, t)$ y ρ es la densidad. Las contribuciones de W_e debido a los campos magnéticos en el borde de la estructura y el espacio libre se desprecian. Considerando las nf fuerzas puntuales externas $\mathbf{f}_k(t)$, aplicadas discretamente en los puntos \mathbf{x}_k , y las nq cargas q_j extraídas en electrodos discretos con posición \mathbf{x}_j , el término del trabajo externo está en función del desplazamiento relativo, $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(\mathbf{x}_k, t)$ y el potencial eléctrico $\varphi_j = \varphi(\mathbf{x}_j, t)$:

$$\delta W = \sum_{k=1}^{nf} \delta \mathbf{u}_k \mathbf{f}_k(t) - \sum_{j=1}^{nq} \delta \varphi_j q_j(t) \quad (2.33)$$

Las definiciones anteriores, así como las relaciones constitutivas (ecuación (2.11)) son usadas en conjunto con la aproximación variacional en la ecuación (2.29), para escribirla como sigue (se asume que las coordenadas locales coinciden con las globales):

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{V_s} \rho_s \delta \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{u}} dV_s + \int_{V_p} \rho_p \delta \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{u}} dV_p - \int_{V_s} \delta S^t c_s S dV_s - \int_{V_p} \delta S^t c^E S dV_p + \int_{V_p} \delta S^t e^t E dV_p \right. \\ \left. + \int_{V_p} \delta E^t e S dV_p + \int_{V_p} \delta E^t \varepsilon^S E dV_p + \sum_{k=1}^{nf} \delta \mathbf{u}_k \mathbf{f}_k(t) - \sum_{j=1}^{nq} \delta \varphi_j q_j(t) \right] dt = 0 \quad (2.34)$$

Para la obtención de las ecuaciones gobernantes del sistema se introducen los siguientes tres supuestos básicos: procedimiento de Rayleigh-Ritz, teoría de vigas de Euler-Bernoulli y que el campo eléctrico a través del piezoeléctrico es constante. Estas suposiciones son consideradas en modelos anteriores [33],[28]. En la aproximación de Rayleigh-Ritz, el desplazamiento de la estructura es escrito como la suma de nr modos de forma individuales, $\phi_{ri}(x)$, multiplicado por coordenadas mecánicas generalizadas $r_i(t)$ [34].

Para la flexión en la viga, solo el desplazamiento transversal (dirección x_t) es considerado y la forma modal es función solo de la posición axial, $u(x, t) = w(x_a, t)$ como en la ecuación (2.35). $w(x_a, t)$ es el desplazamiento relativo de la viga con respecto a la base.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = w(x_a, t) = \sum_{i=1}^{nr} \phi_{ri}(x_a) r_i(t) = \boldsymbol{\phi}_r(x_a) \mathbf{r}(t) \quad (2.35)$$

El potencial eléctrico para cada par de electrodos nq puede ser escrito en términos de una distribución de potencial, ϕ_{vj} , y las coordenadas eléctricas generalizadas $v_j(t)$, tal como en la ecuación (2.36).

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{nq} \phi_{vj}(\mathbf{x}) v_j(t) = \boldsymbol{\phi}_v(\mathbf{x}) \mathbf{v}(t) \quad (2.36)$$

La teoría de vigas de Euler-Bernoulli permite deformación axial en la viga $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ y puede ser escrito en términos de desplazamiento en el eje neutro de la viga y de la distancia transversal desde el eje neutro (x_t) como en la ecuación (2.37).

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = -x_t \frac{\partial^2 w(x_a, t)}{\partial x_a^2} = -x_t \phi_r'' r(t) \quad (2.37)$$

Los apóstrofes indican la derivada con respecto a la posición axial, x_a . Las definiciones anteriores se sustituyen en la ecuación (2.34), obteniendo:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{V_s} \delta \dot{r}^t \phi_r^t \rho_s \phi_r \dot{r} dV_s + \int_{V_p} \delta \dot{r}^t \phi_r^t \rho_p \phi_r \dot{r} dV_p - \int_{V_s} \delta r^t (-x_t \phi_r'')^t c_s (-x_t \phi_r'') r dV_s \right. \\ \left. - \int_{V_p} \delta r^t (-x_t \phi_r'')^t c^E (-x_t \phi_r'') r dV_p + \int_{V_p} \delta r^t (-x_t \phi_r'')^t e^t (-\nabla \phi_v) v dV_p \right. \\ \left. + \int_{V_p} \delta v^t (-\nabla \phi_v)^t e (-x_t \phi_r'') r dV_p + \int_{V_p} \delta v^t (-\nabla \phi_v)^t \varepsilon^S (-\nabla \phi_v)^t v dV_p \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{nf} \delta r_k^t \phi_{r,k}^t f_k + \sum_{j=1}^{nq} \delta v_j^t \phi_{v,j}^t q_j \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Por medio de la integración por partes, y observando que las variaciones deben desaparecer en los límites, los dos primeros términos se pueden reescribir como $\int_V \delta \dot{r}^t \phi_r^t \rho \phi_r \dot{r} dV = - \int_V \delta r^t \phi_r^t \rho \phi_r \ddot{r} dV_s$. Los términos son agrupados para cada variación (ej. δr^t y δv^t), y tienden a cero por separado, con lo que se obtienen dos ecuaciones gobernantes:

$$\begin{aligned} - \int_{V_s} \phi_r^t \rho_s \phi_r \ddot{r} dV_s - \int_{V_p} \phi_r^t \rho_p \phi_r \ddot{r} dV_p - \int_{V_s} (-x_t \phi_r'')^t c_s (-x_t \phi_r'') r dV_s \\ - \int_{V_p} (-x_t \phi_r'')^t c^E (-x_t \phi_r'') r dV_p + \int_{V_p} (-\nabla \phi_v)^t e (-x_t \phi_r'') r dV_p \\ + \sum_{i=1}^{nf} \phi_{r,k}^t f_k = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\int_{V_p} (-x_t \phi_r'')^t e^t (-\nabla \phi_v) v dV_p + \int_{V_p} (-\nabla \phi_v)^t \varepsilon^S (-\nabla \phi_v) v dV_p + \sum_{j=1}^{nq} \phi_{v,j} q_j = 0 \quad (2.40)$$

De estas ecuaciones se definen los siguientes términos, masa (M), rigidez (K), acoplamiento (Θ) y capacitancia (C_p).

$$\mathbf{M} = \int_{V_s} \phi_r^t \rho_s \phi_r \ddot{r} dV_s + \int_{V_p} \phi_r^t \rho_p \phi_r \ddot{r} dV_p \quad (2.41)$$

$$\mathbf{K} = \int_{V_s} (-x_t \phi_r'')^t c_s (-x_t \phi_r'') r dV_s - \int_{V_p} (-x_t \phi_r'')^t c^E (-x_t \phi_r'') r dV_p \quad (2.42)$$

$$\mathbf{\Theta} = \int_{V_p} (-x_t \phi_r'')^t e^t (-\nabla \phi_v) dV_p \quad (2.43)$$

$$\mathbf{C}_p = \int_{V_p} (-\nabla \phi_v)^t \varepsilon^S (-\nabla \phi_v) v dV_p \quad (2.44)$$

Sustituyendo los términos anteriores (ecuación (2.41)-(2.44)) en las ecuaciones obtenidas de la integración por partes (ecuación (2.39) y (2.40)), obtenemos las siguientes ecuaciones gobernantes:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{K} \mathbf{r} - \mathbf{\Theta} \mathbf{v} = \sum_{k=1}^{nf} \phi_r^t(x_k) \mathbf{f}_k(t) \quad (2.45)$$

$$\mathbf{\Theta}^t \mathbf{r} + \mathbf{C}_p \mathbf{v} = - \sum_{j=1}^{nq} \phi_v(x_j) q_j(t) \quad (2.46)$$

La entrada del sistema es la excitación de la base. Para representar la carga inercial de la viga debida a la excitación, la estructura es discretizada en nf elementos de tamaño Δx_a y la carga inercial local es aplicada en el elemento k^{th} , por lo que la carga sería $f_k = -m_k \Delta x_a \ddot{w}_B$. Esto resulta en nf cargas discretizadas. Donde m_k es la masa del elemento por unidad de longitud. La carga es sumada para todos los elementos, y en el límite $\Delta x_a \rightarrow dx_a$ La sumatoria se reduce a una integral sobre el largo de la estructura, por lo que una masa por unidad de longitud es usada $m(x_a)$. Para simplificar, se ha asumido que la viga es uniforme en la sección transversal por lo que la masa en cada sección transversal es constante $m(x_a) = m$.

Sustituyendo la función de la fuerza en el lado derecho de la ecuación (2.45), el vector de fuerza B_f , es definido como:

$$\mathbf{B}_f = \int_0^L m(x_a) \phi_r^t dx_a = m \int_0^L \phi_r^t dx_a \quad (2.47)$$

El lado derecho de la ecuación (2.46) se reduce a un vector columna, \mathbf{q} , de largo nq (número de pares de electrodos) con valor total de elementos q_T ($q_T = \sum_{j=1}^{nq} q_j$). Esta ecuación puede ser diferenciada con respecto al tiempo para obtener la corriente. La corriente puede ser relacionada con el voltaje por medio de la ley de Ohm, y simplificando el circuito recolector de energía con resistencia de carga, R_l .

El amortiguamiento mecánico es agregado por medio de la suma de un término de amortiguamiento viscoso \mathbf{C} en la ecuación (2.45), para así obtener la ecuación (2.48). Cuando varios modos de flexión son investigados, una amortiguación proporcional se utiliza a menudo para asegurar el desacoplamiento de las ecuaciones durante el análisis modal. La amortiguación se mide típicamente a la frecuencia natural del dispositivo, la cual está fija. Como consecuencia, la dependencia de la amortiguación con la frecuencia no necesita ser considerada aquí, si se puede suponer que las relaciones de amortiguamiento en las frecuencias de resonancia y anti-resonancia son los mismas.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}\mathbf{r} - \mathbf{\Theta}\mathbf{v} = -\mathbf{B}_f\ddot{\mathbf{w}}_B \quad (2.48)$$

$$\mathbf{\Theta}^t\mathbf{r} + \mathbf{C}_p\mathbf{v} + \mathbf{q} = 0 \quad (2.49)$$

Es importante notar la similitud entre las ecuaciones gobernantes (ecuación (2.48) y (2.49)) con las de un solo grado de libertad. Considerando un solo modo de la viga y un solo par de electrodos, las ecuaciones anteriores (ecuación (2.48) y (2.49)) se reducen a ecuaciones escalares que permiten la optimización de energía de la viga.

La ecuación (2.48) es escrita en una forma alternativa usando las definiciones de la primera frecuencia de resonancia $\omega_1 = \sqrt{K/M}$, y el coeficiente de amortiguamiento $\zeta_m = C/2M\omega_1$. Note que ya que solo el primer modo de vibración ($\phi_{r,1}$) es considerado, el sistema solo tendrá una sola frecuencia natural. Para una estructura piezoeléctrica, la frecuencia natural corresponderá a cualquier frecuencia en corto circuito o circuito abierto, dependiendo de la carga eléctrica. La carga puede ser relacionada con el voltaje por medio de $v = \frac{dq}{dt} R_l = iR_l$.

$$\ddot{r} + 2\zeta_m\omega_1\dot{r} + \omega_1^2 r - \frac{\theta}{Mv} = -\frac{B_f\ddot{w}_B}{M} \quad (2.50)$$

$$\theta\dot{r} + C_p\dot{v} + \frac{1}{R_l}v = 0 \quad (2.51)$$

Los parámetros adimensionales $r = \omega_1 R_l C_p$, $\kappa^2 = \theta^2 / KC_p$ y $\Omega = \omega / \omega_1$ son usados, donde κ^2 es el coeficiente de acoplamiento electromecánico estructura/sistema contra $k_{33}^2 = d_{33}^2 / s_{33}^E \epsilon_{33}^T$ o

$k_e^2 = e_{33}^2/c_{33}^E \varepsilon_{33}^S$ que son el coeficiente de acoplamiento del material piezoeléctrico. Con lo anterior se simplifican las ecuaciones (2.18), (2.19) y (2.20) que representan el desplazamiento relativo de la viga con respecto la base, el voltaje obtenido del recolector piezoeléctrico, y la potencia eléctrica del recolector piezoeléctrico, respectivamente. Las ecuaciones se normalizaron con respecto a la fuerza de excitación dejando las ecuaciones en función de la frecuencia, estas ecuaciones son conocidas como funciones de respuesta a la frecuencia (FRF, por sus siglas en inglés).

$$\left| \frac{w}{B_f \ddot{w}_B} \right| = \frac{\phi_1}{K} \frac{\sqrt{1 + (r\Omega)^2}}{\sqrt{[1 - (1 + 2\zeta_m r)\Omega^2]^2 + [(1 + \kappa^2)r\Omega + 2\zeta_m \Omega - r\Omega^3]^2}} \quad (2.52)$$

$$\left| \frac{v}{B_f \ddot{w}_B} \right| = \frac{1}{|\theta|} \frac{r\kappa^2 \Omega}{\sqrt{[1 - (1 + 2\zeta_m r)\Omega^2]^2 + [(1 + \kappa^2)r\Omega + 2\zeta_m \Omega - r\Omega^3]^2}} \quad (2.53)$$

$$\left| \frac{P_{out}}{(B_f \ddot{w}_B)^2} \right| = \frac{\omega_1}{K} \frac{r\kappa^2 \Omega^2}{[1 - (1 + 2\zeta_m r)\Omega^2]^2 + [(1 + \kappa^2)r\Omega + 2\zeta_m \Omega - r\Omega^3]^2} \quad (2.54)$$

Dado que las frecuencias objetivo que se investigan son por lo regular son muy bajas para los recolectores de energía piezoeléctricos, y es necesario agregar una masa en el extremo libre de la viga en cantiléver. Los modos de forma y las frecuencias naturales para una viga en cantiléver con un extremo fijo y otro libre con una masa en la punta, se encuentran en el ANEXO1.

Al incluir la masa en el extremo libre, la masa de la viga \mathbf{M} , aumenta al igual que el vector fuerza \mathbf{B}_f . La masa efectiva de la estructura es obtenida por las ecuaciones de movimiento de Lagrange, ecuación (2.55). La ecuación (2.55) reemplaza a la ecuación (2.41) cuando la masa extra es agregada a la estructura en cantiléver.

$$\mathbf{M} = \int_{V_s} \phi_r^t \rho_s \phi_r dV_s + \int_{V_p} \phi_r^t \rho_p \phi_r dV_p + M_0 (\phi_r(L))^t \phi_r(L) + 2S_0 (\phi_r(L))^t \phi_r'(L) + I_0 (\phi_r'(L))^t \phi_r'(L) \quad (2.55)$$

El trabajo externo necesita ser reevaluado para incluir la carga inercial debida a la masa adjunta. En la ecuación (2.47) el vector de fuerza B_f fue definido por la fuerza inercial causada por la excitación de la base, y se asumió la sección transversal como uniforme en la dirección axial. Ahora el dispositivo cuenta con dos distintas secciones uniformes, la viga y la masa adjunta. Ambas secciones contribuyen a la carga inercial del dispositivo. El desplazamiento de la masa es calculada en términos del desplazamiento y rotación de la punta de la viga. La definición de la función de fuerza se extiende para tener en cuenta la masa adjunta mediante la inclusión de dos términos adicionales en el vector de fuerza (últimas dos integrales de la ecuación (2.56)), y reemplaza a la ecuación (2.47) cuando se utiliza una masa en la punta.

$$\mathbf{B}_f = m \int_0^L (\phi_r(x_a))^t dx_a + m_0 (\phi_r(L))^t \int_L^{L+L_0} dx_a + m_0 (\phi_r'(L))^t \int_L^{L+L_0} x_a dx_a \quad (2.56)$$

De misma forma que con el modelo 1D, se analizará el sistema en corto circuito y circuito abierto. Al derivar la ecuación (2.54) con respecto al parámetro dimensional r se obtiene:

$$r_{opt}^2 = \frac{\Omega^4 + (4\zeta_m^2 - 2)\Omega^2 + 1}{\Omega^6 + (4\zeta_m^2 - 2[1 + \kappa^2])\Omega^4 + [1 + \kappa^2]^2\Omega^2} \quad (2.57)$$

Dado que el elemento piezoeléctrico tiene cierta rigidez tanto para un circuito abierto así como para corto circuito, habrá dos frecuencias óptimas de operación que deben ser consideradas. Para la rigidez en corto circuito $R_l \rightarrow 0$, sustituyendo la resistencia en el parámetro adimensional en la ecuación (2.57) y despejando la frecuencia, se obtiene la frecuencia en corto circuito la cual denotaremos con un subíndice sc. La cual anteriormente se había definido como frecuencia de resonancia. Para el análisis de circuito abierto se realizará el mismo procedimiento pero con $R_l \rightarrow \infty$, obteniendo las frecuencias en corto circuito y circuito abierto.

$$\Omega_{sc} = 1 \quad \Omega_{oc} = \sqrt{1 + \kappa^2} \quad (2.58)$$

Nótese que $\Omega_{oc} > \Omega_{sc}$. Usando estas frecuencias, es posible obtener la resistencia óptima con la ecuación (2.57). La resistencia óptima en resonancia (Ω_{sc}) es determinada al sustituir el valor de $\Omega_{sc} = 1$ en la ecuación (2.57).

$$r_{opt,oc}^2 = \frac{4\zeta_m^2}{4\zeta_m^2 + \kappa^4} \quad (2.59)$$

Usando la relación del parámetro adimensional $r = \omega_N R_l C_p$, la resistencia equivalente óptima será

$$R_{opt,sc} = \frac{2\zeta_m}{2\zeta_m + \kappa^2} \frac{1}{\omega_N C_p} \quad (2.60)$$

Haciendo el mismo procedimiento para la frecuencia en corto circuito Ω_{oc}

$$r_{opt,oc} = \frac{\kappa^2}{2\zeta_m(1 + \kappa^2)} \quad (2.61)$$

Por lo que la resistencia equivalente optima en circuito abierto será

$$R_{opt,oc} = \frac{\kappa^2}{2\zeta_m(1 + \kappa^2)} \frac{1}{\omega_N C_p} \quad (2.62)$$

Comparando con el resultado en el modelo de 1D, se puede ver cierta semejanza en los resultados, con la diferencia del módulo de acoplamiento κ .

Para verificar las ecuaciones se decidió comparar el resultado obtenido con el trabajo experimental de Sodano *et al* [33]. El dispositivo es una viga bimorfa en cantiléver como se muestra en la Figura 2.7, donde las láminas piezocerámicas están polarizadas en dirección contraria y conectadas en serie (tipos de conexiones, ver ANEXO 4). Los datos del problema se encuentran en la Tabla 2.2.

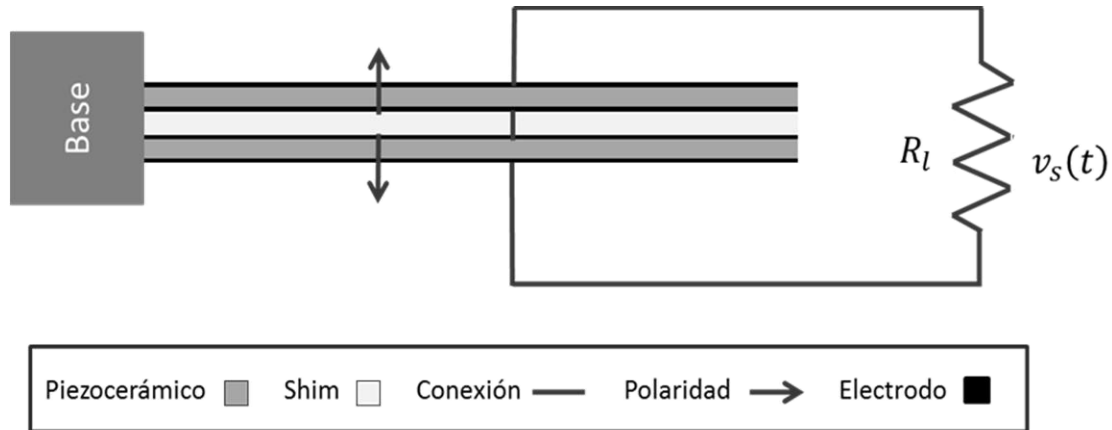


Figura 2.7 Viga bimorfa excitada desde la base sin masa adjunta en el extremo libre.

Para dispositivos que no cuentan con una masa adjunta en la punta solo es necesario hacer cero el término de la masa M_0 .

Tabla 2.2 Dimensiones y propiedades del material del dispositivo resuelto por Sodano *et al* [33].

Propiedad	Valor
Largo del dispositivo, L (mm)	92.6
Ancho de viga, b (mm)	25.4
Espesor del piezocerámico t_p (μm)	254
Espesor del shim t_s (μm)	100
Permitividad ϵ^T (F/m)	1800
Constante de acoplamiento piezoeléctrico e_{31} (C/m^2)	-11.3
Densidad del piezocerámico ρ_p (Kg/m^3)	7700
Densidad del shim ρ_s (Kg/m^3)	5461
Elasticidad del piezocerámico c_{33}^E (GPa)	63
Elasticidad shim c_s (GPa)	2.5

Resolviendo el problema propuesto con los datos de la Tabla 2.2, donde la resistencia de carga óptima para corto circuito es 3177.8 ohm y para circuito abierto 1238100 ohm, la potencia (ecuación (2.54)) contra la frecuencia de trabajo ω es graficada en la Figura 2.8. Los dos picos que se muestran en la Figura, en color azul y morado, corresponden a la frecuencia en corto circuito y circuito abierto respectivamente, los cuales se consiguen variando la resistencia de carga.

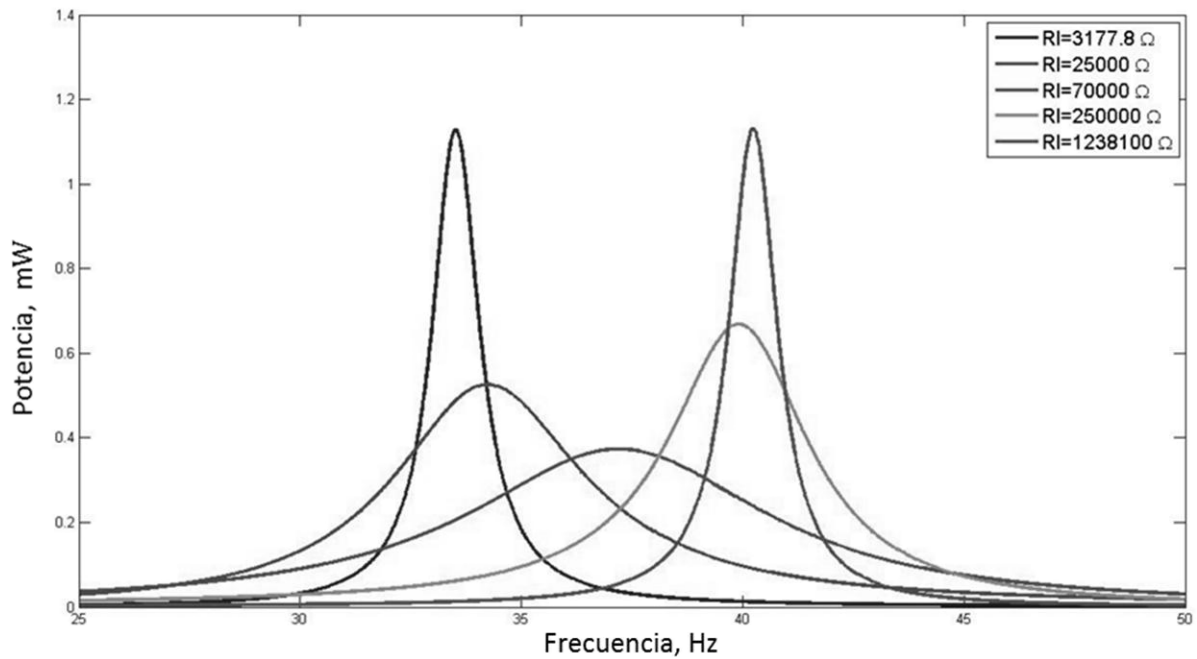


Figura 2.8 Potencia contra frecuencia de trabajo, variando la resistencia de carga.

En la Figura 2.8 se puede ver que la potencia incrementa conforme la frecuencia de trabajo se acerca a la frecuencia de resonancia y la potencia vuelve a incrementa a un segundo máximo, la cual es correspondiente a la frecuencia en circuito abierto. La potencia eléctrica predicha es igual en estos dos picos, el voltaje y la corriente difieren, como se había visto en el modelo 1D.

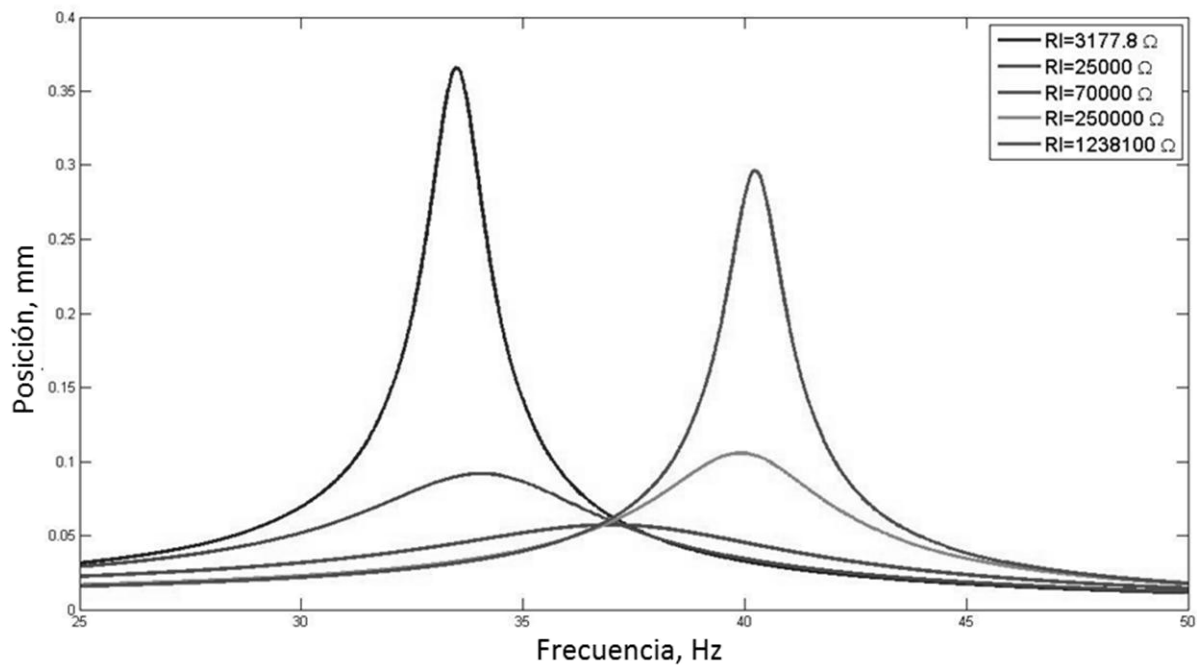


Figura 2.9 Posición contra frecuencia de trabajo, variando la resistencia de carga.

El desplazamiento relativo de la punta se muestra en la Figura 2.9. A diferencia de la potencia eléctrica, el desplazamiento es mayor en la frecuencia de corto circuito (frecuencia de resonancia) que en la de circuito abierto. El voltaje es graficado contra la frecuencia de trabajo en la Figura 2.10. Se puede ver que el voltaje se incrementa como uno se va incrementando la resistencia de carga.

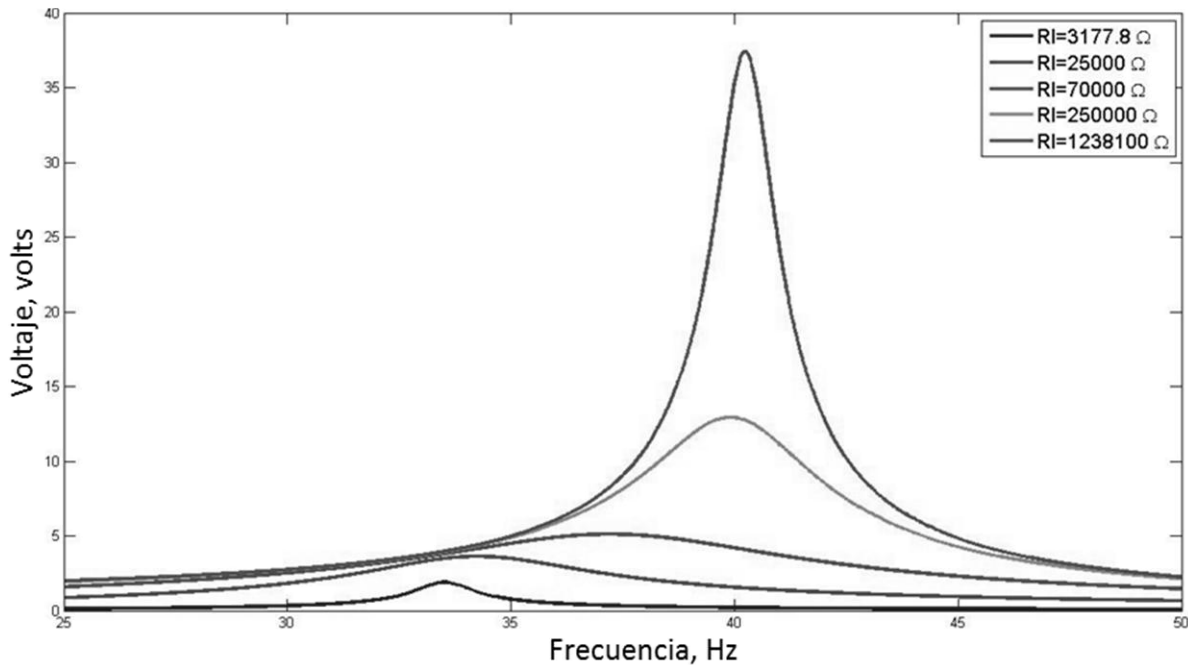


Figura 2.10 Voltaje contra frecuencia de trabajo, variando la resistencia de carga.

Los resultados obtenidos arriba fueron comparados con los resultados experimentales de Sodano *et al* [33]. Las mediciones publicadas se especifican en varias frecuencias y a varios valores de resistencia, por lo que se aprovechó la gráfica para poder comparar los diferentes valores predichos. Al comparar los diferentes valores nos encontramos que el error varía entre 0.2 y 5.4%, el error se minimiza al ir acercándose a las frecuencias de corto circuito y circuito abierto.

2.3. Modelado electromecánico con parámetros distribuidos para un recolector de energía piezoeléctrico en cantiléver

2.3.1. Fundamentos del modelado electromecánico acoplado con parámetros distribuidos

La configuración de la viga en cantiléver bimorfa simétrica mostrada en la Figura 2.11 es modelada con base en la teoría de vigas de Euler-Bernoulli. Esto dado que los recolectores de energía son diseñados y manufacturados con vigas muy delgadas, la mayoría de los recolectores bimorfos comercialmente disponibles son también estructuras delgadas.

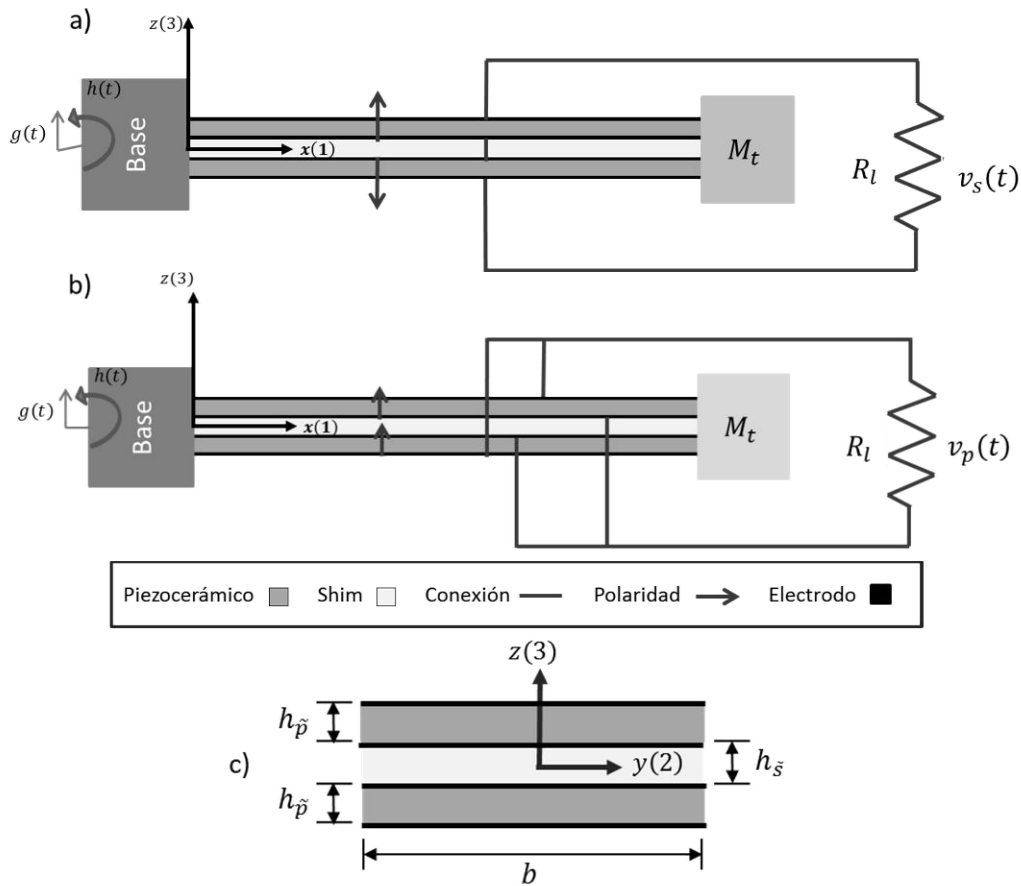


Figura 2.11 Configuración de un recolector de energía piezoeléctrico bimorfo, a) conectado en serie, b) conectado en paralelo, c) sección transversal.

En la Figura 2.11 las coordenadas globales x, y y z , coinciden respectivamente con las direcciones 1, 2 y 3 del dispositivo. Ver ANEXO 4, el cual ilustra la reacción del campo eléctrico y la conexión de las láminas piezocerámicas.

Para modelar el recolector de energía se tomaron en cuenta ciertas suposiciones tales como que las deformaciones son pequeñas y que la estructura compuesta presenta un comportamiento lineal del material. Se asume también la homogeneidad del piezocerámico y que las capas de la estructura están perfectamente unidas entre ellas. Además, los electrodos que cubren la cara superior de las láminas piezocerámicas son asumidas muy pequeñas en comparación de todo el espesor del recolector de energía, por lo que se considera que su contribución a la dimensión del espesor es despreciable (el espesor negro mostrado en la Figura 2.11).

Además el campo eléctrico instantáneo inducido por las láminas piezocerámicas es asumido uniforme a lo largo de la viga. Para modelar la parte eléctrica del sistema se incluye la resistencia de carga (denotada como R_l en la Figura 2.11) junto a la capacitancia interna (o inherente) de las láminas piezocerámicas (es una práctica común en el modelado de recolectores de energía por vibraciones) [16].

De la literatura de sensado estático y actuación se sabe que dependiendo del voltaje o de los requerimientos actuales, las láminas piezocerámicas de una viga bimorfa simétrica pueden ser combinadas en serie o en paralelo, (Wang *et al* [35]). Esta práctica común para problemas de sensado estático y actuación es válida para problemas dinámicos de recolectores de energía piezoeléctricos. (Ver Figura 2.11 a, b).

En la Figura 2.11a las láminas piezocerámicas tienen la polaridad opuesta (dirección del espesor z), lo que representa una conexión en serie de las láminas piezocerámicas. La Figura 2.11b representa la conexión en paralelo de las láminas piezocerámicas, dado que estas cuentan con la polaridad en la misma dirección.

La configuración en serie produce un voltaje de salida mayor, mientras que en la conexión en paralelo produce una salida de corriente mayor en condiciones óptimas.

2.3.1.1. Ecuación mecánica acoplada y análisis modal de una viga bimorfa en cantiléver

Tal como se comentó anteriormente, el término acoplamiento hacia atrás “*backward coupling*” representa los efectos eléctricos inducidos en la estructura del recolector de energía debido al efecto piezoeléctrico inverso (la retroalimentación enviada del dominio eléctrico al dominio mecánico debido a la energía generada). Por lo tanto el término acoplamiento hacia adelante “*forward coupling*” es el término en la ecuación del dominio eléctrico debido al efecto piezoeléctrico directo (retroalimentación del dominio mecánico al eléctrico).

El efecto del término de acoplamiento backward coupling en la ecuación gobernante (ecuación (2.73) y (2.74)) es diferente al conectar las láminas piezocerámicas en serie o en paralelo, lo cual afecta a la respuesta vibratoria de la viga en cantiléver. A continuación se presentarán las anteriores dos configuraciones serie y paralelo y el análisis modal analítico.

El movimiento de la base para cada viga sea en serie o paralelo en la Figura 2.11 a y b respectivamente, se representa por el desplazamiento transversal $g(t)$ en la dirección transversal y con un pequeño desplazamiento rotacional $h(t)$. Por lo tanto el desplazamiento efectivo de la base $\omega_b(x, t)$ en la dirección transversal puede ser escrito como:

$$\omega_b(x, t) = g(t) + xh(t) \quad (2.63)$$

La ecuación diferencial parcial gobernante de fuerzas (vibratorias) de una viga en cantiléver uniforme bimorfa (con masa adjunta) bajo excitación de la base se muestra a continuación, donde los cálculos para la obtención de la ecuación se encuentran en el Anexo 5.

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} + c_s I \frac{\partial^5 w_{rel}(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial w_{rel}(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial t^2} \\
& = -[m + M_t \delta(x - L)] \frac{\partial^2 w_b(x, t)}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Donde $w_{rel}(x, t)$ es el desplazamiento transversal relativo de la viga con respecto a la base, x es la posición, t el tiempo, c_a es el coeficiente de amortiguamiento del aire viscoso, c_s coeficiente de amortiguamiento de velocidad de deformación (aparece como termino efectivo $c_s I$ para toda la estructura compuesta), m es la masa por unidad de longitud de la viga, M_t es la masa adjunta, $\delta(x)$ es la función de Dirac y $M(x, t)$ es momento de flexión interna (excluyendo el efecto de amortiguamiento de velocidad de deformación). El efecto del amortiguamiento de velocidad de deformación es un momento de flexión interna el cual en la ecuación (2.64) se escribe aparte del término de momento de flexión sin amortiguar $M(x, t)$.

En las vigas mostradas en la Figura 2.11 se asume que los amortiguamientos discutidos anteriormente son proporcionales, por lo que para una conexión en serie o en paralelo, se tendrá un sistema de modo normal [36]. Por lo tanto las eigenfunciones del problema sin amortiguar pueden ser usadas para el análisis modal. En lugar de definir los coeficientes de amortiguamiento en una ecuación física de movimiento, uno puede considerar las ecuaciones sin amortiguamiento (haciendo $c_s I = c_a = 0$ en la ecuación (2.64)) e introducir el amortiguamiento modal en la ecuación de movimiento en coordenadas modales como se realiza en las estructuras dinámicas.

El término de momento de flexión interno en la ecuación (2.64) corresponde al campo de esfuerzo axial sobre la sección transversal:

$$M(x, t) = b \left(\int_{-h_{\tilde{p}}-h_{\tilde{s}}/2}^{-h_{\tilde{s}}/2} T_1^{\tilde{p}} z dz + \int_{-h_{\tilde{s}}/2}^{h_{\tilde{s}}/2} T_1^{\tilde{s}} z dz + \int_{h_{\tilde{s}}/2}^{h_{\tilde{p}}+h_{\tilde{s}}/2} T_1^{\tilde{p}} z dz \right) \tag{2.65}$$

Donde b es el ancho de la viga, $h_{\tilde{p}}$ es el espesor de cada lámina de piezoeléctrico y $h_{\tilde{s}}$ es el espesor de la lámina de soporte, la cual identificaremos con el nombre de shim, ver Figura 2.11c. $T_1^{\tilde{p}}$ y $T_1^{\tilde{s}}$ son las componentes de esfuerzo (en la dirección x) en el piezocerámico y la lámina de soporte, respectivamente, las cuales son dados por las siguientes relaciones constitutivas. La primera es la ecuación constitutiva del shim (ley de Hooke), y la segunda es la ecuación constitutiva de los piezoeléctricos con la forma “carga-esfuerzo”:

$$T_1^{\tilde{s}} = Y_{\tilde{s}} S_1^{\tilde{s}}, \quad T_1^{\tilde{p}} = \bar{c}_{11}^E S_1^{\tilde{p}} - \bar{e}_{31} E_3 \tag{2.66}$$

Donde $Y_{\tilde{s}}$ es el módulo de elasticidad del shim, \bar{c}_{11}^E es el módulo de elasticidad del piezoeléctrico en campo eléctrico constante, \bar{e}_{31} es la constante de acoplamiento piezoeléctrico por esfuerzo y E_3 es la componente del campo eléctrico en dirección 3 (dirección z). Los subíndices y superíndices \tilde{p} y \tilde{s} son para las láminas piezocerámicas y del shim respectivamente. Las componentes de la deformación axial en el piezocerámico y en el shim son $S_1^{\tilde{p}}$ y $S_1^{\tilde{s}}$ respectivamente, y son por flexión solamente.

Basándose en la suposiciones de esfuerzo plano para la viga transversal piezocerámica delgada isotrópica (donde el eje z es el eje de simetría de isotropía transversal), el módulo de elasticidad del piezocerámico se puede expresar como $\bar{c}_{11}^E = 1/s_{11}^E$, donde s_{11}^E (elastic compliance) es la flexibilidad elástica en campo eléctrico constante (la deformación producida en un piezoelectrico por unidad de esfuerzo aplicado) y \bar{e}_{31} puede ser expresada en función de la constante de carga del piezoelectrico d_{31} (con unidades de C/N) siendo una de las constantes más comunes en los piezocerámicos, $\bar{e}_{31} = d_{31}/s_{11}^E$ (unidades de C/m²).

Las componentes de la deformación axial en el piezocerámico y en el shim son $S_1^{\bar{p}}$ y $S_1^{\bar{s}}$ respectivamente, y son por flexión solamente. Las deformaciones axiales $S_1^{\bar{p}}$ y $S_1^{\bar{s}}$ en un cierto nivel (z) desde el eje neutro de la viga compuesta simétrica (piezocerámicos y shim) son simplemente proporcionales a la curvatura de la viga en esa posición (x) como sigue:

$$S_1(x, z, t) = -z \frac{\partial^2 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.67)$$

La componente del campo eléctrico E_3 debe ser expresada en términos del voltaje para cada configuración bimorfa (Figura 2.11 a y b). En este punto es donde las ecuaciones resultantes difieren de conectar las láminas piezocerámicas en serie y paralelo. Desde que se asume que las láminas son idénticas, el voltaje a través de los electrodos de cada lamina piezocerámico es $v_s/2$ en el caso de estar conectado en serie (Figura 2.11a). Para el caso en paralelo (Figura 2.11b), el voltaje a través de cada electrodo es $v_p(t)$.

La constante \bar{e}_{31} tiene signo opuesto para las láminas piezocerámicas superior e inferior en una conexión en serie (debido a la polaridad opuesta) de manera que los campos eléctricos instantáneos están en la misma dirección (i.e, $E_3(t) = -v_s(t)/2h_{\bar{p}}$ en cada lámina), ver ANEXO 4. Para la configuración con la conexión en paralelo, dado que \bar{e}_{31} tiene el mismo signo en las láminas piezocerámicas superior e inferior, los campos eléctricos instantáneos están en direcciones opuestas, (i.e, $E_3(t) = -v_p(t)/h_{\bar{p}}$ en la lámina superior y $E_3(t) = v_p(t)/h_{\bar{p}}$ en la lámina inferior).

Otro punto importante es que para ambas configuraciones (conexión en serie o paralelo), el término de acoplamiento proviene de la ecuación (2.65) y es una función del tiempo solamente. Por lo tanto antes de sustituir la ecuación (2.65) en la ecuación (2.64), los términos eléctricos deben ser multiplicados por $[H(x) - H(x - L)]$ (para que los términos no se eliminen después de la diferenciación espacial), donde $H(x)$ es la función de Heaviside (función discontinua cuyo valor es 0 para cualquier argumento negativo, y 1 para cualquier argumento positivo). Dado que el voltaje de salida en serie y en paralelo son diferentes, el efecto del acoplamiento piezoelectrico en la ecuación parcial diferencial gobernante de fuerzas (ecuación (2.64)) se espera diferente. Por lo que la respuesta mecánica para conexiones en serie y paralelo se denotaran como $w_{rel}^s(x, t)$ y $w_{rel}^p(x, t)$, respectivamente.

Los momentos de flexión internos obtenidos de la ecuación (2.65), para la configuración en serie y paralelo resultan en:

$$M^s(x, t) = -YI \frac{\partial^2 w_{rel}^s(x, t)}{\partial x^2} + \vartheta_s v_s(t) [H(x) - H(x - L)] \quad (2.68)$$

$$M^p(x, t) = -YI \frac{\partial^2 w_{rel}^p(x, t)}{\partial x^2} + \vartheta_p v_p(t) [H(x) - H(x - L)] \quad (2.69)$$

Donde los coeficientes de acoplamiento “backward” (ϑ_s y ϑ_p) para las conexiones en serie y paralelo pueden ser expresadas como (unidades de constante de Coulomb que es igual a Nm/V):

$$\vartheta_s = \frac{\bar{e}_{31} b}{2h_{\bar{p}}} \left[\left(h_{\bar{p}} + \frac{h_{\bar{s}}}{2} \right)^2 - \frac{h_{\bar{s}}^2}{4} \right] \quad (2.70)$$

$$\vartheta_p = 2\vartheta_s = \frac{\bar{e}_{31} b}{h_{\bar{p}}} \left[\left(h_{\bar{p}} + \frac{h_{\bar{s}}}{2} \right)^2 - \frac{h_{\bar{s}}^2}{4} \right] \quad (2.71)$$

El término de rigidez flexional YI de la sección transversal compuesta para una condición de campo eléctrico constante es:

$$YI = \frac{2b}{3} \left\{ Y_{\bar{s}} \frac{h_{\bar{s}}^3}{8} + \bar{c}_{11}^E \left[\left(h_{\bar{p}} + \frac{h_{\bar{s}}}{2} \right)^3 - \frac{h_{\bar{s}}^3}{8} \right] \right\} \quad (2.72)$$

De la ecuación parcial diferencial gobernante de fuerzas (ecuación (2.64)) la ecuación de la viga acoplada para el caso de una conexión en serie resultaría en lo siguiente (nótese que el término del momento de flexión cambió y se agregó el término del coeficiente de acoplamiento):

$$YI \frac{\partial^4 w_{rel}^s(x, t)}{\partial x^4} + c_s I \frac{\partial^5 w_{rel}^s(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial w_{rel}^s(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w_{rel}^s(x, t)}{\partial t^2} - \vartheta_s v_s(t) \left[\frac{d\delta(x)}{dx} - \frac{d\delta(x - L)}{dx} \right] = -[m - M_t \delta(x - L)] \frac{\partial^2 w_b(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.73)$$

De manera similar para la conexión en paralelo se obtiene.

$$YI \frac{\partial^4 w_{rel}^p(x, t)}{\partial x^4} + c_s I \frac{\partial^5 w_{rel}^p(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial w_{rel}^p(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w_{rel}^p(x, t)}{\partial t^2} - \vartheta_p v_p(t) \left[\frac{d\delta(x)}{dx} - \frac{d\delta(x - L)}{dx} \right] = -[m - M_t \delta(x - L)] \frac{\partial^2 w_b(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.74)$$

Nótese que la n th derivada de la función Delta de Dirac satisface, (es para decir que en cero es uno)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{(n)}\delta(x - x_0)}{dx^{(n)}} \gamma(x) dx = (-1)^n \frac{d^{(n)}\gamma(x)}{dx^{(n)}} \Big|_{x=x_0} \quad (2.75)$$

Donde $\gamma(x)$ es función de prueba sin problemas. Además la masa por unidad de longitud se expresa como:

$$m = b(\rho_s h_s + 2\rho_p h_p) \quad (2.76)$$

Donde ρ_s y ρ_p son las densidades del shim y el piezocerámico, respectivamente.

Basándose en la suposición de amortiguamiento proporcional (o amortiguamiento modal), la respuesta relativa de la viga bimorfa con respecto a la base puede ser representadas como una serie de las eigenfunciones [16]:

$$w_{rel}^s(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \eta_r^s(t), \quad w_{rel}^p(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \eta_r^p(t) \quad (2.77)$$

Donde $\phi_r(x)$ son la eigenfunciones normalizadas de la masa del modo de vibración r th, y $\eta_r^s(t)$ y $\eta_r^p(t)$ son las expresiones de las coordenadas mecánicas modales para una conexión en serie y en paralelo respectivamente. Las eigenfunciones denotadas por $\phi_r(x)$ son las eigenfunciones normalizadas de la masa del problema de vibración libre (sin amortiguar) correspondiente, ver ANEXO 1.

$$\phi_r = A_r \left[\cos \frac{\lambda_r}{L} x - \cosh \frac{\lambda_r}{L} x + \zeta_r \left(\sin \frac{\lambda_r}{L} x - \sinh \frac{\lambda_r}{L} x \right) \right] \quad (2.78)$$

Donde ζ_r es obtenido de

$$\zeta_r = \frac{\sin \lambda - \sinh \lambda + \lambda_r \frac{M_t}{mL} (\cos \lambda - \cosh \lambda)}{\cos \lambda + \cosh \lambda - \lambda_r \frac{M_t}{mL} (\sin \lambda + \sinh \lambda)} \quad (2.79)$$

Las constantes de amplitud modal A_r deben ser obtenidas para cada eigenfunción satisfaciéndose con las siguientes condiciones de ortogonalidad, ver ANEXO 2:

$$\int_0^L \phi_s m \phi_r(x) + \phi_s(L) M_t \phi_r(L) + \left[\frac{d \phi_s}{dx} I_t \frac{d \phi_r}{dx} \right]_{x=L} = \delta_{rs}$$

$$\int_0^L \phi_s(x) EI \frac{d^4 \phi_r(x)}{dx^4} - \left[\frac{d \phi_s}{dx} \omega_r^2 I_t \frac{d \phi_r}{dx} \right]_{x=L} + \int_0^L \frac{d^2 \phi_s(x)}{dx^2} EI \frac{d^2 \phi_r(x)}{dx^2} = \omega_r^2 \delta_{rs} \quad (2.80)$$

Donde I_t es el momento de inercia de la masa adjunta M_t , y δ_{rs} es la Delta de Kronecker. La frecuencia natural sin amortiguar del modo de vibración r th en condiciones de corto circuito (i.e., $R_l \rightarrow 0$) está dado por

$$\omega_r = \lambda_r^2 \sqrt{\frac{YI}{mL^4}} \quad (2.81)$$

Donde los eigenvalores del sistema (λ_r para el modo r) son obtenidas de

$$1 + \cos \lambda + \cosh \lambda + \lambda \frac{M_t}{mL} (\cos \lambda \sinh \lambda - \sin \lambda \cosh \lambda) - \frac{\lambda^3 I_t}{mL^3} (\cosh \lambda \sin \lambda + \sinh \lambda \cos \lambda) + \frac{\lambda^4 M_t I_t}{m^2 L^4} (1 - \cos \lambda \cosh \lambda) = 0 \quad (2.82)$$

Cabe mencionar que el siguiente análisis modal estará dado bajo las condiciones de corto circuito, el cual es cuando la resistencia de carga tiende a cero $R_l \rightarrow 0$, de manera que la forma convencional de las eigenfunciones están dadas por la ecuación (2.78) y son obtenidas cuando:

$$\lim_{R_l \rightarrow 0} v_s(t) = 0, \quad \lim_{R_l \rightarrow 0} v_p(t) = 0 \quad (2.83)$$

Los límites se aplican a las ecuaciones (2.73) y (2.74), que corresponden a las ecuaciones gobernantes para conexión en serie o paralelo. Nótese que la condición de corto circuito provoca un campo eléctrico constante ($E_3 \rightarrow 0$ mientras $R_l \rightarrow 0$), de acuerdo con las ecuaciones constitutivas. Para una viga bimorfa dada, la forma de las eigenfunciones $\phi_r(x)$ y su condición de masa normalizada son los mismos independientemente de si los piezocerámicos están conectados en serie o paralelo.

Para valores diferentes de cero en la resistencia de carga, el termino del voltaje en la ecuación mecánica tiende a valores finitos, generando un punto de momento de excitación (*point moment excitations*) en las fronteras del piezocerámico acorde a las ecuación 2.65 y 2.66, obteniendo dos diferentes funciones de respuesta modal para estas ecuaciones como $\eta_r^s(t)$ y $\eta_r^p(t)$ (las cuales se obtendrán del modelado de la parte eléctrica), respectivamente. La retroalimentación de la respuesta del voltaje para una resistencia de carga dada, altera la respuesta mecánica, así como la frecuencia de resonancia del colector de energía.

2.3.1.2. Ecuación del circuito eléctrico de una lámina delgada piezocerámica bajo flexión dinámica

Para derivar la ecuación gobernante del circuito eléctrico de una viga bimorfa y para conexiones en serie o en paralelo de las placas piezocerámicas, se analizará primero una sola lámina bajo vibraciones a flexión. En la Figura 2.12 el electrodo de una sola placa es conectado a la resistencia de carga y la deflexión es exagerada para resaltar la dependencia del radio de curvatura en un punto x (en el eje neutro) con el tiempo t .

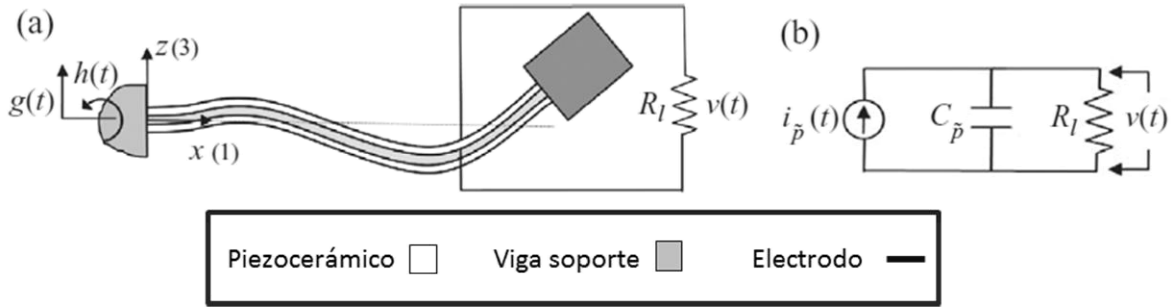


Figura 2.12 a) Viga en cantiléver bimorfa con una placa conectada a la resistencia de carga, y b) el circuito eléctrico correspondiente con la respectiva fuente de corriente independiente [16].

Dado que la única deformación asumida es la deformación axial debido a la flexión, para la configuración del electrodo dado, la representación tensorial de la ecuación constitutiva piezoeléctrica relevante al desplazamiento eléctrico puede ser reducida a la expresión escalar:

$$D_3 = \bar{e}_{31} S_1^{\bar{p}} + \bar{\epsilon}_{33}^S E_3 \quad (2.84)$$

Donde D_3 es la componente del desplazamiento eléctrico y $\bar{\epsilon}_{33}^S$ es la componente de la permitividad a deformación constante con la suposición de esfuerzo plano. Como la admitancia del circuito externo es $1/R_l$, la corriente eléctrica de salida puede obtenerse de la forma integral de la ley de Gauss

$$\frac{d}{dt} \left(\int_A \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dA \right) = \frac{v(t)}{R_l} \quad (2.85)$$

Donde \mathbf{D} es el vector de desplazamiento eléctrico en la lámina del piezocerámico, \mathbf{n} el vector unitario normal a la lámina, y la integral es realizada sobre el área del electrodo A . La única contribución del producto de la integral en la ecuación (2.85) es de D_3 , dado que el electrodo es perpendicular al eje 3. Después de expresar la deformación media de flexión en la lámina piezocerámica en términos de la curvatura, y el campo eléctrico uniforme en términos de la diferencia de potencial eléctrico ($E_3(t) = -v(t)/h_{\bar{p}}$), la ecuación (2.84) puede usarse en la ecuación (2.85) para obtener

$$\frac{\bar{\epsilon}_{33}^S b L}{h_{\bar{p}}} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_l} + \bar{e}_{31} h_{\bar{p}c} b \int_0^L \frac{\partial^3 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2 \partial t} dx = 0 \quad (2.86)$$

Donde b , $h_{\bar{p}}$ y L son el ancho, espesor y largo de la lámina piezocerámica respectivamente, y $h_{\bar{p}c}$ es la distancia entre el eje neutro al centro de cada lámina piezocerámica ($h_{\bar{p}c} = (h_{\bar{p}} + h_{\bar{s}})/2$). Usando la siguiente expansión modal de la respuesta vibratoria relativa

$$w_{rel}(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \eta_r(t) \quad (2.87)$$

La ecuación (2.86) para resulta en:

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{33}^S bL}{h_{\bar{p}}} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_l} + \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r \frac{d\eta_r(t)}{dt} = 0 \quad (2.88)$$

Donde κ_r (término de acoplamiento hacia adelante) es el término de acoplamiento modal en la ecuación del circuito eléctrico:

$$\kappa_r = \bar{\varepsilon}_{31} h_{\bar{p}c} b \int_0^L \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} dx = \bar{\varepsilon}_{31} h_{\bar{p}c} b \left. \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right|_{x=L} \quad (2.89)$$

De acuerdo a la ecuación (2.86), la cual es originada de la ecuación (2.85), la excitación de un circuito RC, el cual es considerado aquí, así como la topología más sofisticada de un circuito recolector de energía es proporcional a la integral de la distribución de la deformación dinámica sobre el área del electrodo [37][38]. Para los modos de vibraciones de una viga en cantiléver que no correspondan al modo de vibración fundamental, la distribución dinámica de la deformación sobre el largo de la viga cambia de signo en los nodos de deformación.

Es sabido de la ecuación (2.67) que la curvatura en un punto es una medida directa de la deformación por flexión. Por lo tanto, para las vibraciones modales de una viga delgada, los nodos de deformación, son los puntos de inflexión de las eigenfunciones y la integral de la ecuación (2.89) es la curvatura de la eigenfunción.

Nótese que en la representación de la Figura 2.12b se considera el dominio eléctrico solamente y la representación electromecánica del sistema acoplado es de hecho transformada debido a la retroalimentación del voltaje el cual entra al dominio eléctrico, por lo que es necesario incorporarlo para obtener la ecuación gobernante del sistema eléctrico.

Los componentes del circuito son, la capacitancia inherente del piezocerámico $C_{\bar{p}}$, la resistencia de carga R_l y la fuente de corriente dependiente $i_{\bar{p}}(t)$. Utilizando la ley de Kirchhoff en el circuito mostrado en la Figura 2.12b se obtiene.

$$C_{\bar{p}} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_l} - i_{\bar{p}}(t) = 0 \quad (2.90)$$

Donde los términos de la capacitancia interna y la fuente de corriente dependiente pueden ser obtenidos de las ecuaciones (2.88) y (2.89), lo cual resulta en

$$C_{\bar{p}} = \frac{\bar{\varepsilon}_{33}^S bL}{h_{\bar{p}}}, \quad i_{\bar{p}}(t) = - \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r \frac{d\eta_r(t)}{dt} \quad (2.91)$$

2.3.2. Conexión en serie de las láminas piezocerámicas

2.3.2.1. Ecuación de la viga acoplada en coordenadas modales

Sustituyendo la ecuación (2.77) en la ecuación (2.73) y aplicando las condiciones de ortogonalidad de las eigenfunciones para el problema sin amortiguar, la ecuación mecánica de movimiento en coordenadas modales se puede obtener como

$$\frac{d^2\eta_r^S(t)}{dt^2} + 2\zeta_r\omega_r \frac{d\eta_r^S(t)}{dt} + \omega_r^2\eta_r^S(t) - \chi_r^S v_s(t) = f_r(t) \quad (2.92)$$

Donde el término de acoplamiento electromecánico modal es

$$\chi_r^S = \vartheta_s \left. \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right|_{x=L} \quad (2.93)$$

La función de fuerza modal puede ser expresada como

$$f_r(t) = -m \left(\frac{d^2g(t)}{dt^2} \int_0^L \phi_r(x) dx + \frac{d^2h(t)}{dt^2} \int_0^L x\phi_r(x) dx \right) - M_t \phi_r(L) \left(\frac{d^2g(t)}{dt^2} + L \frac{d^2h(t)}{dt^2} \right) \quad (2.94)$$

En la ecuación (2.92), ζ_r es el coeficiente de amortiguamiento mecánico el cual incluye los efectos del amortiguamiento por el material y el aire.

2.3.2.2. Ecuación del circuito eléctrico acoplado en serie

Cada una de las láminas piezoeléctricas se puede representar como una fuente de corriente dependiente con su capacitancia interna. En la Figura 2.13 se muestra la conexión en serie de las láminas piezocerámicas mostradas en la Figura 2.11a.

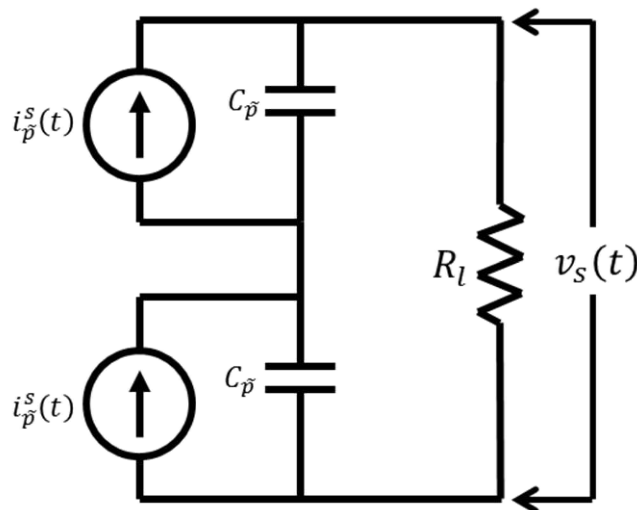


Figura 2.13 Representación del circuito eléctrico con conexión en serie de las láminas piezoeléctricas con dos correspondientes fuentes de corriente dependientes.

La ley de Kirchhoff puede ser aplicada en el circuito de la Figura 2.13 de lo cual se puede obtener

$$\frac{C_{\bar{p}}}{2} \frac{dv_s(t)}{dt} + \frac{v_s(t)}{R_l} - i_{\bar{p}}^S(t) = 0 \quad (2.95)$$

Donde la capacitancia interna y la fuente de corriente dependiente, para cada lámina es

$$C_{\bar{p}} = \frac{\bar{\epsilon}_{33}^S bL}{h_{\bar{p}}} , \quad i_{\bar{p}}^S(t) = - \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r \frac{d\eta_r^S(t)}{dt} \quad (2.96)$$

El término de acoplamiento electromecánico modal es entonces

$$\kappa_r = \bar{\epsilon}_{31} h_{\bar{p}c} b \int_0^L \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} dx = \frac{\bar{\epsilon}_{31} (h_{\bar{p}} + h_{\bar{s}}) b}{2} \left. \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right|_{x=L} \quad (2.97)$$

Donde $h_{\bar{p}c}$ (distancia entre el eje neutro y el centro de cada lámina piezoeléctrica) es expresada en términos del espesor piezocerámico y del shim.

2.3.2.3. Respuesta del voltaje y las vibraciones en estado estable

Se denomina estado estable cuando la respuesta de la función no varía con el tiempo. Las ecuaciones (2.92) y (2.95) constituyen las ecuaciones acopladas para obtener la respuesta mecánica modal $\eta_r^S(t)$ de la viga bimorfa y la respuesta del voltaje a través de la resistencia de carga. Considerando que las componentes de rotación y traslación de la base tienen la forma de $g(t) = W_0 e^{j\omega t}$ y $h(t) = \theta_0 e^{j\omega t}$, donde W_0 y θ_0 son la amplitud de la traslación y de la pequeña rotación respectivamente, ω es la frecuencia de excitación, y j es la unidad del número imaginario, entonces la fuerza modal de la ecuación (2.94) puede ser expresada como $f_r(t) = F_r e^{j\omega t}$ donde la amplitud F_r es (Ver, Anexo 3)

$$F_r = \omega^2 \left[m \left(W_0 \int_0^L \phi_r(x) dx + \theta_0 \int_0^L x \phi_r(x) dx \right) + M_t \phi_r(L) (W_0 + L\theta_0) \right] \quad (2.98)$$

Para el movimiento de la base armónica a la frecuencia ω , la respuesta del estado estable modal de la viga y la respuesta del voltaje en estado estable a través de la resistencia de carga son asumidas en la misma frecuencia como $\eta_r^S(t) = H_r^S e^{j\omega t}$ y $v_s(t) = V_s e^{j\omega t}$ (suposición de un sistema lineal) respectivamente, donde H_r^S y V_s son valores complejos. Por lo tanto de la ecuación (2.92) y (2.95) se obtiene las siguientes dos ecuaciones para H_r^S y V_s :

$$(\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega) H_r^S - \chi_r^S V_s = F_r \quad (2.99)$$

$$\left(\frac{1}{R_l} + j\omega \frac{C_{\bar{p}}}{2} \right) V_s + j\omega \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r H_r^S = 0 \quad (2.100)$$

La respuesta mecánica modal compleja H_r^S puede ser extraída de la ecuación (2.99) y se puede sustituir en la ecuación (2.100) para obtener el valor complejo del voltaje V_s . El resultado complejo puede ser usado en $v_s(t) = V_s e^{j\omega t}$ para expresar la respuesta del voltaje en estado estable como

$$v_s(t) = \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{-j\omega\kappa_r F_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega}}{\frac{1}{R_l} + j\omega \frac{C_{\bar{p}}}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega\kappa_r\chi_r^S}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega}} e^{j\omega t} \quad (2.101)$$

Por otro lado el valor complejo del voltaje V_s puede ser sustituido en la ecuación (2.99) para obtener la respuesta mecánica modal en estado estable de la viga bimorfa como

$$\eta_r^S(t) = \left(F_r - \chi_r^S \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega\kappa_r F_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega}}{\frac{1}{R_l} + j\omega \frac{C_{\bar{p}}}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega\kappa_r\chi_r^S}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega}} \right) \frac{e^{j\omega t}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega} \quad (2.102)$$

La respuesta del desplazamiento transversal relativo en cualquier punto x sobre la viga bimorfa puede ser obtenido en las coordenadas físicas al sustituir la ecuación (2.102) en la primera ecuación de la ecuación (2.77):

$$w_{rel}^S(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\left(F_r - \chi_r^S \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega\kappa_r F_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega}}{\frac{1}{R_l} + j\omega \frac{C_{\bar{p}}}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega\kappa_r\chi_r^S}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega}} \right) \frac{\phi_r(x) e^{j\omega t}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega} \right] \quad (2.103)$$

2.3.3. Ecuación del circuito eléctrico acoplado en paralelo

En esta sección se deriva la respuesta en estado estable del voltaje para la conexión en paralelo $v_p(t)$ y la respuesta a la vibración $w_{rel}^p(x, t)$ de la configuración bimorfa mostrada en Figura 2.11 b para un movimiento armónico de la base. Además, la ecuación acoplada de la viga en coordenadas modales y la ecuación del circuito eléctrico son derivados.

2.3.3.1. Ecuación acoplada de la viga en coordenadas modales

Sustituyendo la ecuación (2.77) en la ecuación (2.74), la ecuación parcial diferencial dada por la ecuación (2.74) puede ser reducida a un conjunto infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias en coordenadas modales.

$$\frac{d^2\eta_r^p(t)}{dt^2} + 2\zeta_r\omega_r \frac{d\eta_r^p(t)}{dt} + \omega_r^2\eta_r^p(t) - \chi_r^p v_p(t) = f_r \quad (2.104)$$

Donde el término de acoplamiento electromecánico modal es

$$\chi_r^p = \vartheta_p \left. \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right|_{x=L} \quad (2.105)$$

La función de fuerza mecánica modal f_r puede ser expresada de misma forma como en la ecuación (2.94).

2.3.3.2. Ecuación del circuito eléctrico acoplado

Se había mencionado al inicio en la Sección 2.3.1 que las láminas piezocerámicas de la configuración bimorfa en la Figura 2.11 b están conectadas en paralelo. Dado que cada piezocerámico puede ser representado como una fuente de corriente dependiente en paralelo con una capacitancia interna. La Figura 2.14 representa la conexión en paralelo de los dos piezocerámicos idénticos de la configuración bimorfa mostrada en la Figura 2.11 b.

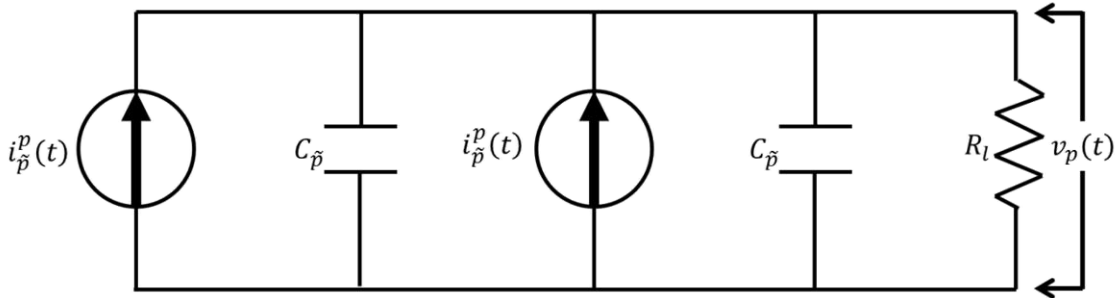


Figura 2.14 Representación del circuito eléctrico, láminas piezocerámicas conectadas en paralelo con dos fuentes de corriente independiente.

Uno puede obtener la ecuación gobernante del circuito eléctrico por medio de la ley de Kirchhoff.

$$C_{\bar{p}} \frac{dv_p(t)}{dt} + \frac{v_p(t)}{2R_l} - i_{\bar{p}}^p(t) = 0 \quad (2.106)$$

Donde los términos de la capacitancia interna y la fuente de corriente dependiente para cada lámina son

$$C_{\bar{p}} = \frac{\bar{\epsilon}_{33}^S bL}{h_{\bar{p}}}, \quad i_{\bar{p}}^p(t) = - \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r \frac{d\eta_r^p(t)}{dt} \quad (2.107)$$

2.3.3.3. Respuesta del voltaje y las vibraciones en estado estable

Se denomina estado estable cuando la respuesta de la función no varía con el tiempo. En orden de resolver para η_r^p y $v_p(t)$ en las ecuaciones (2.104) y (2.106), se realizará el mismo procedimiento que se realizó para la conexión en serie, asumiendo las componentes de la excitación de la base en la Figura 2.11b como $g(t) = W_0 e^{j\omega t}$ y $h(t) = \theta_0 e^{j\omega t}$. Para estas

componentes de movimiento armónico de la misma frecuencia, la fuerza modal es armónica $f_r(t) = F_r e^{j\omega t}$ donde la amplitud F_r esta dada por la ecuación (2.98).

Basándose en la suposición de sistema lineal, la respuesta mecánica modal $\eta_r^p(t)$ y la respuesta del voltaje $v_p(t)$ son asumidas armónicas en la frecuencia de excitación, por lo que $\eta_r^p = H_r^p e^{j\omega t}$ y $v_p(t) = V_p e^{j\omega t}$, donde H_r^p y V_p son valores complejos. Dadas las ecuaciones (2.104) y (2.106) obtenemos las siguientes ecuaciones para H_r^p y V_p :

$$(\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega) H_r^p - \chi_r^p V_p = F_r \quad (2.108)$$

$$\left(\frac{1}{2R_l} + j\omega C_{\bar{p}} \right) V_p + j\omega \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r H_r^p = 0 \quad (2.109)$$

Donde H_r^p y V_p pueden ser obtenidas explícitamente (dos incógnitas, dos ecuaciones, el resto de los términos son datos del problema). Usando el resultado del voltaje complejo en $v_p(t) = V_p e^{j\omega t}$ se obtiene la respuesta del voltaje en estado estable

$$v_p(t) = \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{-j\omega \kappa_r F_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega}}{\frac{1}{2R_l} + j\omega C_{\bar{p}} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega \kappa_r \chi_r^p}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega}} e^{j\omega t} \quad (2.110)$$

Y el valor complejo del voltaje V_p puede ser sustituido en la ecuación (2.108) para obtener la respuesta mecánica modal en estado estable de la viga bimorfa como

$$\eta_r^p(t) = \left(F_r - \chi_r^p \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega \kappa_r F_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega}}{\frac{1}{2R_l} + j\omega C_{\bar{p}} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega \kappa_r \chi_r^p}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega}} \right) \frac{e^{j\omega t}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega} \quad (2.111)$$

La respuesta de la respuesta mecánica modal en estado estable puede ser usada en la ecuación (2.77) para obtener el desplazamiento transversal (relativo a la base) en el punto x sobre la viga.

$$w_{rel}^p(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\left(F_r - \chi_r^p \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega \kappa_r F_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega}}{\frac{1}{2R_l} + j\omega C_{\bar{p}} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega \kappa_r \chi_r^p}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega}} \right) \frac{\phi_r(x) e^{j\omega t}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega} \right] \quad (2.112)$$

Una vez obtenida la respuesta relativa a la vibración con respecto a la base, uno puede obtener el desplazamiento transversal en un punto x .

$$w^p(x, t) = w_b(x, t) + w_{rel}^p(x, t) \quad (2.113)$$

Donde w_b es el desplazamiento de la base y está dada por la ecuación (2.63).

2.3.4. Representación equivalente de conexiones en serie o en paralelo

En esta sección se presentan valores equivalentes (o unificados) de las soluciones analíticas derivadas para las configuraciones en serie y en paralelo. Primero se calcularán los términos equivalentes de acoplamiento electromecánico y de la capacitancia, y después la representación equivalente.

2.3.4.1. Término de acoplamiento electromecánico modal

Del término de acoplamiento hacia atrás “*backward coupling*” para un caso de conexión en serie en ecuación (2.70), se pueden reducir los términos del corchete y utilizando el término $h_{\tilde{p}c}$ para simplificar:

$$\vartheta_s = \frac{\bar{e}_{31}b}{2h_{\tilde{p}}} \left[\left(h_{\tilde{p}} + \frac{h_{\tilde{s}}}{2} \right)^2 - \frac{h_{\tilde{s}}^2}{4} \right] = \frac{\bar{e}_{31}b}{2h_{\tilde{p}}} [(h_{\tilde{p}} + h_{\tilde{s}})h_{\tilde{p}}] = \bar{e}_{31}b \frac{h_{\tilde{p}} + h_{\tilde{s}}}{2} = \bar{e}_{31}bh_{\tilde{p}c} \quad (2.114)$$

Nótese que de la ecuación (2.71), el término de acoplamiento en paralelo será dos veces el término de acoplamiento de la conexión en serie simplificado en la ecuación (2.114):

$$\vartheta_p = 2\vartheta_s = 2\bar{e}_{31}bh_{\tilde{p}c} \quad (2.115)$$

Sustituyendo los valores arriba obtenidos en las ecuaciones (2.93) y (2.105) respectivamente, los términos de acoplamiento modal hacia atrás resultan en:

$$\chi_r^s = \bar{e}_{31}bh_{\tilde{p}c} \left. \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right|_{x=L} \quad (2.116)$$

$$\chi_r^p = 2\bar{e}_{31}bh_{\tilde{p}c} \left. \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right|_{x=L} \quad (2.117)$$

El término de acoplamiento hacia adelante dado por la ecuación (2.97)(2.97)(2.97)(2.97) se vuelve a mostrar a continuación, y se observa es igual a la ecuación (2.116)

$$\kappa_r = \bar{e}_{31}h_{\tilde{p}c}b \left. \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right|_{x=L} \quad (2.118)$$

Es sabido de la ecuación (2.67) que la curvatura en un punto es una medida directa de la deformación por flexión. Por lo tanto, para las vibraciones modales de una viga delgada, los nodos de deformación, son los puntos de inflexión de las eigenfunciones, y la ecuación (2.118) es la curvatura de la eigenfunción. Ya que el término de acoplamiento piezoeléctrico es la carga

producida por una unidad de deformación por unidad de longitud (C/m^2), es por eso que los términos de acoplamiento hacia adelante y hacia atrás son iguales (ecuaciones (2.116)-(2.118)). Se tiene la diferencia de que el término de acoplamiento hacia adelante debe ser multiplicado por la velocidad en la ecuación gobernante eléctrica y el término de acoplamiento hacia atrás debe ser multiplicado por el voltaje en la ecuación gobernante dinámica, ya que son provocados por el efecto piezoeléctrico directo e inverso respectivamente. En la siguiente sección se propone un término de acoplamiento equivalente para una conexión en serie y en paralelo.

2.3.4.2. Capacitancia equivalente para conexiones en serie y paralelo

La ecuación del circuito para una conexión en serie dada por la ecuación (2.90) puede describirse como:

$$C_{\tilde{p}}^{eq,s} \frac{dv_s(t)}{dt} + \frac{v_s(t)}{R_l} + \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r \frac{d\eta_r^s}{dt} = 0 \quad (2.119)$$

Donde la capacitancia equivalente para dos capacitores iguales conectados en serie se expresa como

$$C_{\tilde{p}}^{eq,s} = \frac{C_{\tilde{p}}}{2} = \frac{\bar{\epsilon}_{33}^s bL}{2h_{\tilde{p}}} \quad (2.120)$$

De igual manera, de la ecuación del circuito para una conexión en paralelo dada por la ecuación (2.106) se tiene que:

$$C_{\tilde{p}}^{eq,p} \frac{dv_p(t)}{dt} + \frac{v_p(t)}{R_l} + \sum_{r=1}^{\infty} 2\kappa_r \frac{d\eta_r^p}{dt} = 0 \quad (2.121)$$

Donde la capacitancia equivalente para dos capacitores idénticos ($C_{\tilde{p}}$) conectados en paralelo se expresa como

$$C_{\tilde{p}}^{eq,p} = 2C_{\tilde{p}} = \frac{2\bar{\epsilon}_{33}^s bL}{h_{\tilde{p}}} \quad (2.122)$$

Nótese que la diferencia entre la representación de la ecuación (2.119) y (2.121) es el factor de dos en el término de acoplamiento. En la Tabla 2.3 se muestran los valores de acoplamiento y capacitancia equivalente para una conexión en serie y en paralelo.

Tabla 2.3 Capacitancia y acoplamiento electromecánico modal equivalente para un recolector de energía bimorfo en cantiléver con conexiones en serie y paralelo.

	Serie	Paralelo
$\tilde{\theta}_r$	$\bar{e}_{31}bh_{\bar{p}c} \left. \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right _{x=L}$	$2\bar{e}_{31}bh_{\bar{p}c} \left. \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right _{x=L}$
$C_{\bar{p}}^{eq}$	$\frac{\bar{\epsilon}_{33}^S bL}{2h_{\bar{p}}}$	$\frac{2\bar{\epsilon}_{33}^S bL}{h_{\bar{p}}}$

2.3.5. Función de respuesta a la frecuencia para multi-modos y un solo modo

La fuente de excitación del modelo propuesto es el movimiento transversal de la base y la pequeña rotación que se genera, mientras que las salidas electromecánicas que obtenemos son el voltaje y el desplazamiento. Las funciones de respuesta a la frecuencia (FRF, por sus siglas en inglés) buscan relacionar las salidas con las entradas.

Dado que la traslación y la pequeña rotación de la base son dadas por, $g(t) = W_0 e^{j\omega t}$ y $h(t) = \theta_0 e^{j\omega t}$, la función de fuerza modal tiene la forma de $f_r(t) = F_r e^{j\omega t}$ donde la fuerza F_r esta dada por la ecuación (2.98)(2.98)(2.98)(2.98).

$$F_r = -\sigma_r \omega^2 W_0 - \tau_r \omega^2 \theta_0 \quad (2.123)$$

Donde

$$\sigma_r = -m \int_0^L \phi_r(x) dx - M_t \phi_r(L) \quad (2.124)$$

$$\tau_r = -m \int_0^L x \phi_r(x) dx - M_t L \phi_r(L) \quad (2.125)$$

2.3.5.1. FRF multi-modal

Sustituyendo en la ecuación del voltaje, ecuación (2.110), el término de acoplamiento equivalente $\tilde{\theta}_r$ Tabla 2.3 y la función de fuerza F_r ecuación (2.123). La ecuación del voltaje se puede expresar como la multiplicación de una variable en función de la frecuencia por la aceleración de la base.

$$v(t) = \alpha(\omega)(-\omega^2 W_0 e^{j\omega t}) + \mu(\omega)(-\omega^2 \theta_0 e^{j\omega t}) \quad (2.126)$$

Donde para el voltaje de salida por aceleración de traslación de la base, la FRF es

$$\alpha(\omega) = \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{-j\omega\tilde{\theta}_r\sigma_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega}}{\frac{1}{R_l} + j\omega C_{\tilde{p}}^{eq} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega\tilde{\theta}_r^2}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega}} \quad (2.127)$$

Y para el voltaje de salida por aceleración rotacional de la base, la FRF es

$$\mu(\omega) = \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{-j\omega\tilde{\theta}_r\tau_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega}}{\frac{1}{R_l} + j\omega C_{\tilde{p}}^{eq} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega\tilde{\theta}_r^2}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega}} \quad (2.128)$$

De forma similar el desplazamiento se puede expresar como la multiplicación de las funciones β y ψ , las cuales dependen de la frecuencia y posición, por la aceleración transversal y rotacional de la base respectivamente.

$$w_{rel}(x, t) = \beta(\omega, x)(-\omega^2 W_0 e^{j\omega t}) + \psi(\omega, x)(-\omega^2 \theta_0 e^{j\omega t}) \quad (2.129)$$

Donde la FRF de desplazamiento relativo transversal por unidad de aceleración transversal de la base es

$$\beta(\omega, x) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\left(\sigma_r - \tilde{\theta}_r \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{-j\omega\tilde{\theta}_r\sigma_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega}}{\frac{1}{R_l} + j\omega C_{\tilde{p}}^{eq} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega\tilde{\theta}_r^2}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega}} \right) \frac{\phi_r(x)}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega} \right] \quad (2.130)$$

Y la FRF de desplazamiento relativo transversal por unidad de aceleración rotacional de la base es

$$\psi(\omega, x) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\left(\tau_r - \tilde{\theta}_r \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{-j\omega\tilde{\theta}_r\tau_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega}}{\frac{1}{R_l} + j\omega C_{\tilde{p}}^{eq} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{j\omega\tilde{\theta}_r^2}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega}} \right) \frac{\phi_r(x)}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega} \right] \quad (2.131)$$

2.3.5.2. FRF para un solo modo

La ecuación (2.126) se puede reescribir como

$$\hat{v}(t) = \hat{\alpha}(\omega)(-\omega^2 W_0 e^{j\omega t}) + \hat{\mu}(\omega)(-\omega^2 \theta_0 e^{j\omega t}) \quad (2.132)$$

Donde para el voltaje de salida por aceleración de traslación de la base para un solo modo, la FRF es

$$\hat{\alpha}(\omega) = \frac{-j\omega R_l \tilde{\theta}_r \sigma_r}{\left(1 + j\omega R_l C_{\tilde{p}}^{eq}\right) (\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega) + j\omega R_l \tilde{\theta}_r^2} \quad (2.133)$$

Y para el voltaje de salida por aceleración rotacional de la base para un solo modo, la FRF es

$$\hat{\mu}(\omega) = \frac{-j\omega R_l \tilde{\theta}_r \tau_r}{(1 + j\omega R_l C_{\tilde{p}}^{eq})(\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega) + j\omega R_l \tilde{\theta}_r^2} \quad (2.134)$$

De la misma manera se reescribe para un solo modo la ecuación (2.129).

$$\hat{w}_{rel}(x, t) = \hat{\beta}(x, t)(-\omega^2 W_0 e^{j\omega t}) + \hat{\psi}(x, t)(-\omega^2 \theta_0 e^{j\omega t}) \quad (2.135)$$

Donde la FRF de desplazamiento relativo transversal por unidad de aceleración transversal de la base para un solo modo es

$$\hat{\beta}(x, t) = \frac{(1 + j\omega R_l C_{\tilde{p}}^{eq})\sigma_r \phi_r(x)}{(1 + j\omega R_l C_{\tilde{p}}^{eq})(\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega) + j\omega R_l \tilde{\theta}_r^2} \quad (2.136)$$

Donde la FRF de desplazamiento relativo transversal por unidad de aceleración rotacional de la base para un solo modo es

$$\hat{\psi}(x, t) = \frac{(1 + j\omega R_l C_{\tilde{p}}^{eq})\tau_r \phi_r(x)}{(1 + j\omega R_l C_{\tilde{p}}^{eq})(\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega) + j\omega R_l \tilde{\theta}_r^2} \quad (2.137)$$

Se decidieron usar las ecuaciones multimodales y de un solo modo con el caso de estudio presentado por Erturk *et al.* [16] para comparar los resultados, el cual consiste en una viga en cantiléver bimorfa conectada en serie. Las propiedades geométricas y del material usadas para el caso de estudio son presentadas en la Tabla 2.4. La relación largo espesor del recolector de energía es de 85.7, por lo cual es razonable despreciar la deformación por cortante y los efectos por la fuerza de inercia de la pequeña rotación para los primeros modos de vibración, esto de acuerdo a la teoría de vigas de Euler-Bernoulli. El shim es de aluminio y las capas piezoeléctricas de PZT-5A. Además la configuración no tiene masa en la punta, por lo que en las ecuaciones la masa adjunta y el momento de inercia por la masa adjunta son marcadas como cero.

Tabla 2.4 Dimensiones y propiedades del material del recolector resuelto por Erturk et al [16].

Propiedad	Valor
Largo del dispositivo, L (mm)	30
Ancho de viga, b (mm)	5
Espesor del piezocerámico $h_{\tilde{p}}$ (mm)	0.15
Espesor del shim $h_{\tilde{s}}$ (mm)	0.05
Permitividad $\bar{\epsilon}_{33}^S$ (nF/m)	13.3
Constante de acoplamiento piezoeléctrico \bar{e}_{31} (C/m ²)	-10.4
Densidad del piezocerámico $\rho_{\tilde{p}}$ (Kg/m ³)	7750
Densidad del shim $\rho_{\tilde{s}}$ (Kg/m ³)	2700
Elasticidad del piezocerámico c_{11}^E (GPa)	61
Elasticidad shim Y_s (GPa)	70

Las primeras tres frecuencias naturales sin amortiguar electromecánicas para la viga en cantiléver bimorfa son 185.1Hz, 1159Hz, 3247.6Hz. Los coeficientes de amortiguamiento electromecánicos reportados por Ertuk son $\zeta_1=0.01$, $\zeta_2=0.012$, $\zeta_3=0.03$, $\zeta_4=0.059$ y $\zeta_5=0.097$. Para las simulaciones del voltaje de salida multimodal y de un solo modo se hace uso de las ecuaciones (2.126) y (2.132) respectivamente. La base de la viga en cantiléver se asume que no tiene rotación ($h(t) = 0$), y la resistencia de carga usada es de 100Ω .

Resolviendo el caso de estudio propuesto por Ertuk y graficando el comportamiento del voltaje de salida multimodal y de un solo modo en un rango de 0 a 5000Hz, como se muestra en la Figura 2.15, podemos observar que la solución multimodal y las no multimodales concuerdan conforme la frecuencia tiende a la frecuencia de resonancia del modo evaluado.

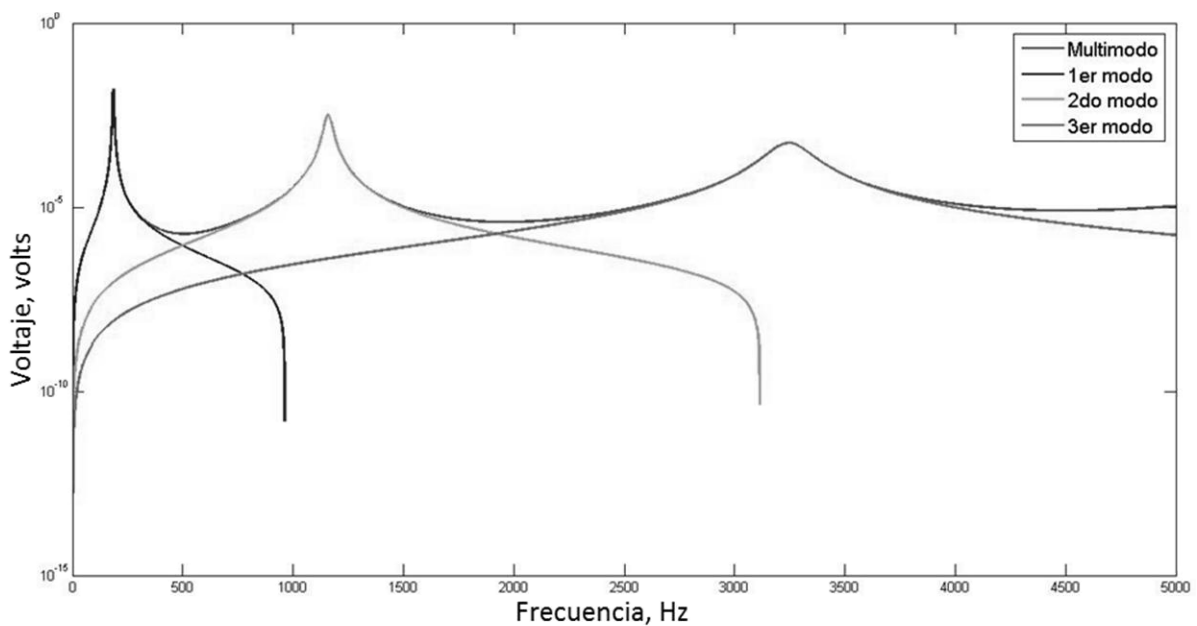


Figura 2.15 Voltaje multimodal, y para el primer, segundo y tercer modo.

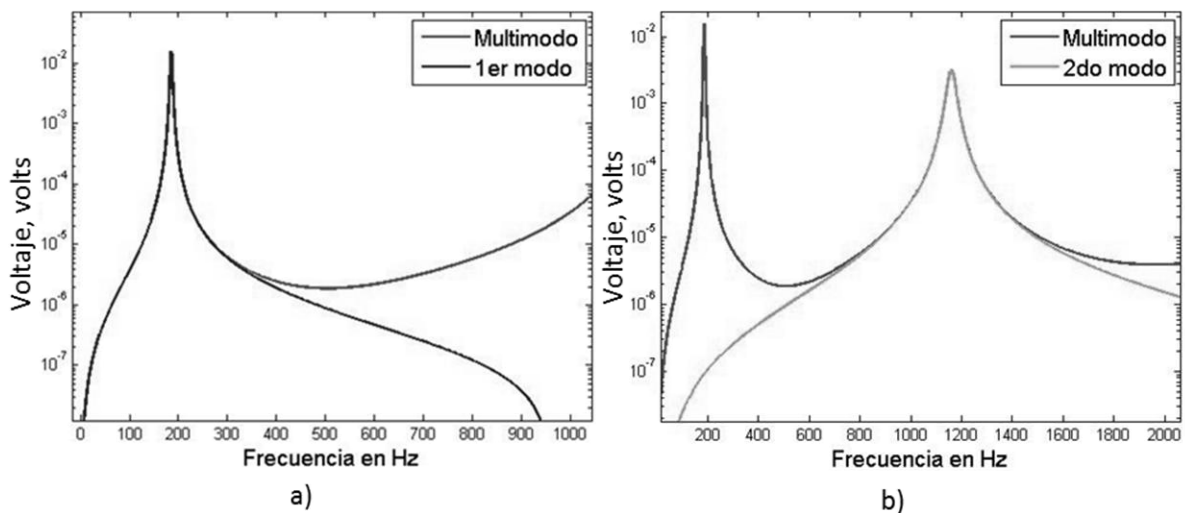


Figura 2.16 Comparación de voltaje de salida multimodal con a) primer modo y b) segundo modo.

En la Figura 2.16 a) se muestra el voltaje de salida usando la FRF multimodal y para un solo modo, con valores del primer modo. Se puede apreciar que la respuesta del primer modo concuerda con la respuesta multimodal al inicio y durante la zona de resonancia, sin embargo después de la zona de resonancia se separan y tiende a cero la respuesta del primer modo. En la Figura 2.16 b) se muestra el voltaje de salida usando la FRF multimodal y para un solo modo, con valores del segundo modo. Se puede apreciar que la respuesta del segundo modo concuerda con la respuesta multimodal durante la zona de resonancia, después de esta se separan y tiende a cero la respuesta del segundo modo.

2.4. Conclusiones

En el presente capítulo se explicaron los tres principales modelos analíticos para los recolectores de energía piezoeléctricos [2]. El modelo de un solo grado de libertad es muy común para analizar la generación de energía de los recolectores de energía por vibración. Este modelo es válido para recolectores donde el término de amortiguamiento eléctrico es lineal y proporcional a la velocidad, y además es útil para entender la importancia del sistema (estructural y eléctrico) y los parámetros de entrada. Una característica de las ecuaciones gobernantes del sistema para el modelo de un solo grado de libertad, es que provienen de las ecuaciones constitutivas del material, ecuación (2.12), donde se sustituyen los términos de las ecuaciones con parámetros del dispositivo y resolviendo las ecuaciones con la transformada de Laplace se da solución al sistema. Ya que este modelo se trabaja con parámetros concentrados, alguno de ellos son aproximados, tal como la masa aproximada del sistema y la rigidez efectiva, los cuales son valores que afectan en el cálculo de esfuerzo y la frecuencia natural del sistema. Erturk *et al* [16] reporta un error de 35% fuera de la zona de resonancia y 1.5% dentro de la zona de resonancia con respecto a las pruebas experimentales.

El modelo de sumatoria de energías se basa en energías, y fue adoptado por N. W. Hagood *et al.* [28]. Para obtener las ecuaciones gobernantes del sistema se utiliza la forma generalizada del principio de Hamilton para un sistema electromecánico, y se definen los términos de energía con las ecuaciones constitutivas del material. Otra característica importante es que usa el método de Rayleigh-Ritz para el cálculo de los eigenvalores. Para dar solución a las ecuaciones se considera un solo modo de vibración en este caso primer modo, con esto se reduce a un par de ecuaciones escalares. La solución presentada en este trabajo también aplica para los demás modos de vibración, solo se deben sustituir los valores correspondientes del modo de interés.

La formulación del modelo de parámetros distribuidos está basada en la teoría de vigas de Euler-Bernoulli. Las primeras ecuaciones fueron obtenidas para cualquier frecuencia de excitación, pero se deben de incluir todos los modos de vibraciones en la solución analítica. La solución multimodal fue reducida a la expresión de un solo modo, la cual es válida durante el modo de interés. Erturk

ha reportado errores del 0.1% en las soluciones del voltaje, energía y desplazamiento con respecto a las pruebas experimentales [2][16], pero este porcentaje es proporcional a la buena predicción que se haga en el cálculo de los eigenvalores.

3. Modelo propuesto y comparativa.

En el presente capítulo se plantean tres modelos propuestos, los cuales llamaremos Propuesto 1, Propuesto 2 y Propuesto 3, y de los cuales su cálculo se basa en el coeficiente experimental d_{31} .

El modelo Propuesto 1 trabaja con la resistencia de carga óptima en corto circuito, y tiene la limitante que predice el voltaje con un bajo error solo en la frecuencia de resonancia. Este modelo está solamente en función de la frecuencia de trabajo, por lo que al incrementar la frecuencia de trabajo el voltaje incrementará linealmente sin límite, por lo que no representa del todo la física ya conocida en la literatura. Este modelo hace uso de las ecuaciones de esfuerzo flector máximo y la carga de un capacitor, ecuaciones conocidas en ingeniería mecánica y eléctrica, respectivamente.

El modelo Propuesto 2 también trabaja con la resistencia de carga óptima en corto circuito, y puede representar la física ya conocida de los recolectores de energía piezoeléctricos con un error comparable a los modelos presentados en la literatura. La limitante de este modelo es que solo trabaja con la resistencia de carga óptima en corto circuito. Además, comparado con el Propuesto 1, este modelo usa la ecuación de la curva elástica para dejar el modelo en función del desplazamiento, y hace la simplificación con el modelo masa resorte amortiguador para el cálculo del desplazamiento.

El modelo Propuesto 3 tiene la característica que además de usar las ecuaciones anteriores a excepción de la ecuación de la carga de un capacitor, usa la corriente generada para el cálculo del voltaje mediante la ley Ohm. Con este modelo se puede considerar variar la resistencia de carga R_l . El error más pequeño se presenta cuando se usa la resistencia de carga óptima en la frecuencia de resonancia. Al sobre pasar la resistencia de carga óptima y llegar a condiciones de circuito abierto ($R_l \rightarrow \infty$), este modelo deja de representar la física del problema.

Finalmente, cabe comentar que los modelos propuestos calculan el voltaje y potencia alternante y consideran a la masa adjunta en la punta como una masa concentrada ignorando la forma geométrica.

3.1. Propuesto 1

El modelo propuesto busca simplificar el cálculo de un recolector de energía piezoeléctrico, el cual considera una viga en cantiléver con una fuerza en la punta, como se muestra en la Figura 3.1. Con este modelo simplificado se espera omitir el cálculo de los eigenvalores y con esto obtener la solución aproximada en un menor tiempo, con lo que conllevaría un menor costo computacional al optimizar el recolector de energía. Esto permitirá conocer aproximadamente el máximo voltaje

obtenido en condiciones de corto circuito. Este modelo es válido para recolectores de energía bimorfos en cantiléver con una masa en la punta o sin masa.

Un recolector de energía piezoeléctrico está en corto circuito cuando la resistencia de carga tiende a cero, $R_l \rightarrow 0$, provocando que la frecuencia de resonancia del recolector de energía corresponda a la de la viga con la masa adjunta. Conforme se aumente la resistencia de carga el voltaje aumentará, hasta que se encuentre una resistencia de carga óptima en corto circuito $R_{lsc,opt}$. En la resistencia de carga óptima, la frecuencia de resonancia del recolector de energía corresponderá a la de la viga con la masa adjunta y la potencia será máxima. Se dice que el recolector de energía piezoeléctrico está trabajando bajo condiciones de corto circuito, cuando la frecuencia de resonancia del recolector de energía corresponda a la de la viga con la masa adjunta, esto sucede en el rango de resistencias de carga de $0 < R_l \leq R_{lsc,opt}$.

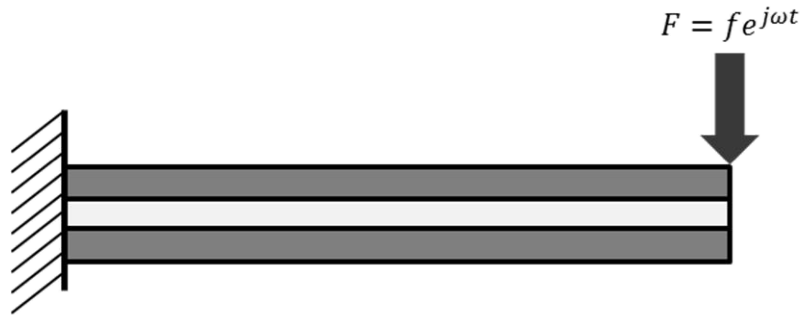


Figura 3.1 Viga en cantiléver bimorfa con una fuerza en la punta.

Se debe mencionar que los modelos propuestos en el presente trabajo solo son válidos para recolectores de energía piezoeléctricos que trabajan bajo condiciones de corto circuito, esto debido al coeficiente experimental d_{31} , el cual es usado para determinar el voltaje de salida, y es obtenido bajo estas condiciones. El coeficiente experimental d_{31} , es igual a la densidad de carga en corto circuito Q_s entre el esfuerzo aplicado σ_f . Los modelos propuestos son válidos para vigas en cantiléver con uno o dos elementos piezocerámicos con o sin masa adjunta en la punta con conexión en serie o paralelo.

$$d_{31} = \frac{Q_s}{\sigma_f} \quad (3.1)$$

La fuerza aplicada en la punta corresponderá y será proporcional al producto de la masa de la viga y la masa adjunta por la aceleración de la base. Esta consideración se puede notar en los modelos anteriores. Además se considerará la fuerza tiene forma de $F = fe^{j\omega t}$ debido al movimiento de la base, donde f es el la amplitud de la fuerza. El esfuerzo flector máximo debido a la fuerza generada tiene la siguiente forma:

$$\sigma_f = \frac{6FL}{b(2h_p + h_s)^2} \quad (3.2)$$

Donde la densidad de carga superficial corresponde a la carga generada en los cuatro electrodos del dispositivo bimorfo dividida entre el área superficial un solo electrodo. Si se usara un recolector de energía unimorfo se considerarían entonces solamente dos electrodos. Estas dos configuraciones son comúnmente encontradas de manera comercial, sin embargo, si fueran múltiples capas piezocerámicas se tendría que modificar al número de electrodos. Para nuestro caso de estudio se tratará una viga en cantiléver bimorfa, y la densidad de carga tendrá la forma de la ecuación (3.3), donde q es la carga de cada electrodo y S el área superficial de cada electrodo.

$$Q_s = \frac{4q}{S} \quad (3.3)$$

La carga se puede relacionar con la capacitancia del piezocerámico $C_{\bar{p}}$ y el voltaje generado v a través de:

$$q = C_{\bar{p}} v \quad (3.4)$$

La capacitancia del piezocerámico se considera como dos capacitores de placas paralelas conectadas en serie o en paralelo según sea el caso de estudio, por lo que la capacitancia estará dada por:

$$C_{\bar{p}}^v = 4C_{\bar{p}}^s = \frac{2\varepsilon_{33}bL}{h_{\bar{p}}} \quad (3.5)$$

Donde ε_{33} es la permitividad del piezocerámico, b y L el ancho y largo de la viga respectivamente. Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la definición del coeficiente experimental d_{31} , y despejando el voltaje obtenemos:

$$v = \frac{3Ld_{31}h_{\bar{p}}F}{\varepsilon_{33}^s b(2h_{\bar{p}} + h_{\bar{s}})^2} \quad (3.6)$$

En la ecuación anterior se puede reemplazar la fuerza aplicada en la punta, por la masa equivalente para una viga en cantiléver con una masa en la punta [39], multiplicada por la aceleración de la base, donde m_p es la masa de la viga y M_t la masa adjunta en la punta.

$$m_{eq} = M_t + \frac{33}{140}m_p \quad (3.7)$$

El movimiento de la base tiene una forma de $W_0 e^{j\omega t}$ por lo que la aceleración de la base tendría la forma.

$$\ddot{w}_b = -\omega^2 W_0 e^{j\omega t} \quad (3.8)$$

Usando las dos expresiones anteriores en la ecuación (3.6), se obtiene la ecuación (3.9), la cual expresa el voltaje normalizado respecto al movimiento de la base, y se llamará modelo Propuesto 1. Si esta ecuación se normalizara con respecto a la fuerza F , se obtendría el voltaje en la frecuencia de resonancia con la resistencia de carga óptima de corto circuito (independiente de la frecuencia).

$$\frac{v}{-W_0 e^{j\omega t}} = \frac{3Ld_{31}h_{\bar{p}}m_{eq}\omega^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S b(2h_{\bar{p}} + h_{\bar{s}})^2} \quad (3.9)$$

3.2. Propuesto 2

La ecuación del Propuesto 1 depende de la frecuencia, y al sobre pasar la frecuencia de resonancia no disminuirá el voltaje de salida si no que continuará incrementando, esto se mostrara en la sección 3.4.2. Dado que esta respuesta no corresponde al comportamiento de los recolectores de energía piezoeléctricos, se propone sustituir la fuerza por el desplazamiento de la punta. Del modelo simplificado de la Figura 3.2 podemos obtener el desplazamiento y en la punta, donde la línea roja representa el eje neutro de la viga.

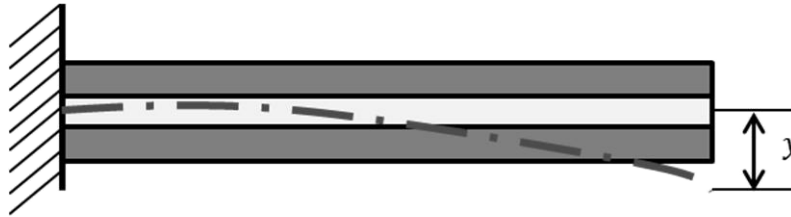


Figura 3.2 Representación de la deformación y en la punta de la viga modelada.

Por medio de la ecuación de la curva elástica que a continuación se muestra, se puede conocer el desplazamiento en la punta y .

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{YI} \quad (3.10)$$

The bending stiffness term YI of the composite cross-section for the constant electric field condition (short-circuit condition) of the piezoceramic is

$$YI = \frac{2b}{3} \left\{ Y_{\bar{s}} \frac{h_{\bar{s}}^3}{8} + \bar{c}_{11}^E \left[\left(h_{\bar{p}} + \frac{h_{\bar{s}}}{2} \right)^3 - \frac{h_{\bar{s}}^3}{8} \right] \right\} \quad (2.72)$$

Donde $M(x)$ es el momento flexionante generado por la fuerza, k_{eq} es la rigidez equivalente, e I es el segundo momento de inercia. Al integrar dos veces la ecuación (3.10) obtenemos.

$$y = \frac{FL}{2YI} \left(x^2 - \frac{x^3}{3L} \right) + C_1x + C_2 \quad (3.11)$$

Donde C_1 y C_2 son las constantes de integración, las cuales se hacen cero al evaluar la ecuación en las condiciones de frontera, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$. Por lo que el desplazamiento en la punta evaluada en $x = L$, resulta en:

$$y = \frac{FL^3}{3YI} \quad (3.12)$$

Despejando la fuerza de la ecuación anterior obtenemos.

$$F = \frac{3YIy}{L^3} \quad (3.13)$$

Sustituyendo la ecuación (3.13) en la ecuación (3.6), se obtiene el voltaje de salida en función del desplazamiento de la viga, y se llamará Modelo Propuesto 2.

$$v = \frac{9d_{31}h_{\bar{p}}YIy}{\epsilon_{33}bL^2(2h_{\bar{p}} + h_s)^2} \quad (3.14)$$

En los primeros intentos para modelar los recolectores de energía piezoeléctricos se consideró el modelado de parámetros concentrados, considerando solamente el primer modo de vibración. Este modelado requiere una descripción de la dinámica en un punto de interés (nuestro caso en el extremo libre) en términos de ciertos parámetros concentrados, los cuales son la masa equivalente, rigidez equivalente y el amortiguamiento equivalente, denotados como m_{eq} , k_{eq} y c_{eq} respectivamente, Figura 3.3.

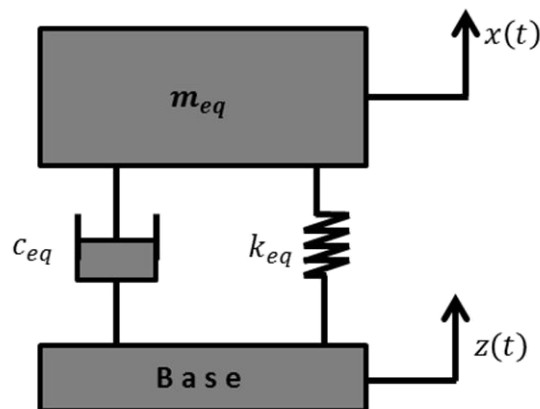


Figura 3.3 Representación del problema para el problema de recolectores de energía excitados desde la base.

La rigidez equivalente es obtenida de la relación entre la deflexión estática de la viga en cantiléver dividida entre la carga transversal concentrada en la punta, mientras que la masa equivalente es obtenida de expresar la energía cinética total de la viga en términos de la velocidad en la punta mediante el cociente de Rayleigh [39] en condiciones de una viga en voladizo y con la base fija.

En la Figura 3.3, $z(t)$ es el desplazamiento armónico de la base ($z(t) = Z_0 e^{j\omega t}$), donde Z_0 es la amplitud del desplazamiento y $x(t)$ es la respuesta del desplazamiento absoluto de la masa (es decir, es el desplazamiento transversal absoluto en el extremo libre de la viga). El desplazamiento relativo respecto a la base es $y(t) = x(t) - z(t)$, por lo que la ecuación gobernante del sistema en función del desplazamiento relativo sería.

$$m_{eq}\ddot{y}(t) + c_{eq}\dot{y}(t) + k_{eq}y(t) = -m_{eq}\ddot{z}(t) \quad (3.15)$$

Derivando dos veces $z(t)$ y al sustituirla en la ecuación anterior obtenemos.

$$m_{eq}\ddot{y}(t) + c_{eq}\dot{y}(t) + k_{eq}y(t) = m_{eq}\omega^2 Z_0 e^{j\omega t} \quad (3.16)$$

Resolviendo la ecuación anterior con las transformadas de Laplace podemos obtener el desplazamiento relativo de la masa para el sistema mostrado en la Figura 3.3.

$$y(t) = \frac{\omega^2 m_{eq}}{k_{eq} - \omega^2 m_{eq} + j\omega c_{eq}} Z_0 e^{j\omega t} \quad (3.17)$$

Esta formulación es comúnmente usada para describir la dinámica de los recolectores de energía excitados desde la base [4], [40], [41], donde la rigidez equivalente de la viga en cantiléver es:

$$k_{eq} = \frac{3YI}{L^3} \quad (3.18)$$

Donde Y y I son el módulo de elasticidad y segundo momento de inercia respectivamente. La frecuencia natural fundamental de la estructura se expresa como:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{3YI/L^3}{(33/140)m_p + M_t}} \quad (3.19)$$

y el coeficiente de amortiguamiento equivalente se expresa como:

$$c_{eq} = 2\zeta_m \omega_n m_{eq} \quad (3.20)$$

Donde ζ_m es el coeficiente de amortiguamiento equivalente. Acorde con la Figura 3.3, este modelo asume un solo coeficiente de amortiguamiento, el cual actúa con la velocidad relativa de la masa. La ecuación (3.17) se puede simplificar, resultando en:

$$y(t) = \frac{\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta_m\omega_n\omega} Z_0 e^{j\omega t} = Y_0 e^{j\omega t} \quad (3.21)$$

Para obtener $y(t)$ es necesario conocer la amplitud Z_0 . Comúnmente los datos obtenidos del medio ambiente son la frecuencia y la aceleración de donde se puede conocer la amplitud. Ya que para una cierta frecuencia de trabajo y una aceleración de la base dada, todos los valores son conocidos, estos pueden unificar en Y_0 .

3.3. Propuesto 3

Hay que señalar que la limitante del Propuesto 2 surge de que se desarrolló para usarse bajo condiciones óptimas de corto circuito, esto quiere decir que la resistencia de carga a corto circuito deber ser la óptima, y a diferentes resistencias el error de la aproximación es mayor. Debido a esta gran limitante se propone el modelo Propuesto 3, y al igual que las propuestas anteriores proviene del coeficiente experimental d_{31} . Para esto primero se determina la carga que puede generar el recolector de energía piezoeléctrico, esto al sustituir en el coeficiente experimental d_{31} el esfuerzo flector máximo y la densidad de carga superficial, por lo que se obtendría la siguiente ecuación.

$$q = \frac{9d_{31}YI}{2L(2h_{\bar{p}} + h_{\bar{s}})^2} Y_0 e^{j\omega t} \quad (3.22)$$

La derivada de la carga con respecto al tiempo es igual a la corriente i .

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{9d_{31}YI}{2L(2h_{\bar{p}} + h_{\bar{s}})^2} j\omega Y_0 e^{j\omega t} \quad (3.23)$$

Igual que con los modelos anteriores, el circuito recolector de energía se simplifica con un resistor, resistencia de carga R_l . Con la ecuación (3.23) y conociendo la resistencia de carga, podemos obtener el voltaje de salida con la Ley Ohm, y el modelo Propuesto 3 resulta en:

$$v = \frac{9d_{31}YIR_l}{2L(2h_{\bar{p}} + h_{\bar{s}})^2} j\omega Y_0 e^{j\omega t} \quad (3.24)$$

Además se puede conocer la potencia generada de la siguiente forma:

$$P = R_l I^2 = \frac{v^2}{R_l} = vI \quad (3.25)$$

3.4. Comparativa de los modelos para recolectores de energía piezoeléctricos

Para comparar los modelos de la literatura y los modelos propuestos, se resolverá un caso de estudio encontrado en la literatura. Este caso de estudio ya fue resuelto por el método de parámetros distribuidos y experimentalmente por Erturk *et al.* [16], el cual se trata de un recolector de energía piezoeléctrico con forma de una viga en cantiléver bimorfa con una masa en la punta de 0.239g con forma de cubo. El material piezocerámico usado es PZT-5H y el material del shim es latón.

3.4.1. Comparativa de los modelos existentes

A pesar que los modelos existentes presentados tienen como base diferente metodología, se puede notar que las ecuaciones gobernantes resultantes tienen cierto parecido, esto para los tres modelos primarios disponibles en la literatura [2]. Además nótese que en estos tres modelos al agrupar los términos semejantes se tienen la forma de la ecuación diferencial de un problema masa-resorte-amortiguador.

Los primeros tres métodos (SDOF, sumatoria de energías, y parámetros distribuidos) tienen comportamientos parecidos al variar las resistencias eléctricas. En las gráficas de potencia es muy fácil notar la frecuencia de corto circuito y circuito abierto, como resultado de incrementar la resistencia eléctrica, y de misma forma se encuentran las dos resistencias que hacen máxima la potencia. Otra manera de encontrar las resistencias eléctricas óptimas para las dos frecuencias, es por medio de un problema de optimización sobre la ecuación de la potencia, donde la resistencia eléctrica es la variable, y se establece como restricción que la resistencia debe ser mayor a cero.

La capacidad de un elemento piezoeléctrico para cargar una batería ya ha sido investigado previamente por Sodano *et al.* [15]. De lo cual se concluyó que ciertos piezocerámicos no son muy adecuados para esta aplicación, ya que la generación de corriente es insuficiente. Pero al operarlas en la frecuencia de resonancia o corto circuito se puede mitigar este problema. Para la aplicación de carga de baterías un circuito rectificador es necesario, el cual tiene un requisito mínimo de voltaje para operar, con lo cual al operar el dispositivo en la frecuencia de circuito abierto puede ser ventajoso.

Para comparar los modelos de la literatura, se resolverá el caso de estudio resuelto por el método de parámetros distribuidos y experimentalmente por Erturk *et al.* [16], las propiedades

geométricas del recolector de energía así como las del material usado son presentadas en la Tabla 3.1. Ya que el modelo SDOF representa el movimiento de un recolector de energía en forma de un acelerómetro y no en una viga en cantiléver solo se comparan los modelos de parámetros distribuidos y sumatoria de energías.

Tabla 3.1 Dimensiones y propiedades para el caso resuelto por Erturk et al [16].

Propiedad	Piezocerámico	Shim (Latón)
Largo del dispositivo, L (mm)	24.53	24.53
Ancho de viga, b (mm)	6.4	6.4
Espesor piezocerámico y shim h_p y h_s (mm)	0.265	0.140
Permitividad $\bar{\epsilon}_{33}^S$ (nF/m)	25.55	-
Constante acoplamiento piezoeléctrico e_{31} (C/m ²)	-16.6	-
Densidad piezocerámico y shim ρ_p y ρ_s (Kg/m ³)	7500	9000
Elasticidad piezocerámico y shim c_{11}^E y Y_s (GPa)	60.6	105
Masa en la punta M_t (Kg)	0.239 x10 ⁻³	

En la Figura 3.4 se muestra la gráfica de voltaje obtenido contra la frecuencia normalizada para los modelos de parámetros distribuidos y sumatoria de energías, y se observa que ambos modelos concuerdan en la zona de resonancia que está entre 0.9 y 1.1 aproximadamente. De acuerdo a los valores obtenidos y comparándolos con los valores experimentales, el modelo de parámetros distribuidos obtuvo error con respecto al experimental del 1.12% con una exactitud de los eigenvalores de 10^{-5} (cálculo de λ , ver Anexo 1 ecuación A1.18) y con un tiempo computacional de 1.476 segundos. Al incrementar las decimales en el cálculo del eigenvalor a 10^{-6} y 10^{-7} se obtuvieron errores del 0.49 y 0.03% con respecto al experimental y un tiempo computacional de 7.457 y 34.73 segundos respectivamente.

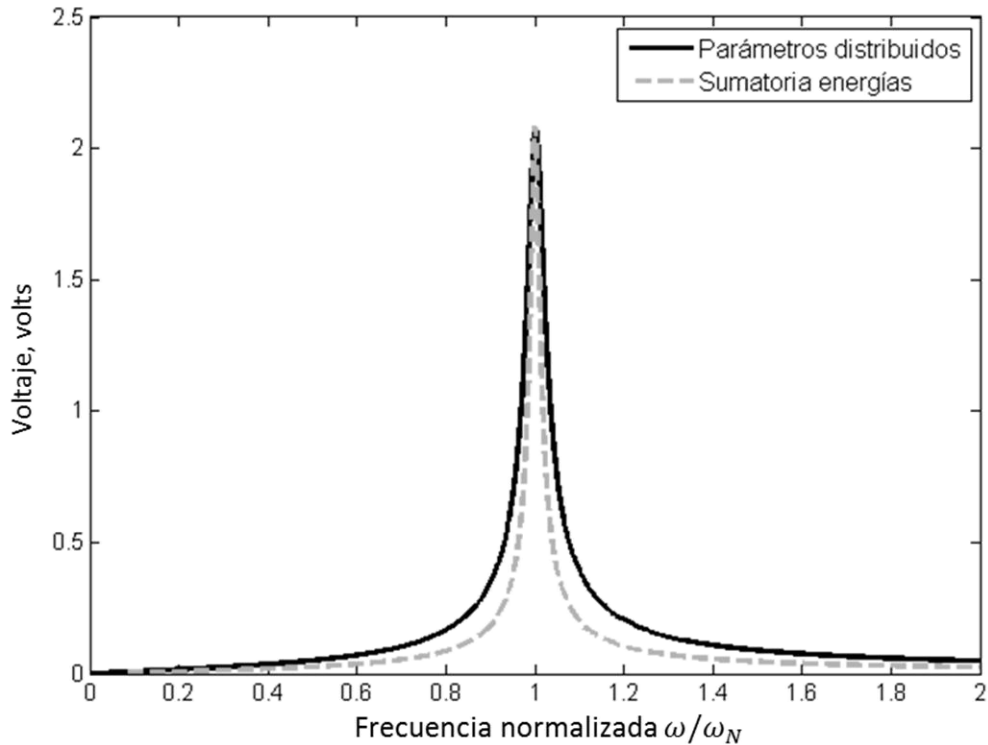


Figura 3.4 Voltaje de salida contra frecuencia normalizada para los modelos parámetros distribuidos y sumatoria de energías.

Para el modelo de sumatoria de energías los valores obtenidos y comparándolos con los valores experimentales, obtuvo error con respecto al experimental del -0.89% con un tiempo computacional del 2.38 segundos para los valores de la zona de resonancia, el método de Rayleigh-Ritz es empleado para el cálculo de los eigenvalores. Se puede notar la Figura 3.4 que existe una separación de las curvas entre ambos modelo antes y después de la zona de resonancia. La separación puede explicar por qué duToit *et al.* [42] al reproducir el trabajo de Sodano *et al.* [33] con el modelo de sumatoria de energías a diferentes frecuencias, fuera de la frecuencia de corto circuito o circuito abierto, reporta porcentaje de errores de hasta del 22% con respecto a la medición experimental.

Comparando los errores obtenidos de ambos modelos (parámetros distribuidos y sumatoria de energías) podemos decir que el modelo de parámetros distribuidos es el modelo más robusto, el cual será como punto de comparación para el modelo propuesto al momento de hacer el diseño del piezoeléctrico.

3.4.2. Comparativa de modelos entre modelos propuestos

Para comparar los modelos propuesto fueron usadas las ecuaciones (3.9), (3.14) y (3.24), de las cuales podemos obtener el voltaje de salida bajo condiciones de corto circuito de los modelos

Propuesto 1, 2 y 3 respectivamente, y normalizado con respecto al movimiento de la base para que solo esté en función de la frecuencia.

El problema propuesto fue resuelto y graficado usando los tres modelos propuestos. Los resultados se muestran en la Figura 3.5, donde se muestran los voltajes de salida contra la frecuencia normalizada ($\Omega = \omega/\omega_n$).

Se puede apreciar en el Propuesto 1 que el voltaje incrementa de forma exponencial, y de ésta es posible conocer el valor de voltaje en la frecuencia de resonancia. La gráfica del Propuesto 1 en la solamente se graficó hasta la frecuencia normalizada 1.1, ya que ésta continuaría incrementando, tal como se comentó anteriormente. El modelo Propuesto 2 muestra un comportamiento similar a los modelos de recolectores de energía presentados en el capítulo anterior, y esta propuesta permite conocer un valor aproximado fuera de la zona de resonancia.

El error de los modelos Propuesto 1, 2 y 3 con respecto a las pruebas experimentales realizadas por Erturk *et al.* [16] en la frecuencia de resonancia son de -2.46%, -1.07% y -1.076% respectivamente. Si se conoce la frecuencia de resonancia, se puede conocer de manera confiable el voltaje de salida en esa frecuencia. Fuera de esa frecuencia de resonancia el Propuesto 1 presenta un error máximo de cerca del 400%, en cambio el Propuesto 2 y 3 presenta un error máximo del 6%.

En la Figura 3.5 a) se observa que los resultados de los modelos Propuesto 2 y Propuesto 3 se comportan de la misma manera, tal como se podía prever dado que provienen del mismo coeficiente experimental d_{31} y están en función del desplazamiento. La diferencia consiste en que el Propuesto 3 busca la carga que puede generar el recolector de energía piezoeléctrico, mientras que en el Propuesto 2 se usa la equivalencia de la carga de la ecuación (3.4) para despegar el voltaje. En la Figura 3.5 b) se muestra la misma gráfica pero con un acercamiento a la zona de resonancia, se nota una diferencia entre los dos, esto es debido a que el Propuesto 3 usó la resistencia de carga óptima para corto circuito usada por Erturk *et al.* [16] la cual es de 9.7k Ω y el Propuesto 2 usa la resistencia de carga óptima inherente en la ecuación. También se puede notar en la Figura 3.5 b) Que los tres modelos propuestos concuerdan en la frecuencia de resonancia.

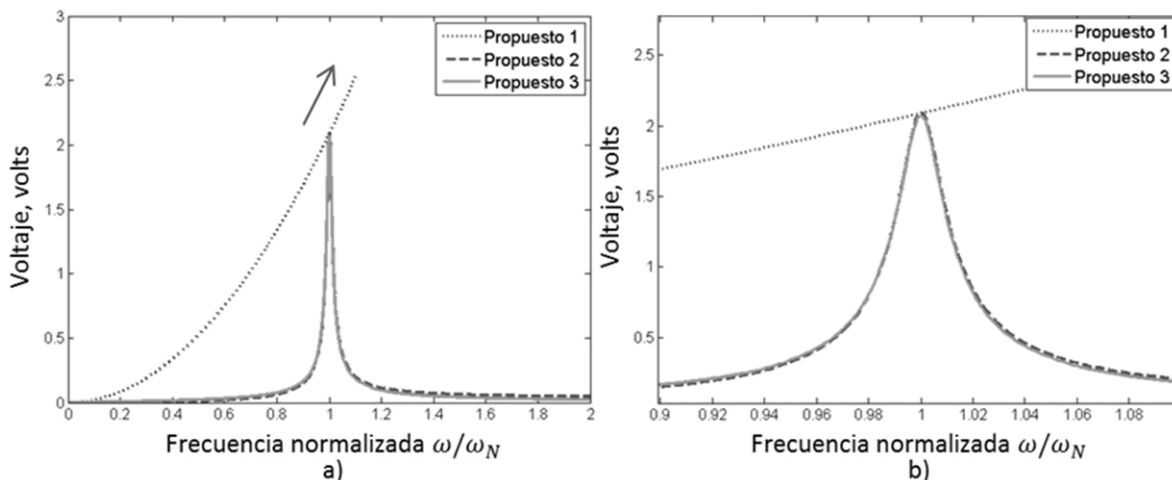


Figura 3.5 a) Gráfica de voltaje contra frecuencia normalizada de modelos propuestos, y b) acercamiento de la gráfica en la zona de resonancia.

Los tres modelos propuestos fueron obtenidos del coeficiente experimental d_{31} , con la diferencia que el Propuesto 1 es recomendable usarlo en la frecuencia de resonancia, a diferencia de los Propuestos 2 y 3 que se pueden usar para cualquier frecuencia. La diferencia entre el Propuesto 2 y 3, es que el Propuesto 2 trabaja solo con la resistencia de carga óptima en corto circuito y el Propuesto 3 puede trabajar con diferentes resistencias.

El modelo Propuesto 3 es el modelo más robusto de los 3 modelos propuestos, ya que puede realizar el cálculo del voltaje a diferentes resistencias de carga pequeñas, ya que solo da un resultado válido cuando el recolector de energía trabaja en condiciones de corto circuito. Debido a esto, al optimizar se utilizara el Propuesto 3, ya que la resistencia del circuito a energizar no necesariamente tendrá que ser la resistencia de carga óptima, permitiendo una mayor flexibilidad al momento de optimizar.

3.4.3. Comparativa de los modelos Propuesto 3 y parámetros distribuidos

En la presente sección se compararan los dos modelos considerados más robustos (Propuesto 3 y Parámetros distribuidos), con el fin de visualizar el comportamiento del Propuesto 3, con diferentes resistencias de cargas, se propone el mismo problema realizado anteriormente pero con resistencias de carga de 470, 4600, 9700 y 331000 ohms.

La resistencia de carga de 470 ohms se puede considerar lo suficientemente pequeña para decir que el recolector de energía está en corto circuito, la resistencia de carga de 9700 ohms es la resistencia considerada por Erturk *et al* [16] como la resistencia de carga óptima en corto circuito la cual trabaja en condiciones de corto circuito, la resistencia de 4600 es para observar la transición entre las dos resistencias anteriores, y la resistencia de 331000 ohms es la resistencia de carga óptima en circuito abierto Erturk *et al* [16]. Con esta última resistencia se podrá visualizar como el modelo Propuesto 3 no puede representar correctamente el comportamiento del recolector de energía en condiciones de circuito abierto.

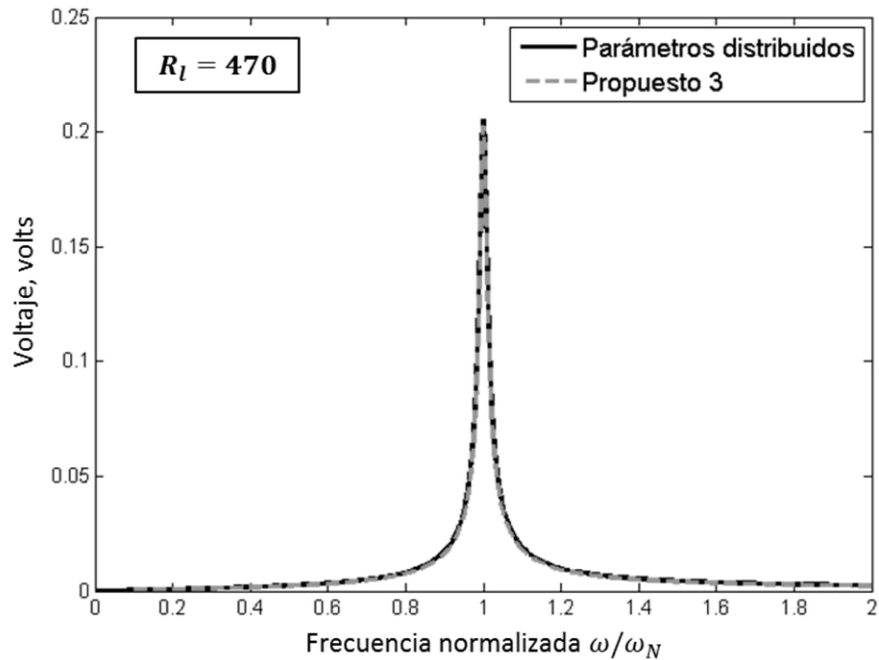


Figura 3.6 Comportamiento del Propuesto 3 y Parámetros distribuidos en corto circuito.

En la Figura 3.6 se muestran las curvas del modelo de parámetros distribuidos y del Propuesto 3, y se puede notar que el modelo Propuesto 3 empata la curva del modelo de parámetros distribuidos en todo el rango de frecuencias, a diferencia de las anteriores, esto es debido a que la resistencia de carga es lo suficientemente pequeña para considerar que el recolector está en corto circuito. El error del voltaje en la frecuencia de resonancia respecto al valor obtenido por el modelo de parámetros distribuidos es del -1.22%.

En la Figura 3.7 a) se muestran las gráficas del Propuesto 3 y Parámetros distribuidos con una resistencia de carga de 4600 ohms. En esta resistencia de carga se considera que el recolector de energía trabaja en condiciones de corto circuito, ya que la frecuencia de resonancia del recolector es la misma que la viga con la masa adjunta.

En la Figura 3.7 b) se muestra las gráficas resultantes a una resistencia de carga óptima (9700 ohms), se puede apreciar que la separación entre las curvas es mayor que el mostrado en la Figura 3.7 a). El recolector de energía sigue trabajando en condiciones de corto circuito ya que la frecuencia de resonancia sigue siendo la misma que el de la viga con la masa, al seguir aumentando la resistencia de carga la frecuencia de resonancia dejará de ser la misma, y se dice que el recolector está trabajando en condiciones de circuito abierto. La frecuencia dejará de ser la misma debido al coeficiente de acoplamiento de la ecuación gobernante del sistema que tienen los modelos de la literatura.

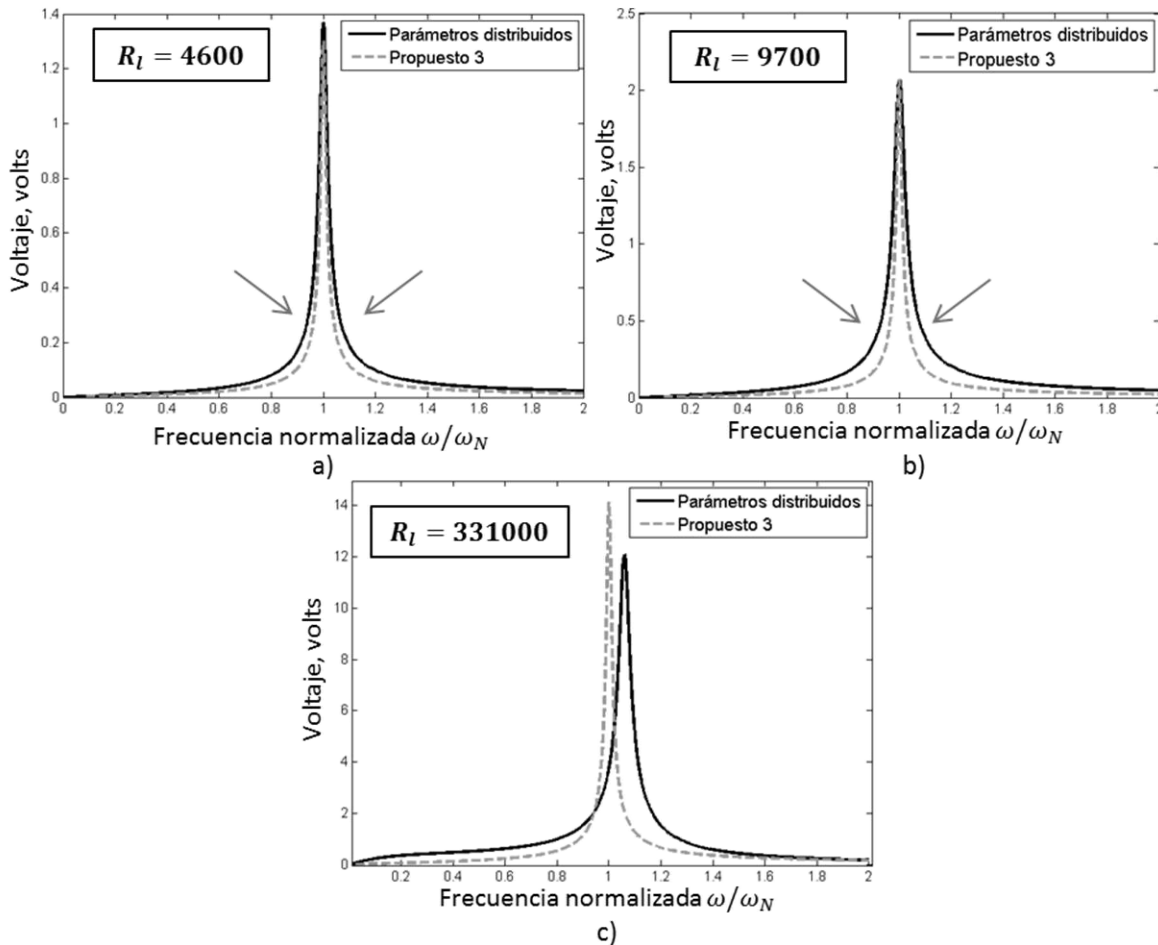


Figura 3.7 Comportamiento del Propuesto 3 y Parámetros distribuidos con resistencia de carga de 4600, 9700 y 331000 ohms.

En la Figura 3.7 c), se muestra los resultados de los modelos con una resistencia de carga de 331000 ohms, las curvas no concuerdan en la frecuencia de resonancia y los valores son claramente erróneos, esto es debido a que los modelos propuestos en el presente trabajo solo son válidos para recolectores de energía piezoeléctricos que trabajan bajo condiciones de corto circuito, esto debido al coeficiente experimental d_{31} .

Se debe recalcar que los modelos propuestos en el presente trabajo solo son válidos para recolectores de energía piezoeléctricos que trabajan bajo condiciones de corto circuito, esto debido al coeficiente experimental d_{31} , el cual es usado para determinar el voltaje de salida. Los modelos propuestos son válidos para vigas en cantiléver con uno o dos elementos piezocerámicos con o sin masa adjunta en la punta con conexión en serie o paralelo.

3.5. Conclusiones

En los tres modelos primarios disponibles en la literatura, un solo grado de libertad, sumatoria de energías y parámetros distribuidos, se puede notar que las ecuaciones gobernantes resultantes tienen cierto parecido, ya que los tres modelos usan las ecuaciones constitutivas del material pero diferente tipo de metodología para representar la dinámica del dispositivo. También estos tres modelos se comportan de la misma manera al variar la masa adjunta y la resistencia de carga.

El variar la resistencia de carga al modelo Propuesto 3 puede proporcionar un voltaje salida aproximado, siempre y cuando siga trabajando en condiciones de corto circuito. Superando la resistencia de carga óptima de corto circuito, el modelo Propuesto 3 ya no es válido y no se comporta como los tres modelos primarios disponibles en la literatura. El Propuesto 1 y 2 solo trabajan con la resistencia de carga óptima de corto circuito.

Tabla 3.2 Características de los métodos para los recolectores de energía piezoeléctricos.

Característica	1-D	Sum. Energías	Param. Distribuidos	Prop. 1	Prop. 2	Prop. 3
Permite trabajar en cualquier frecuencia	✓	✓	✓	x	✓	✓
Error en la frec. corto circuito <3%	x	✓	✓	✓	✓	✓
Error fuera de frec. corto circuito <1%	x	x	✓	x	x	x
Error fuera de frec. corto circuito <10%	x	✓	✓	x	✓	✓
Error fuera de frec. corto circuito <40%	✓	✓	✓	x	✓	✓
Error en la frec. circuito abierto <3%	x	✓	✓	x	x	x
Error fuera de frec. circuito abierto <1%	x	x	✓	x	x	x
Error fuera de frec. circuito abierto <10%	x	✓	✓	x	x	x
Conexión en serie o paralelo	x	✓	✓	✓	✓	✓
Permite desplazamiento rotacional	x	✓	✓	✓	✓	✓
Calcula eigenvalores	x	✓	✓	x	x	x
Dos grados de libertad	x	✓	✓	✓	✓	✓
Resistencia de carga cualquiera	✓	✓	✓	x	x	✓
Error <4% con R_{I-sc} corto circuito	x	✓	✓	x	✓	✓

En la Tabla 3.2 se resumen diferentes características de modelos para recolectores de energía piezoeléctricos, los cuales ya fueron presentados en los capítulos 2 y 3. La tabla incluye características a considerar al escoger que método se utilizará para la reproducción del fenómeno piezoeléctrico.

Si se piensa colocar un recolector de energía piezoeléctrico en un medio ambiente donde la frecuencia de trabajo no es constante, un método que permita trabajar a cualquier frecuencia puede ser ventajoso, por lo que usar cualquiera de los tres métodos primarios y Propuesto 1 y 2 es factible.

Si el recolector de energía trabajará en la frecuencia de resonancia (frecuencia en corto circuito) y un error del 4% es aceptable, entonces es factible trabajar con cualquier modelo propuesto, el cual permitirá una facilidad de cálculo, teniendo un costo computacional mínimo para la aplicación

que se busca. El cálculo de eigenvalores puede ocasionar un costo computacional importante si se busca optimizar las dimensiones de la viga.

Si se desea usar una resistencia de carga grande para trabajar en condiciones de circuito abierto es recomendable usar los modelos de sumatoria de energías y parámetros distribuidos, el Propuesto 3 puede predecir el voltaje de salida pero con un error del 11 al 15%. Este error varía dependiendo de la masa en la punta, ya que disminuye la magnitud de la frecuencia de corto circuito y circuito abierto, y estas dos frecuencias se acercan si se incrementa la magnitud de la masa en la punta.

La diferencia entre el modelo Propuesto 2 y 3 se encuentra en que el Propuesto 2 solo trabaja con la resistencia de carga óptima en corto circuito, mientras que el Propuesto 3 puede realizar el cálculo del voltaje a diferentes resistencias de carga pequeñas, ya que solo da un resultado válido cuando el recolector de energía trabaja en condiciones de corto circuito. Debido a esto, al optimizar se utilizara el Propuesto 3, ya que la resistencia del circuito a energizar no necesariamente tendrá que ser la resistencia de carga óptima, permitiendo una mayor flexibilidad al momento de optimizar.

4. Diseño del recolector de energía

La recolección de energía piezoeléctrica ha recibido una creciente atención en la última década. La motivación de investigación en este campo se debe a la alta necesidad de energizar pequeños componentes electrónicos, tales como las redes de sensores inalámbricos (WSN, por sus siglas en inglés) utilizados en aplicaciones de monitoreo. Un WSN consiste en un conjunto de nodos autónomos distribuidos espaciadamente, los cuales envían información a un punto principal para lograr una tarea en común. El objetivo final de los recolectores es alimentar esos pequeños dispositivos electrónicos mediante el uso de la energía de las vibraciones disponibles en su entorno. Si esto se puede lograr, el requisito de una fuente de alimentación externa, así como los costos de mantenimiento para la sustitución periódica de la batería y los residuos químicos de las baterías convencionales se pueden reducir.

4.1. Componentes de nodo sensores a energizar

Ya que WSN consiste en un conjunto de nodos autónomos distribuidos espaciadamente, los cuales envían información a un punto principal para lograr una tarea en común. WSN se han convertido en una tecnología de interés para monitorear un amplio rango de ambientes [43], para el cuidado médico personal [44], vigilancia animal [45], casas inteligentes o monitoreo del medio ambiente [43].

El uso de sistemas micro-electromecánicos (MEMS por sus siglas en inglés) sigue creciendo en varios sectores de la industria y en el desarrollo de nodos no ha sido la excepción. En las WSN se espera que los nodos sensores puedan operar de manera remota y autónoma. Por lo tanto, la eficiencia y el rendimiento de una WSN se puede mejorar por el gran número de nodos sensores, y el requisito de la sensibilidad del sensor de forma individual es menos crucial, si se compara con un sistema de sensado cableado [43]. Sin embargo, el consumo de energía de cada nodo se debe reducir al mínimo para permitir la utilización de recolectores de energía por vibraciones, celdas solares u otros dispositivos de recolección de energía como fuentes de alimentación.

A continuación se muestran los componentes que un nodo sensor debe tener y las tareas que deben ser capaces de realizar.

- Sensor: Su función es detectar magnitudes físicas o químicas.
- IC (circuito integrado): Su función es acondicionar la señal (amplifica, filtra y convierte la señal de analógica a digital).
- RF-transmisor: Su función es modificar la información para su transmisión.
- Antena: Su función es emitir la señal.
- Fuente de energía: Su función es energizar el nodo-sensor.

Hoy en día en la literatura se encuentran nodos que pueden ser energizados por recolectores de energía y que usan componentes comerciales tales como sensores y microcontroladores [43], [44], [45], [46], así como también se encuentran trabajos en los cuales ciertos componentes son manufacturados, tal como lo hicieron Lu *et al.* [43], Park et al [46]. Para diseñar adecuadamente un recolector de energía que pueda energizar algún nodo sensor una de las variables que se debe conocer es la resistencia de carga del dispositivo.

En la Tabla 4.1 se muestra datos de dos sensores y dos microcontroladores que pueden ser usados entre sí, con el fin de conocer el voltaje y corriente necesarios para poder energizar el sensor y el microcontrolador, y así poder conocer la resistencia de carga del nodo sensor R_n . La suma de la resistencia del nodo R_n y la resistencia pull up R_{pu} nos dará como resultado la resistencia de carga, estas resistencias se explican más adelante.

El sensor de temperatura y humedad SHT21 de Sensirion [47] fue utilizado por Lu *et al.* [43] con el microcontrolador con radio transmisor Si4010 de Silicon lab [48], de igual manera Lu *et al.* proponen un microcontrolador de menor volumen y con un consumo de energía menor que el microcontrolador comercial Si4010. El sensor de presión y temperatura BMP180 de Bosch [49] puede ser usado con el microcontrolador comercial Si4010. Estas configuraciones ya fueron usadas o son recomendaciones por el fabricante, por lo que se propondrán para el problema propuesto [48], [43], [49].

Tabla 4.1 Datos de sensores y circuitos integrados encontrados en la literatura.

Sensor SHT21 de temperatura y humedad		
	Condición	
Voltaje consumo	Temperatura < 60°C	3V
Consumo de corriente	En stand by	0.15 μ A
	Midiendo	300 μ A
Energía disipada	En stand by	0.5 μ W
	Midiendo	0.9 mW
Resolución de 12 bits	Humedad y temperatura	0.04 %RH y °C
Circuito Integrado Si 4010		
	Condición	
Consumo Voltaje	Temperatura -45 a 85°C	1.8 – 3.6V (usada es 3V)
Consumo de corriente	En stand by	10 nA
	En uso	10 mA
Energía disipada	En stand by	0.03 μ W
	En uso	0.03 W
Resistencia Pull up		10K Ω (puede ser otra)
Transmisión de datos	Dura 10ms	15mA
Comunicación		30ms

Microcontrolador Fabricado por Lu et al. [43]		
	Condición	
Voltaje		1.55 - 3V (3V por el sensor)
Consumo de corriente	En stand by	-
	Midiendo	15 μ A
Energía disipada	En stand by	-
	Midiendo	45 μ W
Resistencia Pull up		100K Ω
Transmisión de datos	Dura 4ms	10mA
Tiempo de medición y comunicación		300ms
Sensor BMP180 de presión y temperatura		
	Condición	
Voltaje		1.8 – 3.6V estándar 2.5V
Consumo de corriente	En stand by	0.1 μ A
	Midiendo	5 μ A
Energía disipada	En stand by	0.25 μ W
	Midiendo	12.5 μ W
Tiempo	Estándar	7.5 ms
Resolución	Presión y temperatura 12 bits	0.05 hPA y 0.04°C

4.1.1. Resistencia requerida del nodo sensor (R_l)

Conociendo el consumo de corriente de cada componente de un nodo se puede calcular la resistencia de este, así como su resistencia pull up, la cual es conectada entre la fuente de voltaje positivo y la señal lógica, y su función es asegurar una señal lógica válida, la cual es necesaria conocer para determinar la resistencia de carga R_l de nuestro recolector de energía piezoeléctrico. La resistencia de carga R_l es la simplificación del circuito a energizar, y el problema propuesto busca energizar un nodo sensor. El circuito a energizar tendría la forma de la Figura 4.1, donde R_{pu} es la resistencia pull-up, R_n es la suma de la resistencia del nodo y V_{cc} es el voltaje en corriente continua.

Cabe recordar que los modelos propuestos calculan el voltaje y potencia alternante, pero en aplicaciones prácticas se requiere de un voltaje directo estabilizado, como resultado se debe usar un convertidor AC-DC conectado al piezoeléctrico.

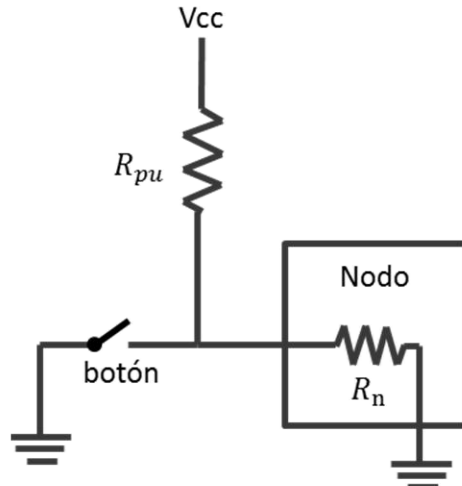


Figura 4.1 Circuito de la resistencia pull up.

La Figura 4.2 muestra al recolector de energía piezoeléctrico conectado al rectificador usado para convertir la corriente alterna saliente del recolector de energía a corriente continua (rectificador AC-DC), el rectificador AC-DC de onda completa es seguido por un capacitor de filtrado, el cual eliminará el rizado de la señal pulsante rectificada, seguido de la resistencia de carga R_l .

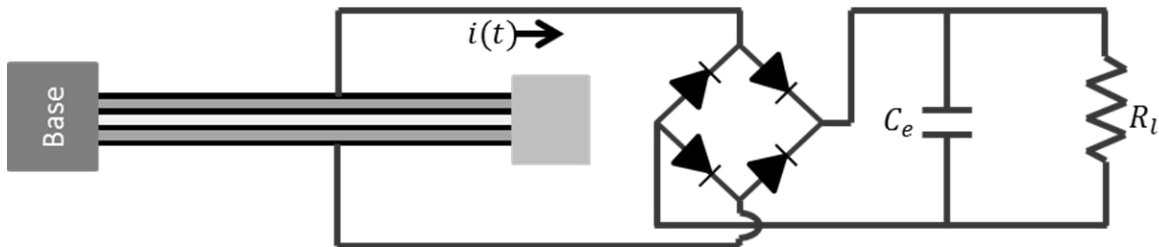


Figura 4.2 Recolector de energía piezoeléctrico conectado a un rectificador AC-DC de onda completa.

La corriente $i(t)$ que fluye por el circuito recolector AC-DC está dado por

$$i(t) = \begin{cases} C_e \dot{v}_c(t) + \frac{v_c(t)}{R_l} & \text{si } v_p = v_c \\ -C_e \dot{v}_c(t) - \frac{v_c(t)}{R_l} & \text{si } v_p = -v_c \\ 0 & \text{si } |v_p| < v_c \end{cases} \quad (4.1)$$

Donde C_e es el capacitador de filtrado, usado para filtrar el rizado dando como resultado una corriente continua, v_c es el voltaje rectificado y v_p el voltaje generado por el piezoeléctrico. El voltaje rectificado es independiente del capacitador de filtrado si la constante de tiempo $R_l C_e$ es mucho más grande que el periodo de oscilación [16]. Para describir la corriente dada por la ecuación anterior, Shu *et al.* [50] resume el funcionamiento principal de un puente ideal de rectificación de la siguiente manera. El puente está abierto si $|v_p| < v_c$ por lo que la corriente no fluye. Cuando $|v_p|$ alcanza v_c , el puente conduce y el voltaje del piezoeléctrico es rectifico

$|v_p| = v_c$. La conductancia es bloqueada de nuevo cuando v_p comienza a disminuir. Por lo tanto, ya sea que v_p cambie proporcionalmente con $y(t)$ cuando el puente bloquea, o es igual a v_c cuando el puente conduce.

La ecuación propuesta por Shu et al. [50] para el cálculo del voltaje rectificado es

$$v_c = \frac{2\theta R_l \omega}{2C_p R_l \omega + \pi} Z_0 \quad (4.2)$$

Donde θ es el coeficiente de acoplamiento, π es pi, Z_0 es la amplitud del desplazamiento de la base. Para nuestro caso de estudio necesitamos que $v_p = v_c$.

Como se muestra en la Tabla 4.2, conociendo el voltaje requerido y realizando la sumatoria de corriente de los componentes (sensor y circuito integrado), se puede determinar la resistencia del nodo R_n por medio de la ley Ohm. Donde la resistencia de carga R_l será calculada mediante la suma de la resistencia pull-up R_{pu} y la suma de la resistencia del nodo R_n .

Tabla 4.2 Resistencia de los nodos

Componentes	Voltaje (V)	Corriente (mA)	Resistencia del nodo R_n (Ω)	Resistencia pull up R_{pu} (K Ω)	Resistencia de carga R_l (Ω)
SHT21 y Si4010	3	25.3	118	10	10,118
SHT21 y IC Fabricado Lu et al	3	10.315	290	300	300,290
BMP 180 y Si4010	2.5	25.005	100	10	10,100

DuToit et al.[6] proponen la siguiente ecuación para el cálculo de la resistencia de carga óptima en corto circuito, ver la formulación de la ecuación (2.60).

$$R_{opt,sc} = \frac{2\zeta_m}{\left\{2\zeta_m + \left[\frac{\theta^2}{KC_p}\right]\right\} \omega_N C_p} \quad (4.3)$$

Usando la ecuación anterior podemos calcular la resistencia de carga óptima máxima. Esta resistencia marcará el límite para poder trabajar con los modelos propuestos en este trabajo. Con los datos del problema propuesto en la siguiente sección en la Tabla 4.4, la resistencia máxima en corto circuito obtenida es $R_{opt,sc} = 18,492.57$ Ohm. Comparando las resistencias de carga mostradas en la Tabla 4.2, podemos ver que con el sensor SHT21 y el IC Fabricado por Lu et al, no es posible predecir adecuadamente la energía con los modelos propuestos, por lo que solo nos centraremos en las otros dos configuraciones para el problema propuesto.

Una vez conocida la resistencia de carga se puede saber si es posible energizar el dispositivo, en dado caso se puede diseñar el recolector de energía piezoeléctrico para que esté en condiciones de corto circuito y poder usar los modelos propuestos.

Ya que se espera que los nodos sensores puedan operar de manera autónoma, la fuente de energía debe ser capaz de cubrir esa necesidad, por lo que es importante conocer la resistencia de carga y diseñar el recolector para energizar el nodo.

4.2. Problema de optimización

El rango de frecuencias que se encuentran en el medio ambiente es de 100 a 300 Hz de acuerdo a los datos registrados del medio ambiente y las consideraciones de diseño tomadas por duToit *et al.* [6]. Para la resolución del problema propuesto es conveniente solo tomar en cuenta las ecuaciones para el primer modo de vibración para el modelo de parámetros distribuidos. Ya que se necesita un modelo robusto para poder compararlo con el modelo Propuesto 3 se decide usar el modelo parámetros distribuidos.

El problema a optimizar busca que la potencia sea máximo en el rango de frecuencia que se encuentra en el medio ambiente, el cual es de 100 a 300Hz, por lo que se dimensionará la viga para que en este rango la potencia sea máxima. Dado que la corriente es mayor en corto circuito que en circuito abierto, es conveniente diseñar el recolector de energía piezoeléctrico en condiciones de corto circuito. Ya que la potencia está en función del voltaje por medio de la ecuación $P = v^2/R_l$ y la resistencia de carga permanece constante, nuestro modelo analítico propuesto puede ser usado.

4.2.1. Planteamiento del problema de optimización

En la Figura 4.3 a) se muestra la respuesta ideal deseada del diseño del recolector de energía, ya que de 100 a 300 Hz el voltaje se mantiene máximo durante ese rango. Dado que la física de los piezoeléctricos no permite un comportamiento de ese tipo, si no que la gráfica es en forma de campana como se muestra en la Figura 4.3 b), se propondrá una formulación al problema de optimización.

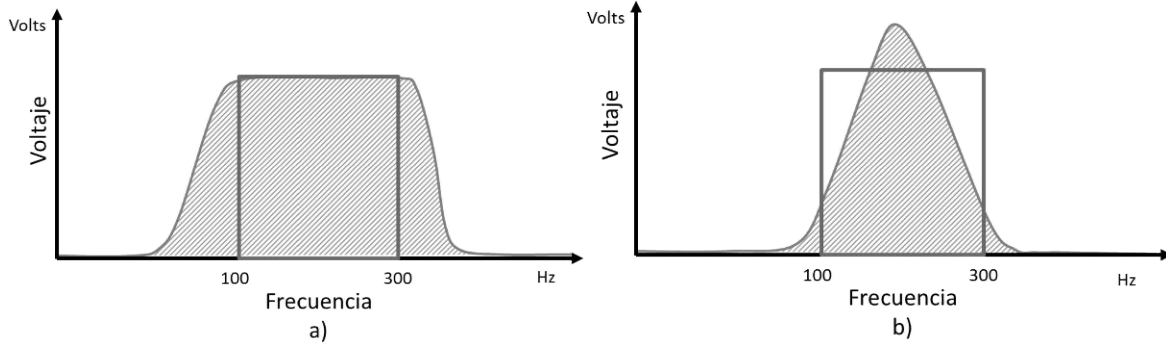


Figura 4.3 a) Respuesta ideal deseada, y b) posible resultado de acuerdo a la física del problema.

El problema de optimización se puede entender como el de desear maximizar el área debajo de la curva de entre 100 y 300 Hz que es el área de interés. Para esto utilizaremos la regla de Simpson que es un método de integración numérica para obtener el valor aproximado de integrales definidas. Como se planea dividir en varios intervalos el rango, usaremos la regla de Simpson 1/3 compuesta, el intervalo de 100 a 300 Hz lo dividiremos en n subintervalos iguales (n debe ser par), de manera que $h = (100 - 300)/n$. La regla compuesta está dada por:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + f(x_n)] \quad (4.4)$$

Para el problema propuesto de maximizar la potencia del recolector de energía piezoeléctrico, se tomó un piezocerámico PSI-5A de composición de titanato zirconato de plomo, Navy tipo II, lo cual indica que su permitividad y elasticidad es alta.

Las propiedades geométricas de la viga en cantiléver bimorfa y las propiedades del material PSI-5A4E de PIEZO SYSTEMS, INC. [51] para este caso de estudio se encuentran en la Tabla 4.4. Dado que la relación largo contra espesor total de la viga es de 63.6, es razonable asumir que la deformación por cortante y los efectos de la inercia por la rotación de la viga sean despreciables para los primeros modos de vibración (esto de acuerdo a la teoría de vigas de Euler Bernoulli). Para el análisis se consideró un rango de frecuencia de 100 a 300Hz, el cual corresponde al rango de frecuencias que se encuentran en el medio ambiente.

En un sistema se hablan de dos valores, la frecuencia natural y la frecuencia propia. La frecuencia natural ω_N es aquella en la que se asume el amortiguamiento como nulo, por lo que el sistema seguirá vibrando, después que se quita la señal de excitación. La frecuencia propia ω_p es la que el sistema oscila siempre y cuando esté presente la señal de excitación. La diferencia entre ambas radica únicamente en el amortiguamiento. La diferencia porcentual entre una y otra para distintos valores del coeficiente de amortiguamiento ζ_m se muestra en la Tabla 4.3.

De acuerdo con la literatura el porcentaje de la frecuencia más utilizado en pruebas experimentales en laboratorio es el de 0.0078% por lo que se adoptara para nuestro caso de estudio, usando un coeficiente de amortiguamiento $\zeta_m = 0.008944$. Este porcentaje puede ser modificado de acuerdo a la aplicación que se le dé al recolector de energía.

Tabla 4.3 Diferencia porcentual entre la frecuencia natural y propia para distintos valores del coeficiente de amortiguamiento.

ζ_m	ω_p/ω_N	$\Delta\omega$
0.004472	0.99999	0.0013%
0.006325	0.99998	0.0034%
0.007746	0.99997	0.0056%
0.008944	0.99996	0.0078%
0.01000	0.99995	0.01%
0.02000	0.99980	0.02%
0.05000	0.99875	0.13%
0.10000	0.99499	0.50%
0.20000	0.97980	2.02%
0.50000	0.86603	13.40%
0.75000	0.66144	33.86%

El caso de estudio propuesto se evaluará con la resistencia de carga de acuerdo a la necesidad de los nodos sensores. Tal como se mostró en la sección anterior, la resistencia de carga máxima en corto circuito para el problema propuesto es de 18,492.57 Ohm, por lo que solo es posible trabajar con las dos configuraciones de los sensores SHT21 (temperatura y humedad) y BMP 180 (presión y temperatura) conectándolos cada uno al circuito integrado Si4010 encargado de filtrar y enviar la información, estas configuraciones son mostradas en la Tabla 4.2.

Tabla 4.4 Propiedades geométricas y del material PSI-5A.

Propiedades	Piezocerámico PSI-5A4E [51]	Shim (latón)
Largo (L) (mm)	$0 \leq L \leq 31.8$	$0 \leq L \leq 31.8$
Ancho (b) (mm)	$0 \leq b \leq 3.18$	$0 \leq b \leq 3.18$
Largo de masa adjunta (L_M) (mm)	$0 \leq L_M \leq 3.18$	
Espesor (h_p, h_s) (mm)	0.2 (c/u)	0.1
Factor piezoeléctrico (d_{31}) (pm/V)	-190	-
Constante de acoplamiento \bar{e}_{31} (C/m ²)	-12.54	-
Permitividad (ϵ_{33}^S) (nF/m)	15.937	-
Rigidez (c_{11}^E, Y_s) (GPa)	52	105
Densidad (ρ_p, ρ_s) (kg/m ³)	7800	9000
Esfuerzo permisible σ_a (Pa)	20MPa	

Usando las ecuaciones (2.132) y (3.24) para la obtención del voltaje, y obteniendo la potencia eléctrica por medio de la ecuación $P = v^2/R_l$, el problema de optimización se puede plantear de la siguiente forma, para maximizar la potencia:

$$\min_{\omega} - \int_{\omega=100}^{\omega=300} P(\omega) \approx \frac{h}{3} [P(\omega_0) + 4P(\omega_1) + 2P(\omega_2) + 4P(\omega_3) + 2P(\omega_4) + \dots + P(\omega_n)] \quad (4.5)$$

Sujeto a

$$\sigma_e = -d_{31} \frac{c_{33}^E}{2h_{\bar{p}}} v < \sigma_a$$

$$1 < L < 31.8\text{mm}, \quad 1 < b < 3.18\text{mm},$$

$$0 < L_M < 3.18\text{mm}$$

La primera restricción corresponde al esfuerzo generado en el piezocerámico, y debe ser menor al permisible σ_a . Las siguientes restricciones corresponden a los límites de las variables, largo L y ancho b de la viga, y dimensión L_M de la masa adjunta con forma cúbica, como se muestra en la Figura 4.4. Cabe comentar que la masa adjunta en la punta para los modelos propuestos es considerada como una masa concentrada en la punta, ignorando la forma geométrica. De tal forma que la variable L_M es considerada por los modelos propuestos para la obtención de la masa en forma de cubo M_t . Los límites superiores de las vigas piezocerámicas corresponden a la dimensión comercial actual del piezocerámico [51].

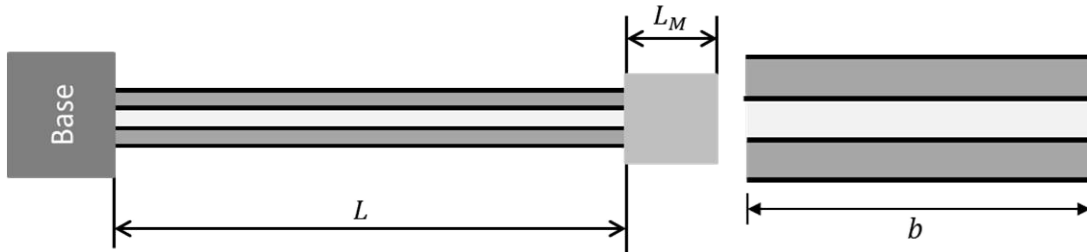


Figura 4.4 Variables a dimensionar del recolector de energía piezoeléctrico a diseñar.

La resolución del problema propuesto para ambas configuraciones de nodos, se realizó por medio la función de Matlab [52] *fmincon*, ya que esta función permite encontrar el mínimo de una función no lineal con múltiples variables y restricciones. Con el fin de ayudar al optimizador a ponderar de manera correcta las variables y que cada una tenga el mismo peso al optimizar, se decidió normalizar las restricciones, por lo que el problema de optimización sería:

$$\min_{\omega} - \int_{\omega=100}^{\omega=300} P(L, b, L_M) \approx \frac{h}{3} [P_1 + 4P_2 + 2P_3 + 4P_4 + 2P_5 + \dots + P_n] \quad (4.6)$$

Sujeto a

$$\frac{-d_{31}c_{33}^E v}{h_{\bar{p}}40 \times 10^6} < 1$$

$$0 < L < 1, \quad 0 < b < 1, \quad 0 < L_M < 1$$

Para establecer el criterio de convergencia del problema se establecieron dos tolerancias, tolerancia a la función, $TolFun$ con un valor de 1×10^{-6} y la tolerancia para las variables, $TolX$ con un valor de 1×10^{-10} . El primer criterio se cumplirá cuando la respuesta de la función de la iteración anterior menos la iteración actual sea menor a $TolFun$, como se muestra en la siguiente ecuación.

$$\int_{\omega=100}^{\omega=300} P(L, b, L_M)_{i-1} - \int_{\omega=100}^{\omega=300} P(L, b, L_M)_i < TolFun \quad (4.7)$$

El segundo criterio se cumplirá cuando las variables con las que se evaluó la función en la iteración anterior menos las variables con las que se evaluó la función en la iteración actual sea menor que $TolX$. Cuando ambos criterios de convergencia se cumplen la optimización finaliza, ver Figura 4.5.

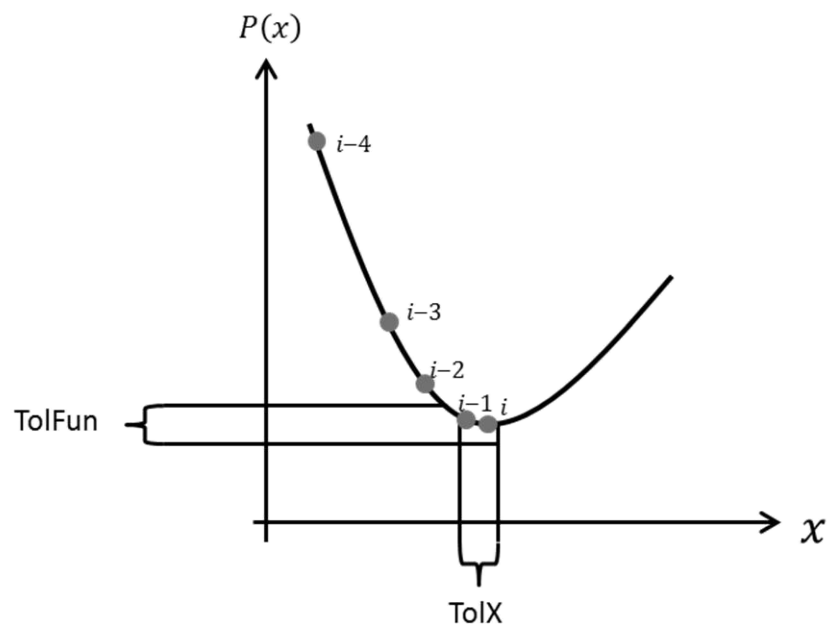


Figura 4.5 Cumplimiento de los criterios de convergencia del problema de optimización.

4.2.2. Solución del problema optimización

Debido a que la resistencia de carga para SHT21 con Si4010 y BMP180 con Si4010 son parecidas, 10100 y 10118 ohms para cada nodo respectivamente, las respuestas para cada configuración son muy similares, por lo que se propone solo dar solución a la configuración SHT21 con Si4010, ya que su resistencia de carga es la mayor.

Se resolvió el problema propuesto con los datos obtenidos de la Tabla 4.4 y para la configuración del nodo SHT21 y Si4010 con ambos modelos. Las respuestas al problema de optimización se muestran en la Tabla 4.5, de igual manera se muestra la resistencia de carga óptima para cada problema. Se puede ver en la Tabla 4.5 que para ambos modelos el número de iteraciones y

llamadas a la función pero con la gran diferencia que el tiempo de optimización para el Propuesto 3 es menor al 0.5% del tiempo que le toma al parámetros distribuidos.

Tabla 4.5 Respuesta al problema propuesto con ambos nodos.

Datos	SHT21 y Si4010 Param. Dist	SHT21 y Si4010 Propuesto 3
Tiempo (s)	411.06	1.38
Iteraciones	28	24
Llamadas a la función	118	105
Área bajo la curva (W)	0.04408	0.03328
Largo (mm)	31.8	21.4
Ancho (mm)	3.18	3.18
Lado masa (mm)	0	3.18
Frec. resonancia (Hz)	205	195
Resistencia carga optima (Ohm)	11329	13123
Resistencia de carga usada	10118	10118
Diferencia entre resistencias	1211	3005

La respuesta del optimizador con el modelo de parámetros distribuidos fue la esperada, tal como se mostró en la Figura 4.3 b, ya que la frecuencia de resonancia de 205 Hz permite que la campana se localice en el centro para poder abarcar un área mayor. Las dimensiones de la viga son las máximas, permitiendo al dispositivo recolectar una mayor cantidad de energía, y el no tener la masa adjunta en la punta resulta en que la campana sea más ancha, ocupando una mayor área en el rango de interés.

Las respuestas del optimizador con el modelo Propuesto 3 corresponden a una frecuencia de resonancia de 195 Hz, lo que permite que la campana se localice en el centro para poder abarcar un área mayor. Sin embargo, en cuestión de las dimensiones de la viga, el largo no es el máximo y el recolector cuenta con una masa en la punta haciendo que la gráfica en forma de campana sea más estrecha y no ocupe una mayor área. Esto es debido a que al incluir una masa en la punta se incrementa la fuerza debido a la inercia, provocando que se recolecte un mayor voltaje solo cuando este es máximo, en la zona de resonancia.

Como se había mencionado anteriormente, al usar una resistencia de carga cercana a la resistencia de carga óptima en corto circuito, el modelo Propuesto 3 tenderá a separarse del modelo parámetros distribuidos antes y después de la zona de resonancia del modelo al disminuir la diferencia entre la resistencia de carga óptima y la resistencia de carga, por lo que también disminuirá el área bajo curva, ver Figura 3.7.

4.2.3. Comparación de resultados

A continuación se compararán los resultados del modelo de Parámetros distribuidos y del modelo Propuesto 3. Para esto, se usaran los resultados del modelo de Parámetros distribuidos y se introducirán en el modelo Propuesto 3 y viceversa.

En la Tabla 4.6 se muestran las áreas bajo la curva en el rango de 100 a 300 Hz de los resultados obtenidos con el optimizador al ser calculados con ambos modelos. También se muestran las resistencias de carga óptima y la resistencia de carga usada, además de la diferencia entre ellas.

Tabla 4.6 Área bajo la curva de los resultados obtenidos y sus respectivas resistencias de carga óptima y la resistencia de carga usada.

Datos	Resultados	Param. Dist	Propuesto 3
Área con Param. Distribuidos (W)		0.04408	0.04362
Área con Propuesto 3 (W)		0.03303	0.03328
Resistencia carga óptima (Ohm)		11329	13123
Resistencia de carga usada (Ohm)		10118	10118
Diferencia entre resistencias (Ohm)		1211	3005

En la tabla anterior se puede observar que con el Propuesto 3 siempre se obtuvo una menor área bajo la curva, esto debido a que la resistencia de carga usada está cerca de la óptima para todos los casos. También se puede observar que la mayor área obtenida en el Propuesto 3 es cuando la diferencia entre las resistencias es mayor.

Se usaron los resultados obtenidos del problema de optimización con el modelo de Parámetros distribuidos y se introdujeron en el modelo Propuesto 3, y graficando con ambos modelos el voltaje y potencia se obtuvieron la Figura 4.6 a) y c) respectivamente. Se puede notar en las gráficas que en la frecuencia de resonancia el voltaje y la potencia casi concuerdan. También se nota que no concuerdan antes y después de la frecuencia de resonancia, lo cual se debe a que la resistencia de carga óptima para este problema es de 11329 ohm. En el capítulo anterior se comentó que al usar una resistencia de carga cercana a la resistencia de carga óptima (10118 ohm), el modelo Propuesto 3 puede representar el problema pero las curvaturas tienden a separarse. Cuando la diferencia de ambas resistencias es pequeña la diferencia del área bajo la curva se reduce, ver Figura 3.7 a) y b).

También se usaron los resultados obtenidos con el modelo Propuesto 3 y se introdujeron en el modelo de Parámetros distribuidos. Graficando para el voltaje y potencia se obtuvieron la Figura 4.6 b) y d) respectivamente. Se puede notar en las gráficas que en la frecuencia de resonancia el

voltaje y la potencia casi concuerdan. También se nota que no concuerdan antes y después de la frecuencia de resonancia, lo cual se debe a que la resistencia de carga óptima para este problema es de 13123 ohm. En el capítulo anterior se comentó que al usar una resistencia de carga por debajo de la resistencia de carga óptima (10118 ohm), el modelo Propuesto 3 puede representar el problema pero las curvaturas tienden a separarse. Cuando la diferencia de ambas resistencias es pequeña la diferencia del área bajo la curva se reduce, ver Figura 3.7 a) y b).

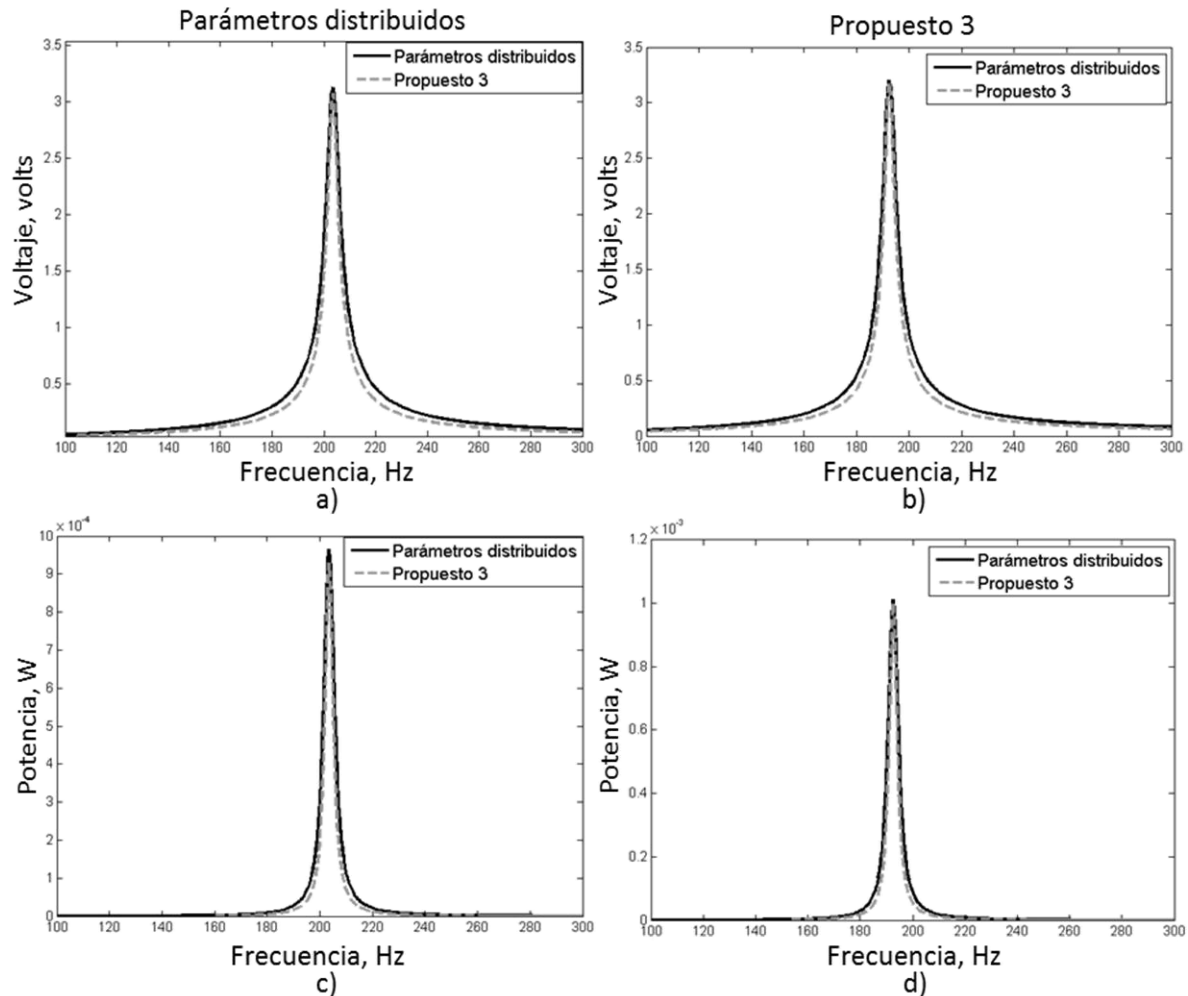


Figura 4.6 Gráfica de voltaje y potencia contra rango de frecuencia, usando los datos obtenidos del problema resuelto.

La diferencia entre los resultados obtenidos del problema propuesto con ambos modelos, se debe a la diferencia entre la resistencia de carga óptima y la resistencia de carga usada. El modelo Propuesto 3 tenderá a separarse del modelo de parámetros distribuidos antes y después de la zona de resonancia al disminuir la diferencia entre la resistencia de carga óptima y la resistencia de carga, por lo que también disminuirá el área bajo curva, por ejemplo véase Figura 3.7 a) y b).

Para aumentar el área bajo la curva el modelo Propuesto 3 recorta el largo de la viga y agrega una masa en la punta, ya que en la ecuación (3.24) para calcular el voltaje, se puede apreciar que si

disminuye el largo de la viga aumentará el voltaje. Sin embargo al disminuir el largo de la viga aumentará la magnitud de la frecuencia de resonancia. Dado que para maximizar el área bajo la curva se espera que la frecuencia de resonancia sea cercana a los 200 Hz, para contrarrestar el incremento en la magnitud de la frecuencia de resonancia el optimizador agrega la masa en la punta, volviendo a situar la frecuencia resonancia cerca de los 200 Hz.

4.3. Análisis de sensibilidad

Para entender el comportamiento de los modelos y comprobar que nuestro modelo está realmente modelando el fenómeno piezoeléctrico, y comprender los resultados obtenidos por el optimizador y ver la necesidad de la función de acoplamiento para nuestro modelo, se decidió realizar un análisis de sensibilidad, por lo que se decidió variar una de las variables (L, b, L_M) y dejando las otras dos constantes.

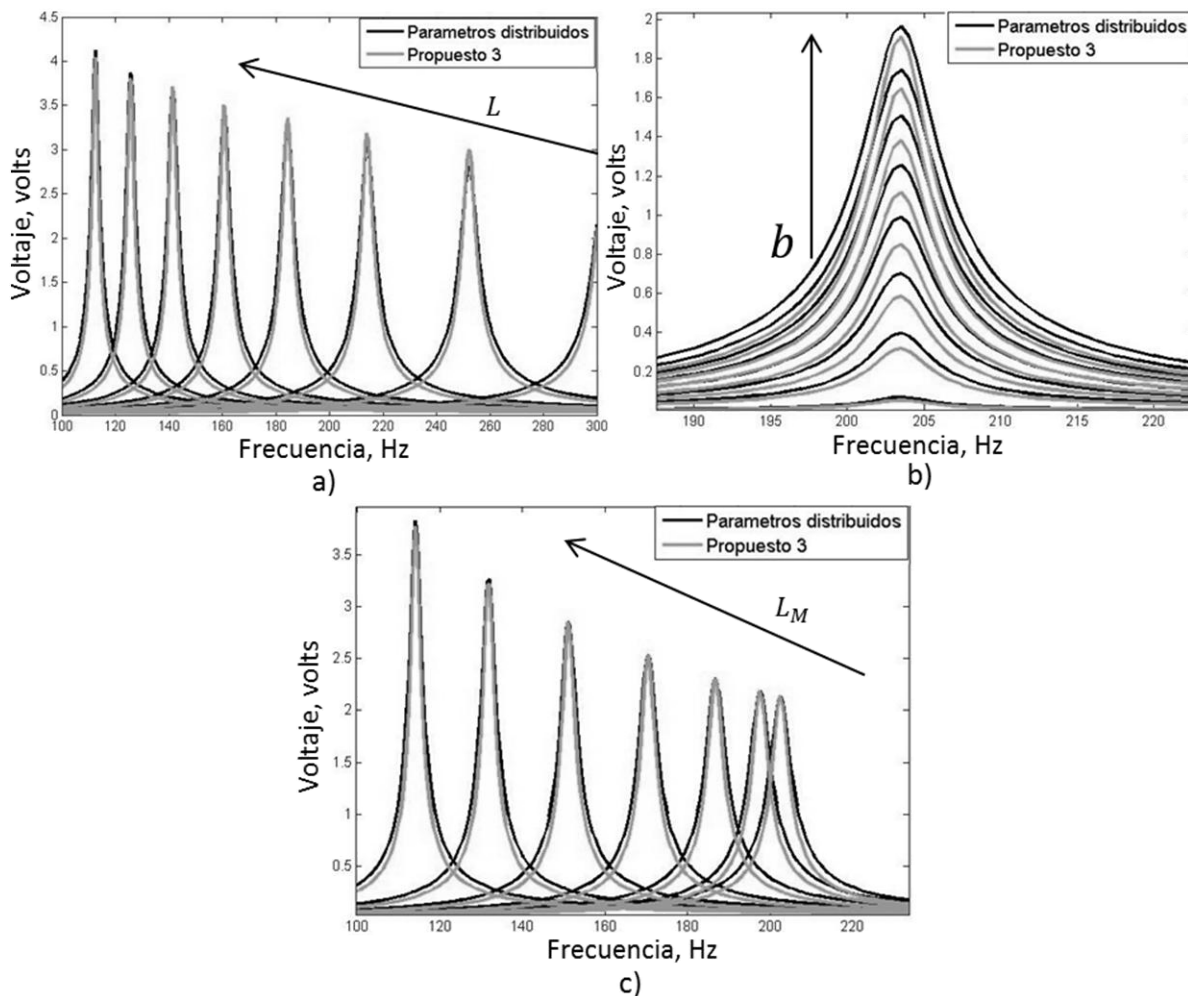


Figura 4.7 Análisis de sensibilidad para los modelos de Parámetros distribuidos y Propuesto3

Para la Figura 4.7 a) se varió el largo de la viga dejando constante el máximo ancho de la viga y la masa adjunta ($b = 3.18\text{mm}, L_M = 3.18\text{mm}$) con la resistencia de carga de nodo sensor SHT21 y Si4010, donde se puede apreciar que al aumentar L el voltaje aumenta, disminuye la magnitud de la frecuencia de resonancia y el error entre los modelos también incrementa. El área bajo la curva varia al aumentar L , en la Tabla 4.7 se muestra el área bajo la curva del voltaje obtenido para ambos modelos, se puede apreciar que el valor más alto es con el largo de 21.4mm, respuesta del optimizador.

Tabla 4.7 Área bajo la curva del análisis de sensibilidad para el largo de la viga

Largo (mm)	Área Pará. distribuidos (volts)	Área Propuesto 3 (volts)
17.8	434.5019	333.0072
19.8	440.4641	334.4247
21.4	441.3472	336.7270
21.8	412.1845	317.2153
23.8	382.4727	290.1815
25.8	350.0386	261.5560
27.8	314.6275	231.2066
29.8	271.7320	195.8860
31.8	188.0445	134.0948

Para la Figura 4.7 b) se varió el ancho de la viga dejando constante el máximo largo de la viga y sin masa adjunta ($L = 31.8\text{mm}, L_M = 0$) con la resistencia de carga de nodo sensor SHT21 y Si4010, donde se puede apreciar que al aumentar b el voltaje aumenta, la magnitud de la frecuencia de resonancia se mantiene, el error entre los modelos disminuye y el área bajo la curva aumenta.

Para la Figura 4.7 c) se varió la masa adjunta dejando constante el máximo ancho y largo de la viga ($b = 3.18\text{mm}, L = 31.8\text{mm}$) con la resistencia de carga de nodo sensor SHT21 y Si4010, donde se puede apreciar que al aumentar L_M el voltaje aumenta, disminuye la magnitud de la frecuencia de resonancia y el error entre los modelos también incrementa. El área bajo la curva varia al aumentar L_M .

Largo masa (mm)	Área Pará. distribuidos (volts)	Área Propuesto 3 (volts)
0	446.0014	334.1975
0.4	407.0202	320.4319
0.8	409.6285	322.6572
1.2	415.5033	327.7793
1.6	423.3345	330.0304
2	430.0760	332.1776
2.4	432.0681	333.1648
2.8	422.4351	335.4027

Ambas soluciones obtenidas por el optimizador con los modelos Propuesto 3 y Parámetros distribuidos son los máximos en ambas tablas Tabla 4.6 y Tabla 4.7. Validando la respuesta del optimizador.

A pesar que el modelo Propuesto 3 represente el fenómeno piezoeléctrico es necesario incluir en el modelo Propuesto 3 una función de acoplamiento electromecánico, ya que la falta del cálculo de la retroalimentación del dominio eléctrico al dominio mecánico debido a la energía generada, hace que el Propuesto 3 tenga desfase en el máximo con respecto al modelo de parámetros distribuidos en el rango de frecuencias de 100 a 300 Hz.

Cabe recalcar que de acuerdo al análisis de sensibilidad la función de acoplamiento debe incluir el voltaje generado y las dimensiones del dispositivo (L, b, L_M).

4.4. Conclusiones

El objetivo final de los recolectores de energía piezoeléctricos es energizar pequeños dispositivos electrónicos con baja demanda de energía, mediante el uso de la energía de las vibraciones disponibles en su entorno. Los nodos-sensores usados en las redes de sensores inalámbricas mostraron ser una buena opción para usar los recolectores como fuentes de energía, debido a su bajo requerimiento de energía. Sin embargo se debe considerar el uso de una batería en los nodos para almacenar energía, ya que las vibraciones en el medio ambiente no son constantes. Como se mencionó en la Sección 2.1.1, la capacidad de un elemento piezoeléctrico para cargar una batería ya ha sido investigada previamente [15]. De lo cual se concluyó que ciertos piezocerámicos no son muy adecuados para esta aplicación, ya que la generación de corriente es insuficiente. Pero al operar el dispositivo en condiciones de corto circuito se puede mitigar este problema.

Uno de los términos importantes que se deben conocer para el diseño de un recolector de energía es la resistencia de carga R_L , ya que al estar por debajo de la resistencia de carga óptima (ecuación (2.60)) se puede prever que el modelo propuesto predecirá adecuadamente la energía obtenida en corto circuito, así como la frecuencia natural, para el efecto de diseñar el recolector de energía.

El problema a optimizar busca que la potencia sea máximo en el rango de frecuencia que se encuentra en el medio ambiente, el cual es de 100 a 300Hz, por lo que se dimensionará la viga para que en este rango el área bajo curva de la potencia sea máxima. Para esto se usó la regla de Simpson, que es un método de integración numérico para obtener el valor aproximado de la integral definida.

En la Figura 4.3 a) se mostró la respuesta ideal deseada del diseño del recolector de energía, ya que de 100 a 300 Hz el valor se mantiene máximo durante ese rango. La física de los piezoeléctricos no permite un comportamiento de ese tipo, si no que la gráfica es en forma de campana como se muestran en la Figura 4.3 b). Para maximizar el área se espera que el resultado

de las dimensiones de la vigas sean las máximas, ya que entre mayor cantidad de material piezoeléctrico, mayor la energía recabada. La masa en la punta reduce la magnitud de la frecuencia de resonancia y aumenta el voltaje y energía en la frecuencia de resonancia, pero al agregar la masa en la punta disminuye el área bajo la curva, un factor no deseado en el problema de optimización [16]. Para maximizar el área bajo la curva también se espera que la frecuencia de resonancia sea cercana a los 200 Hz, ya que si la gráfica se sitúa en el centro del rango es más probable que ocupe una mayor área.

Las respuestas al problema propuesto para cada modelo se muestran en la Tabla 4.5, de igual manera se muestra la resistencia de carga óptima para cada problema.

Como se había mencionado anteriormente, la diferencia entre los resultados obtenidos del problema propuesto de ambos modelos, se debe a la diferencia entre la resistencia de carga óptima y la resistencia de carga. El modelo Propuesto 3 tenderá a separarse del modelo parámetros distribuidos antes y después de la zona de resonancia del modelo al disminuir la diferencia entre la resistencia de carga óptima y la resistencia de carga, por lo que también disminuirá el área bajo curva.

A pesar que el modelo Propuesto 3 represente el fenómeno piezoeléctrico es necesario incluir en el modelo Propuesto 3 una función de acoplamiento electromecánico, ya que la falta del cálculo de la retroalimentación del dominio eléctrico al dominio mecánico debido a la energía generada, hace que el Propuesto 3 tenga desfase en el máximo con respecto al modelo de parámetros distribuidos en el rango de frecuencias de 100 a 300 Hz. Cabe recalcar que a menor resistencia de carga requerida, la energía generada será menor, y la necesidad de esta función de acoplamiento faltante disminuye. Por el contrario, a mayor resistencia de carga la función de acoplamiento se vuelve indispensable para que el Propuesto 3 estime adecuadamente la energía generada, por lo que esta deberá estar en función del voltaje generado e incluir las dimensiones del dispositivo (L, b, L_M).

El fabricante proporciona un coeficiente de acoplamiento k_{31} , este se describe como la capacidad de un material piezoeléctrico para convertir la energía eléctrica en energía mecánica y viceversa. Es una medida de la magnitud del efecto piezoeléctrico, no es una eficiencia. El factor de acoplamiento se determina por la raíz cuadrada de la división de la energía eléctrica obtenida entre la energía mecánica aplicada. Este coeficiente se puede expresar mediante otras constantes piezoeléctricas, tal como $k_{31}^2 = d_{31}^2 / s_{11}^E \epsilon_{33}^T$. Dado que este coeficiente involucra la parte eléctrica y mecánica pudiera servir en un trabajo futuro para poder incluir una función de acoplamiento al modelo Propuesto 3.

En la Tabla 4.6 se pudo observar que el Propuesto 3 obtuvo siempre una menor área bajo la curva, esto debido a que la resistencia de carga usada está cerca de la óptima para todos los casos. También se pudo observar que la mayor área es obtenida cuando la diferencia entre las resistencias es mayor, además de que se puede observar que el tiempo de optimización para el Propuesto 3 es menor al 0.5% del tiempo que le toma al parámetros distribuidos.

Para incrementar la diferencia entre las resistencias, para que el Propuesta 3 prediga de mejor manera la energía obtenida, es necesario disminuir la resistencia carga necesaria para energizar el dispositivo (nodo-sensor). Hoy en día varios investigadores están desarrollando nuevos dispositivos con un consumo de energía menor, por lo que el modelo Propuesto 3 pudiera ser una buena opción para estos dispositivos en el futuro.

Conclusiones

Se analizaron y reprodujeron modelos analíticos existentes, concluyendo que los modelos no se adecuan a nuestro propósito, ya que SDOF presenta un error significativo fuera de la zona de resonancia, y el de sumatoria de energías y parámetros distribuidos representan un costo computacional significativo debido al cálculo de eigenvalores.

Por lo que se plantearon tres modelos con base al coeficiente experimental d_{31} .

- Propuesto 1. A un costo computacional bajo permite calcular el voltaje, el cual corresponde a trabajar con la resistencia de carga óptima en corto circuito, en la frecuencia de resonancia.
- Propuesto 2. A un costo computacional bajo permite calcular el voltaje, el cual corresponde a trabajar con la resistencia de carga óptima en corto circuito, en cualquier frecuencia.
- Propuesto 3. A un costo computacional bajo permite calcular el voltaje, a una resistencia que esté en condiciones de corto circuito, en cualquier frecuencia.

Al realizar la comparativa de los modelos existentes podemos concluir que el modelo de parámetros distribuidos es el modelo más robusto. El Propuesto 3, es el modelo más robusto de los modelos propuestos, obteniendo resultados comparables con los modelos en la literatura en un tiempo de respuesta menor.

El Propuesto 3 obtuvo resultados diferentes al de parámetros distribuidos, debido a las deficiencias al usar resistencias de cargas cercanas a la resistencia de carga óptima en corto circuito, a pesar de que en el análisis de sensibilidad, ambos modelos representen de la misma manera el fenómeno piezoeléctrico.

La falta del cálculo de la retroalimentación del dominio eléctrico al dominio mecánico debido a la energía generada, hace que el Propuesto 3 tenga desfase en el máximo con respecto al modelo de parámetros distribuidos en el rango de frecuencias de 100 a 300 Hz, por lo que es necesario incluir en el Propuesto 3 una función de acoplamiento electromecánico que calcule la retroalimentación del dominio eléctrico al dominio mecánico. Cabe recalcar que de acuerdo al análisis de sensibilidad la función de acoplamiento debe incluir el voltaje generado y las dimensiones del dispositivo (L, b, L_M).

El usar resistencias de carga no cercanas a la resistencia de carga óptima, mejora la predicción del voltaje. Por lo cual es deseable disminuir la resistencia carga necesaria para energizar algún dispositivo (nodo-sensor).

Contribuciones

Las contribuciones de la presente tesis se enlistan a continuación:

1. Comparativa de los modelos existentes y modelos propuestos, creando características a considerar al escoger que método utilizar para la reproducción del fenómeno piezoeléctrico.
2. Desarrollo de un modelo analítico que permita el cálculo del voltaje y la potencia generada de los recolectores de energía piezoeléctricos y el cual evite la mayor cantidad de cálculos que aumenten el costo computacional, por ejemplo el cálculo de los eigenvalores.
3. Se generó un modelo de optimización que permite maximizar la potencia en el rango de frecuencia que se encuentra en el medio ambiente, el cual es de 100 a 300Hz, proponiendo un diseño óptimo del piezocerámico para esto. La metodología usada para el problema de optimización puede ser extendido a problemas donde la resistencia de carga sea mínima en un rango de frecuencias de trabajo deseadas.

Trabajos futuros

Algunas posibles actividades a realizar para complementar el presente trabajo se enlistan a continuación:

1. Incluir en el modelo propuesto 3 una función de acoplamiento que esté en función del voltaje generado e incluya las dimensiones del dispositivo (L, b, L_M), con el fin de mejorar la representación del fenómeno piezoeléctrico en corto circuito.
2. Validar experimentalmente los modelos propuestos en este trabajo.
3. Realizar pruebas experimentales en el medio ambiente del problema de diseño presentado en este trabajo y compararlo con los datos obtenidos en este trabajo.
4. Incluir al modelo Propuesto 3 una función de acoplamiento que pueda representar el fenómeno piezoeléctrico en condiciones de circuito abierto.

Referencias

- [1] K. A. Cook-Chennault, N. Thambi, and A. M. Sastry, "Powering MEMS portable devices—a review of non-regenerative and regenerative power supply systems with special emphasis on piezoelectric energy harvesting systems," *Smart Mater. Struct.*, vol. 17, no. 4, p. 043001, 2008.
- [2] A. Erturk and D. J. Inman, "A Distributed Parameter Electromechanical Model for Cantilevered Piezoelectric Energy Harvesters," *J. Vib. Acoust.*, vol. 130, no. 4, pp. 041002–041002, Jun. 2008.
- [3] N. E. Dutoit, B. L. Wardle, and S.-G. Kim, "Design considerations for MEMS-scale piezoelectric mechanical vibration energy harvesters," *Integr. Ferroelectr.*, vol. 71, no. 1, pp. 121–160, 2005.
- [4] C. B. Williams and R. B. Yates, "Analysis of a micro-electric generator for microsystems," *Sens. Actuators Phys.*, vol. 52, no. 1–3, pp. 8–11, Mar. 1996.
- [5] S. Roundy, P. K. Wright, and J. M. Rabaey, *Energy Scavenging for Wireless Sensor Networks: With Special Focus on Vibrations*. Springer Science & Business Media, 2004.
- [6] N. E. Du Toit, "Modeling and design of a MEMS piezoelectric vibration energy harvester," Massachusetts Institute of Technology, 2005.
- [7] S. Meninger, J. O. Mur-Miranda, R. Amirtharajah, A. P. Chandrakasan, and J. H. Lang, "Vibration-to-electric energy conversion," *IEEE Trans. Very Large Scale Integr. VLSI Syst.*, vol. 9, no. 1, pp. 64–76, Feb. 2001.
- [8] S. Roundy, P. K. Wright, and J. Rabaey, "A study of low level vibrations as a power source for wireless sensor nodes," *Comput. Commun.*, vol. 26, no. 11, pp. 1131–1144, Jul. 2003.
- [9] T. Sterken, K. Baert, R. Puers, and G. Borghs, "Power extraction from ambient vibration," in *SeSens 2001*, 2001.
- [10] S. Boisseau, G. Despesse, and B. A. Seddik, "Electrostatic conversion for vibration energy harvesting," *ArXiv Prepr. ArXiv12105191*, 2012.
- [11] J. M. H. Lee, S. C. L. Yuen, W. J. Li, and P. H. W. Leong, "Development of an AA size energy transducer with micro resonators," in *Proceedings of the 2003 International Symposium on Circuits and Systems, 2003. ISCAS '03, 2003*, vol. 4, pp. IV–876–IV–879 vol.4.
- [12] H. Kulah and K. Najafi, "An electromagnetic micro power generator for low-frequency environmental vibrations," in *Micro Electro Mechanical Systems, 2004. 17th IEEE International Conference on. (MEMS), 2004*, pp. 237–240.
- [13] H. A. Sodano, D. J. Inman, and G. Park, "A review of power harvesting from vibration using piezoelectric materials," *Shock Vib. Dig.*, vol. 36, no. 3, pp. 197–206, 2004.
- [14] V. H. Schmidt, "Theoretical Electrical Power Output Per Unit Volume of PVF₂ and Mechanical-To-Electrical Conversion Efficiency as Functions of Frequency," in *1986 Sixth IEEE International Symposium on Applications of Ferroelectrics, 1986*, pp. 538–542.
- [15] H. A. Sodano, G. Park, D. J. Leo, and D. J. Inman, "Use of piezoelectric energy harvesting devices for charging batteries," 2003, vol. 5050, pp. 101–108.
- [16] A. Erturk and D. J. Inman, *Piezoelectric Energy Harvesting*. John Wiley & Sons, 2011.
- [17] J. Kymissis, C. Kendall, J. Paradiso, and N. Gershenfeld, "Parasitic power harvesting in shoes," in *Wearable Computers, 1998. Digest of Papers. Second International Symposium on, 1998*, pp. 132–139.
- [18] N. S. Shenck and J. A. Paradiso, "Energy scavenging with shoe-mounted piezoelectrics," *IEEE Micro*, vol. 21, no. 3, pp. 30–42, May 2001.

- [19] S. Kim, W. W. Clark, and Q.-M. Wang, "Piezoelectric energy harvesting using diaphragm structure," in *Smart Structures and Materials*, 2003, pp. 307–318.
- [20] E. F. Crawley and E. H. Anderson, "Detailed models of piezoceramic actuation of beams," *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 1, no. 1, pp. 4–25, 1990.
- [21] S. Roundy, P. K. Wright, and K. S. Pister, "Micro-electrostatic vibration-to-electricity converters," in *ASME 2002 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 2002, pp. 487–496.
- [22] O'Handley, K., "Converts low-level vibrations into usable electricity." Ferro Solutions, Inc., Oct-2003.
- [23] P. G.-J. M. El-hami, "Design and fabrication of a new vibration-based electromechanical power generator," *Sens. Actuators Phys.*, pp. 335–342, 2001.
- [24] E. P. James, M. J. Tudor, S. P. Beeby, N. R. Harris, P. Glynne-Jones, J. N. Ross, and N. M. White, "A wireless self-powered micro-system for condition monitoring," *Solid-State Sens. Actuators Eurosensors 2002*, 2002.
- [25] N. M. White, P. Glynne-Jones, and S. P. Beeby, "A novel thick-film piezoelectric micro-generator," *Smart Mater. Struct.*, vol. 10, no. 4, pp. 850–852, 2001.
- [26] S. Roundy and P. K. Wright, "A piezoelectric vibration based generator for wireless electronics," *Smart Mater. Struct.*, vol. 13, no. 5, p. 1131, Oct. 2004.
- [27] L. Meirovitch, *Fundamentals of Vibrations*, Edición: 1. Waveland Press, Inc., 2014.
- [28] N. W. Hagood, W. H. Chung, and A. V. Flotow, "Modelling of Piezoelectric Actuator Dynamics for Active Structural Control," *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 1, no. 3, pp. 327–354, Jul. 1990.
- [29] S. H. Crandall, *Dynamics of Mechanical and Electromechanical Systems*. Malabar, Fla: Krieger Pub Co, 1982.
- [30] H. Hosaka, K. Itao, and S. Kuroda, "Evaluation of energy dissipation mechanisms in vibrational microactuators," in *Micro Electro Mechanical Systems, 1994, MEMS'94, Proceedings, IEEE Workshop on*, 1994, pp. 193–198.
- [31] "IEEE Standard on Piezoelectricity," *ANSI/IEEE Std 176-1987*, p. 0_1–, 1988.
- [32] J. Söderkvist, "Dynamic behavior of a piezoelectric beam," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 90, no. 2, pp. 686–692, Aug. 1991.
- [33] H. A. Sodano, G. Park, and D. J. Inman, "Estimation of Electric Charge Output for Piezoelectric Energy Harvesting," *Strain*, vol. 40, no. 2, pp. 49–58, 2004.
- [34] D. J. Inman, *Engineering Vibration*, 4 edition. Boston: Prentice Hall, 2013.
- [35] Q.-M. Wang and L. Eric Cross, "Constitutive equations of symmetrical triple layer piezoelectric benders," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 46, no. 6, pp. 1343–1351, Nov. 1999.
- [36] H. T. Banks, Z. Luo, L. A. Bergman, and D. J. Inman, "On the Existence of Normal Modes of Damped Discrete-Continuous Systems," in *North Carolina State University*, 1997, p. submitted.
- [37] G. K. Ottman, H. F. Hofmann, A. C. Bhatt, and G. A. Lesieutre, "Adaptive piezoelectric energy harvesting circuit for wireless remote power supply," *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 17, no. 5, pp. 669–676, Sep. 2002.
- [38] D. Guyomar, A. Badel, E. Lefeuvre, and C. Richard, "Toward energy harvesting using active materials and conversion improvement by nonlinear processing," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 52, no. 4, pp. 584–595, Apr. 2005.
- [39] Lord Rayleigh, *The Theory of Sound*, 2nd. Macmillan, London, 1894.
- [40] M. F. Daqaq, J. M. Renno, J. R. Farmer, and D. J. Inman, "Effects of system parameters and damping on an optimal vibration-based energy harvester," *Proc. 48th AIAAASMEASCEAHSASC Struct. Struct. Dyn. Mater. Conf. Honol. HI April*, pp. 23–26, 2007.

- [41] N. G. Stephen, "On energy harvesting from ambient vibration," *J. Sound Vib.*, vol. 293, no. 1, pp. 409–425, 2006.
- [42] N. E. Du Toit, "Modeling and design of a MEMS piezoelectric vibration energy harvester," Massachusetts Institute of Technology, 2005.
- [43] J. Lu, H. Okada, T. Itoh, T. Harada, and R. Maeda, "Toward the World Smallest Wireless Sensor Nodes With Ultralow Power Consumption," *IEEE Sens. J.*, vol. 14, no. 6, pp. 2035–2041, Jun. 2014.
- [44] S. Amini, R. Verhoeven, J. Lukkien, and S. Chen, "Toward a security model for a body sensor platform," in *2011 IEEE International Conference on Consumer Electronics (ICCE)*, 2011, pp. 143–144.
- [45] T. M. Toshihiro Itoh, "Development of a sensor system for animal watching to keep human health and food safety," *Synth. Engl. Ed.*, vol. 3, no. 3, pp. 224–233, 2010.
- [46] C. Park, J. Liu, and P. H. Chou, "Eco: an ultra-compact low-power wireless sensor node for real-time motion monitoring," in *Fourth International Symposium on Information Processing in Sensor Networks, 2005. IPSN 2005*, 2005, pp. 398–403.
- [47] "Datasheet SHT10, SHT11, SHT15 - Sensirion_Humidity_SHT21_Datasheet_V4.pdf." [Online]. Available:
http://www.sensirion.com/fileadmin/user_upload/customers/sensirion/Dokumente/Humidity/Sensirion_Humidity_SHT21_Datasheet_V4.pdf. [Accessed: 09-Oct-2015].
- [48] "Si4010 MCU and RF Transmitter | Silicon Labs." [Online]. Available:
<http://www.silabs.com/products/wireless/EZRadio/Pages/Si4010.aspx>. [Accessed: 09-Oct-2015].
- [49] "BMP180." [Online]. Available: https://www.bosch-sensortec.com/en/homepage/products_3/environmental_sensors_1/bmp180_1/bmp180. [Accessed: 09-Oct-2015].
- [50] Y. C. Shu and I. C. Lien, "Analysis of power output for piezoelectric energy harvesting systems," *Smart Mater. Struct.*, vol. 15, no. 6, p. 1499, 2006.
- [51] PIEZO SYSTEMS, INC., "Piezo Systems: Piezoceramic, PZT, Piezoelectric Transducers, Piezoelectric Actuators and Sensors, Piezoelectric Fans, Piezoelectric Amplifiers, Piezoelectric Engineering, Ultrasonic Transducers, and Energy Harvesters," *PIEZO SYSTEMS, INC.* [Online]. Available: <http://www.piezo.com/>. [Accessed: 16-Dec-2015].
- [52] The MathWorks, Inc., "MATLAB - The Language of Technical Computing," 2010. [Online]. Available: <http://www.mathworks.com/products/matlab/>. [Accessed: 09-Jan-2016].
- [53] I. for C. A. in S. and Engineering and D. J. Inman, *On Damping Mechanisms in Beams*. 1989.
- [54] R. W. Clough and J. Penzien, "DYNAMICS OF STRUCTURES," 1975.
- [55] W. W. Jr, S. P. Timoshenko, and D. H. Young, *Vibration Problems in Engineering*. John Wiley & Sons, 1990.

Anexos

1. Anexo. Obtención de los modos de vibración de una viga en cantiléver con una masa en la punta

Para el caso de los recolectores de energía la ecuación gobernante de movimiento para vibraciones libres sin amortiguamiento de una viga uniforme de Euler-Bernoulli se puede escribir como:

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + m(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (A1.1)$$

La condición de frontera para clamped-free con una masa adjunta puede ser expresada como:

$$w(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$
$$\left[EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + I_t \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial t^2 \partial x} \right]_{x=L} = 0, \quad \left[EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} - M_t \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \right]_{x=L} = 0 \quad (A1.2)$$

Donde M_t es la masa adjunta y I_t es el momento de inercia de la masa adjunta cuando $x = L$. Las primeras dos condiciones de frontera son las condiciones de frontera geométricas en $x = 0$, mientras que las otras son las condiciones de frontera natural en $x = L$. Las ecuaciones A1.1 y A1.2 definen los valores del problema en la frontera para vibraciones transversales de una viga de Euler-Bernoulli en cantiléver uniforme con una masa adjunta en la punta.

Método de separación de variables

El método de separación de variables puede ser usando en la ecuación A1.1 separando la función espacial y temporal como

$$w(x, t) = \phi(x)\eta(t) \quad (A1.3)$$

Separando de la ecuación A1.1 la parte espacial y temporal nos queda

$$\frac{EI}{m(x)} \frac{\partial^4 \phi(x)}{\partial x^4} = - \frac{\partial^2 \eta(t)}{\partial t^2} \quad (A1.4)$$

Sustituyendo variables de la ecuación propuesta, ecuación A1.3 resulta en

$$\frac{EI}{m} \frac{1}{\phi(x)} \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} = - \frac{1}{\eta(t)} \frac{d^2 \eta(t)}{dt^2} \quad (A1.5)$$

El lado izquierdo de la ecuación A1.5 depende solamente de x mientras que el lado derecho depende de t . Dado que x y t son variables independientes, el método de separación de variables dice que ambos lados de la ecuación deben ser iguales a la misma constante γ :

$$\frac{EI}{m} \frac{1}{\phi(x)} \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} = - \frac{1}{\eta(t)} \frac{d^2 \eta(t)}{dt^2} = \gamma \quad (A1.6)$$

De cada ecuación igualada a esta constante, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} - \gamma \frac{m}{EI} \phi(x) = 0 \quad (A1.7)$$

$$\frac{d^2 \eta(t)}{dt^2} + \gamma \eta(t) = 0 \quad (A1.8)$$

Se deduce de la ecuación A1.8 que γ es una constante positiva de modo que la respuesta es oscilatoria (no creciente ni decreciente), ya que después de la respuesta vibratoria con pequeñas oscilaciones. Por lo tanto esta constante positiva se puede expresar como el cuadrado de otra constante: $\gamma = \omega^2$.

Las formas de solución de las ecuaciones A1.7 y A1.8 son:

$$\phi(x) = A \cos\left(\frac{\lambda}{L} x\right) + B \cosh\left(\frac{\lambda}{L} x\right) + C \sin\left(\frac{\lambda}{L} x\right) + D \sinh\left(\frac{\lambda}{L} x\right) \quad (A1.9)$$

$$\eta(t) = E \cos \omega t + F \sin \omega t \quad (A1.10)$$

Donde A, B, C, D, E y F son constantes desconocidas y

$$\lambda^4 = \omega^2 \frac{mL^4}{EI} \quad (A1.11)$$

La ecuación A1.6 puede ser empleada para las condiciones de frontera de la ecuación A1.2

$$\phi(0, t) = 0, \quad \left. \frac{d\phi_r(x, t)}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (A1.12)$$

$$\left[EI \frac{d^2 \phi(x, t)}{dx^2} + \omega^2 I_t \frac{d\phi(x, t)}{dx} \right]_{x=L} = 0, \quad \left[EI \frac{d^3 \phi(x, t)}{dx^3} + \omega^2 M_t \phi(x) \right]_{x=L} = 0 \quad (A1.13)$$

La forma espacial de las condiciones de frontera en ecuación A1.12 deben de ser usadas para encontrar los valores de λ , los cuales no da un valor trivial de $\phi(x)$. Este proceso es llamado problema de eigenvalores diferencial.

Problema de eigenvalores diferenciales

Evaluando la ecuación A1.9 con las condiciones de frontera de la ecuación A1.12 obtenemos

$$A + B = 0 \quad \text{ó} \quad A = -B \quad (A1.14)$$

$$C + D = 0 \quad \text{ó} \quad C = -D \quad (A1.15)$$

Por lo la ecuación A1.9 se convierte en:

$$\phi(x) = A \left[\cos\left(\frac{\lambda}{L}x\right) - \cosh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) \right] + C \left[\sin\left(\frac{\lambda}{L}x\right) - \sinh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) \right] \quad (A1.16)$$

Dado que las constantes desconocidas solamente son A y C , usando la ecuación A1.16 en las dos condiciones de frontera faltantes obtenemos (de la segunda derivada menos la primera derivada de la ecuación anterior):

$$\begin{bmatrix} \cos \lambda + \cosh \lambda - \frac{\lambda^3 I_t}{mL^3} (\sin \lambda + \sinh \lambda) & \sin \lambda + \sinh \lambda + \frac{\lambda^3 I_t}{mL^3} (\cos \lambda - \cosh \lambda) \\ \sin \lambda - \sinh \lambda + \frac{\lambda^3 I_t}{mL^3} (\cos \lambda - \cosh \lambda) & -\cos \lambda - \cosh \lambda + \frac{\lambda^3 I_t}{mL^3} (\sin \lambda - \sinh \lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (A1.17)$$

La matriz de coeficientes en la ecuación anterior tiene que ser singular para no obtener valores no triviales de A y C (por lo tanto no es trivial $\phi(x)$). Agrupando el determinante de la matriz de coeficientes anterior resulta en la ecuación característica del problema de eigenvalores diferenciales.

$$\begin{aligned} 1 + \cos \lambda + \cosh \lambda + \lambda \frac{M_t}{mL} (\cos \lambda \sinh \lambda - \sin \lambda \cosh \lambda) - \frac{\lambda^3 I_t}{mL^3} (\cosh \lambda \sin \lambda + \sinh \lambda \cos \lambda) \\ + \frac{\lambda^4 M_t I_t}{m^2 L^4} (1 - \cos \lambda \cosh \lambda) = 0 \end{aligned} \quad (A1.18)$$

Con los parámetros del sistema m, L, M_t y I_t , se puede resolver la ecuación anterior y obtener los eigenvalores del sistema (nótese que M_t/mL y I_t/mL^3 son adimensionales en la ecuación anterior) (Nota: si la masa en la punta puede ser modelada como un punto de masa, es decir, si la inercia rotatoria de la masa en la punta es despreciable $I_t = 0$. Si no hay una masa simplemente M_t y I_t se hacen cero). El problema de valores en la frontera definido anteriormente es positivo definido, por lo tanto el sistema tiene infinito número de eigenvalores positivos para los infinitos modos de vibración. Los eigenvalores (o el parámetro de frecuencia adimensional) del r th modo de vibración son denotados como λ_r (donde r es un entero positivo), y es asociado con la r th eigenfunción denotada por $\phi_r(x)$:

$$\phi_r = A_r \left[\cos \frac{\lambda_r}{L} x - \cosh \frac{\lambda_r}{L} x + \zeta_r \left(\sin \frac{\lambda_r}{L} x - \sinh \frac{\lambda_r}{L} x \right) \right] \quad (A1.19)$$

Donde la segunda fila en la ecuación A1.17 es usada en la ecuación A1.18 para mantener una sola constante modal (A_r) mientras ζ_r es obtenido de

$$\zeta_r = \frac{\sin \lambda - \sinh \lambda + \lambda_r \frac{M_t}{mL} (\cos \lambda - \cosh \lambda)}{\cos \lambda + \cosh \lambda - \lambda_r \frac{M_t}{mL} (\sin \lambda + \sinh \lambda)} \quad (A1.20)$$

La frecuencia natural no amortiguada (o la eigenfrecuencia) de oscilaciones libres para el r th modo de vibraciones es obtenido de la ecuación A1.11 La constante modal (A_r) puede ser obtenida por medio de las condiciones de ortogonalidad (ver Anexo 2), con lo cual obtenemos la eigenfunción normalizada de masas del modo vibratorio r th.

$$\phi_r(x) = \sqrt{\frac{1}{mL}} \left[\cos \frac{\lambda_r}{L} x - \cosh \frac{\lambda_r}{L} x + \zeta_r \left(\sen \frac{\lambda_r}{L} x - \senh \frac{\lambda_r}{L} x \right) \right] \quad (A1.21)$$

2. Anexo. Ortogonalidad de las eigenfunciones y obtención de la constante modal (A_r)

El producto punto de dos funciones ortogonales es cero. Es común definir el producto punto de dos funciones como la multiplicación de estas dos y realizando la integración en todo el dominio.

Para nuestro caso se sustituyen dos distintas soluciones (modos r y s) de un problema de eigenvalores en la ecuación espacial:

$$YI \frac{d^4 \phi_r(x)}{dx^4} = \omega_r^2 m \phi_r(x) \quad (A2.1)$$

$$YI \frac{d^4 \phi_s(x)}{dx^4} = \omega_s^2 m \phi_s(x) \quad (A2.2)$$

Multiplicando la ecuación A2.1 por $\phi_s(x)$ e integrando sobre el largo del sistema L .

$$\int_0^L \phi_s(x) YI \frac{d^4 \phi_r(x)}{dx^4} = \omega_r^2 \int_0^L \phi_s m \phi_r(x) \quad (A2.3)$$

Multiplicando la ecuación A2.2 por $\phi_r(x)$ e integrando por partes dos veces sobre el largo del sistema L .

$$\int_0^L \phi_r(x) YI \frac{d^4 \phi_s(x)}{dx^4} = \omega_s^2 \int_0^L \phi_r m \phi_s(x) \quad (A2.4)$$

Realizando la integración por partes del lado izquierdo dos veces en todo el dominio se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \phi_s(x) YI \frac{d^4 \phi_r(x)}{dx^4} \\ &= \phi_s(L) YI \frac{d^3 \phi_r(x)}{dx^3} \Big|_0^L + \frac{d \phi_s}{dx} YI \frac{d^2 \phi_r}{dx^2} \Big|_0^L + \int_0^L \frac{d^2 \phi_s(x)}{dx^2} YI \frac{d^2 \phi_r(x)}{dx^2} \end{aligned} \quad (A2.5)$$

Sustituyendo la ecuación A2.5 en la ecuación A2.4, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \phi_s(L) YI \frac{d^3 \phi_r(x)}{dx^3} \Big|_0^L + \frac{d \phi_s}{dx} YI \frac{d^2 \phi_r}{dx^2} \Big|_0^L + \int_0^L \frac{d^2 \phi_s(x)}{dx^2} YI \frac{d^2 \phi_r(x)}{dx^2} \\ &= \omega_r^2 \int_0^L \phi_s m \phi_r(x) \end{aligned} \quad (A2.6)$$

Recuérdese se tienen las condiciones de frontera del problema del problema:

$$\left[YI \frac{d^2 \phi(x, t)}{dx^2} + \omega^2 I_t \frac{d \phi(x, t)}{dx} \right]_{x=L} = 0, \quad \left[YI \frac{d^3 \phi(x, t)}{dx^3} + \omega^2 M_t \phi(x) \right]_{x=L} = 0 \quad (A2.7)$$

Y usando las condiciones de frontera para sustituirlas en el problema obtenemos:

$$-\phi_s(L)\omega_r^2 M_t \phi_r(L) - \left[\frac{d\phi_s}{dx} \omega_r^2 I_t \frac{d\phi_r}{dx} \right]_{x=L} + \int_0^L \frac{d^2\phi_s(x)}{dx^2} YI \frac{d^2\phi_r(x)}{dx^2} = \omega_r^2 \int_0^L \phi_s m \phi_r(x) \quad (A2.8)$$

Simplificando

$$\int_0^L \frac{d^2\phi_s(x)}{dx^2} YI \frac{d^2\phi_r(x)}{dx^2} = \omega_r^2 \left\{ \int_0^L \phi_s m \phi_r(x) + \phi_s(L) M_t \phi_r(L) + \left[\frac{d\phi_s}{dx} I_t \frac{d\phi_r}{dx} \right]_{x=L} \right\} \quad (A2.9)$$

De igual manera al multiplicar la ecuación A2.2 por $\phi_s(x)$ e integrando por partes dos veces sobre el largo del sistema L y simplificando, se obtiene.

$$\int_0^L \frac{d^2\phi_r(x)}{dx^2} YI \frac{d^2\phi_s(x)}{dx^2} = \omega_s^2 \left\{ \int_0^L \phi_s m \phi_r(x) + \phi_s(L) M_t \phi_r(L) + \left[\frac{d\phi_s}{dx} I_t \frac{d\phi_r}{dx} \right]_{x=L} \right\} \quad (A2.10)$$

Restando las ecuaciones A2.9 y A2.10, nótese que del lado derecho de la ecuación los términos dentro de los corchetes son los mismos para las dos ecuaciones, se obtiene:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \left\{ \int_0^L \phi_s m \phi_r(x) + \phi_s(L) M_t \phi_r(L) + \left[\frac{d\phi_s}{dx} I_t \frac{d\phi_r}{dx} \right]_{x=L} \right\} = 0 \quad (A2.11)$$

Dado que las frecuencias para cada uno de los modos no son iguales, la condición de ortogonalidad de las eigenfunciones es:

$$\int_0^L \phi_s m \phi_r(x) + \phi_s(L) M_t \phi_r(L) + \left[\frac{d\phi_s}{dx} I_t \frac{d\phi_r}{dx} \right]_{x=L} = \delta_{rs}, \quad \omega_r^2 \neq \omega_s^2 \quad (A2.12)$$

Donde δ_{rs} es el Kronecker delta. Esta condición de ortogonalidad se puede sustituir en la ecuación A2.9 obteniendo otra alternativa de expresar la condición.

$$\int_0^L \frac{d^2\phi_s(x)}{dx^2} YI \frac{d^2\phi_r(x)}{dx^2} = \omega_r^2 \delta_{rs} \quad (A2.13)$$

Otra manera de expresar las condiciones de ortogonalidad es por medio de la ecuación A2.5 y A2.13, con lo cual se puede expresar como:

$$\int_0^L \phi_s(x) YI \frac{d^4\phi_r(x)}{dx^4} - \left[\phi_s(L) YI \frac{d^3\phi_r(x)}{dx^3} \right]_{x=L} + \left[\frac{d\phi_s}{dx} YI \frac{d^2\phi_r}{dx^2} \right]_{x=L} = \omega_r^2 \delta_{rs} \quad (A2.14)$$

Si una de las ecuaciones A2.12-A2.14 son válidas las otras también lo son. Cualquiera puede ser usada para obtener la constante modal (A_r).

2.1. Anexo Obtención de la constante A_r

Derivando el modo de vibración r con respecto de x obtenemos

$$\left. \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right|_0^L = \frac{\lambda_r}{L} A_r \left[-\sin \frac{\lambda_r}{L} x - \sin \frac{\lambda_r}{L} x + \zeta_r \left(\cos \frac{\lambda_r}{L} x - \cosh \frac{\lambda_r}{L} x \right) \right]_0^L \quad (A2.14)$$

Evaluando de cero a L la ecuación A2.14 obtenemos

$$\left. \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right|_0^L = \frac{\lambda_r}{L} A_r [-\sin \lambda_r - \sinh \lambda_r + \zeta_r (\cos \lambda_r - \cosh \lambda_r)] \quad (A2.15)$$

De igual manera se deriva para el modo de vibración s y se evalúa de cero a L

$$\left. \frac{d\phi_s(x)}{dx} \right|_0^L = \frac{\lambda_s}{L} A_s [-\sin \lambda_s - \sinh \lambda_s + \zeta_s (\cos \lambda_s - \cosh \lambda_s)] \quad (A2.16)$$

Usando la función de ortogonalidad e igualando los modos obtenemos

$$\frac{\lambda_r^2}{L^2} A_r^2 [-\sin \lambda_r - \sinh \lambda_r + \zeta_r (\cos \lambda_r - \cosh \lambda_r)]^2 YI = \omega_r^2 \quad (A2.17)$$

Despejando de la ecuación A1.11 la eigenfrecuencia ω_r y sustituyéndola en la ecuación anterior.

$$\frac{\lambda_r^2}{L^2} A_r^2 [-\sin \lambda_r - \sinh \lambda_r + \zeta_r (\cos \lambda_r - \cosh \lambda_r)]^2 YI = \frac{\lambda^4 YI}{mL^4} \quad (A2.18)$$

Despejando la variable A_r de la ecuación y removiendo las variables posibles. Evaluando los términos dentro de los corchetes nos da un valor de 1, por lo tanto obtenemos que A_r para una viga en cantiléver sin amortiguar es:

$$A_r = \sqrt{\frac{1}{mL}} \quad (A2.19)$$

3. Anexo. Respuesta a una fuerza externa

Considere la fuerza sin amortiguar de una viga con una masa adjunta bajo una excitación de una fuerza transversal distribuida por unidad de longitud $f(x, t)$ actuando en la dirección positiva de z . La ecuación gobernante de movimiento sería

$$YI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (A3.1)$$

La solución a la ecuación A3.1 puede ser expresada en la forma de la ecuación A1.3.

$$YI \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[\sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \eta_r(t) \right] + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \eta_r(t) \right] = f(x, t) \quad (A3.2)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación A3.2 por la eigenfunción $\phi_s(x)$ e integrando sobre el largo de viga, obtenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{\infty} \left[\eta_r(t) \int_0^L \phi_s(x) YI \frac{d^4 \phi_r(x)}{dx^4} dx \right] \\ & + \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{d^2 \eta_r(t)}{dt^2} \int_0^L \phi_s(x) m \phi_r(x) dx \right] = \int_0^L \phi_s(x) f(x, t) dx \end{aligned} \quad (A3.3)$$

Usando las condiciones de ortogonalidad (ecuación A2.14 y A2.12) podemos expresar la ecuación A3.3 de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \eta_s(t)}{dt^2} + \omega_s^2 \eta_s(t) - \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \phi_s(x) \left[M_t \phi_r(x) \frac{d^2 \eta_r(t)}{dt^2} - YI \frac{d^3 \phi_r(t)}{dx^3} \eta_r(t) \right] \right\}_{x=L} \\ & - \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \frac{d \phi_s(x)}{dx} \left[I_t \frac{d \phi_r(t)}{dx} \frac{d^2 \eta_r(t)}{dt^2} + YI \frac{d^2 \phi_r(t)}{dx^2} \eta_r(t) \right] \right\}_{x=L} \\ & = \int_0^L \phi_s(x) f(x, t) dx \end{aligned} \quad (A3.4)$$

Usando las condiciones de frontera del problema descritas en las ecuación A1.2, la ecuación anterior se puede reducir a

$$\frac{d^2 \eta_s(t)}{dt^2} + \omega_s^2 \eta_s(t) = F_r(t) \quad (A3.5)$$

Donde

$$F_r(t) = \int_0^L \phi_s(x) f(x, t) dx \quad (A3.6)$$

Si la fuerza aplicada es arbitraria, la integral de Duhamel (versión sin amortiguar) puede ser usada como respuesta de coordenadas modales, la cual puede ser usada en la ecuación A1.3 para obtener la respuesta física para condiciones iniciales cero

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r(x)}{\omega_r^2 - \omega^2} \int_0^t F_r(\tau) \sin \omega_r(t - \tau) d\tau \quad (A3.7)$$

Si la fuerza aplicada es armónica y tiene forma de

$$f(x, t) = F(x) \cos \omega t \quad (A3.8)$$

La respuesta en estado estable puede ser obtenida

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r(x)}{\omega_r^2 - \omega^2} F_r \cos \omega t \quad (A3.9)$$

Donde

$$F_r = \int_0^L \phi_r F(x) dx \quad (A3.10)$$

4. Anexo. Polaridad para conexiones en serie o paralelo

Cuando un esfuerzo es aplicado a lo largo del eje de polarización, un campo eléctrico aparece en el cuerpo el cual se opone a la fuerza que está actuando. Un esfuerzo de compresión genera un campo eléctrico con la misma orientación que la polarización, induciendo a la pieza a elongarse en sentido opuesto a la fuerza de compresión. Esto desaparece cuando el esfuerzo se remueve. Un esfuerzo a tensión genera un campo eléctrico con orientación opuesta a la polarización.

En la Figura A4.0.1 a se ilustra el campo eléctrico generado en un cuerpo piezoeléctrico rectangular debido a un esfuerzo aplicado, y en la Figura A4.0.1 b se muestra el ejemplo de una conexión en paralelo. En el ejemplo se muestra cómo reaccionarían los campos eléctricos al mover la punta hacia arriba. Nótese que el piezocerámico de la parte superior estará bajo un esfuerzo de compresión y el piezocerámico inferior a tensión.

De la misma manera en la Figura A4.0.2 a se ilustra el campo eléctrico generado de un cuerpo piezoeléctrico rectangular debido a un esfuerzo aplicado y en la Figura A4.0.2 b un ejemplo de una conexión en serie.

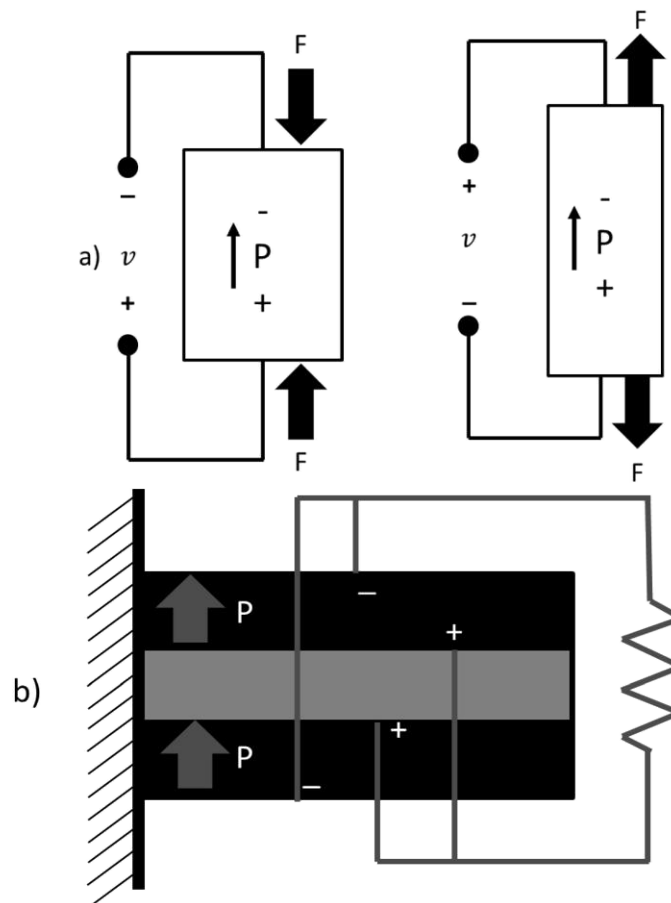


Figura A4.0.1 a) Campo eléctrico generado de un cuerpo piezoeléctrico rectangular debido al esfuerzo aplicado, b) ejemplo de la conexión en paralelo.

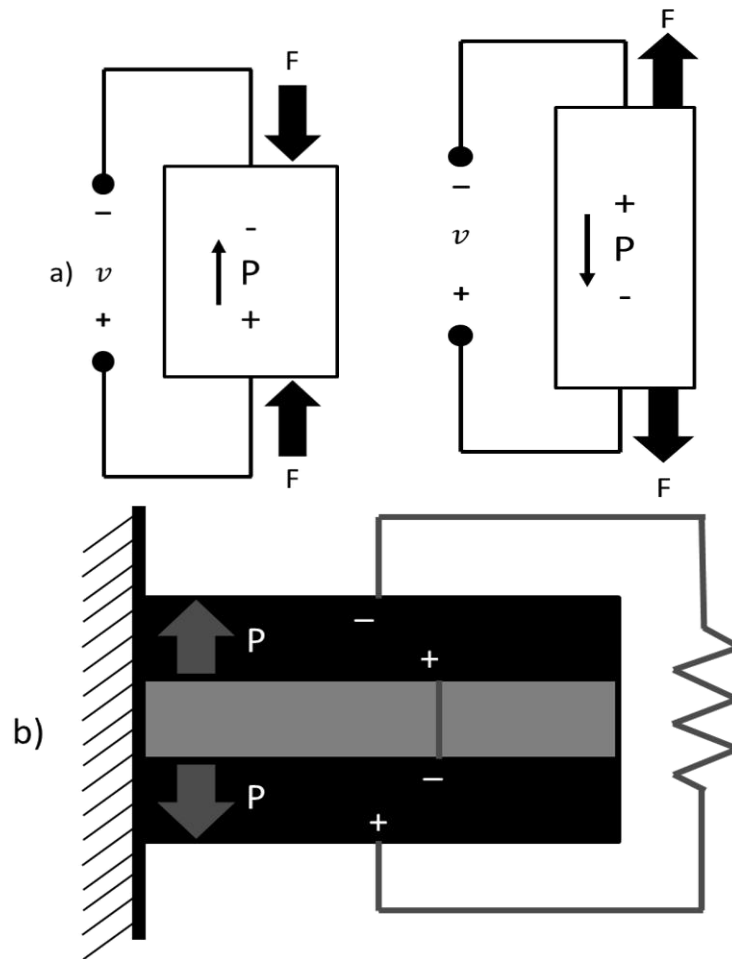


Figura A4.0.2 a) Campo eléctrico generado de un cuerpo piezoeléctrico rectangular debido al esfuerzo aplicado, b) ejemplo de la conexión en serie.

5. Anexo. Obtención de la ecuación diferencial parcial gobernante del método de parámetros distribuidos

Considérese una viga en flexión por vibración como se muestra en la Figura A5.0.3 donde $y(x, t)$ es el desplazamiento transversal, $m(x)$ es la masa por unidad de longitud y $EI(x)$ es la rigidez flexural. La rigidez flexural se define como el par de fuerzas requerido para doblar una estructura sólida por unidad de curvatura producida. Además E es el módulo de elasticidad e I es el momento de inercia de la sección transversal.

Usando la aproximación Newtoniana, se considera un diagrama de cuerpo libre correspondiente a un elemento diferencial de la viga, como se muestra en la Figura A5.0.3b, y en donde $M(x, t)$ es el momento a la flexión y $Q(x, t)$ fuerza cortante. De acuerdo a la convención de signos, el momento a la flexión y la fuerza cortante mostrada en ambos lados de la figura del elemento diferencial son considerados como positivos. Usando la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, la cual implica la suposición que la rotación del elemento diferencial es despreciable, comparado con la traslación y la distorsión angular debido al cortante es pequeño en relación la deformación por flexión.

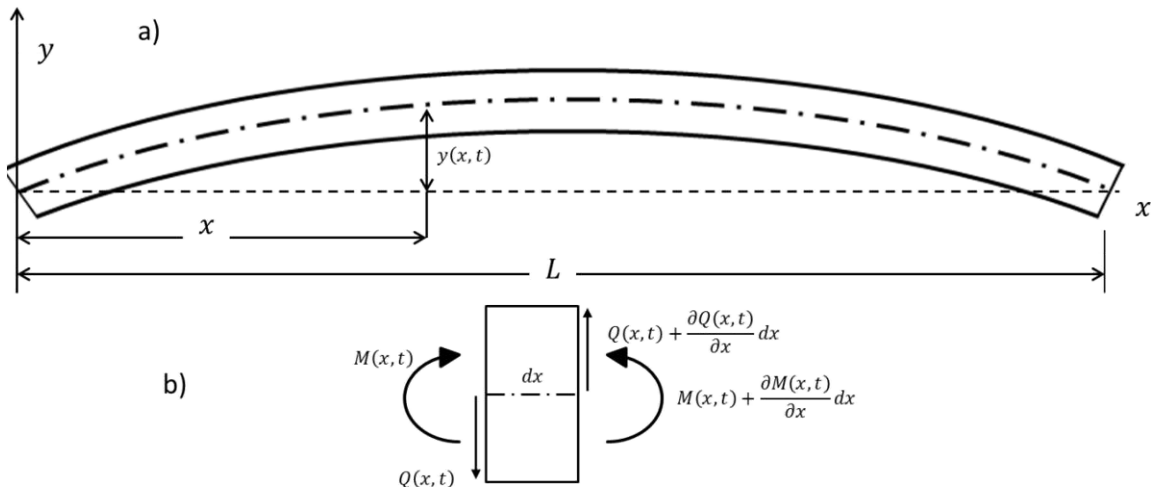


Figura A5.0.3 a) Viga en vibración transversal, b) Diagrama de cuerpo libre de un elemento de la viga.

De la Figura A5.0.3b, la ecuación de fuerzas de movimiento en la dirección vertical tiene la forma de:

$$\left[Q(x, t) + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dx \right] - Q(x, t) = m(x) dx \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L \quad (A5.1)$$

En la que se a supuesto que el producto del momento de inercia de masa del elemento y la aceleración angular es insignificamente pequeño.

La ecuación de momento de movimiento alrededor de un eje normal a x y y y que pasa por el centro de la sección transversal es:

$$\left[M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx \right] - M(x, t) + \left[Q(x, t) + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dx \right] dx = 0 \quad 0 < x < L \quad (A5.2)$$

Ignorando los términos de segundo orden en dx y al cancelarse algunos términos, la ecuación de momentos se reduce a

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} + Q(x, t) = 0, \quad 0 < x < L \quad (A5.3)$$

Usando la Ecuación A5.2 en la Ecuación A5.1 y reduciendo los términos apropiados y dividiendo sobre dx se obtiene

$$-\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} = m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L \quad (A5.4)$$

Para obtener la ecuación en términos del desplazamiento y de la fuerza se define:

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad (A5.5)$$

La fuerza cortante se relaciona con el desplazamiento por medio de:

$$Q(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right] \quad (A5.6)$$

Sustituyendo la Ecuación A5.5 en la Ecuación A5.4, se obtiene la ecuación diferencial parcial para la vibración de flexión de una viga

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right] = m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (A5.7)$$

La ecuación gobernante de movimiento para vibraciones libres sin amortiguamiento de una viga uniforme de Euler-Bernoulli se puede escribir como:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (A5.8)$$

Las condiciones de frontera para el movimiento de una viga empotrada en $x = 0$ y el otro extremo libre en $x = L$ son

$$y(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

$$\left[EI \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + I_t \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial t^2 \partial x} \right]_{x=L} = 0, \quad \left[EI \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} + M_t \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \right]_{x=L} = 0 \quad (A5.9)$$

Donde M_t es la masa adjunta y I_t es el momento de inercia de la masa adjunta cuando $x = L$. Las primeras dos condiciones de frontera son las condiciones de frontera geométricas en $x = 0$, mientras que las otras son las condiciones de frontera naturales en $x = L$. Las Ecuaciones A5.8 y A5.9 definen los valores del problema en la frontera para vibraciones transversales de una viga de Euler-Bernoulli en cantiléver uniforme con una masa adjunta en la punta.

Hay dos tipos de mecanismos de amortiguación que se pueden incluir a la viga no amortiguada: aire viscoso (o externo) de amortiguación y amortiguación de Kelvin-Voigt (o velocidad de deformación) (el comportamiento del material se aproxima como lineal-viscoelástico). Entonces la ecuación de movimiento del amortiguamiento de la viga es [53], [54]

$$-\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + c_s I \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (A5.10)$$

Donde c_a es el coeficiente de amortiguamiento de aire viscoso, y c_s es el coeficiente de amortiguación de-velocidad de deformación (que aparece como el término $c_s I$ para la estructura de material compuesto).

La amortiguación de aire viscoso es una manera simple de modelado, la cual considera la fuerza que actúa sobre la viga debido a las partículas de aire desplazadas durante el movimiento vibratorio. Por otro lado la amortiguación de velocidad de deformación cuenta por el amortiguamiento estructural debido a la disipación de energía interna a la viga.

Timoshenko *et al.* [55] proponen que el desplazamiento transversal absoluto de la viga (es decir, el desplazamiento transversal con relación al marco de referencia fijo) se puede escribir como

$$w(x,t) = w_b(x,t) + w_{rel}(x,t) \quad (A5.11)$$

Donde $w_{rel}(x,t)$ es el desplazamiento transversal con relación al extremo sujeto de la viga y $w_b(x,t)$ es el desplazamiento en la base dado por

$$w_b(x,t) = \delta_1(x)g(t) + \delta_2(x)h(t) \quad (A5.12)$$

$\delta_1(x)$ Y $\delta_2(x)$ son las funciones de influencia de desplazamiento para el desplazamiento transversal de la base y la pequeña rotación en la base de la viga respectivamente. Para el caso de la viga en cantiléver $\delta_1(x) = 1$ Y $\delta_2(x) = x$. Usando las Ecuaciones A5.10 y A5.11 nos lleva a la ecuación diferencial parcial de fuerzas vibratorias de una viga en cantiléver uniforme con una masa adjunta en la punta.

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + c_s I \frac{\partial^5 w_{rel}(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial w_{rel}(x,t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w_{rel}(x,t)}{\partial t^2} \\ & = -[m + M_t \delta(x-L)] \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (A5.13)$$

Donde $w_{rel}(x,t)$ es el desplazamiento transversal de la viga relativo con respecto al eje, x es la posición, t el tiempo, c_a es el coeficiente de amortiguamiento del aire viscoso, c_s el coeficiente de amortiguamiento de velocidad de deformación (aparece como termino efectivo $c_s I$ para toda la estructura compuesta), m es la masa por unidad de longitud de la viga, M_t es la masa adjunta,

$\delta(x)$ es la función de Dirac y $M(x, t)$ es el momento de flexión interno (excluyendo el efecto de amortiguamiento de velocidad de deformación). El efecto del amortiguamiento de velocidad de deformación es un momento de flexión interno el cual en la Ecuación A5.13 se escribe aparte del término de momento de flexión sin amortiguar $M(x, t)$.