



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE  
SAN LUIS POTOSÍ  
FACULTAD DE INGENIERÍA**

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO**

**SIMULACIÓN DE LA PRUEBA DE ERICHSEN PARA CALIFICAR  
LA DEFORMABILIDAD DE LÁMINAS**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA**

EN LA OPCIÓN DE:

**MECATRÓNICA Y SISTEMAS MECÁNICOS (MSM)**

PRESENTA:

**ING. JULIO ALBERTO BOIX SALAZAR**

ASESOR:

**DR. DIRK FREDERIK DE LANGE.**

**SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P., MÉXICO, FEBRERO 2014.**





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
DE SAN LUIS POTOSÍ

21 de noviembre de 2013

**ING. JULIO ALBERTO BOIX SALAZAR  
P R E S E N T E.**

En atención a su solicitud de Temario, presentada por el **Dr. Dirk Frederik de Lange**, Asesor de la Tesis que desarrollará Usted, con el objeto de obtener el Grado de **Maestría en Ingeniería Mecánica**. Me es grato comunicarle que en la Sesión de Consejo Técnico Consultivo celebrada el día 21 de noviembre del presente año, fue aprobado el Temario propuesto:

**TEMARIO:**

**"SIMULACIÓN DE LA PRUEBA DE ERICHSEN PARA CALIFICAR LA  
DEFORMABILIDAD DE LÁMINAS."**

Introducción.

- I. Estado del arte en el formado de metal.
- II. Fundamentos de elasticidad y plasticidad.
- III. Desarrollo inicial de modelos simplificados.
- IV. Simulación de la prueba de Erichsen.

Conclusiones.

Bibliografía.

Anexos.

**"MODOS ET CUNCTARUM RERUM MENSURAS AUDEBO"**

**ATENTAMENTE**

**M. I. JORGE ALBERTO PÉREZ GONZÁLEZ**  
**DIRECTOR.** FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIRECCION



**90**  
AÑOS DE  
AUTONOMÍA  
UASLP  
Primera Universidad  
Autónoma en México



**FACULTAD  
DE INGENIERÍA**

Av. Manuel Nava 8  
Zona Universitaria - CP 78290  
San Luis Potosí, S.L.P.  
tel. (444) 826 2330 al39  
fax (444) 826 2336  
www.uaslp.mx

\*etn.

*"90 Años de Autonomía, UASLP Primera Universidad Autónoma en México"*



## RESUMEN

En el presente trabajo se hace un estudio sobre la prueba de Erichsen, la cual es un proceso normado para calificar la deformabilidad de láminas. Para una mejor comprensión de la prueba y los fenómenos físicos que se presentan durante ésta, se inició con el análisis de algunos modelos de referencia como: la tensión uniaxial de una barra, contactos Hertzianos elásticos y un modelo de doblado de lámina.

Una vez que se adquirió experiencia en la solución de algunos de los fenómenos físicos que se presentan en la prueba mediante modelos de referencia se aplicó este conocimiento para realizar un modelo simplificado que describiera el comportamiento durante la prueba de Erichsen. Este modelo simplificado se siguió desarrollando hasta obtener un modelo más completo y realizar comparaciones entre un modelo con pisador y sin pisador. Todos estos modelos fueron implementados en el software comercial (CAE) COMSOL v4.2a, que hace uso del método de los elementos finitos (MEF).



## AGRADECIMIENTOS

*A mis padres Ma Teresa Salazar y Pedro Boix que siempre me han apoyado y guiado con cariño para seguirme superando, gracias por todas las oportunidades que me han brindado. A mis hermanas Mayra Boix y Mariana Boix y a mi familia por todo el cariño y consejos.*

*A todos mis amigos y profesores que con sus comentarios y críticas hicieron posible este trabajo, especialmente al Dr. Dirk Frederik de Lange, asesor, quien mostró un gran compromiso y dedicación así como también por su gran apoyo motivacional brindado.*

*Para concluir, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico otorgado, así como también a la Facultad de Ingeniería, CIEP-UASLP, por haber proporcionado las instalaciones y la oportunidad de realizar este proyecto.*

# DEDICATORIA

A Ma. Teresa,  
Pedro,  
Mayra  
Mariana  
y  
Teresa de Jesus



# CONTENIDO

RESUMEN .....	I
AGRADECIMIENTOS .....	III
DEDICATORIA.....	IV
CONTENIDO.....	V
LISTA DE FIGURAS .....	IX
LISTA DE TABLAS.....	XV
INTRODUCCIÓN .....	1
Justificación del estudio.....	1
Objetivo general .....	2
Objetivos específicos.....	2
1 ESTADO DEL ARTE EN EL FORMADO DE METAL.....	3
1.1 Procesos de formado por deformación plástica .....	3
1.1.1 Laminado.....	3
1.1.2 Forjado .....	3
1.1.3 Extrusión.....	4
1.1.4 Estirado (Trefilado) .....	4
1.1.5 Formado de hojas metálicas .....	5
1.2 Factores principales que intervienen en el proceso de formado .....	7
1.2.1 Temperatura en el formado.....	7
1.2.2 La Velocidad de Deformación .....	8
1.2.3 La Micro-Estructura en el Conformado .....	9
1.2.4 Comportamiento anisotrópico .....	9
1.2.5 Fricción .....	10

1.2.6	Recuperación Elástica .....	11
1.3	Procesos de embutido profundo y estirado de lámina.....	11
1.3.1	Defectos en embutido profundo .....	15
1.4	Formabilidad de láminas y prueba de Erichsen .....	15
2	FUNDAMENTOS DE ELASTICIDAD Y PLASTICIDAD.....	19
2.1	Estado de esfuerzos .....	19
2.1.1	Ecuaciones de equilibrio .....	21
2.1.2	Esfuerzos principales.....	24
2.2	Estado de deformaciones .....	25
2.3	Esfuerzos y deformaciones de ingeniería y reales.....	29
2.3.1	Esfuerzos y deformaciones de ingeniería .....	29
2.3.2	Esfuerzos y deformaciones reales .....	31
2.4	Relaciones entre Esfuerzos y Deformaciones.....	33
2.5	Elasticidad .....	35
2.6	Plasticidad .....	36
2.7	Cedencia .....	37
2.8	Regla de flujo.....	39
2.9	Regla de endurecimiento .....	40
2.10	Tipos de comportamiento del material .....	41
2.11	Deformaciones finitas .....	42
2.11.1	Formulaciones Lagrangiana y Euleriana .....	42
2.11.2	Tensor de esfuerzos de Cauchy .....	44
2.11.3	Tensores de esfuerzos de Piola-Kirchhoff.....	45
2.12	Antecedentes de plasticidad en estirado de lámina .....	46
3	DESARROLLO INICIAL DE MODELOS SIMPLIFICADOS .....	51
3.1	Modelo de tensión uniaxial .....	51

3.1.1	Modelo en COMSOL de tensión uniaxial .....	51
3.1.2	Solución 53	
3.2	Modelo de contacto Hertziano elástico .....	54
3.2.1	Mecánica de contactos .....	54
3.2.2	Modelo en COMSOL de contacto entre un cilindro y un medio elástico .....	56
3.2.3	Solución en Comsol:.....	59
3.2.4	Comparación de resultados analíticos y de Comsol de contacto entre un cilindro y un medio elástico .....	60
3.3	Modelo de doblado de lámina.....	60
3.3.1	Doblado de lámina.....	60
3.3.2	Modelo en COMSOL de doblado de lámina.....	61
3.3.3	Solución en Comsol:.....	65
3.3.4	Comparación de datos de referencia con resultados de COMSOL .....	66
4	SIMULACIÓN DE LA PRUEBA DE ERICHSEN .....	73
4.1	Modelo simplificado 2D axisimétrico .....	73
4.1.1	Geometría del modelo simplificado.....	73
4.1.2	Comparación con modelo de M. Akrouf .....	75
4.1.3	Comparación con modelo de Oleksik.....	84
4.2	Modelo 2D axisimétrico con pisador .....	90
4.2.1	Geometría del modelo con pisador. ....	90
4.2.2	Comparación contra modelo simplificado.....	92
4.2.3	Creación de la malla .....	92
4.2.4	Condiciones del modelo:.....	93
4.2.5	Comparación de resultados y análisis.....	93
4.3	Influencia de la fricción en el proceso .....	97
	CONCLUSIONES .....	101

Trabajo Futuro ..... 101

BIBLIOGRAFIA ..... 102

ANEXOS ..... 105

Anexo A..... 105

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1-2 Forjado.....	4
Figura 1-3 Extrusión.....	4
Figura 1-4 Estirado.....	5
Figura 1-6 Doblado.....	5
Figura 1-7 Embutido profundo [2].....	6
Figura 1-8 Estirado de lámina [2].....	6
Figura 1-5 Cizallado. ....	7
Figura 1-9 Dimensiones de probeta antes y después del ensayo de tracción [3].....	10
Figura 1-10 Elementos en el embutido profundo. ....	11
Figura 1-11 Fuerzas en la formación de una copa por embutido profundo [2]. ....	12
Figura 1-12 Diámetros del punzón y matriz. [2].....	13
Figura 1-13 Estirado de lámina mediante un punzón.....	13
Figura 1-14 Distribución de las deformaciones en un estirado de lámina [4]. ....	14
Figura 1-15 Distribución de deformaciones para punzones: a) fondo plano, b) puntiagudo [4].....	14
Figura 1-16 Dimensiones para la prueba de Erichsen ISO 20482 en milímetros [5]. ....	16
Figura 1-17 Dimensiones estándar ASTM E643 en milímetros [6].....	17
Figura 2-1 Estado de esfuerzos en un punto P [7].....	19
Figura 2-2 Esfuerzos normales y tangenciales [7]. ....	20

Figura 2-3 Componentes de las tensiones que producen fuerzas con proyección no nula sobre el eje x [7].	21
Figura 2-4 Esfuerzos cortantes [7].	23
Figura 2-5 Notación con esfuerzos cortantes [7].	23
Figura 2-6 Esfuerzos en un plano arbitrario [7].	24
Figura 2-7 Cuerpo en forma de paralelepípedo.	25
Figura 2-8 Distorsión angular.	26
Figura 2-9 Probeta para prueba de tensión.	29
Figura 2-10 Curva esfuerzo-deformación de ingeniería.	30
Figura 2-11 Curva esfuerzo-deformación real.	33
Figura 2-12 Regiones en la curva de esfuerzo-deformación.	35
Figura 2-13 Curva esfuerzo-deformación verdadera en escala logarítmica [11].	37
Figura 2-14 Superficie de fluencia de von Mises en estado de esfuerzo plano y la curva de esfuerzo-deformación [12].	38
Figura 2-15 Superficie de fluencia de von Mises en el espacio de esfuerzos [12].	39
Figura 2-16 Superficie de von Mises para esfuerzo plano donde se muestra el incremento de deformación plástica en dirección normal a la tangente a la superficie [13].	40
Figura 2-17 (a) Endurecimiento isotrópico, en el cual la superficie de cedencia se expande con deformación plástica. (b) Endurecimiento cinemático que muestra la traslación de la superficie de cedencia debido a la deformación plástica [12].	40
Figura 2-18 Sólido perfectamente plástico [2].	41

Figura 2-19 Elástico perfectamente plástico [2].	41
Figura 2-20 Endurecimiento por deformación lineal [2].	41
Figura 2-21 Endurecimiento por deformación exponencial [2].	42
Figura 2-22 Configuración inicial ( $X_1, X_2, X_3$ ) y Configuración temporal ( $x_1, x_2, x_3$ ) [16].	43
Figura 2-23 Geometría de la herramienta de Suh & Wagoner en milímetros [20].	46
Figura 2-24 Comportamiento de la profundidad de penetración respecto a: a) exponente de endurecimiento, b) coeficiente de fricción, c) anisotropía [20].	47
Figura 2-25 Dimensiones de la geometría de Youngsuk en milímetros [21].	47
Figura 2-26 Profundidad de penetración del punzón con respecto al coeficiente de fricción [21].	48
Figura 2-27 Profundidad de penetración del punzón con respecto a la anisotropía [21].	48
Figura 2-28 Perfiles de los tres punzones: cilíndrico, elíptico y elíptico-plano [22].	48
Figura 2-29 Variación de las relaciones de deformación contra la distancia al centro de la lámina para los tres punzones, resultados de una prueba de referencia LDH (Limiting Dome Height) [22].	49
Figura 3-1 Barra axisimétrica.	51
Figura 3-2 Curva Esfuerzo-Deformación de aleación de aluminio.	53
Figura 3-3 Curvas: esfuerzo-deformación, esfuerzo de von Mises (Default en COMSOL), esfuerzos de von Mises a partir del tensor de Cauchy, esfuerzos de von Mises a partir del segundo tensor de Piola-Kirchhoff.	54

Figura 3-4 Modelos de contactos mecanicos [24].....	55
Figura 3-5 Modelo de contacto entre un cilindro y un medio elástico.....	57
Figura 3-6 Modelo 2D de contacto entre un cilindro y un medio elástico. ....	57
Figura 3-7 Mallado en la zona de contacto.....	58
Figura 3-8 Mallado de la geometría.....	58
Figura 3-9 Sección de contacto entre un cilindro y un bloque.....	59
Figura 3-10 Distribucion de presiones de contacto.....	60
Figura 3-11 Doblado de lámina. ....	61
Figura 3-12 Elementos del proceso de doblado de lámina. ....	62
Figura 3-13 Geometría 2D.....	62
Figura 3-14 Contacto punzón-lámina. ....	63
Figura 3-15 Contacto lámina-matriz. ....	63
Figura 3-16 Discretizacion del modelo 2D doblado de lámina. ....	64
Figura 3-17 Fuerzas presentes en el contacto.....	64
Figura 3-18 Esfuerzos de von Mises (Pa) en el punto mas bajo del punzón (28.5 mm).66	
Figura 3-19 Detalle de la distribución de esfuerzos en la región central (Pa). ....	67
Figura 3-20 Deformación pástica en el punto mas bajo del punzón (28.5 mm).....	67
Figura 3-21 Máxima deformación plástica efectiva.....	68
Figura 3-22 Deformación plástica efectiva al retirar el punzón. ....	68
Figura 3-23 Ángulo de formado de lámina.....	69



Figura 3-24 Grafica fuerza (N) contra el desplazamiento del punzón: izquierda literatura, derecha modelo en COMSOL).	70
Figura 3-25 Secuencia de simulación de formado.	71
Figura 4-1 Geometría simplificada 2D.	73
Figura 4-2 Geometría simplificada 3D.	74
Figura 4-3 Punzón.	74
Figura 4-4 Matriz.	75
Figura 4-5 Espécimen de lámina.	75
Figura 4-6 Curva Esfuerzo-Deformación	77
Figura 4-7 Contacto punzón-lámina.	77
Figura 4-8 Contacto lámina-matriz.	78
Figura 4-9 Mallado de lámina punzón y matriz.	79
Figura 4-10 Esfuerzos de von Mises (Cauchy) modelo 2D axisimétrico (Pa).	81
Figura 4-11 Esfuerzos de von Mises (2º Piola-Kirchhoff) modelo 2D axisimétrico (Pa).	81
Figura 4-12 Esfuerzos de von Mises modelo Akrouit.(MPa) [31]	82
Figura 4-13 Deformación plástica efectiva modelo 2D axisimétrico.	83
Figura 4-14 Deformación plástica efectiva modelo Akrouit.	83
Figura 4-15 Fuerza del punzón para deformar la lámina.	86
Figura 4-16 Esfuerzos de von Mises (2º Piola-Kirchhoff) modelo 2D axisimétrico.	87
Figura 4-17 Deformación plástica efectiva modelo 2D axisimétrico.	87
Figura 4-18 Zonas de esfuerzos en embutido profundo.	88

Figura 4-19 fronteras superior e inferior de la lámina. ....	88
Figura 4-20 Esfuerzos de von Mises en las fronteras (Pa). ....	89
Figura 4-21 Deformaciones plásticas efectivas en las fronteras. ....	90
Figura 4-22 Geometría simplificada 2D con pisador. ....	91
Figura 4-23 Geometría 3D con pisador. ....	91
Figura 4-24 Espécimen de lámina. ....	92
Figura 4-25 Mallado de lámina pisador y matriz. ....	93
Figura 4-26 Fuerza del punzón para deformar la lámina para los 3 modelos. ....	94
Figura 4-27 Acercamiento a la fuerza para un desplazamiento de 7.5 mm. ....	94
Figura 4-28 Esfuerzos de von Mises (2º Piola-Kirchhoff) en modelo con pisador (Pa)...	95
Figura 4-29 Deformación plástica efectiva en modelo con pisador. ....	96
Figura 4-30 Distribución del espesor de la lámina a) sin fricción b) con fricción [33]....	98
Figura 4-31 Esfuerzos de von Mises (Pa) con coeficiente de fricción de 0.01. ....	99
Figura 4-32 Esfuerzos de von Mises (Pa) con coeficiente de fricción de 0.1. ....	99
Figura 4-33 Deformación plástica efectiva con coeficiente de fricción de 0.01. ....	100
Figura 4-34 Deformación plástica efectiva con coeficiente de fricción de 0.1. ....	100
Figura A-1 Modelos de endurecimiento exponencial para acero galvanizado HX220BD, especial para embutido profundo [23]. ....	106

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1-1 Defectos en el embutido profundo.....	15
Tabla 3-1 Propiedades de lámina de aluminio.....	52
Tabla 3-2 Constantes de endurecimiento de Hollomon .....	52
Tabla 3-3 Casos de contacto de Hertz. ....	55
Tabla 3-4 Propiedades del bloque y cilindro.....	57
Tabla 3-5 Propiedades de lámina de aluminio.....	61
Tabla 3-6 Constantes de endurecimiento de Hollomon .....	61
Tabla 3-7 Comparación de los ángulos de formado de lámina.....	69
Tabla 4-1 Propiedades de la aleación de aluminio .....	76
Tabla 4-2 Constantes de endurecimiento de Hollomon .....	76
Tabla 4-3 Comparación de esfuerzos máximos de von Mises.....	82
Tabla 4-4 Comparación de deformación plástica efectiva .....	83
Tabla 4-5 Propiedades de lámina de acero. ....	84
Tabla 4-6 Constantes de endurecimiento de Hollomon. ....	84
Tabla 4-7 Comparaciones entre modelos de COMSOL y Oleksik. ....	96
Tabla 4-8 Comparaciones entre modelos de COMSOL y Akrouit.....	97
Tabla A-1 Modelos de endurecimiento exponencial [23]. ....	105



# INTRODUCCIÓN

La manufactura es un campo de la ingeniería que hoy en día sigue avanzando debido a la creciente demanda de productos, tal es el caso de procesos como el estirado y el embutido de láminas metálicas, que cada vez requiere de productos de forma más compleja principalmente aplicados en la industria automotriz.

Los procesos de estirado y embutido de lámina presentan grandes retos para la industria debido a su complejidad, principalmente por el comportamiento y las propiedades del material de trabajo, es por esto que es necesario caracterizar lo mejor posible este material. Para esto existen diversas pruebas para obtener propiedades como el módulo de elasticidad, relación de Poisson, esfuerzo de cedencia, ductilidad, entre otras. Una de estas pruebas que se aplica a láminas metálicas para calificar la deformabilidad en procesos de estirado y embutido es la prueba de Erichsen: En esta prueba se somete la lámina a una deformación plástica producida por un punzón esférico al penetrarla hasta que se presenta una falla. Existen algunas normas que regulan esta prueba entre las que se encuentran ISO 20482 y ASTM E643.

Hoy en día el uso de simulaciones numéricas puede ayudar para representar modelos que describen procesos de formado y así reducir la aplicación del método de prueba y error que eleva los costos del proceso. Una de las ventajas de utilizar simulaciones numéricas es que se pueden realizar un gran número de pruebas y así considerar la influencia de distintos parámetros en el proceso de formado, otra de sus ventajas es que es posible predecir el comportamiento en un proceso de formado sin necesidad de hacer gran cantidad de pruebas físicas. Estas ventajas hacen que cada vez se recurra más a la aplicación de simulaciones numéricas ya que se pueden llegar a reducir los tiempos y costos en la manufactura.

En este trabajo se parte de una introducción a los procesos de formado de metal, enfocándose en especial en el estirado y embutido de lámina, posteriormente se mencionan las bases teóricas de elasticidad y plasticidad que se presentan en estos procesos, para después analizar algunos modelos simplificados a partir de los cuales se llegará a construir un modelo capaz de representar la prueba de Erichsen y analizar el comportamiento de las láminas metálicas en esta prueba.

## Justificación del estudio

En la actualidad existen diversos productos fabricados en procesos de formado de láminas metálicas los cuales son de una gran variedad de formas y tamaños, uno de estos procesos es el estirado de lámina donde se tienen tres componentes de la herramienta para el proceso, los cuales son: punzón, matriz y pisador. Esta herramienta será la encargada de formar la lámina metálica. Sin embargo en algunas ocasiones el componente tiende a fracturarse durante el proceso de formado. Estas fallas pueden estar relacionadas con las propiedades del material, de aquí la importancia de estudiar estas propiedades y el comportamiento elasto-plástico.

Debido a la complejidad de los procesos de formado de lámina metálica es difícil predecir el comportamiento del material con exactitud. Debido a esto en muchas

ocasiones se recurre a métodos experimentales o al método de prueba y error elevando los costos de la producción.

La prueba de Erichsen se utiliza para determinar la deformabilidad de láminas de metal y consta de realizar un proceso de estirado de una lámina con un punzón esférico hasta que se produzca una fractura. La altura en milímetros de la copa formada hasta la fractura es conocida como el índice de Erichsen.

## **Objetivo general**

Obtener e implementar un modelo de simulación que describa el proceso durante la prueba de Erichsen, para analizar el comportamiento de la lámina y los parámetros que influyen en esta prueba.

## **Objetivos específicos**

- Búsqueda y revisión de literatura, que puedan servir como referencia.
- Analizar modelos de referencia para adquirir experiencia en el manejo de las no linealidades presentes durante un proceso de formado de lámina en frío.
- Caracterizar el comportamiento elasto-plástico de metales.
- Implementación y simulación de un modelo que sea capaz de describir el comportamiento durante la prueba de Erichsen.
- Estudiar el impacto que tienen factores como la fricción en el caso de estudio, buscando un modelo que sea capaz de describir de la mejor forma este comportamiento.

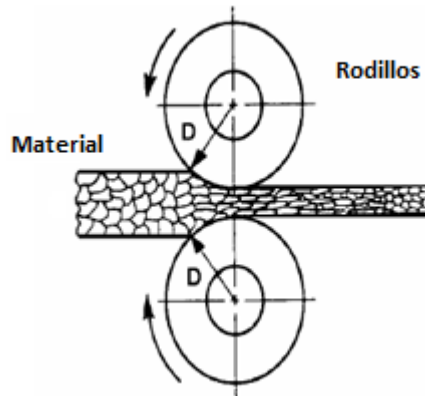
# 1 ESTADO DEL ARTE EN EL FORMADO DE METAL

## 1.1 Procesos de formado por deformación plástica

El proceso de formado por deformación plástica se utiliza para obtener piezas en estado sólido a partir de materiales base. Los procesos de formado aprovechan de manera útil las propiedades mecánicas de los metales como es la maleabilidad y la ductilidad [1].

### 1.1.1 Laminado

Es un proceso que consiste en deformar plásticamente los metales al hacerlos pasar entre cilindros giratorios con una abertura entre estos menor que el espesor de la pieza de trabajo.



*Figura 1-1 Laminado.*

### 1.1.2 Forjado

Es un proceso mediante el cual la pieza de trabajo se moldea mediante fuerzas de compresión aplicadas por medio de martinets, prensas y máquinas forjadoras o estampadoras.

El forjado puede efectuarse a temperatura ambiente (forjada en frío) o a temperaturas elevadas (forjada a temperatura media o en caliente) dependiendo de esto son las características que se tendrán en la pieza de trabajo. Las partes forjadas en frío tienen un buen acabado superficial y precisión dimensional aunque se requiere de mayor fuerza para forjar. En cambio para el forjado en caliente se requieren menores fuerzas pero no se tiene tan buena precisión dimensional y acabado.

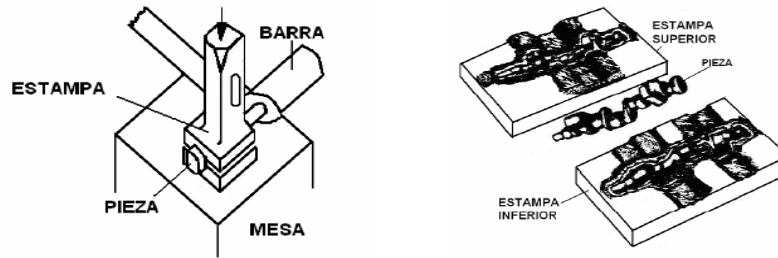


Figura 1-2 Forjado.

### 1.1.3 Extrusión

Es un proceso de formado de compresión indirecta en el cual un material dúctil fluye a través de un orificio de una matriz de forma determinada, por medio de un impacto o una fuerte compresión para formar una pieza con la sección del orificio

Este proceso también puede realizarse a temperatura ambiente o en caliente para metales que carecen de suficiente ductilidad.

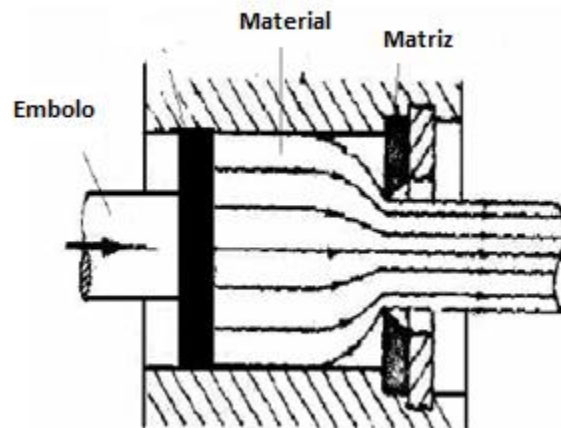


Figura 1-3 Extrusión.

### 1.1.4 Estirado (Trefilado)

Es un proceso de compresión indirecta, que consiste en hacer pasar un alambre grueso por una placa de acero llamada hilera o matriz provista de un agujero ligeramente cónico que va disminuyendo progresivamente el diámetro del alambre hasta llegar a la medida que se desea obtener.



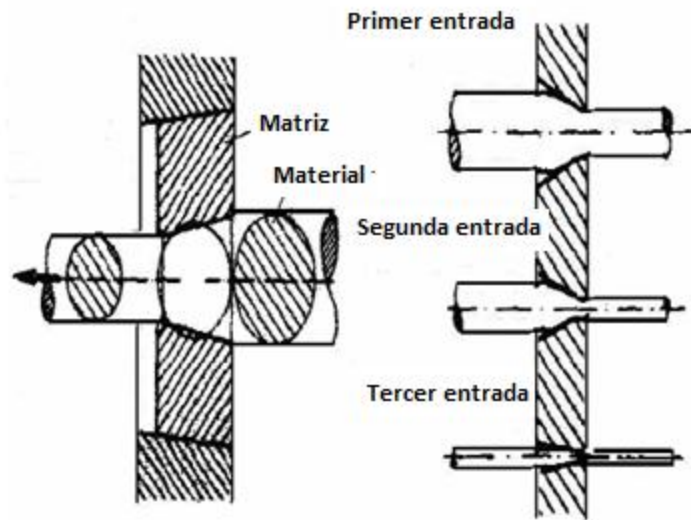


Figura 1-4 Estirado.

### 1.1.5 Formado de hojas metálicas

Existen diversos tipos de procesos de formado de hojas metálicas de los cuales los más comunes son los siguientes:

#### 1.1.5.1 Doblado

Es un proceso de formado por flexión en el que el metal es obligado a tomar nuevas formas por movimiento o flujo plástico sin alterar su espesor. El doblado abarca procesos como son: plegado, rolado, perfilado, y embutido.

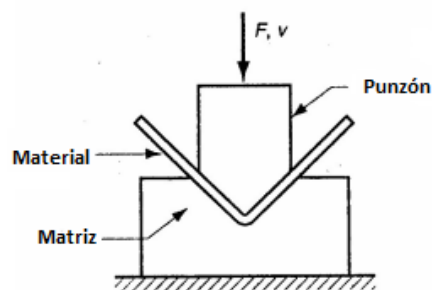


Figura 1-5 Doblado.

### 1.1.5.2 Embutido profundo

Es un proceso en el cual se coloca una lámina metálica sobre una abertura de una matriz circular y se mantiene en su lugar con una placa de sujeción mientras el punzón baja y empuja la lámina dentro de la cavidad de la matriz formando una copa.

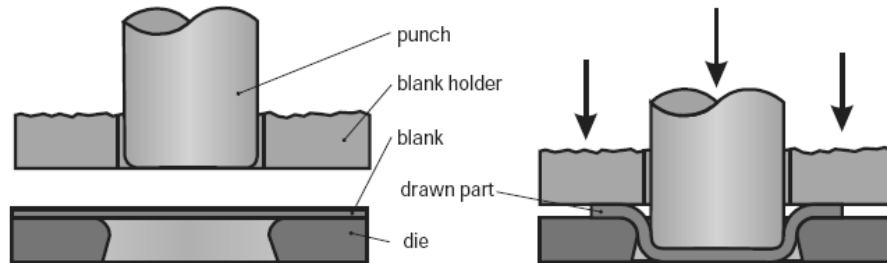


Figura 1-6 Embutido profundo [2].

### 1.1.5.3 Estirado de lámina

El formado por estirado de lámina es un proceso de deformación en el cual la lámina se estira a fin de lograr un cambio de forma. La lámina se sujeta y luego se estira y dobla sobre la superficie de un dado que contiene la forma deseada, en contraste con el embutido profundo se tiene una considerable reducción del espesor del metal.

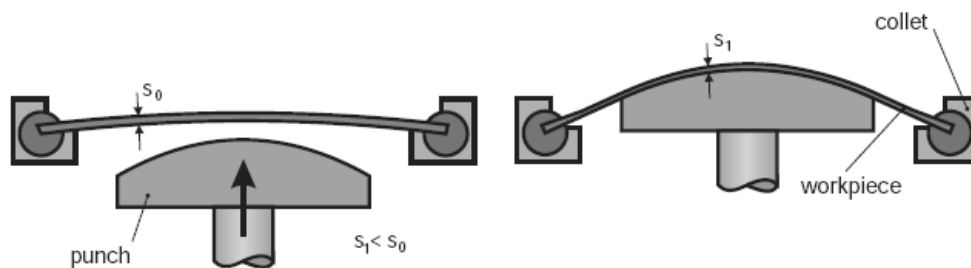
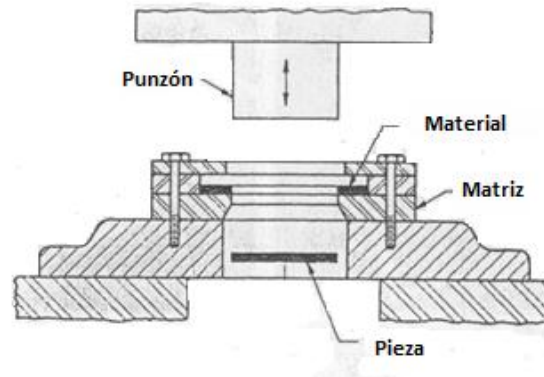


Figura 1-7 Estirado de lámina [2].

### 1.1.5.4 Cizallado

Aunque el cizallado no es estrictamente un proceso de formado, se incluye en esta lista por ser un proceso de trabajo con hojas metálicas y por ser muy similar en infraestructura y en muchos casos se realice en combinación con uno de los procesos de formado de hojas mencionados anteriormente. El proceso de cizallado es un proceso

de corte de una hoja metálica sometiéndola a esfuerzos de corte con un punzón y una matriz.



*Figura 1-8 Cizallado.*

## **1.2 Factores principales que intervienen en el proceso de formado**

Los principales factores que intervienen en el formado de metal en general son: la temperatura, velocidad de deformación, micro-estructura. Además para los procesos de doblado y embutido se debe tomar en cuenta otros factores, como la fricción y recuperación elástica [2].

### **1.2.1 Temperatura en el formado**

Los procesos de formado se pueden realizar a diferentes temperaturas y dependiendo de ésta se clasifican en trabajo en frío y trabajo en caliente, el parámetro que se utiliza para determinar el tipo de trabajo es la temperatura de recristalización del metal. El trabajo en caliente de los metales toma lugar por encima de la temperatura de recristalización y el trabajo en frío debe hacerse a temperaturas abajo del rango de recristalización, frecuentemente es realizado a temperatura ambiente.

#### *1.2.1.1 Trabajo en caliente*

Para el trabajo en caliente las fuerzas requeridas para deformar el metal son menores y las propiedades mecánicas se cambian moderadamente. Durante éste proceso el metal está en estado plástico y es formado rápidamente por presión.

Ventajas del trabajo en caliente:

- La ductilidad y la resistencia al impacto se incrementan.
- Se desarrolla una gran homogeneidad en el metal.
- Los granos gruesos o prismáticos son refinados

- Las impurezas en forma de inclusiones son eliminadas y distribuidas a través del metal.
- La cantidad de energía necesaria para cambiar la forma del acero en estado plástico es mucho menor que la requerida cuando el acero está frío.

Desventajas del trabajo en caliente:

- Existe una rápida oxidación o escamado de la superficie.
- Un pobre acabado superficial.
- El equipo para trabajo en caliente y los costos de mantenimiento son altos, pero el proceso es económico comparado con el trabajo de metales a bajas temperaturas.

### 1.2.1.2 Trabajo en frío

Para el trabajo en frío se requiere aplicar mayores fuerzas, pero el esfuerzo propio del metal se incrementa permanentemente. Se dice que un material es formado en frío, cuando la temperatura de deformación no llega a producir cambios en su microestructura.

Ventajas del trabajo en frío

- El material presenta endurecimiento por deformación.
- Buenos acabados superficiales.
- Proporcionan mejor precisión, tolerancias más estrechas.
- Mayores velocidades de producción.
- Distorsiona la forma del grano.

Desventajas del trabajo en frío

- Se requiere aplicar presiones mayores que en el trabajo en caliente.
- Se requiere mayor potencia y por consiguiente equipos grandes.
- Mientras menos dúctil sea el metal menos puede trabajarse en frío.
- Se debe tener cuidado para asegurar que las superficies de la pieza de trabajo inicial estén libres de incrustaciones y suciedad.
- La ductilidad y el endurecimiento por deformación del metal de trabajo limitan la cantidad de formado que se puede hacer sobre la pieza.

### 1.2.2 La Velocidad de Deformación

La velocidad de deformación tiene poca influencia en los procesos de conformación, a menos que se realicen a grandes velocidades, ya que pueden aparecer regiones de deformación no uniforme.

El comportamiento de los metales en los procesos de conformación puede depender de la velocidad de deformación, la mayoría de los metales de estructura cúbica centrada cambian su comportamiento de dúctiles a frágiles dentro de un determinado rango de temperatura y si la velocidad de deformación es considerablemente alta, el fenómeno de la temperatura de transición resulta más significativo.

Si la velocidad de deformación es grande puede dar lugar a que se produzcan regiones de deformaciones no uniformes o marcas de deformación, las mismas que podrían ser eliminadas al disminuirse esta velocidad. En el trabajo en caliente el límite elástico de los metales es considerablemente afectado por la velocidad de deformación.

### 1.2.3 La Micro-Estructura en el Conformado

La fuerza necesaria para realizar una operación de doblado, está relacionada directamente con el límite de fluencia del material que se trabaja y ésta depende de la estructura metalúrgica y de la composición de la aleación.

El límite elástico de los metales dependen de la micro-estructura metalúrgica y de la composición química de cada uno de ellos, ya sea como metales puros o como aleaciones, al realizar cualquiera de las operaciones de conformado mecánico, los esfuerzos para la deformación plástica dependen del límite elástico y por tanto de la estructura metalúrgica, por otra parte, el conformado mecánico de los metales puros resulta más fácil mientras más alto sea el punto de fusión; en cuanto al punto de fusión se refiere, si las partículas dispersas tienen un punto de fusión más bajo que la matriz, se presenta el riesgo de fragilidad en caliente con mayor frecuencia.

El límite elástico se ve también modificado por el tamaño de las partículas uniformemente distribuidas de esta manera habrá un aumento en el límite elástico si las partículas de una segunda fase son más pequeñas, tal es el caso de la perlita en el acero [2].

### 1.2.4 Comportamiento anisotrópico

La anisotropía es la variación de las propiedades del material dependiendo de la dirección en que se cargue un material [3].

La anisotropía plástica es evaluada por el coeficiente de anisotropía Lanckford:

$$r = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}$$

(1-1)

Donde  $\varepsilon_2$ ;  $\varepsilon_3$  son las deformaciones en las direcciones de anchura y espesor obtenidos en un ensayo de tracción, respectivamente.

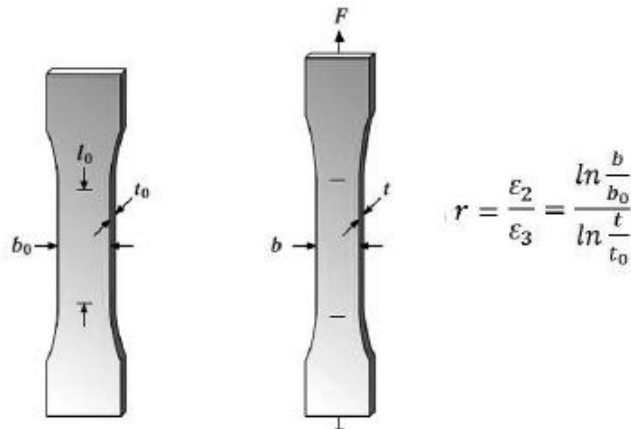


Figura 1-9 Dimensiones de probeta antes y después del ensayo de tracción [3].

Por convención los valores de anisotropía se fijan normalmente a una elongación de 20%. Los experimentos muestran que  $r$  depende de la dirección en el plano. Habiendo determinado los valores de  $r$  para tres direcciones en el plano de la lámina metálica ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ), el coeficiente de anisotropía normal se obtiene de la ecuación:

$$r_n = \frac{r_0 + 2r_{45} + r_{90}}{4} \quad (1-2)$$

La medida de la variación de  $r$  con la dirección se conoce como el coeficiente de anisotropía planar:

$$\Delta r = \frac{r_0 + r_{90} - 2r_{45}}{2} \quad (1-3)$$

### 1.2.5 Fricción

El rozamiento aumenta la resistencia a la deformación y es bastante difícil de cuantificar, constituye uno de los factores más inciertos en las operaciones de doblado.

El valor de las fuerzas de rozamiento depende del material que se trabaje, de la rugosidad, el grado de la lubricación y la temperatura [4].

### 1.2.6 Recuperación Elástica

Cuando una pieza de metal es sometida a una fuerza se produce una deformación en el metal. Si el metal vuelve a sus dimensiones originales cuando la fuerza es suspendida, se dice que el metal ha experimentado una deformación elástica.

En materiales dúctiles al realizar un proceso de formado como el doblado, se debe tomar en cuenta la recuperación elástica del material, para obtener la dimensión final. Al cargar un cuerpo y luego descargarlo.

Es el caso en que un cuerpo sea sometido a la acción de cargas exteriores que sobrepasen su resistencia a la cedencia este no recuperara su configuración geométrica inicial luego de ser retiradas las cargas queda una deformación plástica permanente que es lo que caracteriza a la plasticidad.

### 1.3 Procesos de embutido profundo y estirado de lámina.

En el proceso de embutido se coloca una lámina metálica sobre una matriz y se mantiene en su lugar con un pisador mientras un punzón baja y empuja la lámina dentro de la cavidad de la matriz formando una copa.

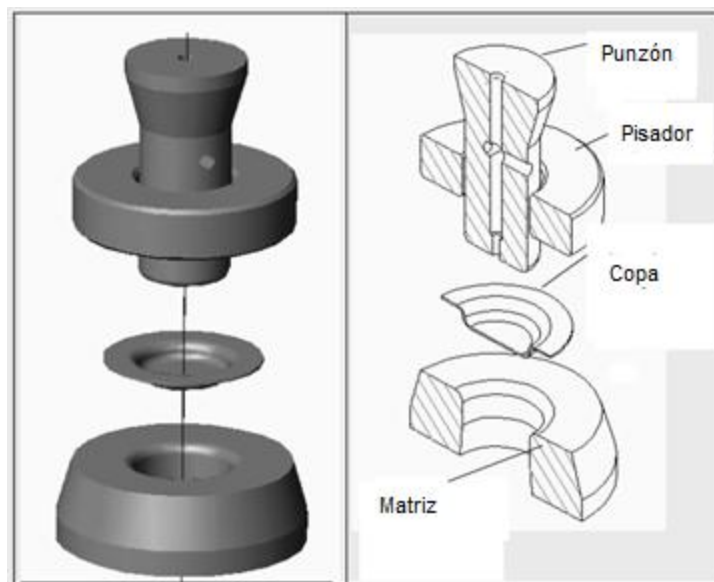
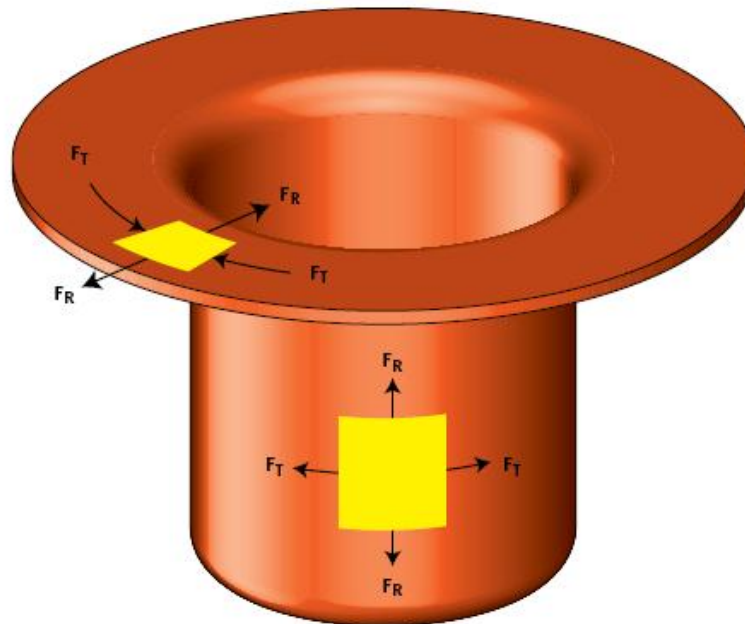


Figura 1-10 Elementos en el embutido profundo.

El embutido profundo es un proceso de formado en cual, el espesor de la lámina metálica se mantiene sin grandes cambios, ya que no se presenta un aumento en el área de la superficie como se produce en un proceso de estirado. El flujo de material en el proceso de embutido puede ser controlado mediante el ajuste de la fuerza del pisador, produciendo un flujo de material sin arrugas [2].

En el embutido profundo, como un primer paso se forma una copa a partir de la lámina de metal. La pieza de trabajo se somete a fuerzas de tensión radial  $F_R$  y fuerzas de compresión tangenciales  $F_T$ .



*Figura 1-11 Fuerzas en la formación de una copa por embutido profundo [2].*

El material se comprime en la dirección tangencial y se estira en la dirección radial. A medida que aumenta la profundidad de la copa también se incrementa la cantidad de deformación y la resistencia a la deformación. La lámina se deforma más críticamente en la esquina del punzón lugar donde comúnmente se pueden presentar fallas como la fractura.

Las variables que influyen en el proceso de embutido profundo son las propiedades del metal de la lámina, la relación entre los diámetros de la pieza de trabajo y el punzón, la holgura entre el punzón y la matriz, el radio del punzón, la fuerza de sujeción del material a la matriz, la fricción entre la lámina y sujetador y la fricción y/o lubricación entre la lámina y el punzón.

La capacidad de embutido profundo se puede expresar mediante una relación del diámetro de la pieza en bruto ( $D_0$ ) y el diámetro del punzón ( $D_p$ ):

$$LDR = \frac{D_0}{D_p} \tag{1-4}$$



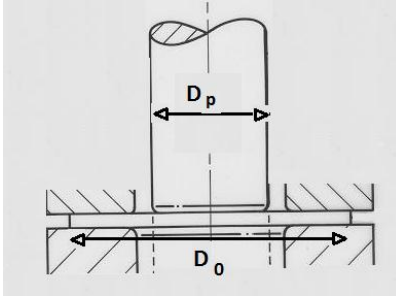


Figura 1-12 Diámetros del punzón y matriz. [2]

A diferencia del embutido profundo, en el estirado de lámina el metal no puede fluir en la zona de sujeción, ya que es fijado rigidamente por pinzas o sujetado a una matriz por acción de un pisador. El proceso de estirado de lámina se lleva a cabo con una reducción considerable en el espesor de la lámina bajo esfuerzos de tracción. En su mayoría es utilizado para producir componentes de paneles en aeronaves o la fabricación de componentes de automóviles.

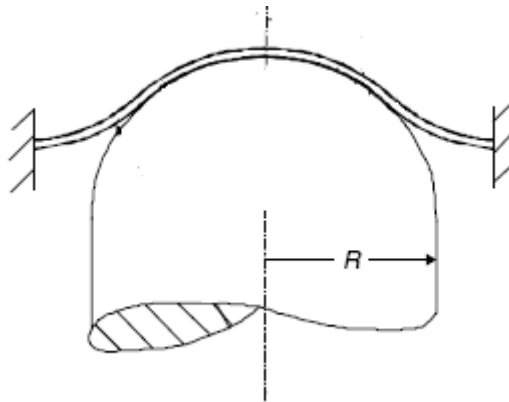


Figura 1-13 Estirado de lámina mediante un punzón.

Si un disco de lámina es sujetado en el borde y se estira por un punzón semiesférico, como se muestra en la Figura 1-13, la tensión en la lámina se incrementará con el desplazamiento punzón. Si no hay fricción entre la lámina y el punzón, la mayor tensión será en el centro del punzón y la distribución de la deformación será similar a la de la Figura 1-14. En la práctica, es muy difícil obtener condiciones casi sin fricción.

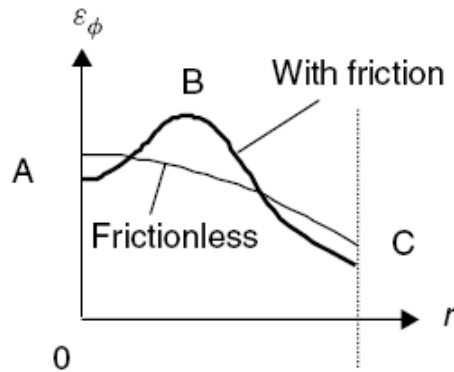


Figura 1-14 Distribución de las deformaciones en un estirado de lámina [4].

Para punzones que no son semiesféricos, la distribución de la deformación depende de la forma punzón. Dos casos se muestran en la Figura 1-15; donde a la izquierda de cada diagrama, se muestra el caso sin fricción y a la derecha el caso en el que hay fricción entre el punzón y la lámina. En el punzón de fondo plano el efecto de la fricción se limita a la superficie de la cara plana del punzón, esto reduce que el material sobre la cara del punzón esté libre de fluir. La profundidad máxima que puede ser formada es por lo tanto menos con presencia de fricción. Con el punzón puntiagudo sin fricción la deformación se concentra cerca de la punta. El efecto de la fricción es reducir la tensión en la punta y transmitir la deformación sobre un área mayor, lo que permite una mayor profundidad de formado.

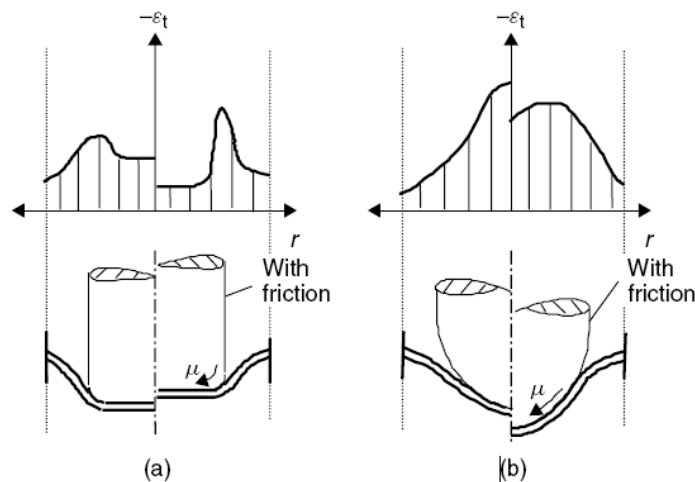


Figura 1-15 Distribución de deformaciones para punzones: a) fondo plano, b) puntiagudo [4].

### 1.3.1 Defectos en embutido profundo

En el proceso de embutido profundo se pueden llegar a presentar algunos defectos en la pieza, entre los principales se encuentran los siguientes [2]:

Tabla 1-1 Defectos en el embutido profundo

Defecto	Posible causa	Prevención, remedio
Rayado superficial.	Herramienta, lubricación.	Reemplazar punzón, matriz o lubricar.
Marcas de ruptura en la base de la pieza embutida.	Curvatura muy pequeña en el punzón o la matriz, velocidad de embutido muy alta.	Utilizar una lámina con mayor capacidad de embutido, utilizar un embutido de varias etapas, revisar el espesor de la lámina, reducir la carga en el pisador, reducir la velocidad de embutido.
En partes rectangulares las paredes son más delgadas que las esquinas.	Demasiado material en las esquinas.	Cambiar la forma de pieza de trabajo.
Pliegues verticales en la zona superior del cuerpo (pared del vaso) también en conjunción con grietas verticales.	Carga en el pisador baja, curvatura en la matriz muy grande.	Incrementar la carga en el pisador, renovar la matriz.
Formación de arrugas en la brida.	Forma incorrecta de pieza de trabajo, localización asimétrica del material, lubricación incorrecta.	Incrementar la carga en el pisador.

## 1.4 Formabilidad de láminas y prueba de Erichsen

Para medir la formabilidad de láminas y analizar su anisotropía se hace uso de la prueba de Erichsen en la que una lámina es penetrada con un cuerpo semiesférico hasta que esta falla por fractura. Esta prueba se encuentra regulada bajo las normas ISO 20482 (Figura 1-16) y ASTM E643. (Figura 1-17)

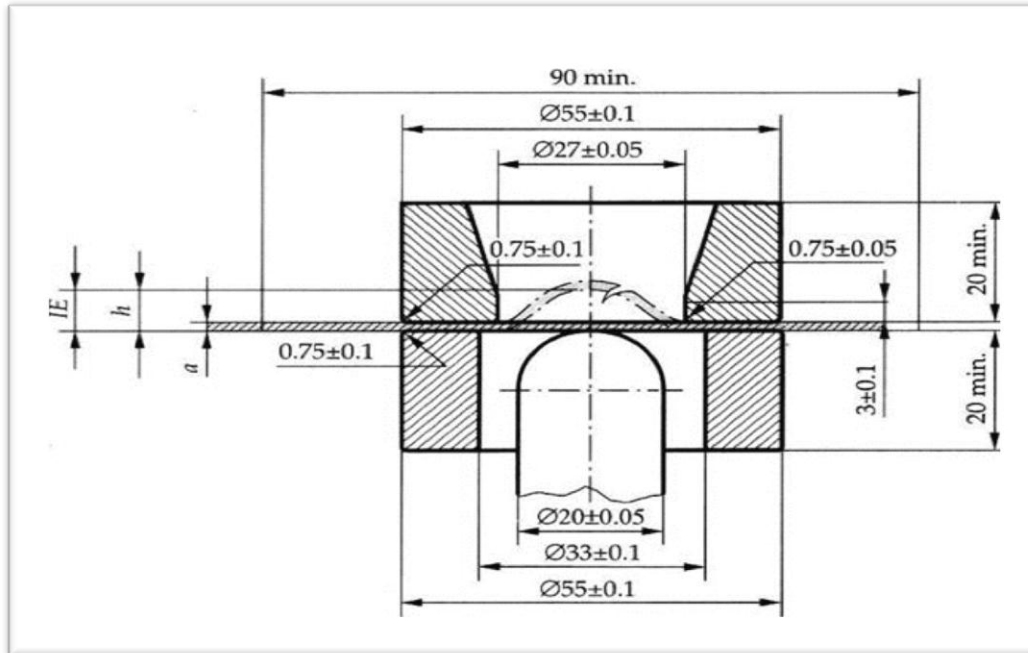


Figura 1-16 Dimensiones para la prueba de Erichsen ISO 20482 en milímetros [5].

La ASTM (American Society for Testing Materials) redactó un estándar encaminado a normalizar las condiciones del ensayo de Erichsen cubriendo los aspectos constructivos del equipo y las variables de procedimiento ASTM-E643 [6], entre los más relevantes se encuentran [6]:

#### Herramienta de ensayo

- Dimensiones de la herramienta Figura 1-17
- La capacidad de carga del equipo debe ser como mínimo de 9800 N (1000 kg).
- Propiedades físico-mecánicas de la herramienta. El punzón debe tener una dureza de 62 HRC como mínimo y una rugosidad máxima de Ry 4. De igual forma los dados deben cumplir ese mínimo valor de rugosidad además de una dureza de al menos 56 HRC.
- El espesor de las muestras a ensayar debe estar entre 0.2 y 2.0 mm. Mientras el ancho o diámetro debe ser de 90 mm como mínimo.
- Velocidad del punzón entre 0.08 y 0.4 mm/s.
- El método preferido o recomendado para determinar el punto final del ensayo es por caída de carga en el punzón, en general esto indica la formación de cuello y consecuente rotura en el domo de la copa.

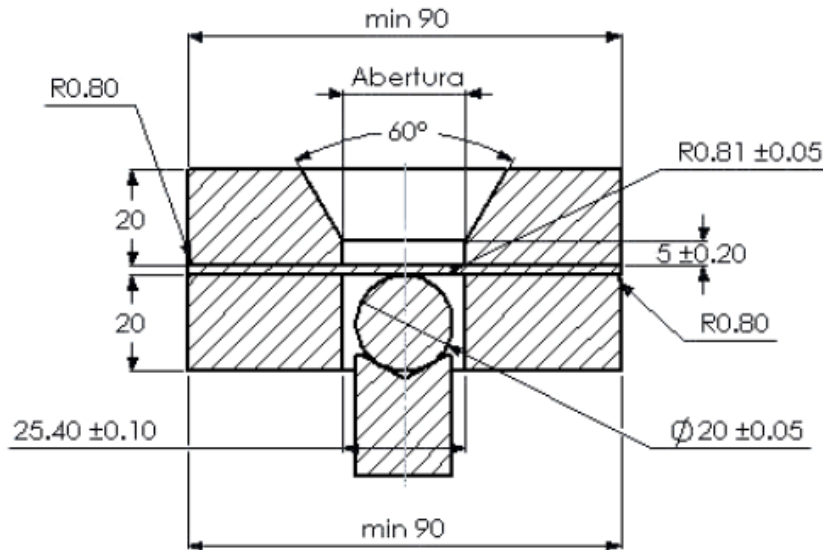


Figura 1-17 Dimensiones estándar ASTM E643 en milímetros [6].

#### Espécimen de prueba

- Se requieren de un mínimo de tres pruebas cuando se requiera una buena precisión.
- Los especímenes pueden ser circulares o rectangulares con un mínimo de lado o diámetro de 90mm.
- El espesor para realizar las pruebas se encuentra entre 0.2 y 2.0 mm.

#### Consideraciones para el procedimiento

- Los estudios han demostrado que la variación en la lubricación influye en la distribución de tensiones y el estado de deformación en el material en contacto con el punzón. Se recomienda lubricar sólo el punzón con una fina capa de vaselina.
- La velocidad del punzón deberá estar comprendida entre 0.08 y 0.40 mm / s. y se deberá reducir al mínimo en la parte final de la prueba para una mayor precisión.
- El método más utilizado para la determinación del punto final deberá ser por la caída en la carga sobre la muestra. En general esto indica el inicio del estrechamiento de la muestra. En algunas máquinas que no cuentan con un indicador de carga el punto final será cuando se observe el estrechamiento o fractura de la muestra.

#### Reporte de la prueba

El reporte de la prueba debe de contener los siguientes datos:

- Tipo de material.
- Espesor del material.

- Método de determinación del punto final.
- Número de pruebas.
- Tipo de lubricante.
- Valor medio y rango (o desviación estándar) de la altura.
- Promedio de cargas máximas (si se conoce).
- Fuerza de sujeción (si se conoce).

Precisión:

La concordancia en repetidas pruebas depende de la homogeneidad del material, la máquina y la interacción del operador y la máquina.

## 2 FUNDAMENTOS DE ELASTICIDAD Y PLASTICIDAD

### 2.1 Estado de esfuerzos

La hipótesis del continuo consiste en ignorar la naturaleza atómica o molecular de la materia y asumir que la distribución de la masa en el volumen que ocupa el cuerpo, es una función continua de la posición, a menos que se especifique lo contrario, asumiremos también que el cuerpo considerado es mecánicamente homogéneo e isotrópico. Esto significa que las propiedades mecánicas del cuerpo son constantes en todo el volumen e independientes de la dirección en la cual se les mida [7].

Para observar el estado de esfuerzos en un punto P de una porción de medio continuo sometido a cargas arbitrarias, lo seccionamos con un plano de orientación arbitraria caracterizado por el vector unitario n, que pase por dicho punto como se muestra en la Figura 2-1.

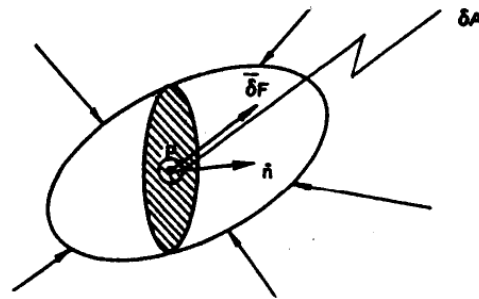


Figura 2-1 Estado de esfuerzos en un punto P [7].

Si aislamos una de las partes en que el plano divide al cuerpo, para restituir el equilibrio debemos aplicar sobre la sección producida una distribución de fuerzas idéntica a la de la porción eliminada. Si ahora consideramos sobre el plano de la sección un elemento de área  $\delta A$  alrededor del punto P, sobre dicha área elemental existirá una resultante de fuerza elemental  $\delta F$ . Definimos ahora al vector tracción actuante en el punto P, asociado al plano de normal n, como

$$t^n = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F}{\delta A}$$

(2-1)

Ahora bien, aunque en general la dirección del vector tracción no coincidirá con la de la normal n, es siempre posible elegir un sistema de coordenadas cartesianas con un eje coincidente con la dirección normal n y los otros dos ejes contenidos en el plano de la sección, y proyectar el vector  $\delta F$  sobre estos ejes. Asumiendo que el eje x de tal

sistema coordenado es corresponde a la dirección normal  $n$ , definimos la tensión normal  $\sigma_{xx}$  actuando en el punto P, como

$$\sigma_{xx} = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_x}{\delta A} \quad (2-2)$$

Donde  $\delta F_x$  es la componente de  $\delta F$  en la dirección del eje x.

Los esfuerzos tangenciales o esfuerzos de corte quedan definidos por:

$$\sigma_{xy} = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_y}{\delta A} \quad (2-3)$$

$$\sigma_{xz} = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_z}{\delta A} \quad (2-4)$$

El primer subíndice indica la dirección normal al plano sobre el que actúa el esfuerzo, mientras que el segundo subíndice indica la dirección en la cual actúa.

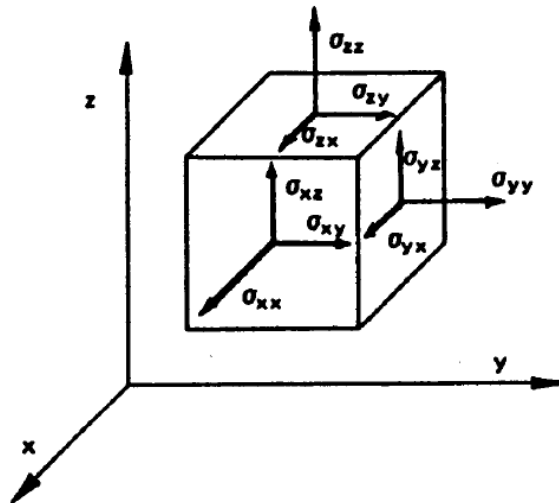


Figura 2-2 Esfuerzos normales y tangenciales [7].

Respecto a los signos un esfuerzo se considera positivo cuando actúa sobre una cara cuya normal exterior coincide con la dirección positiva del eje respectivo.



### 2.1.1 Ecuaciones de equilibrio

En un entorno volumétrico del punto **P** con forma de paralelepípedo rectangular mostrado en la Figura 2-3

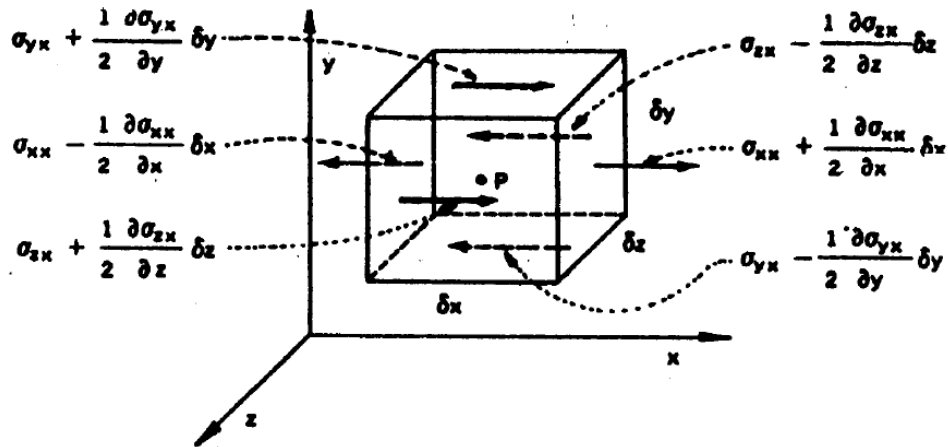


Figura 2-3 Componentes de las tensiones que producen fuerzas con proyección no nula sobre el eje x [7].

Planteando el equilibrio de fuerzas en el mismo y considerando sólo las tensiones que producen fuerzas con proyección no nula sobre el eje x, resulta

$$\begin{aligned} \sum F_x = & \left( \sigma_{xx} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z + \left( \sigma_{yx} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} \delta y \right) \delta x \delta z \\ & + \left( \sigma_{zx} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \delta z \right) \delta x \delta y - \left( \sigma_{xx} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z \\ & - \left( \sigma_{yx} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} \delta y \right) \delta x \delta z - \left( \sigma_{zx} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \delta z \right) \delta x \delta y = 0 \end{aligned} \quad (2-5)$$

Reduciendo tenemos que:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (2-6)$$

De la misma forma para las otras direcciones

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (2-7)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (2-8)$$

Consideremos ahora el equilibrio de momentos alrededor de un eje paralelo a z, que pase por P como se ve en la Figura 2-4.

$$\begin{aligned} \sum M_z &= -\left(\sigma_{yx} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} \delta y\right) \delta x \delta z \frac{\delta y}{2} - \left(\sigma_{yx} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} \delta y\right) \delta x \delta z \frac{\delta y}{2} \\ &\quad + \left(\sigma_{xy} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \delta x\right) \delta y \delta z \frac{\delta x}{2} + \left(\sigma_{xy} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \delta x\right) \delta y \delta z \frac{\delta x}{2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2-9)$$

Simplificando tenemos que:

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy} \quad (2-10)$$

De la misma manera para las otras direcciones:

$$\sigma_{zy} = \sigma_{yz} \quad (2-11)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} \quad (2-12)$$

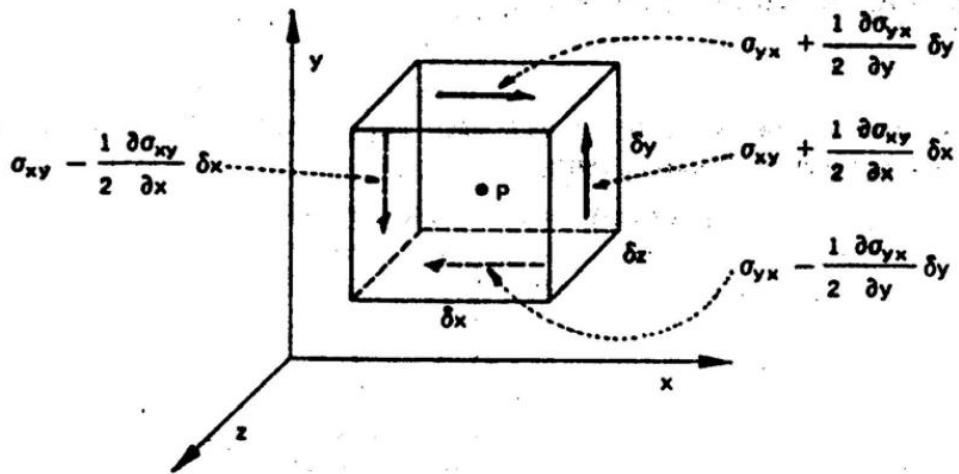


Figura 2-4 Esfuerzos cortantes [7].

Al presentarse dos subíndices iguales  $\sigma_{xx}$  se presenta un esfuerzo normal y con dos subíndices diferentes  $\sigma_{xy}$  corresponden a un esfuerzo cortante también conocido por la notación  $\tau_{xy}$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

(2-13)

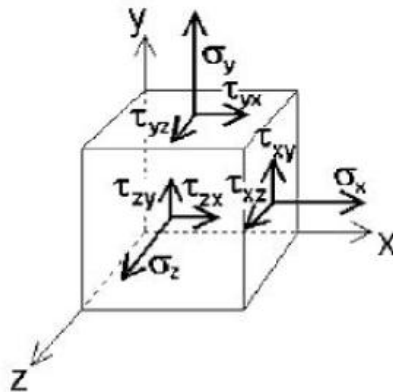


Figura 2-5 Notación con esfuerzos cortantes [7].

Con la simplificación anterior de los esfuerzos cortantes las componentes del esfuerzo quedan representadas de la siguiente forma matricial.

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (2-14)$$

El tensor de esfuerzos quedara reducido de nueve a seis componentes de los cuales tres son esfuerzos normales y tres esfuerzos cortantes.

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (2-15)$$

### 2.1.2 Esfuerzos principales

Para obtener los valores de los esfuerzos en un punto P en un plano, tal que la normal está dada por el vector unitario  $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ , tenemos entonces que las componentes cartesianas del esfuerzo  $T$  que aparece en el plano están dadas por:

$$\begin{aligned} T_{nx} &= \sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z \\ T_{ny} &= \tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z \\ T_{nz} &= \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z \end{aligned} \quad (2-16)$$

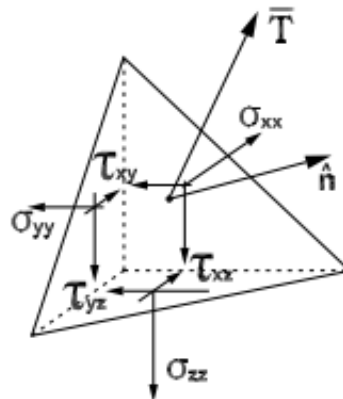


Figura 2-6 Esfuerzos en un plano arbitrario [7].

Esta ecuación puede escribirse de forma matricial como:

$$T\hat{n} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad (2-17)$$

En la mecánica de sólidos los esfuerzos principales en un punto P se definen como los esfuerzos que aparecen en ese punto P en planos, que se denominan planos principales, en los que el esfuerzo tiene la dirección normal al plano.

## 2.2 Estado de deformaciones

Se tiene un cuerpo en forma de paralelepípedo rectangular con caras coincidentes a los planos coordenados y aristas paralelas a los eje x, y, z como se muestra en la Figura 2-7.

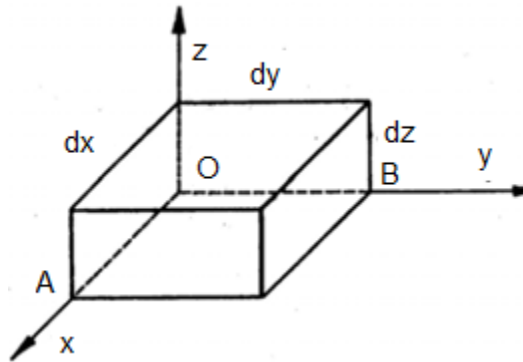


Figura 2-7 Cuerpo en forma de paralelepípedo.

Si el cuerpo experimenta deformaciones donde u, v, w, son las componentes de desplazamiento del punto O, por lo tanto el desplazamiento en la dirección x del punto A que se encuentra situado sobre el eje x será:

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (2-18)$$

El incremento en el eje x debido a la deformación es:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

(2-19)

Mientras que para los otros ejes es:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

(2-20)

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

(2-21)

Considerando ahora la distorsión angular entre los elementos OA y OB, como se muestra en Figura 2-8.

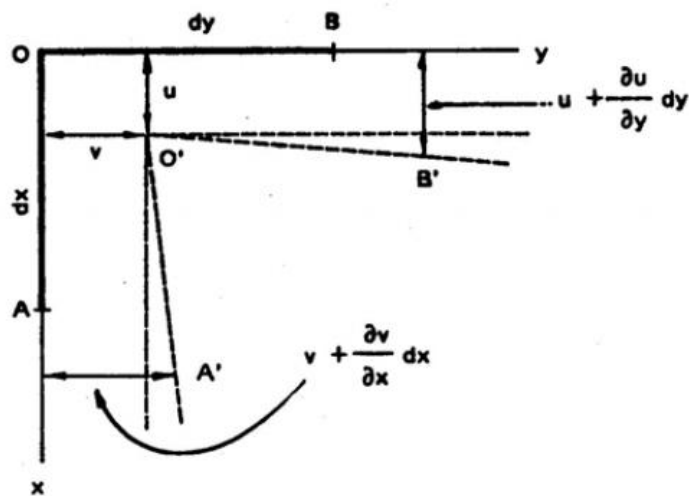


Figura 2-8 Distorsión angular.

El desplazamiento del punto A en la dirección de y será

$$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

(2-22)

Mientras que el desplazamiento de B en la dirección x, es:

$$u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

(2-23)

Debido a estos desplazamientos, la nueva dirección O'A' del elemento OA se encuentra girada en un ángulo  $\frac{\partial v}{\partial x}$  con respecto a la original. Del mismo modo, el elemento O'B' se encuentra girado un ángulo  $\frac{\partial u}{\partial y}$  respecto de OB. De modo que el ángulo recto original AOB ha disminuido en un valor

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

(2-24)

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

(2-25)

Que constituye entonces la deformación angular entre los planos xz e yz.

De manera similar para las otras direcciones tenemos que:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

(2-26)

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

(2-27)

Empleando la notación de doble subíndice y con el único símbolo  $\varepsilon_{ij}$  pueden describirse por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

(2-28)

Estas componentes de deformación describen el estado de deformación de un punto de interés pero son válidas solo para pequeñas deformaciones, si se presenta el caso de grandes deformaciones entonces se deberán agregar términos adicionales como resultado de la geometría y/o el material.

Para el caso de deformaciones también se presentan deformaciones principales

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\gamma_{xy}/2)^2}$$

(2-29)

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\gamma_{xy}/2)^2}$$

(2-30)

Y la dirección principal se tiene mediante:

$$\tan 2\alpha = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

(2-31)

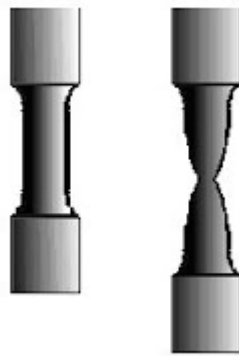


## 2.3 Esfuerzos y deformaciones de ingeniería y reales

Las propiedades de un material son de gran importancia para conocer el comportamiento que éste tendrá en los procesos de formado de metal es por esto que se recurre al diagrama de esfuerzo y deformación para su caracterización.

### 2.3.1 Esfuerzos y deformaciones de ingeniería

Para obtener el comportamiento mecánico de un material se utiliza la prueba de tensión en la cual una probeta como la mostrada en la Figura 2-9 se fija de un extremo, mientras que el otro extremo es sujeto a un desplazamiento controlado  $\delta$  [8].



*Figura 2-9 Probeta para prueba de tensión.*

En esta prueba obtenemos el esfuerzo de ingeniería  $\sigma_e$  y la deformación de ingeniería  $\varepsilon_e$ , que son obtenidos a partir de la fuerza y la deflexión de la probeta de la siguiente forma:

$$\sigma_e = \frac{P}{A_0} \tag{2-32}$$

$$\varepsilon_e = \frac{L - L_0}{L_0} \tag{2-33}$$

Graficando el esfuerzo de ingeniería  $\sigma_e$  contra la deformación de ingeniería  $\epsilon_e$  obtenemos la gráfica que se muestra en la Figura 2-10. Al inicio de la curva se presenta una relación la cual obedece la ley de Hooke que expresa que el esfuerzo y la deformación son proporcionales mediante una constante conocida como módulo de Young.

$$\sigma_e = E \epsilon_e$$

(2-34)

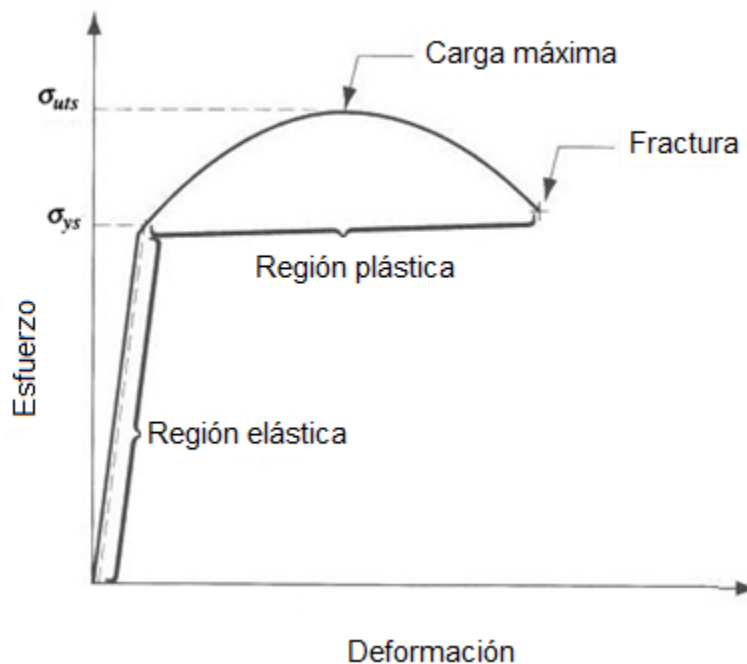


Figura 2-10 Curva esfuerzo-deformación de ingeniería.

Al existir una mayor deformación los materiales pierden la proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación. El comportamiento no lineal del material está relacionado con la deformación plástica, en donde el material es llevado a un reajuste de su estructura molecular, en el cual los átomos están siendo movidos a nuevas posiciones de equilibrio. La movilidad molecular se incrementa en los materiales cristalinos debido al movimiento de las dislocaciones. Los materiales que carecen de esta movilidad son denominados frágiles, en donde la curva esfuerzo deformación termina en fractura, sin un apreciable flujo plástico. En un material dúctil, el esfuerzo para incrementar la deformación por arriba del límite de proporcionalidad, es mayor conforme se incrementa la deformación, a este fenómeno se le conoce como endurecimiento por deformación [9].

El esfuerzo de cedencia  $\sigma_y$  de un material es el valor al cual se experimente una deformación permanente que no se recupera cuando se libera la carga del material, a partir de este esfuerzo se producirá una deformación plástica en el material, el esfuerzo de cedencia es frecuentemente definido como el esfuerzo requerido para inducir una cantidad de deformación permanente del 0.2%.

En la curva esfuerzo-deformación de ingeniería, Figura 2-10 se observa que el índice endurecimiento por deformación disminuye después de alcanzar el punto denominado Esfuerzo Último de Tensión  $\sigma_{uts}$  sugiriendo que después de este punto el material se suaviza, de manera que cada incremento de deformación adicional, requerirá un esfuerzo menor. Sin embargo, lo anterior es resultado del procedimiento de graficación, ya que el flujo molecular causa una reducción más considerable en el área transversal de la probeta, de manera que el esfuerzo real  $\sigma = P/A$  es mayor que el esfuerzo de ingeniería  $\sigma_e = P/A_0$ , Por lo tanto, si se graficara el esfuerzo real Figura 2-11, no se observaría un esfuerzo máximo en la curva.

Por lo tanto, aunque el Esfuerzo Último de Tensión es probablemente la propiedad de los materiales más comúnmente reportada en las pruebas de tensión, éste no es una medida directa de la propiedad del material (debido a la influencia de la geometría descrita anteriormente), por lo que deberá ser utilizado con precaución en el diseño con materiales dúctiles.

### 2.3.2 Esfuerzos y deformaciones reales

Ya que la curva esfuerzo deformación de ingeniería, no proporciona una descripción muy satisfactoria de la deformación y endurecimiento real, se recurre al esfuerzo real  $\sigma$ , ya que esto brinda una medida más directa del comportamiento del material en el rango de flujo plástico [10].

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{2-35}$$

El diferencial de deformación  $d\varepsilon$ , es igual al incremento diferencial en desplazamiento  $dL$  dividido por la longitud instantánea  $L$ .

$$d\varepsilon = \frac{dL}{L} \tag{2-36}$$

Integrando el diferencial de deformación de  $L_0$  a  $L$ , se obtiene la deformación real o deformación logarítmica

$$\varepsilon = \ln \frac{L}{L_0} \quad (2-37)$$

Por lo tanto la curva esfuerzo real y deformación real puede ser definida a partir de la curva esfuerzo de ingeniería y deformación de ingeniería. De la ecuación (2-33) se despeja  $L/L_0$  y se sustituye en (2-37) para obtener la deformación real en función de la deformación de ingeniería:

$$\varepsilon = \ln(1 + \varepsilon_e) \quad (2-38)$$

Durante el flujo plástico el material fluye con un cambio de volumen despreciable y los incrementos en la longitud son compensados con la reducción del área transversal, por lo que antes del acuellamiento, cuando la deformación es todavía uniforme a lo largo de la probeta, este volumen constante puede ser definido como:

$$dV = 0 \rightarrow AL = A_0L_0 \rightarrow A = A_0 \frac{L_0}{L} \rightarrow A = \frac{A_0}{\varepsilon_e + 1} \quad (2-39)$$

Sustituyendo A en (2-35)

$$\sigma = \frac{P(\varepsilon_e + 1)}{A_0} \quad (2-40)$$

Por lo tanto el esfuerzo real en función del esfuerzo de ingeniería queda definido por:

$$\sigma = \sigma_e(\varepsilon_e + 1)$$

(2-41)

A partir de las ecuaciones (2-38) y (2-41) se puede definir la curva esfuerzo real y deformación real a partir de la curva de esfuerzo de ingeniería y deformación de ingeniería Figura 2-11.

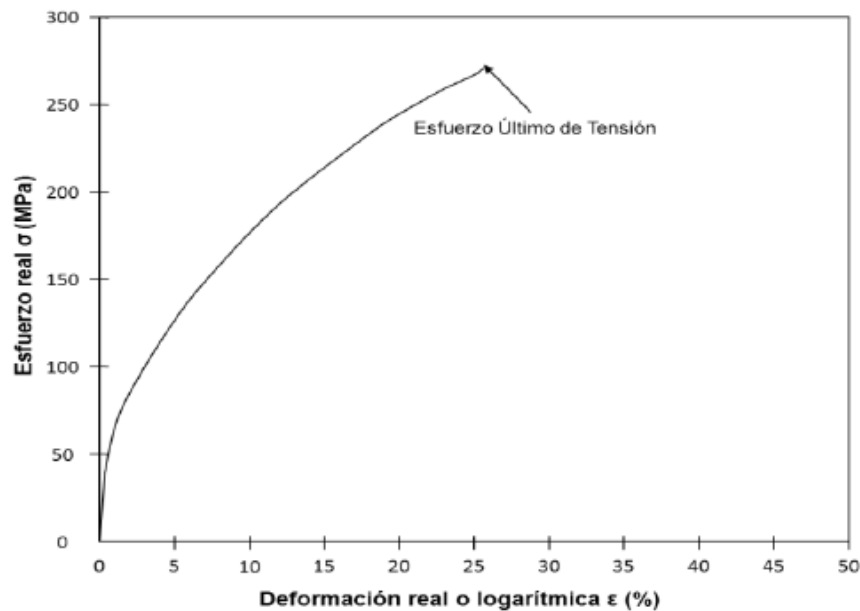


Figura 2-11 Curva esfuerzo-deformación real.

## 2.4 Relaciones entre Esfuerzos y Deformaciones

La representación del estado de esfuerzos deformaciones mediante tensores de segundo orden, conlleva la representación de una matriz de rigidez mediante un tensor de cuarto orden que es difícil de representar de forma escrita. Por este motivo y dado que los tensores de esfuerzos y deformaciones son simétricos y tienen únicamente seis componentes distintas ambos, se suele optar por representar ambos tensores en forma de vectores de la siguiente manera [11]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} \quad (2-42)$$

Para un material que es linealmente elástico, homogéneo e isotrópico, las constantes del material para satisfacer las ecuaciones constitutivas son dos. Estas dos constantes son el módulo de Young,  $E$ , y el coeficiente de Poisson  $\nu$ . El módulo de Young determina el cambio en la longitud de un componente para una carga dada, y el coeficiente de Poisson determina las deformaciones laterales que se presentan al aplicar una carga axial a un cuerpo. Las relaciones de esfuerzo-deformación que describen a este tipo de material linealmente elástico e isotrópico son las siguientes:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)] \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)] \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} = G\gamma_{xz} \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} = G\gamma_{yz} \end{aligned} \quad (2-43)$$

Siendo  $G$  el módulo de elasticidad al corte.

La forma más simple de representar las ecuaciones constitutivas para un caso de elasticidad lineal es por medio de la ley de Hooke

$$\sigma = C\varepsilon \quad (2-44)$$

Donde la constante  $C$  es simétrica y se obtiene de las relaciones esfuerzo- deformación ec.(2-43).

$$[C] = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{pmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (2-45)$$

Tenemos que la relación entre esfuerzo y deformación está dada por:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = [C] \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} \quad (2-46)$$

## 2.5 Elasticidad

El comportamiento de los materiales se puede representar mediante la gráfica de esfuerzo-deformación Figura 2-12.

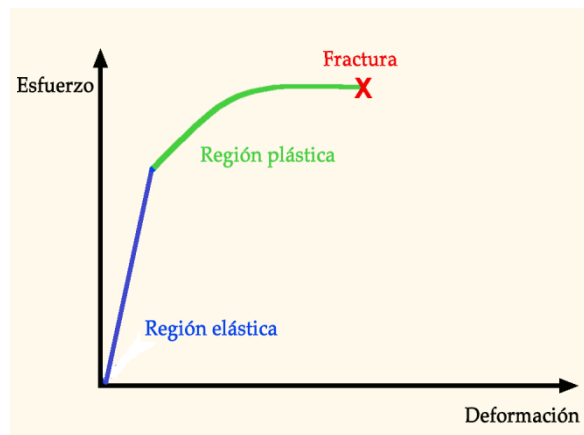


Figura 2-12 Regiones en la curva de esfuerzo-deformación.

La primera región es conocida como región elástica lineal, ya que el comportamiento del esfuerzo es lineal con respecto a la deformación, además de que al desaparecer el esfuerzo sobre el material este vuelve a su forma original y no permanece deformado.

El caso de elasticidad lineal es por medio de la ley de Hooke ec.(2-47).

$$\sigma = C\varepsilon \tag{2-47}$$

Donde el esfuerzo y la deformación son proporcionales mediante una constante conocida como módulo de Young.

$$\sigma = E\varepsilon \tag{2-48}$$

## 2.6 Plasticidad

Para el caso de deformaciones más allá del límite elástico de un material, se utiliza la curva esfuerzo-deformación real, como es mostrado en Figura 2-12. Los datos para esta curva se derivan de las curvas de esfuerzo-deformación de ingeniería medidas a partir de pruebas experimentales realizadas a una probeta de ensayo.

En los procesos de embutido profundo existen grandes deformaciones al grado que sobrepasa el límite elástico, por lo tanto, no se puede usar únicamente el criterio de deformación elástica y es necesario hacer un cambio en las ecuaciones de esfuerzo y deformación que describen el comportamiento plástico del material.

Cuando un cuerpo es deformado plásticamente, este no va a regresar a su forma original después de que se le retiran las fuerzas externas. Este comportamiento se describe por un conjunto de relaciones de esfuerzo-deformación, en las cuales el material está sometido a fluctuaciones de carga y descarga, por tal motivo esta relación esfuerzo-deformación estará cambiando.

Si la gráfica de esfuerzo-deformación se realiza en escala logarítmica Figura 2-13 tendremos que para la región plástica existe una expresión matemática que describe el comportamiento del material para grandes deformaciones y está dado por:

$$\sigma = K\varepsilon^n \tag{2-49}$$



En donde K se le conoce como coeficiente de resistencia y n como exponente de endurecimiento por deformación. Los valores de K y n varían dependiendo el material y su valor numérico se obtiene a partir de pruebas experimentales.

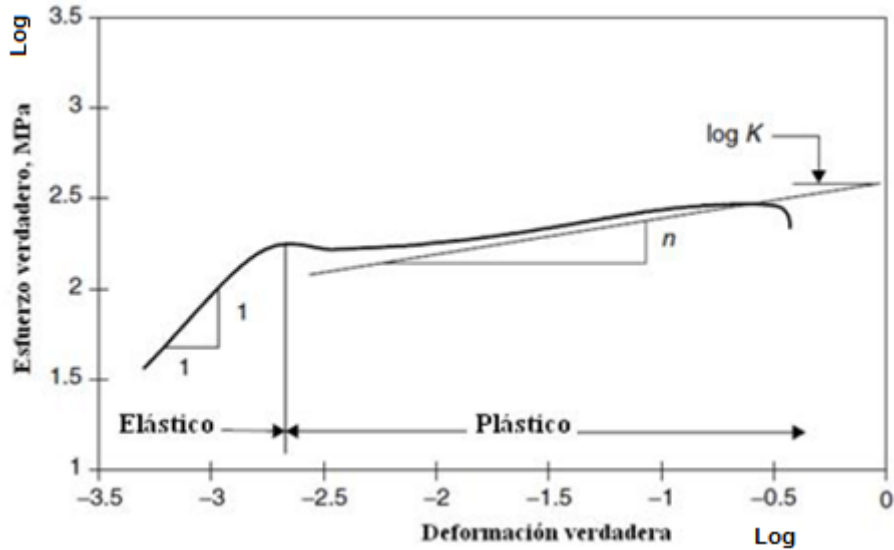


Figura 2-13 Curva esfuerzo-deformación verdadera en escala logarítmica [11].

## 2.7 Cedencia

Para poder determinar el punto de la curva esfuerzo-deformación en donde el comportamiento elástico del material termina y en donde inicia el comportamiento plástico, es necesario contar con un criterio definido por una función de cedencia la cual es una función de los esfuerzos ( $\sigma$ ) y los parámetros del material ( $\alpha$ ) [12].

$$f(\sigma, \alpha) = 0$$

(2-50)

La cedencia representada en función de los esfuerzos principales está dada como una función de:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$$

(2-51)

La función de cedencia define el límite elástico de una superficie en el espacio de esfuerzos. El estado de esfuerzos será dado por un punto dentro de la superficie de la función de cedencia, para el caso de un material perfectamente plástico se muestra la superficie en la Figura 2-14.

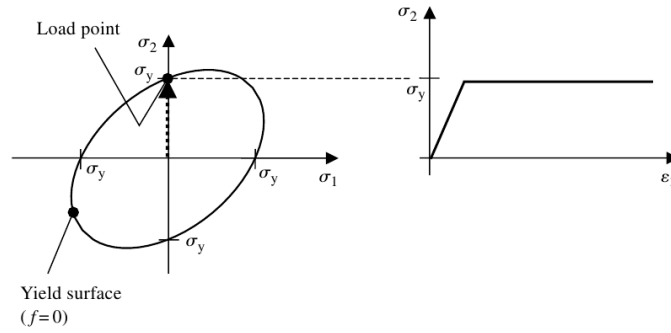


Figura 2-14 Superficie de fluencia de von Mises en estado de esfuerzo plano y la curva de esfuerzo-deformación [12].

El criterio de cedencia utilizado para materiales dúctiles es el criterio de Von Mises.

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_e - \sigma_y \tag{2-52}$$

donde:

$\sigma_y$  Es el esfuerzo límite a la cedencia obtenido mediante un ensayo de tracción.

$\sigma_e$  es el esfuerzo equivalente dado por:

$$\sigma_e = \left[ \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{2-53}$$

La superficie de fluencia según el criterio de von Mises corresponde a un cilindro cuyo eje se encuentra a lo largo de la línea  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ .

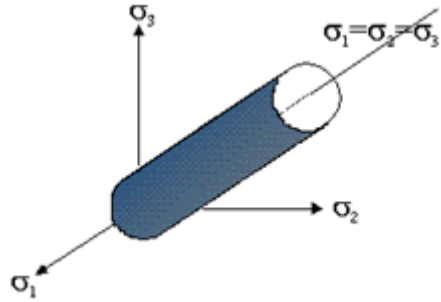


Figura 2-15 Superficie de fluencia de von Mises en el espacio de esfuerzos [12].

## 2.8 Regla de flujo

La regla de flujo nos describe cómo se comportan los esfuerzos y deformaciones una vez que el material llega a la plasticidad y está dada por la ec.(2-54).

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

(2-54)

donde:

$f$  es la función de cedencia definida en la ec.(2-51).

$\lambda$  es un multiplicador plástico

La dirección del flujo del material va a estar dada por la derivada parcial de la función de cedencia que será perpendicular a la tangente de la superficie. La magnitud la proporciona el multiplicador plástico.

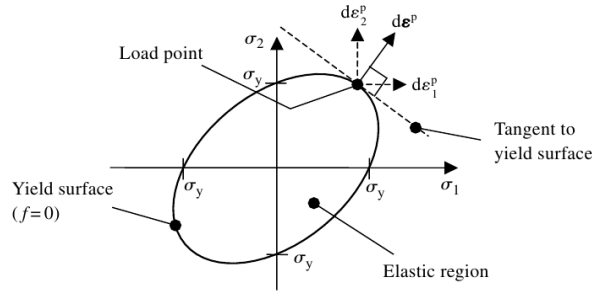


Figura 2-16 Superficie de von Mises para esfuerzo plano donde se muestra el incremento de deformación plástica en dirección normal a la tangente a la superficie [13].

## 2.9 Regla de endurecimiento

La regla de endurecimiento describe el comportamiento la superficie de cedencia, las que describen la expansión y la traslación son llamadas regla de endurecimiento isotrópico y cinemático respectivamente.

La mayoría de los metales al ser deformados se endurecen, es decir, el esfuerzo requerido para provocar más deformación plástica se incrementa. El endurecimiento isotrópico supone que a partir de la superficie de cedencia inicial la superficie se expande uniformemente como en la Figura 2-17 (a).

En el caso de un incremento de carga monolítico, es común suponer de manera razonable que el endurecimiento que ocurre es isotrópico. Para el caso de cargas a tensión-compresión, esto no siempre resulta apropiado, pues lo que se observa en experimentos es algo más parecido al endurecimiento cinemático en lo cual se traslada la superficie de cedencia debido a la deformación plástica como es mostrado en la Figura 2-17 (b).

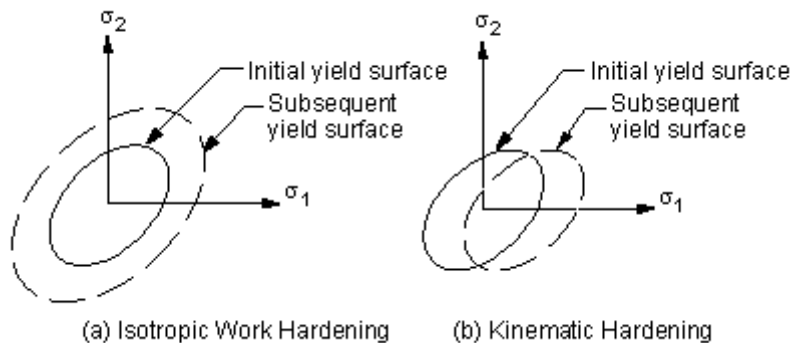


Figura 2-17 (a) Endurecimiento isotrópico, en el cual la superficie de cedencia se expande con deformación plástica. (b) Endurecimiento cinemático que muestra la traslación de la superficie de cedencia debido a la deformación plástica [12].

## 2.10 Tipos de comportamiento del material

Al haber definido dos regiones de la curva esfuerzo-deformación, la región elástica y la región plástica para el comportamiento de los materiales se pueden describir cinco formas básicas de comportamiento [14].

- a) Sólido perfectamente plástico. La respuesta elástica y el endurecimiento por deformación se han omitido, en ausencia de éste, la respuesta plástica se denomina rígido-perfectamente plástica.

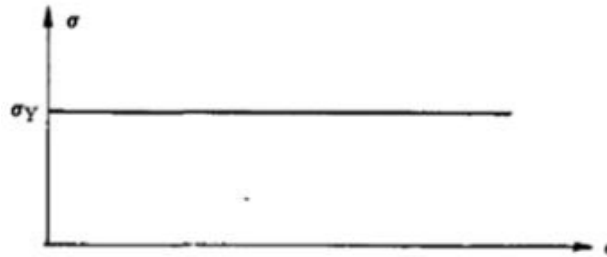


Figura 2-18 Sólido perfectamente plástico [2].

- b) Elástico perfectamente plástico. En esta gráfica se incluye la respuesta elástica, previa al límite elástico. Los metales se comportan de esta manera cuando han sido calentados a temperaturas lo suficientemente altas para recrystalizarse.

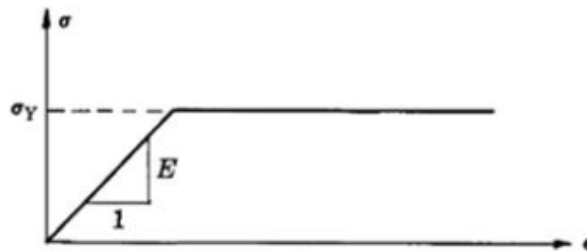


Figura 2-19 Elástico perfectamente plástico [2].

- c) Endurecimiento por deformación lineal. En esta se omite la respuesta elástica y se ha supuesto que el endurecimiento por deformación es lineal.

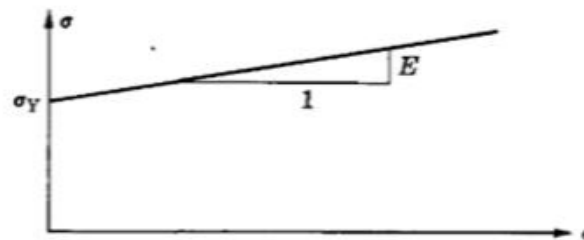


Figura 2-20 Endurecimiento por deformación lineal [2].

- d) Comportamiento elasto-plástico bilineal. En esta se incluye el endurecimiento lineal por la deformación plástica igual que en el anterior, pero además se incluye la respuesta elástica lineal.
- e) Endurecimiento por deformación exponencial. En esta simplificación los materiales obedecen a la ley de Hooke en la región elástica. Su deformación continua requiere de esfuerzos mayores donde en la región plástica esta descrita por el coeficiente de resistencia y exponente de endurecimiento. La mayoría de los metales dúctiles se comportan de esta manera cuando se trabaja en frío.

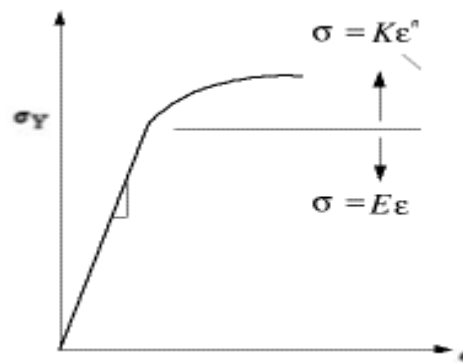


Figura 2-21 Endurecimiento por deformación exponencial [2].

## 2.11 Deformaciones finitas

Muchos de los problemas elasto-plástico de interés implican grandes deformaciones y a continuación se trata sobre las formulaciones para esta clase de problemas. Tales formulaciones también son relevantes para algunos problemas de deformación elástica., de hecho la formulación convencional "pequeñas deformaciones" en el análisis de esfuerzos puede ser inadecuada para los problemas cuando los niveles de esfuerzos han alcanzado una magnitud comparable a la del módulo de cedencia [15].

### 2.11.1 Formulaciones Lagrangiana y Euleriana

En la descripción del movimiento (o desplazamiento) y deformaciones (por lo tanto también para el cálculo de esfuerzos) de los cuerpos, es fundamental la elección de un sistema de referencia para describir el mismo. En el cálculo lineal no existe distinción entre la configuración inicial (no deformada) y la configuración temporal (o deformada) ya que las características geométricas y mecánicas son invariantes. Ésta es la característica fundamental que diferencia el cálculo lineal del no lineal.

Desde el punto de vista de la mecánica de medios continuos un sólido es un conjunto infinito de partículas que ocupan una posición en el espacio. Estas posiciones son variables en el tiempo, a la posición de todas ellas en un instante dado se le denomina configuración.

Se denotan con letras mayúsculas los estados referidos a la configuración inicial y con minúsculas los referidos a la configuración temporal o deformada.

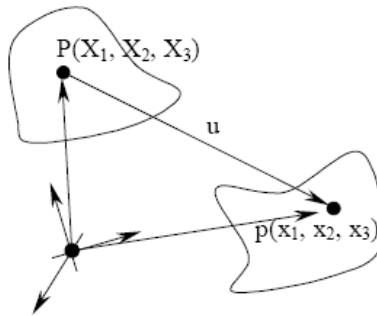


Figura 2-22 Configuración inicial  $(X_1, X_2, X_3)$  y Configuración temporal  $(x_1, x_2, x_3)$  [16].

El vector desplazamiento de los puntos mostrados en la Figura 2-22, vendrá dado por:

$$u = Pp = x_i - X_i \quad (2-55)$$

Si se conociesen los vectores posición  $X$  y  $x$  para cualquier instante, estaría perfectamente definido el movimiento del cuerpo. En mecánica de medios continuos, se supone que estas funciones son continuas y biunivocas, por la tanto, es posible escribir

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3) \quad i = 1, 2, 3 \quad (2-56)$$

o bien,

$$X_I = X_I(x_1, x_2, x_3) \quad I = 1, 2, 3 \quad (2-57)$$

Las componentes del vector  $u$  es posible escribirlas en función de la posición inicial o formulación Lagrangiana.

$$U_I = U_I(X_1, X_2, X_3) = x_i(X_1, X_2, X_3) - X_I \quad (2-58)$$

o de la posición temporal o formulación Euleriana

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3) = x_i - X_I(x_1, x_2, x_3)$$

(2-59)

Se podría decir que la formulación Lagrangiana se ocupa de lo que le sucede al sólido mientras que la formulación Euleriana se ocupa de lo que le sucede a una zona del espacio.

En el caso de un ensayo de tracción se define la deformación como:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$$

(2-60)

Esta deformación se suele llamar deformación ingenieril y corresponde a una descripción Lagrangiana del problema. Por el contrario, si se realiza un enfoque Euleriano del mismo surge el concepto de deformación real como:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l}$$

(2-61)

### 2.11.2 Tensor de esfuerzos de Cauchy

El teorema de Cauchy sobre los esfuerzos de un cuerpo, establece que dada una distribución de esfuerzos internos sobre la geometría de un medio continuo deformado, existe un campo tensorial  $T_c$  simétrico definido sobre la geometría deformada. Un problema mecánico que surge es conocer el tensor esfuerzos de Cauchy ya que este está definido sobre la geometría del cuerpo una vez deformado, y ésta no es conocida de antemano. Por tanto previamente es necesario encontrar la forma deformada para conocer exactamente el tensor de Cauchy. Sin embargo, cuando las deformaciones son pequeñas, en ingeniería y aplicaciones prácticas se emplea este tensor aunque definido sobre las coordenadas del cuerpo sin deformar lo cual no conduce a errores de cálculo significativos si todas las deformaciones máximas son inferiores a 0.01 [17].

$$T_c = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

(2-62)



### 2.11.3 Tensores de esfuerzos de Piola-Kirchhoff

Los tensores de esfuerzos de Piola-Kirchhoff son tensores usados en la teoría de la elasticidad con deformaciones finitas para representar los esfuerzos con respecto a la configuración inicial no deformada. Esto contrasta con el tensor de esfuerzos de Cauchy usualmente usado para representar los esfuerzos para la configuración deformada. En la teoría lineal de la elasticidad debido a que la configuración deformada y la configuración no deformada son prácticamente iguales, se puede usar el tensor de esfuerzos de Cauchy para representar los esfuerzos en la configuración inicial no deformada con muy buena aproximación. Sin embargo, con grandes deformaciones esto no resulta adecuado, y en general se requiere el uso de los tensores de Piola-Kirchhoff. Existen dos tipos de tensores de Piola-Kirchhoff. El primer tensor de Piola-Kirchhoff, que es un tensor mixto que relaciona la configuración inicial no deformada con los esfuerzos en la configuración deformada. El segundo tensor de Piola-Kirchhoff, es un tensor simétrico que permite plantear el problema elástico sobre la configuración inicial [18].

#### 2.11.3.1 Primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff

Como ya se mencionó los tensores de Piola-Kirchhoff  $T_R$  se introducen para evitar la dificultad de tener que trabajar con un tensor definido sobre la geometría ya deformada que normalmente no es conocida de antemano. La relación entre ambos tensores viene dada por [19]:

$$T_R(x) = \det(\nabla F) T_C(x) (\nabla F)^{-T} \quad (2-63)$$

Donde  $F$  es un tensor gradiente de deformación que relaciona la configuración inicial no deformada y la configuración final deformada.

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2-64)$$

Este primer tensor de Piola-Kirchhoff presenta el problema de no ser simétrico.

#### 2.11.3.2 Segundo tensor de Piola-Kirchhoff

Este tensor se introduce para lograr un tensor definido sobre la geometría previa a la deformación y que además sea simétrico, a diferencia del primer tensor de Piola-

Kirchhoff que no tiene por qué ser simétrico. El segundo tensor esfuerzos de Piola-Kirchhoff viene dado por:

$$S_R(x) = \det(\nabla F) ((\nabla F)^{-1})T_c(x) (\nabla F)^{-T}$$

(2-65)

## 2.12 Antecedentes de plasticidad en estirado de lámina

A continuación se presentan algunos antecedentes de estudios de estirado de lámina, en los cuales aunque son realizados con diversas geometrías de herramienta, se puede esperar que la influencia de algunos parámetros como fricción, comportamiento de endurecimiento sean similares para cada prueba de estirado de lámina.

El método PPS (Plane Strain stretching) fue desarrollado para evaluar la capacidad de formado en estampado de láminas metálicas. Este método tiene como fin observar el efecto de las propiedades del material y algunas variables del proceso mediante pruebas y simulaciones de elemento finito.

Una de las pruebas que se ha implementado para determinar la formabilidad de estampado de láminas es la que se desarrolló por Wagoner [20] en la universidad de Ohio, en la cual un espécimen de lámina rectangular es estirado por la acción de un punzón cilíndrico Figura 2-23 hasta que ocurre una falla en material.

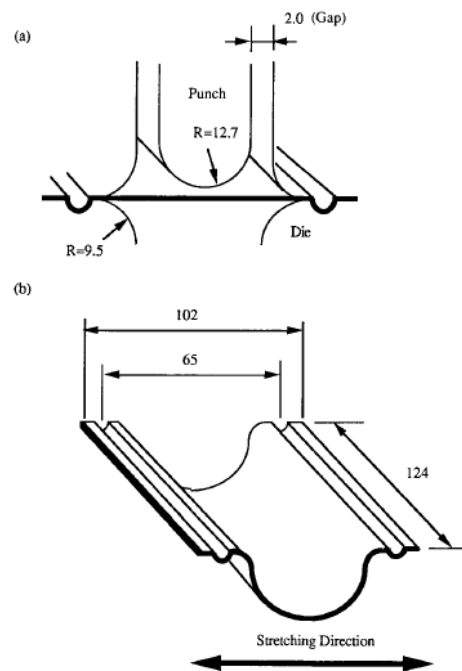


Figura 2-23 Geometría de la herramienta de Suh & Wagoner en milímetros [20]

En el estudio de Wagoner se tomó en cuenta el efecto de algunos parámetros como son la influencia del exponente  $n$ , de la función de endurecimiento del material  $E_c$  (2-49), el coeficiente de fricción entre la lámina y punzón y la anisotropía  $r$ ,  $E_c$  (1-1) obteniendo un comportamiento mostrado en la Figura 2-24, donde en a) para un mayor exponente  $n$  la penetración del punzón es mayor, mientras que en b) un mayor coeficiente de fricción  $\mu$  hace que se tenga una menor penetración, para el caso de anisotropía en los rangos de 0.5 y 2.0 se reporta en c) que no se tiene mucha influencia.

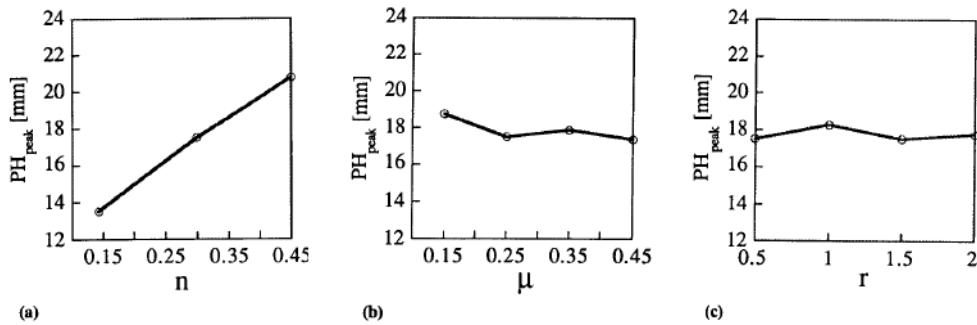


Figura 2-24 Comportamiento de la profundidad de penetración respecto a: a) exponente de endurecimiento, b) coeficiente de fricción, c) anisotropía [20].

Posteriormente el estudio del método PPS fue retomado por Youngsuk [21] en el código PAM-STAMP para continuar con el análisis de la influencia en las deformaciones de parámetros del material como el exponente de endurecimiento  $n$ , anisotropía, coeficientes de fricción, para lo cual los resultados se compararon con los experimentales. El modelo de Youngsuk se realizó según las dimensiones de la Figura 2-25 y se realizaron pruebas para especímenes de acero de alta resistencia H135R, con espesor de 0.75 mm, modelando su endurecimiento de forma exponencial,  $E_c$  (1-1).

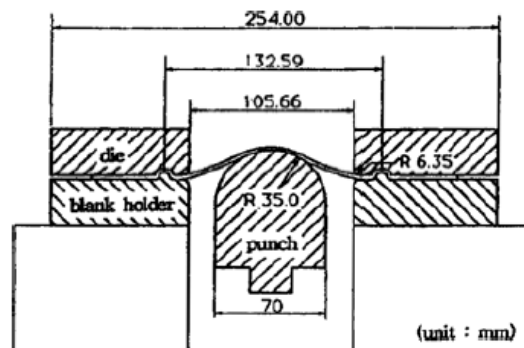


Figura 2-25 Dimensiones de la geometría de Youngsuk en milímetros [21].

Younsuk obtuvo resultados para la profundidad máxima de penetración del punzón con respecto a la lubricación del material mostrados en la Figura 2-26, donde para un mayor coeficiente la profundidad es menor como se había estudiado por Suh & Wagoner [20].

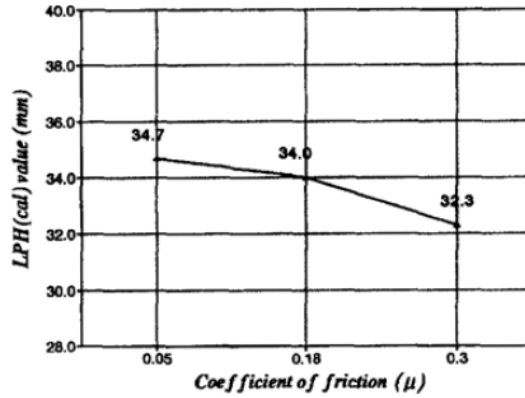


Figura 2-26 Profundidad de penetración del punzón con respecto al coeficiente de fricción [21].

De la misma forma se reportó por parte de Youngsuk la influencia de la anisotropía  $R$  del material observando que es pequeña entre los rangos de 1.22 y 2.22

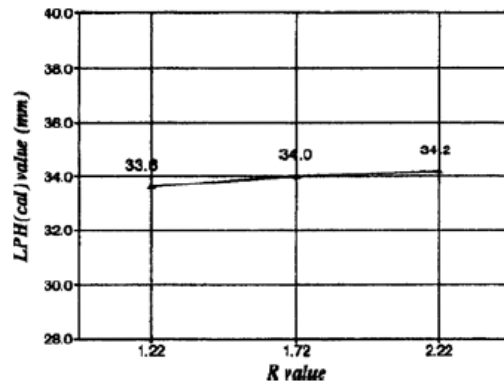


Figura 2-27 Profundidad de penetración del punzón con respecto a la anisotropía [21].

Miles [22] realizó también un estudio de pruebas de formabilidad de láminas, proponiendo para la prueba tres geometrías con distintos perfiles para el punzón, las cuales son mostradas en la Figura 2-28. Cilíndrica, elíptica y elíptica-plana

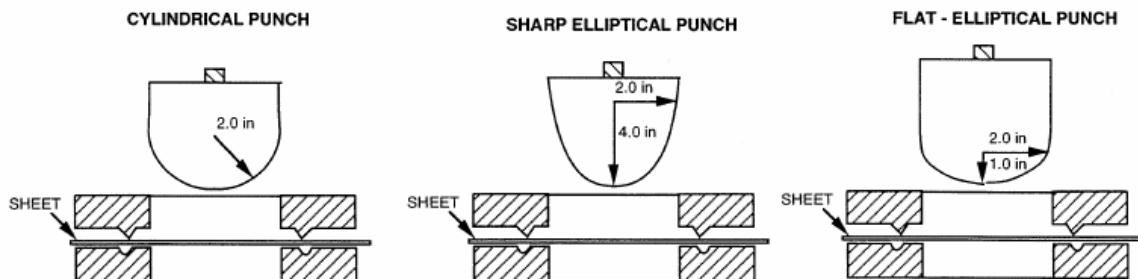


Figura 2-28 Perfiles de los tres punzones: cilíndrico, elíptico y elíptico-plano [22].

Para las pruebas y modelo se utilizaron especímenes de 7 pulgadas por lado de una lámina de acero ( $S_u=301$  MPa,  $S_y=152$  MPa) la cual fue caracterizada bajo la prueba de tensión en las direcciones de rolado, transversal y  $45^\circ$  de dirección.

Para el modelo numérico se utilizó un código FEM de la universidad de Ohio (SHEET-S) en el cual el endurecimiento se caracterizó mediante un comportamiento exponencial conocido como ecuación de Hollomon Ec.(2-49).

El modelo numérico implementado de deformación plana por Miles, muestra en la Figura 2-29 que el punzón elíptico plano tiene la fractura lo más alejado del centro o polo de la copa formada, mientras que en el punzón elíptico la fractura es cercana al centro o polo.

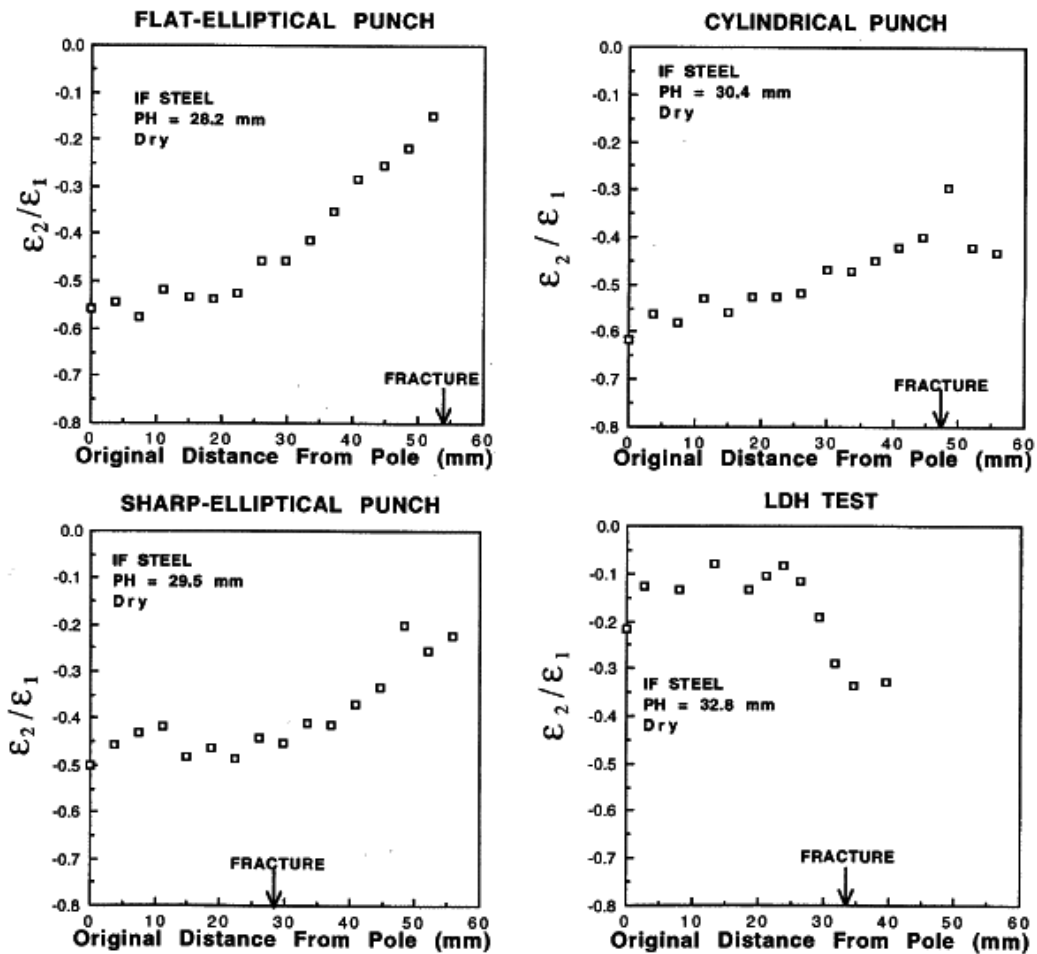


Fig. 3—Variation of strain ratios along major (radial) axes for plane-strain and LDH tests.

Figura 2-29 Variación de las relaciones de deformación contra la distancia al centro de la lámina para los tres punzones, resultados de una prueba de referencia LDH (Limiting Dome Height) [22].



## 3 DESARROLLO INICIAL DE MODELOS

### SIMPLIFICADOS

En la simulación de procesos de embutido profundo se presentan algunas no linealidades que son producto de:

- Comportamiento no lineal del material.
- Contacto entre superficies.
- Geometría no lineal.

Por ese motivo se decidió partir de analizar modelos simplificados de referencia en donde se tendrán en cuenta estas no linealidades para adquirir experiencia en el manejo en COMSOL.

### 3.1 Modelo de tensión uniaxial

El propósito de este modelo fue el de caracterizar el comportamiento elasto-plástico del material, para ello se modeló una prueba de tracción mediante una barra axisimétrica.

#### 3.1.1 Modelo en COMSOL de tensión uniaxial

Las dimensiones de la barra son 20 mm de diámetro y 50 mm de altura como se muestra en la Figura 3-1

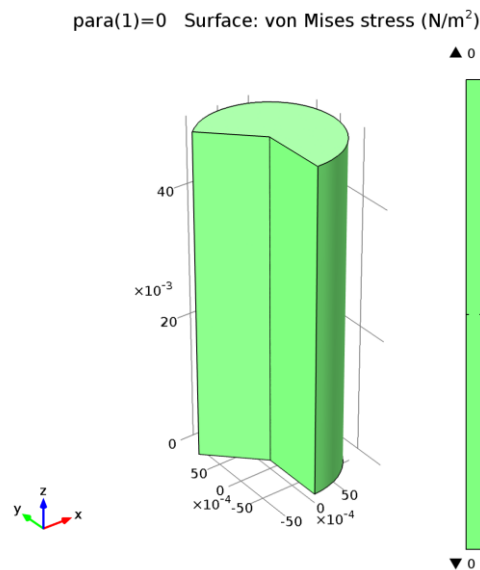


Figura 3-1 Barra axisimétrica.

Las propiedades del material de la barra son las siguientes:

*Tabla 3-1 Propiedades de lámina de aluminio*

	Módulo de Elasticidad	Módulo de Poisson	Esfuerzo de cedencia	Rango de Esfuerzo ultimo
Aleación de aluminio	70.5 (GPa)	0.342	194 (MPa)	340-380 (MPa)

Se utilizó un endurecimiento exponencial isotrópico descrito por la ecuación de Hollomon [23]:

$$\sigma = K\varepsilon^n \quad (3-1)$$

Donde  $K$  es el coeficiente de resistencia,  $n$  es el exponente de endurecimiento por deformación y tienen los siguientes valores:

*Tabla 3-2 Constantes de endurecimiento de Hollomon*

$K$	$n$
550.4 MPa	0.223

La curva esfuerzo deformación es mostrada en la Figura 3-2 distinguiéndose la región elástica por debajo de los 194 MPa a los que se presenta la cedencia del material, para valores mayores a esta cedencia se tiene un comportamiento exponencial.



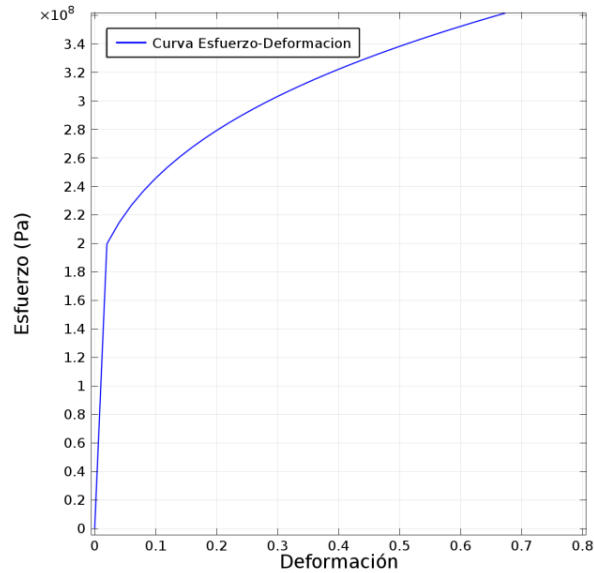


Figura 3-2 Curva Esfuerzo-Deformación de aleación de aluminio.

Condiciones del modelo:

- En la parte inferior de la barra se restringió el desplazamiento vertical, dejando libre el horizontal para que ésta se pueda adelgazar.
- En la parte superior de la barra se aplicó un desplazamiento de 10 mm vertical.
- Condición axisimétrica en el centro de la barra.

### 3.1.2 Solución

Como ya se mencionó en la sección 2.11 para un caso de deformaciones finitas es necesario utilizar el segundo tensor de Piola-Kirchhoff en lugar del tensor de Cauchy al obtener los esfuerzos equivalentes, por este motivo se realizó también una comparación de ambos resultados para el caso de estudio de tensión uniaxial, para lo cual se presentan cuatro curvas en Figura 3-3, la primera es la curva de Esfuerzo-Deformación del material, la segunda es la curva de esfuerzos de von Mises que obtiene COMSOL por default, la tercera es la curva de los esfuerzos de von Mises calculados a partir del tensor de esfuerzos de Cauchy y la cuarta es la curva de los esfuerzos de von Mises calculados a partir del segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff.

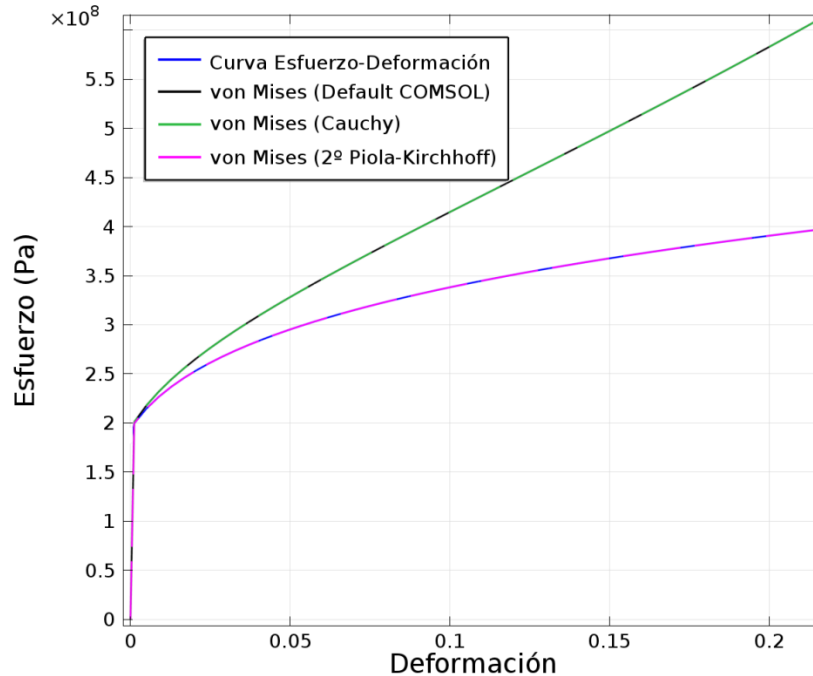


Figura 3-3 Curvas: esfuerzo-deformación, esfuerzo de von Mises (Default en COMSOL), esfuerzos de von Mises a partir del tensor de Cauchy, esfuerzos de von Mises a partir del segundo tensor de Piola-Kirchhoff.

A partir de la curva de la Figura 3-3 se puede observar que los esfuerzos que coinciden con el comportamiento Elasto-Plástico del material son los obtenidos a partir del segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff, ya que el esfuerzo de von Mises que calcula por default COMSOL, coincide con el esfuerzo de von Mises calculado a partir del tensor de esfuerzos de Cauchy, lo cual es válido para pequeñas deformaciones, pero ya no lo es para deformaciones finitas.

## 3.2 Modelo de contacto Hertziano elástico

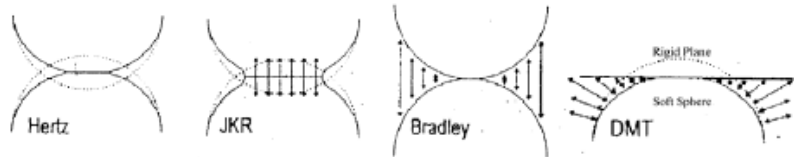
### 3.2.1 Mecánica de contactos

La mecánica de contactos estudia la deformación de los sólidos que entran en contacto entre sí en uno o más puntos. La formulación matemática y física de la materia se basa en la mecánica de los materiales y la mecánica del continuo, y se centra en cálculos que implican cuerpos elásticos y plásticos. La mecánica de contacto es fundamental para el campo de la ingeniería mecánica, ya que proporciona la información necesaria para el estudio de la tribología (ciencia que estudia la fricción, el desgaste y la lubricación que tienen lugar durante el contacto entre superficies sólidas en movimiento) y la dureza de indentación. Los principios de la mecánica de contactos se puede aplicar en áreas como el contacto rueda-riel de una locomotora, dispositivos de acoplamiento, sistemas de frenos, neumáticos, rodamientos, motores de combustión, conexiones

mecánicas, metalurgia, procesos de formado de metal, contactos eléctricos, y muchas otras áreas [24].

Algunos de los modelos que se utilizan para describir la mecánica de contactos se muestran en la Figura 3-4

- Hertz: modelo completamente elástico.
- JKR: modelo completamente elástico considerando adhesión.
- Bradley: modelo con dos esferas rígidas Van der Waals.
- DMT: modelo completamente elástico, adhesivo y Van der Waals



Contact Mechanical Models<sup>1</sup>:

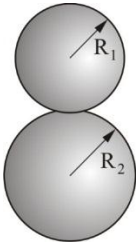
- Hertz: fully elastic model,
- JKR: fully elastic model considering adhesion in the contact zone,
- Bradley purely Van der Waals model with rigid spheres,
- DMT fully elastic, adhesive and Van der Waals model.

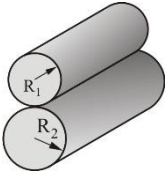
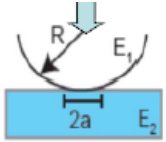
Figura 3-4 Modelos de contactos mecanicos [24].

El modelo de Hertz analiza los esfuerzos en el contacto de dos sólidos elásticos, y aplica a pequeñas deformaciones dentro del límite elástico y las dos superficies de contacto inicial son no conformes (el contacto solo es en un punto o línea), además de que se considera un contacto sin fricción a diferencia del modelo de JKR.

La teoría de contacto entre los cuerpos elásticos se puede utilizar para encontrar áreas de contacto y profundidades de indentación para geometrías sencillas como se muestra en los casos de la Tabla 3-3 [25], donde  $a$  es la longitud de contacto,  $F$  es la fuerza vertical aplicada,  $R^*$  el radio equivalente  $E_c$ . (3-9),  $E^*$  el módulo de elasticidad equivalente  $E_c$ . (3-10).

Tabla 3-3 Casos de contacto de Hertz.

	<p>Contacto entre dos esferas</p> <p>Para el contacto entre dos esferas de radios <math>R_1</math> y <math>R_2</math>, el área de contacto es un círculo de radio <math>a</math>.</p>	$p_{max} = \frac{3F}{2\pi a^2} \quad (3-2)$ $a = \sqrt{\frac{3F_n R^*}{4 E^*}} \quad (3-3)$
---	---	---

	<p>Contacto entre dos cilindros con ejes paralelos</p> <p>El contacto entre dos cilindros con los radios de R1 y R2 con ejes paralelos, la fuerza es linealmente proporcional a la profundidad de indentación, es el mismo caso del contacto entre dos esferas, pero con una línea de contacto con ancho a desde el centro.</p>	$p_{max} = \frac{2F}{\pi a L} \quad (3-4)$ $a = \sqrt{\frac{4F_n R^*}{\pi B E^*}} \quad (3-5)$
	<p>Contacto entre un cilindro y un medio elástico</p> <p>Un cilindro elástico de radio R se presiona contra un espacio elástico generando un área de contacto lineal. Este caso es un caso especial del caso anterior con un radio R2 infinito.</p>	$p_{max} = \sqrt{\frac{E_n E^*}{2\pi B R^*}} \quad (3-6)$ $a = \sqrt{\frac{8F_n R^*}{\pi B E^*}} \quad (3-7)$

### 3.2.2 Modelo en COMSOL de contacto entre un cilindro y un medio elástico

El objetivo del estudio es obtener la distribución de la presión de contacto y la longitud de contacto en un modelo de referencia y hacer una comparación de la solución analítica existente para este caso, y la solución de COMSOL Multiphysics [26].

Se considera un cilindro de acero de longitud infinita que descansa sobre una base de aluminio plana, donde ambos elementos son elásticos, homogéneos, e isotrópicos. El cilindro está sometido a una carga total de 35 kN distribuido sobre una línea en la parte superior del cilindro.

Esto es claramente un problema de deformación plana utilizando un análisis Mecánico Estructural 2D. Por razones de simetría se estudió solo la mitad de la geometría en un plano. Los materiales del cilindro y el bloque son elásticos, homogéneos, e isotrópicos. Igual como se asume en la derivación de las soluciones, se asume que no hay fricción en los contactos.

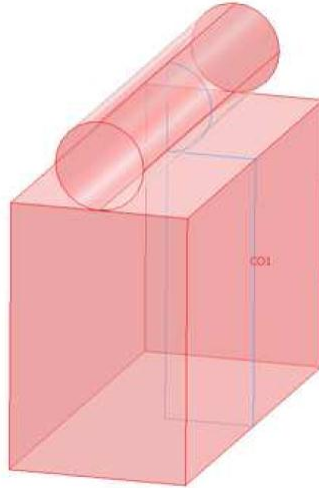


Figura 3-5 Modelo de contacto entre un cilindro y un medio elástico.

El modelo 2D mostrado en la Figura 3-6 se construyó con la mitad de un círculo de 50 mm de radio y un bloque de 100 mm de base y 200 mm de altura de acuerdo a la referencia utilizada [26]:

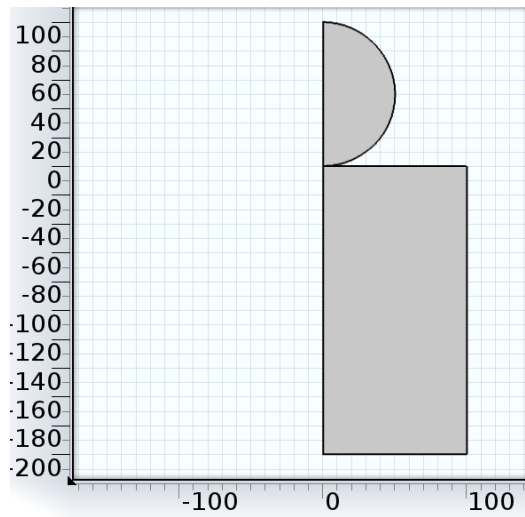


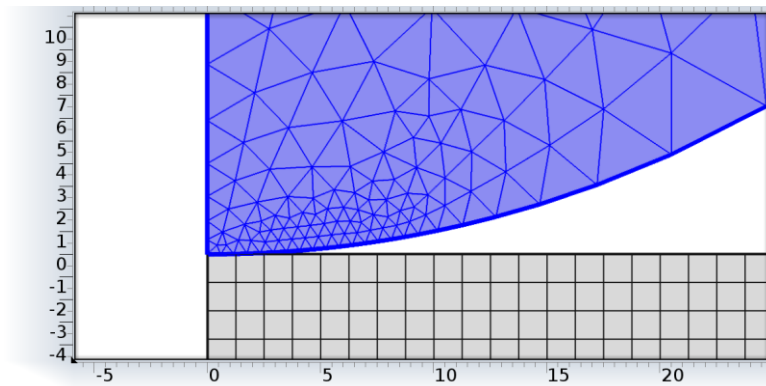
Figura 3-6 Modelo 2D de contacto entre un cilindro y un medio elástico.

Las propiedades de los materiales utilizados en el modelo se muestran en la Tabla 3-4:

Tabla 3-4 Propiedades del bloque y cilindro.

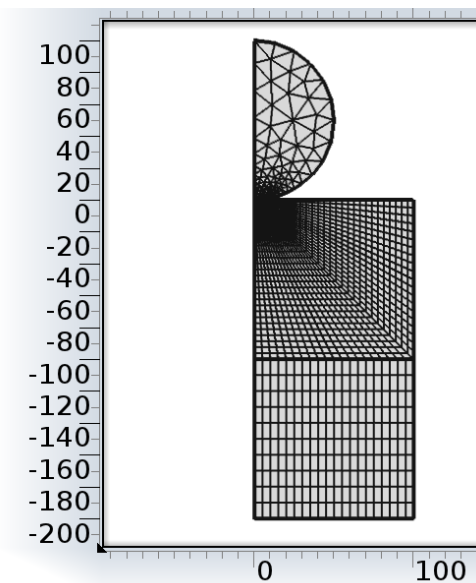
	Módulo de Young	Módulo de Poisson
Bloque de aluminio	70 (GPa)	0.33
Cilindro de acero	210 (GPa)	0.3

Para la discretización del modelo en la zona de contactos COMSOL requiere que el material más rígido tenga una malla más fina, ya que al no hacerlo se presentan algunas fluctuaciones en las gráficas de resultados, en nuestro caso el cilindro es más rígido.



*Figura 3-7 Mallado en la zona de contacto.*

La discretización total del modelo se muestra en la Figura 3-8 y consta de 281 elementos triangulares para el cilindro y 1420 elementos cuadrangulares para el bloque, siendo más fina la malla en la región del contacto de ambos.



*Figura 3-8 Mallado de la geometría.*

Condiciones del modelo:

- Se define el contacto cilindro-bloque (sin fricción)
- Se aplica una carga de la mitad de 35 kN en la parte superior del cilindro debido a que se analiza la mitad de la geometría por consideraciones de simetría.

- Se fija la parte inferior del bloque limitando sus desplazamientos en todos los ejes.
- Se define un eje de simetría en el extremo izquierdo del cilindro y bloque.

### 3.2.3 Solución en Comsol:

La solución analítica para el contacto de un cilindro y un bloque Figura 3-9, está descrita por la teoría de Hertz de contactos y la máxima presión de contacto queda definida por ec.(3-6) [27]:

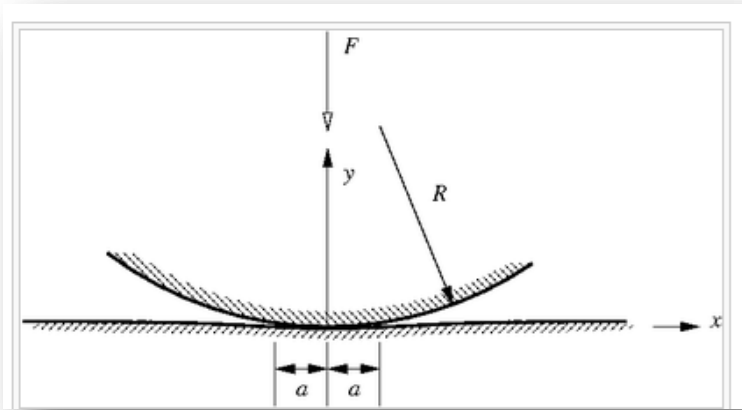


Figura 3-9 Sección de contacto entre un cilindro y un bloque.

La función que define la presión de contacto como una función de las coordenadas en  $x$ , está dada por:

$$p = \sqrt{\frac{F_n E^*}{2\pi R^*} \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} \quad (3-8)$$

Donde  $a$  se obtiene de la Tabla 3-3

El módulo de elasticidad combinado  $E^*$  está dado por:

$$E^* = \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \quad (3-9)$$

El radio combinado  $R^*$  está dado por:

$$R^* = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 \quad (3-10)$$

Teniendo en cuenta que  $R_2$  tiende a infinito por ser una superficie plana.

### 3.2.4 Comparación de resultados analíticos y de Comsol de contacto entre un cilindro y un medio elástico

La presión de contacto a lo largo de la superficie de contacto, tanto analíticamente como para el análisis en COMSOL se representan en la Figura 3-10. La solución de COMSOL es la línea continua y el resultado analítico ec.(3-11) es la línea discontinua. Ambas gráficas se superponen y validan la simulación del problema de contacto Hertz resolviendo en un tiempo reducido de cálculo.

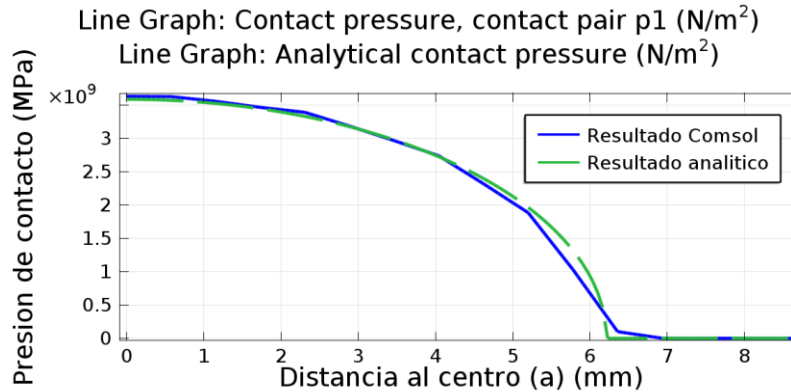


Figura 3-10 Distribucion de presiones de contacto.

## 3.3 Modelo de doblado de lámina

La simulación en procesos de doblado de láminas es un estudio importante para nuestro propósito ya que mezcla dos no linealidades para su estudio, como son la no linealidad del contacto y la no linealidad del comportamiento elasto-plástico del material.

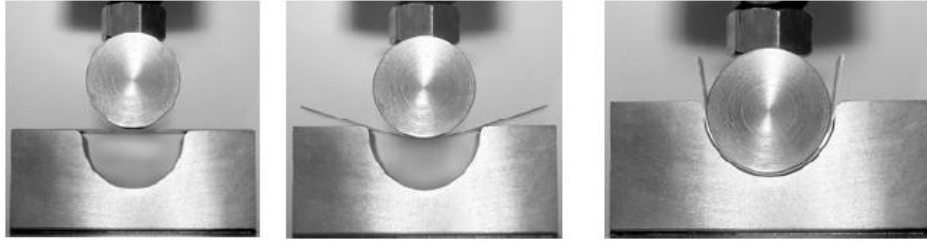
### 3.3.1 Doblando de lámina

Se estudió un caso donde una lámina de metal es deformada por un punzón cilíndrico que la introduce dentro de una matriz. El propósito de este análisis fue el de adquirir experiencia en el manejo de los siguientes puntos en COMSOL [28]:

- Contacto Punzón-Lámina
- Contacto Lámina-Matriz



- Plasticidad en Lámina



*Figura 3-11 Doblado de lámina.*

Este es un problema tomado de referencia [27], se realizaron simulaciones para determinar el ángulo antes y después del efecto de recuperación elástica. Los resultados experimentales están disponibles para referencia, sin embargo como en la realidad la lámina presenta propiedades anisotrópicas existe una ligera variación de los resultados.

### 3.3.2 Modelo en COMSOL de doblado de lámina

Para el modelo se considera que se doblara una lámina de 1 mm de una aleación de aluminio con las siguientes propiedades:

*Tabla 3-5 Propiedades de lámina de aluminio*

	Módulo de Elasticidad	Módulo de Poisson	Esfuerzo de cedencia
Aleación de aluminio	70.5 (GPa)	0.342	194 (MPa)

Para el modelo elasto-plástico del material se utiliza un comportamiento de endurecimiento exponencial isotrópico descrito por la ecuación de Hollomon [23]:

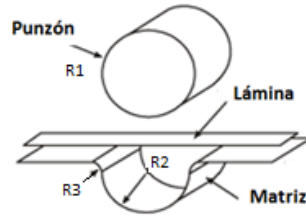
$$\sigma = K\varepsilon^n \quad (3-11)$$

Donde **K** es el coeficiente de resistencia, **n** es el exponente de endurecimiento por deformación y tienen los siguientes valores:

*Tabla 3-6 Constantes de endurecimiento de Hollomon*

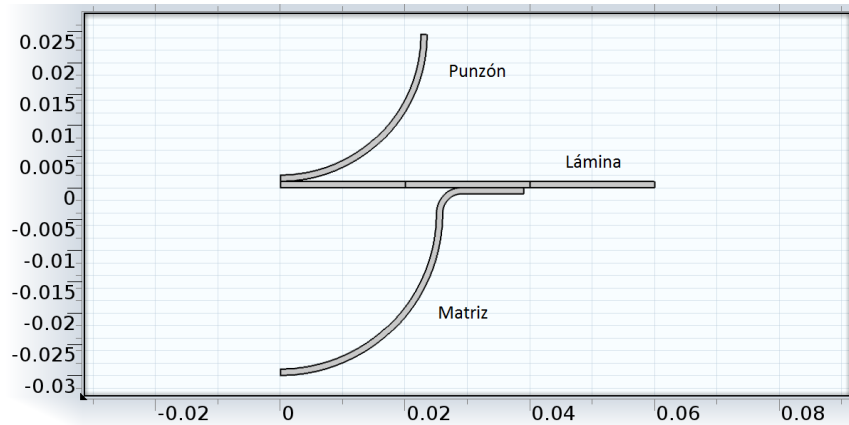
K	n
550.4 MPa	0.223

La geometría del modelo mostrado en la Figura 3-12 se construyó a partir de las siguientes dimensiones: radio del punzón (R1) es de 23.5 mm, el radio de la matriz (R2) es de 25 mm, el redondeo en los bordes internos de la matriz (R3) es de 4 mm y para la lámina se modeló con longitud de 120 mm y espesor de 1 mm.



*Figura 3-12 Elementos del proceso de doblado de lámina.*

Esto es claramente un problema de deformación plana utilizando un análisis Mecánico Estructural 2D, por razones de simetría se estudió solo la mitad de la geometría en un plano como se muestra en la Figura 3-13.



*Figura 3-13 Geometría 2D.*

Para la discretización del modelo en la zona de contactos, COMSOL requiere que el material más rígido tenga una malla más fina, en la región de contacto punzón-lámina el punzón es considerado más rígido.

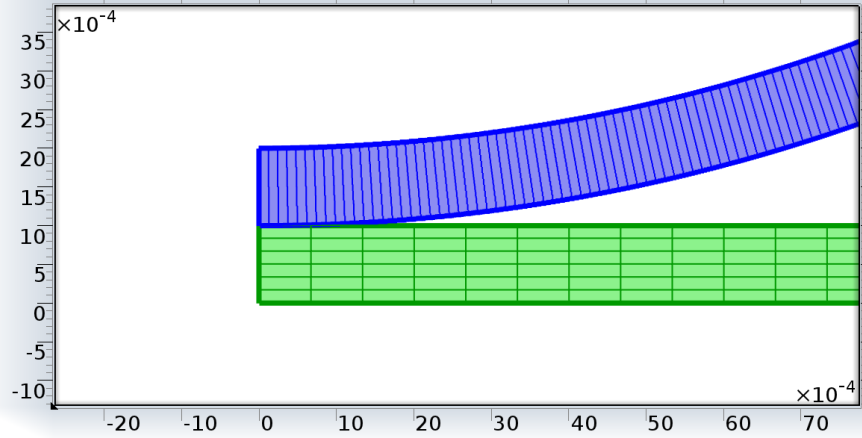


Figura 3-14 Contacto punzón-lámina.

Para la región de contacto entre lámina-matriz se considera una malla más fina en la matriz por ser más rígida.

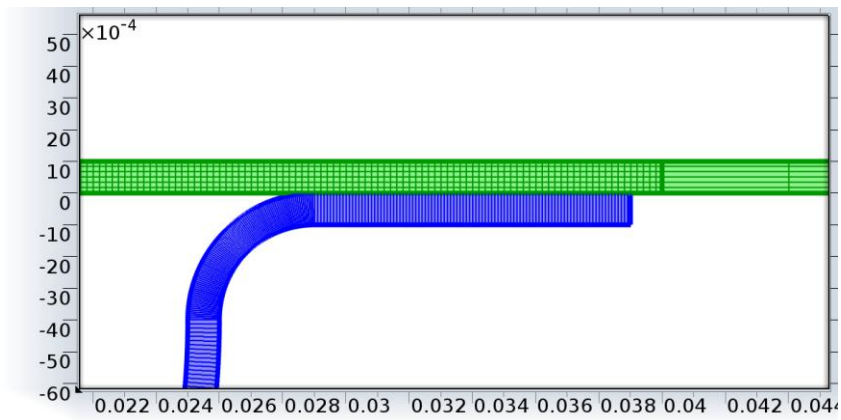


Figura 3-15 Contacto lámina-matriz.

La discretización total del modelo se muestra en la Figura 3-16 y consta de 300 elementos cuadrangulares para el punzón, 810 elementos cuadrangulares para la lámina y 500 elementos cuadrangulares para la matriz, siendo más fina la malla en la región del contacto de ambos.

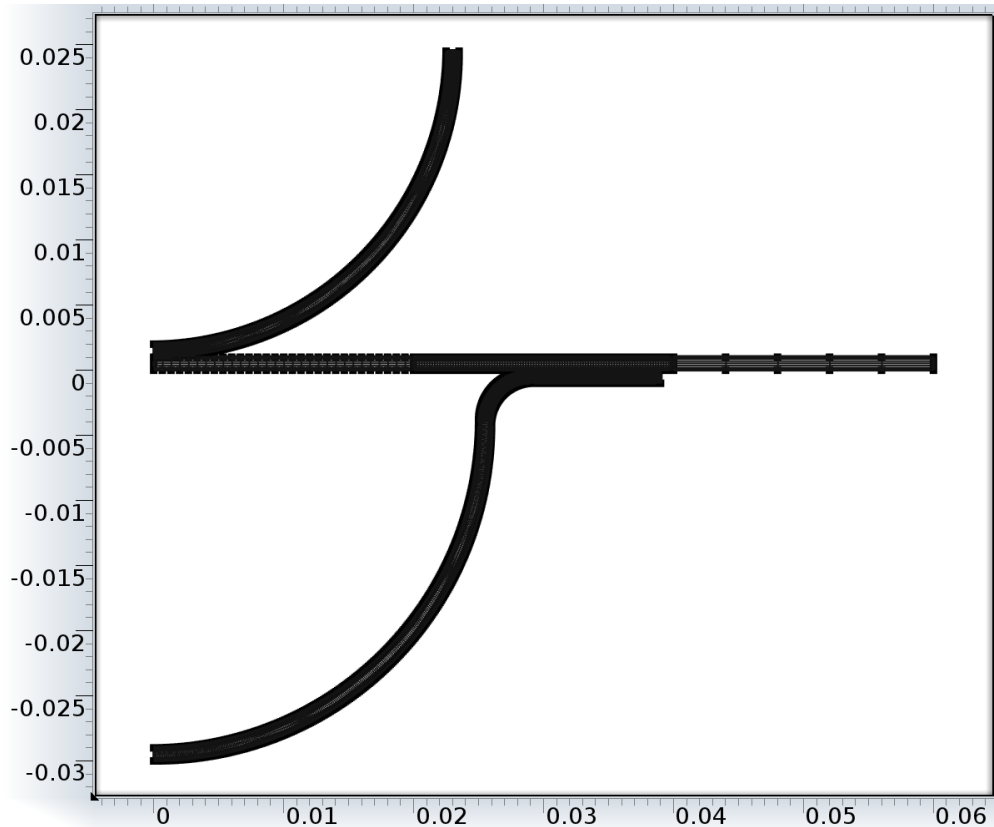


Figura 3-16 Discretización del modelo 2D doblado de lámina.

Condiciones del modelo:

- Se define contacto punzón-lámina con fricción ( $\mu = 0.1342$ ).
- Se define contacto lámina-matriz con fricción ( $\mu = 0.1342$ ).
- Se aplica un desplazamiento en el punzón hacia abajo de 28.5 mm considerándolo un cuerpo rígido.
- Se fija completamente la matriz restringiendo sus desplazamientos en todas las direcciones considerándola un cuerpo rígido.

En las superficies de contactos punzón-lámina lámina-matriz se generan esfuerzos definidos por una fuerza normal y una fuerza tangencial [29]:

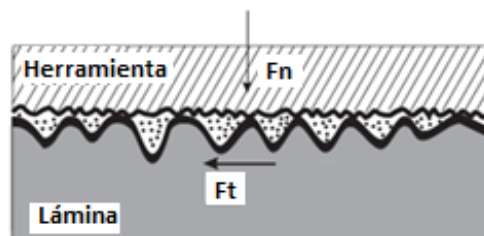


Figura 3-17 Fuerzas presentes en el contacto.

$$p = \frac{F_n}{A_a} \quad (3-12)$$

$$\tau = \frac{F_t}{A_a} \quad (3-13)$$

donde:

- $p$ : Esfuerzo normal
- $\tau$ : Esfuerzo cortante
- $F_n$ : Fuerza normal al contacto
- $F_t$ : Fuerza tangencial al contacto
- $A_a$ : Área de contacto

De esta forma el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto queda definido por el modelo básico de fricción de Coulomb:

$$\mu = \frac{F_t}{F_n} = \frac{\tau A_a}{p A_a} = \frac{\tau}{p} \quad (3-14)$$

La fricción provoca que la fuerza requerida para la deformación del material incremente. El modelo que lo describe la componente del esfuerzo de fricción  $\tau$  es conocido como la ley de Coulomb que es la relación de fricción entre la herramienta y la pieza ec. (3-14).

$$\tau = \mu p \quad (3-15)$$

### 3.3.3 Solución en Comsol:

El modelo a analizar es un caso de deformación plana y se considera un coeficiente de fricción  $\mu = 0.1342$  entre las superficies en contacto mediante el modelo de Coulomb, el solucionador es de tipo segregado con solución por separado para desplazamientos y presiones de contacto, se ajustaron los parámetros debido a la no linealidad por la combinación de los contactos con fricción y el modelo elasto-plástico, lo cual genera problemas de convergencia de la solución.

Ajustes en el solver:

- Factor de penalización (Penalty Factor) para los pares de contacto  
Factor de penalización normal: min (1e-3) cambiar por min (1e-4)

Cuando se generan problemas de convergencia en las primeras iteraciones se requiere bajar el factor, si se observa que el modelo converge pero muy lentamente se puede incrementar el factor.

- Paso paramétrico (Parametric step):

Debe ser lo suficientemente pequeño para que el siguiente paso tome la solución previa calculada.

Rango de 0 a 1.5 con pasos de  $2e-2$ . Y un paso mínimo de  $5e-5$

### 3.3.4 Comparación de datos de referencia con resultados de COMSOL

A continuación se muestra en Figura 3-18 la distribución de los esfuerzos para un máximo desplazamiento del punzón (28.5 mm) en los cuales se observa que en gran parte de la lámina superan el límite de cedencia del material (194 MPa).

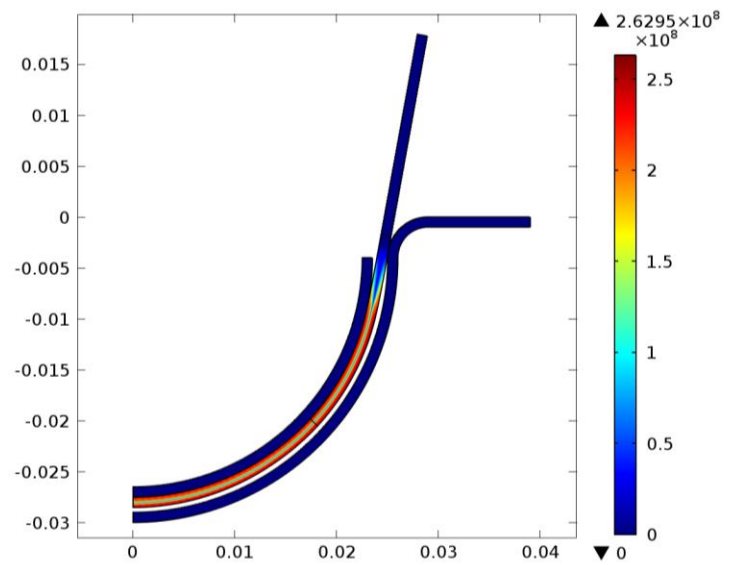


Figura 3-18 Esfuerzos de von Mises (Pa) en el punto mas bajo del punzón (28.5 mm).

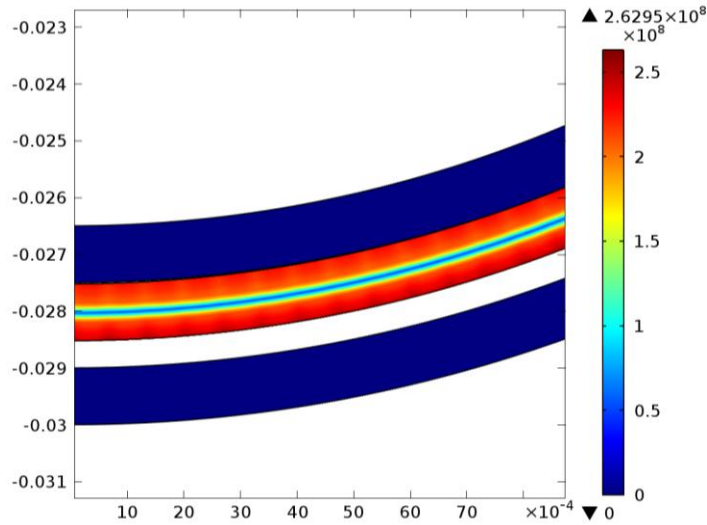


Figura 3-19 Detalle de la distribución de esfuerzos en la región central (Pa).

Para el caso de deformación plástica se observa que el valor máximo se encuentra en la parte inferior de la lámina y es de 2.11% (Figura 3-21).

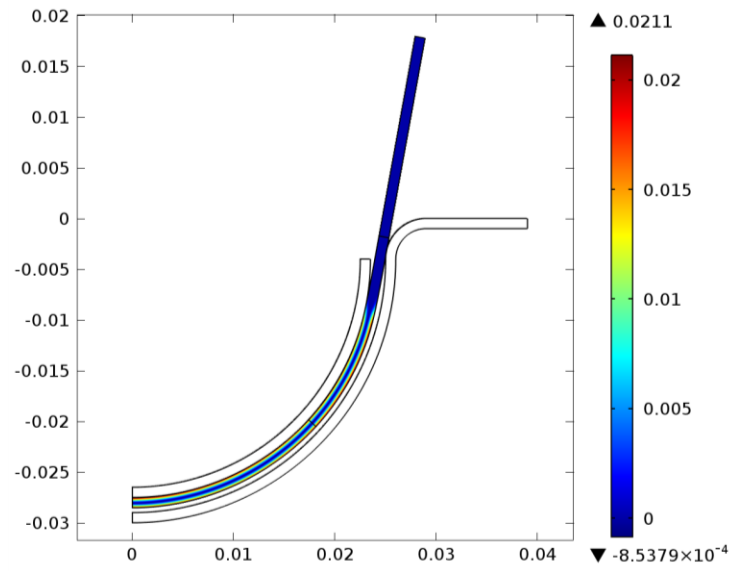


Figura 3-20 Deformación plástica en el punto mas bajo del punzón (28.5 mm).

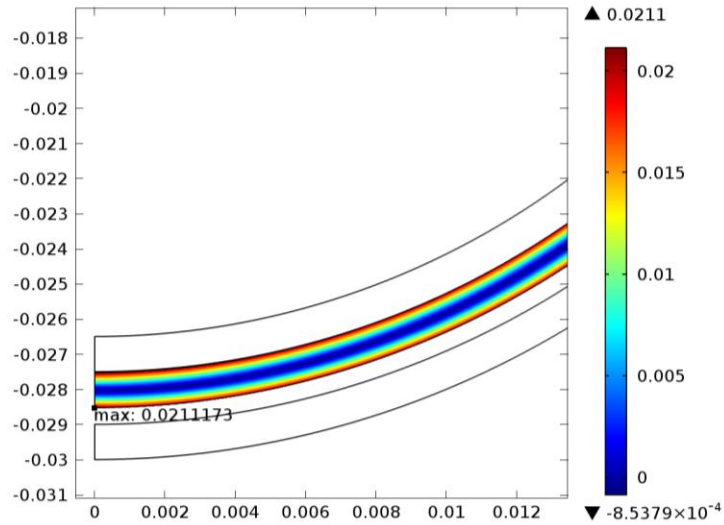


Figura 3-21 Máxima deformación plástica efectiva.

Una vez que el punzón bajó los 28.5 mm es subido 14.25 mm para liberar la lámina y observar el efecto de la recuperación elástica y la deformación final al quitar el punzón Figura 3-22.

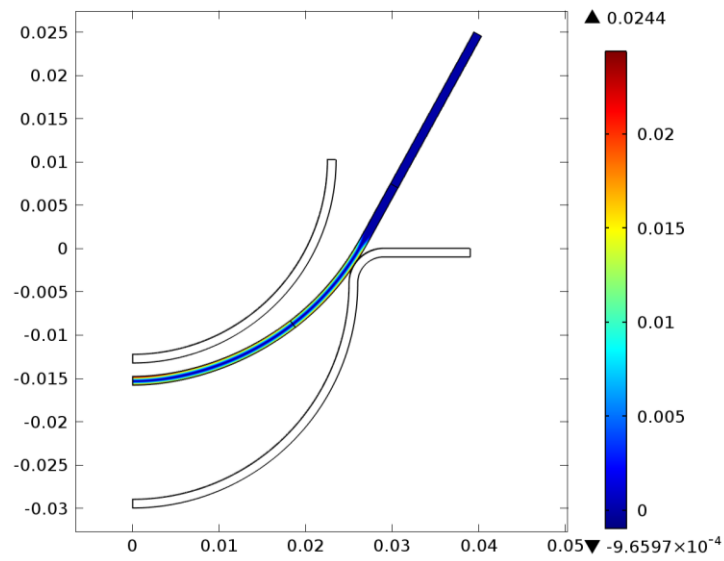


Figura 3-22 Deformación plástica efectiva al retirar el punzón.

El ángulo de formado  $\theta$  de la lámina queda definido como se muestra en la Figura 3-23 y para el caso del modelo en COMSOL se obtuvo a partir del cálculo de dos puntos A y B en la sección no deformada de la lámina obteniéndose un ángulo de  $57.66^\circ$  al liberar la lámina.



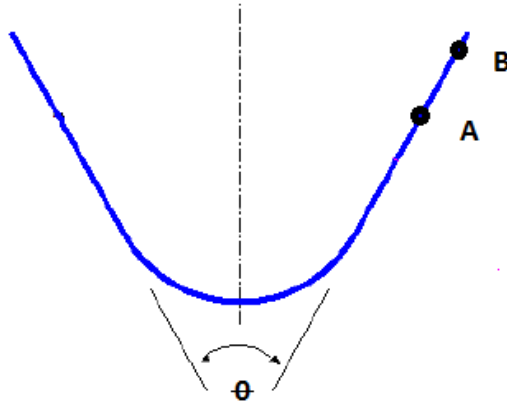


Figura 3-23 Ángulo de formado de lámina.

Tabla 3-7 Comparación de los ángulos de formado de lámina

	Ángulo al punto más bajo del punzón	Ángulo después de liberar la lámina
Rango de resultados experimentales de literatura [27]	19.6°-21.0°	53.44°-55.8°
Resultados del modelo 2D COMSOL	20.54°	57.66°

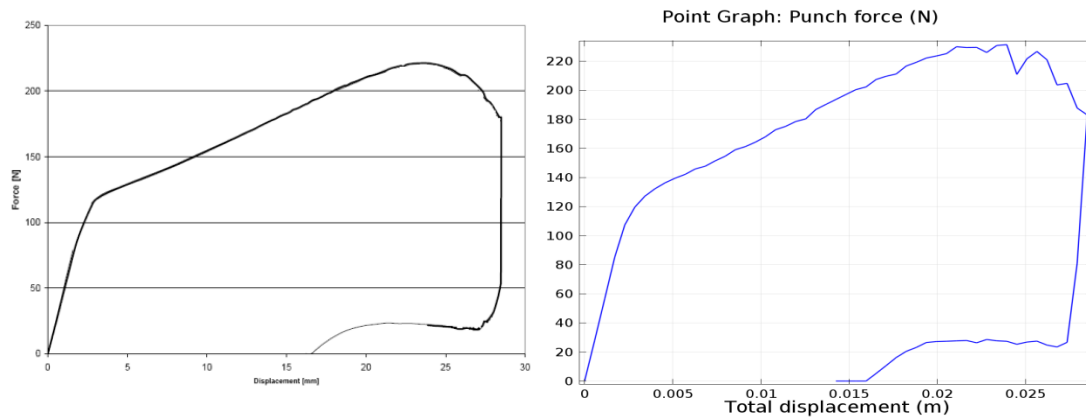


Figura 3-24 Grafica fuerza (N) contra el desplazamiento del punzón: izquierda literatura, derecha modelo en COMSOL).

Además se realizó el cálculo de la fuerza del punzón para deformar la lámina y se obtuvo la gráfica de la (derecha) comparada con los resultados experimentales de literatura (izquierda). Observando un comportamiento similar, además de que se puede observar una caída en la fuerza poco antes de los 25 mm de desplazamiento del punzón, esto es debido a que para desplazamientos mayores a los 25 mm la lámina ya no se doblara tanto y solo se deslizará hacia adentro de la cavidad de la matriz, como se puede observar en las últimas dos imágenes de la secuencia en la Figura 3-25, para parámetros entre 0.88 y 1 del desplazamiento total.

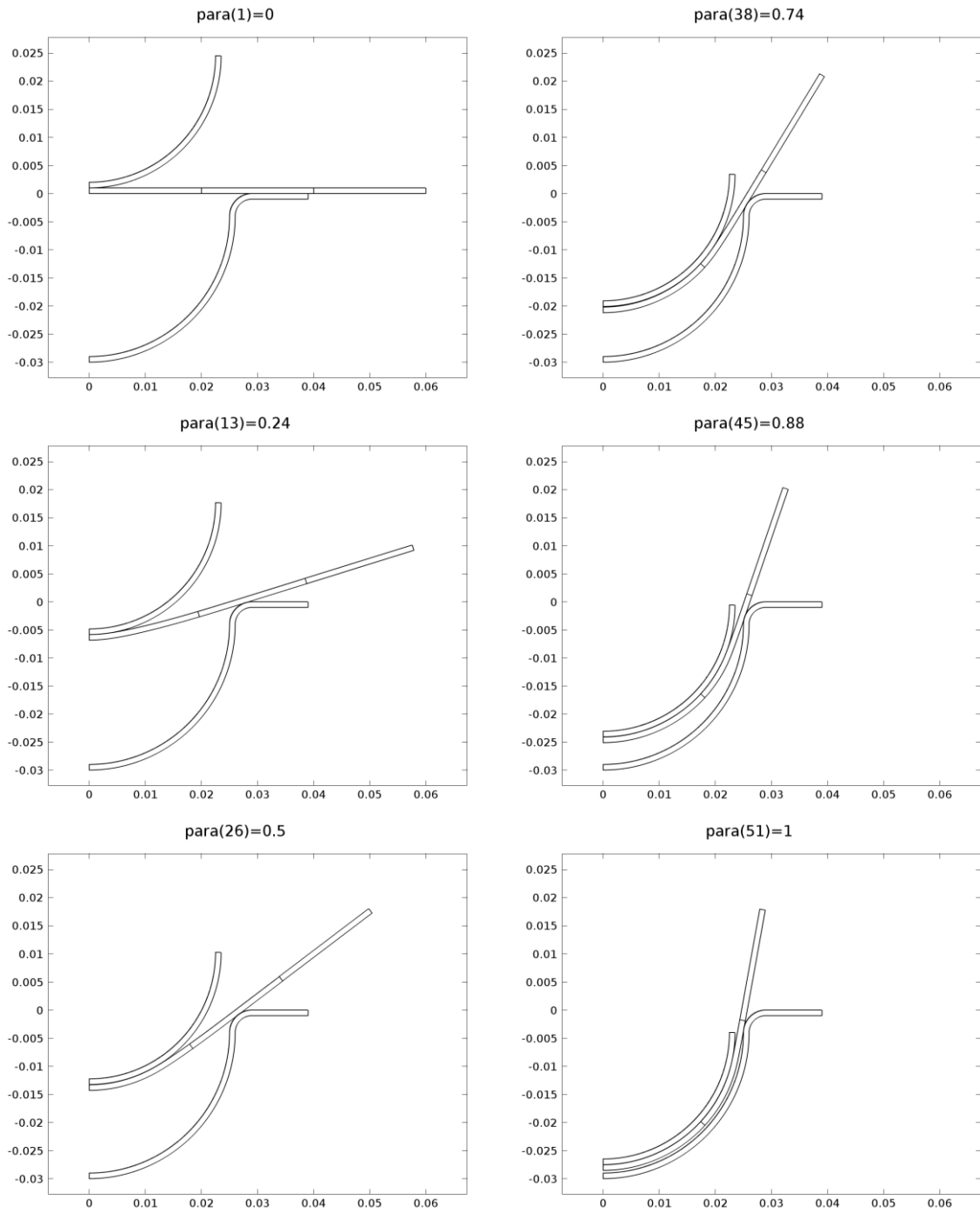


Figura 3-25 Secuencia de simulación de formado.



## 4 SIMULACIÓN DE LA PRUEBA DE ERICHSEN

En la actualidad existen diversos productos fabricados en procesos de formado de láminas metálicas los cuales son de una gran variedad de formas y tamaños, sin embargo en algunas ocasiones el componente tiende a fracturarse durante el proceso de formado, éstas fallas pueden estar relacionadas con las propiedades del material.

La prueba de Erichsen se utiliza para determinar la formabilidad de láminas de metal y consta de realizar un proceso de estirado de lámina mediante un punzón esférico hasta que se produzca una fractura. La altura en milímetros de la copa formada hasta la fractura es conocida como el índice de Erichsen. [30].

### 4.1 Modelo simplificado 2D axisimétrico

Se comenzó realizando un modelo 2D axisimétrico simplificado del dispositivo para la prueba de Erichsen, el cual consta de punzón, matriz y lámina para la prueba. El efecto del pisador fue sustituido en un principio para simplificar el modelo con la finalidad de reducir la no linealidad producida por el contacto entre el pisador y la lámina.

#### 4.1.1 Geometría del modelo simplificado

Para la realización de la geometría se consideró un modelo 2D axisimétrico simplificado como es mostrado en la

Figura 4-1 en un sistema de coordenadas cilíndricas y se siguieron las dimensiones descritas según la norma ISO 20482 Figura 1-16, considerando una tolerancia de 0.05mm la cual cumple perfectamente lo especificado en la norma.

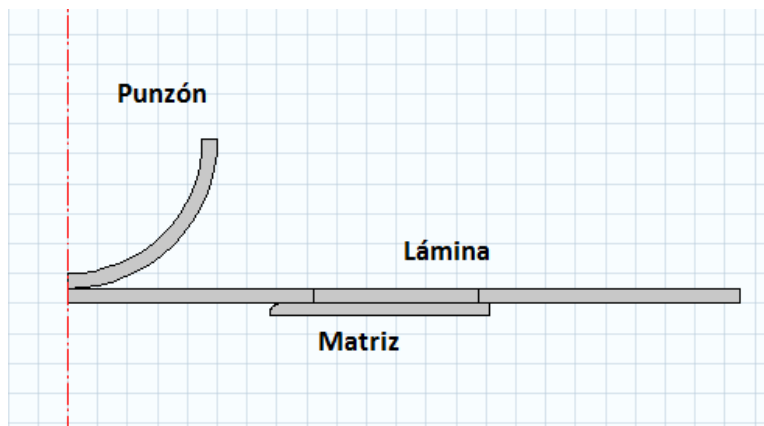


Figura 4-1 Geometría simplificada 2D.

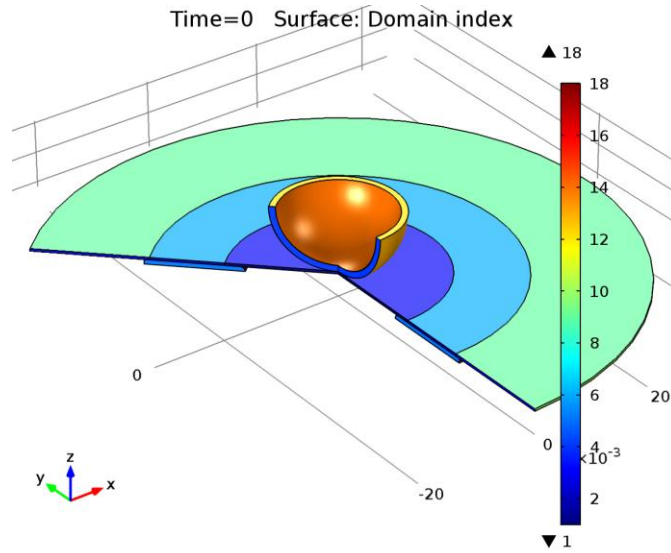


Figura 4-2 Geometría simplificada 3D.

- **Punzón:**  
Se construyó según la norma con un diámetro de 33 mm y debido a que se considerará como un elemento rígido no se modeló la esfera completa para reducir el número de elementos al realizar el mallado y solo se considera con espesor de 1 mm.

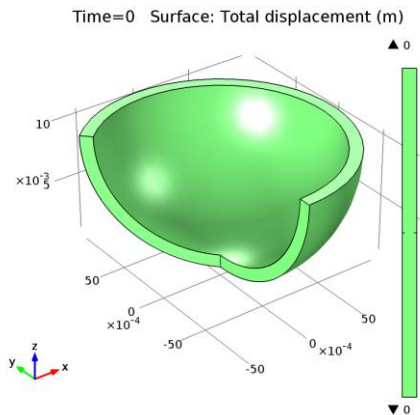


Figura 4-3 Punzón.

- **Matriz:**  
Se construyó según la norma respetando las dimensiones de diámetro interno de 27 mm y diámetro externo de 55 mm, con un redondeado en la cara interna de radio de 0.75 mm, al igual que el punzón también se consideró rígida y se modeló solo una sección de espesor de 0.75 mm para reducir el número de elementos.

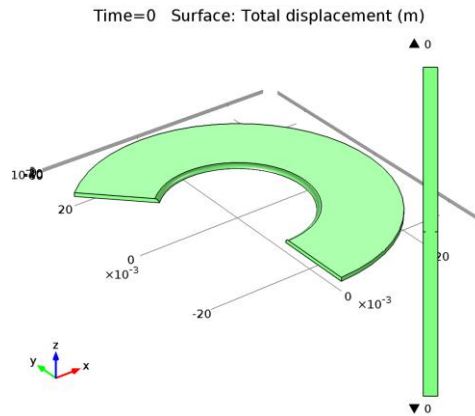


Figura 4-4 Matriz.

Lámina:

Se modeló según la norma un espécimen de lámina de radio de 90 mm el cual se dividió en tres secciones con la finalidad de sustituir el efecto del pisador al colocar directamente condiciones de frontera a la sección central bajo el efecto de éste.

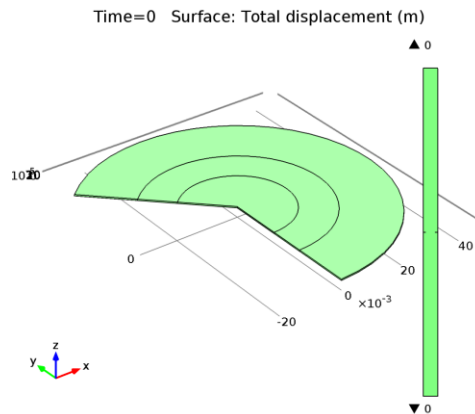


Figura 4-5 Espécimen de lámina.

#### 4.1.2 Comparación con modelo de M. Akrouit

Se realizó una primera comparación del modelo simplificado 2D axisimétrico contra un modelo en literatura de Akrouit [31] en donde se realiza un estudio de la prueba de Erichsen mediante el software de elemento finito COSMOS/M.

#### 4.1.2.1 Propiedades del material

Se tiene un espécimen de lámina de 1 mm de espesor y para caracterizar el material se consideraron las siguientes propiedades de una aleación de aluminio:

Tabla 4-1 Propiedades de la aleación de aluminio

	Módulo de Young ( $E$ )	Módulo de Poisson ( $\nu$ )	Esfuerzo de cedencia ( $\sigma_{y0}$ )	Rango de esfuerzo ultimo
Aleación de aluminio	70.5 (GPa)	0.342	194 (MPa)	340-380 (MPa)

Para el modelo elasto-plástico del material se utiliza un comportamiento de endurecimiento exponencial isótropico descrito por la ecuación de Hollomon [23].

$$\sigma = K\varepsilon^n \quad (4.1)$$

Donde  $K$  es el coeficiente de resistencia,  $n$  es el exponente de endurecimiento por deformación y tienen los siguientes valores:

Tabla 4-2 Constantes de endurecimiento de Hollomon

$K$	$n$
550.4 MPa	0.223

Para estos valores de endurecimiento la curva se muestra en la Figura 4-6.



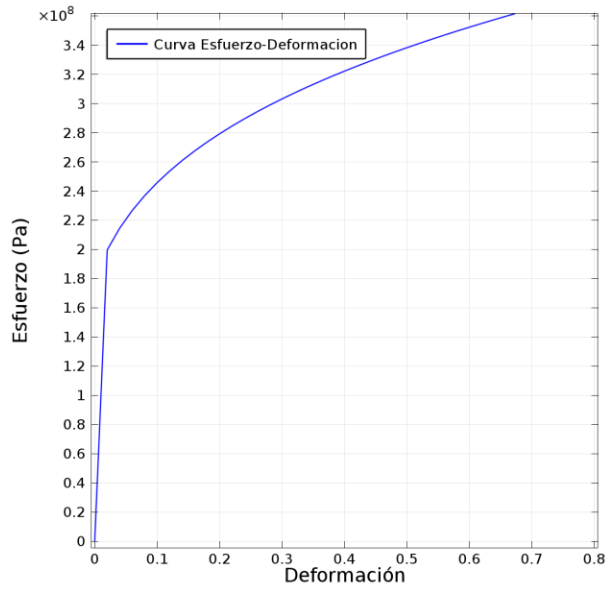


Figura 4-6 Curva Esfuerzo-Deformación

#### 4.1.2.2 Creación de la malla

Para la discretización del modelo se cuidó que en la zona de contactos el material más rígido sea de una malla más fina, en la región de contacto punzón-lámina el punzón es más rígido.

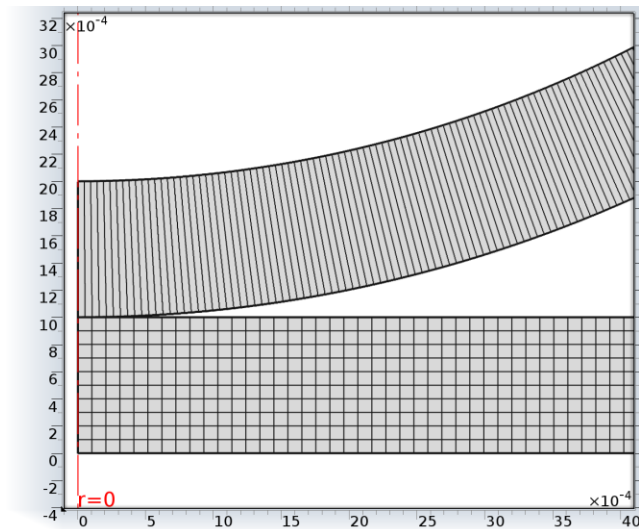
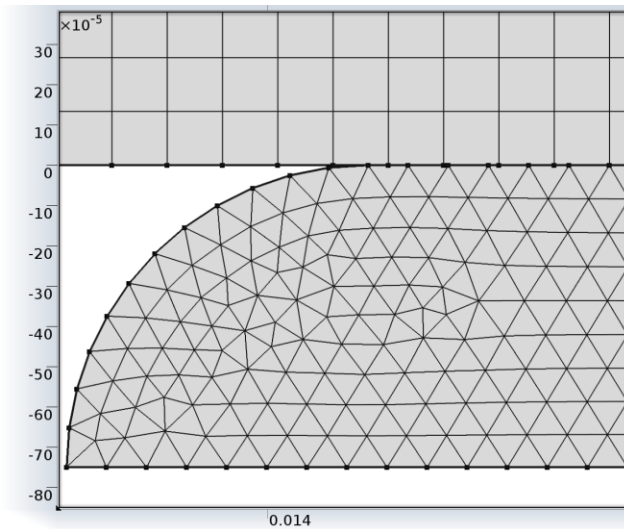


Figura 4-7 Contacto punzón-lámina.

En la región de contacto entre lámina-matriz se considera una malla más fina en la matriz por ser más rígida.



*Figura 4-8 Contacto lámina-matriz.*

Para la lámina se consideraron las tres secciones de la siguiente manera:

- Primer sección (Izquierda): se aplicó una malla fina debido a que en esta sección es donde se presentaran grandes deformaciones plásticas del material.
- Segunda sección (central): se aplicó una malla intermedia ya que esta región tendrá el efecto del pisador para fijar la lámina.
- Tercer sección (derecha): se aplicó un mallado burdo debido a que esta sección de la lámina no se encuentra bajo alguna carga o condición del modelo.

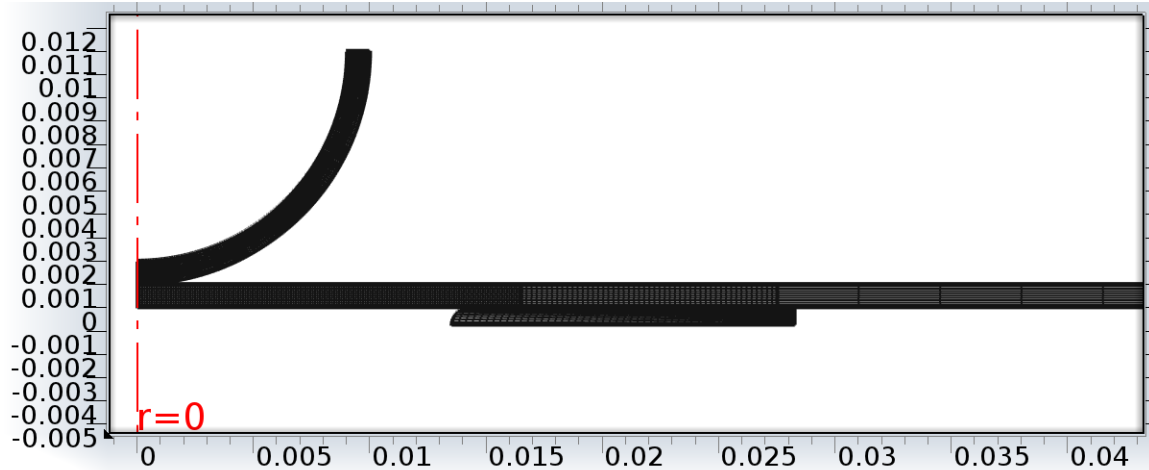


Figura 4-9 Mallado de lámina punzón y matriz.

La discretización total del modelo consta de 300 elementos cuadrangulares para el punzón, 2150 elementos cuadrangulares para la lámina y 500 elementos triangulares para la matriz.

#### 4.1.2.3 Condiciones del modelo:

- Se define contacto punzón-lámina lubricado ( $\mu = 0.05$ ).
- Se define contacto lámina-matriz ( $\mu = 0.1$ ).
- Se considera el punzón rígido y se aplica un desplazamiento hacia abajo de 2.5 mm.
- Se considera rígida la matriz y se fijan sus desplazamientos en todas las direcciones.
- Se fija completamente la sección central de la lámina restringiendo sus desplazamientos en todas las direcciones para sustituir el efecto del pisador.

#### 4.1.2.4 Solución en Comsol:

En el modelo se considera fricción entre las superficies en contacto mediante el modelo de Coulomb. Se seleccionó un solucionador de tipo segregado resolviendo por separado desplazamientos y presiones de contacto. Se ajustaron los parámetros debido a la no linealidad por la combinación de los contactos con fricción y el modelo elasto-plástico, lo cual generaba problemas de convergencia de la solución.

Ajustes en el solver:

Ajustes en el solver:

- Factor de penalización (Penalty Factor) para los pares de contacto

Factor de penalización normal: min (1e-3) cambiar por min(1e-4)

Cuando se generan problemas de convergencia en las primeras iteraciones se requiere bajar el factor, si se observa que el modelo converge pero muy lentamente se puede incrementar el factor manualmente.

- Paso paramétrico (Parametric step):

Al realizarse como un estudio paramétrico los pasos deben ser lo suficientemente pequeños para que el siguiente paso tome la solución previa calculada.

El estudio paramétrico va de 0 a 1, con pasos máximos de 2e-2, y un paso mínimo de 2e-5, según la convergencia de la solución los pasos varían automáticamente entre estos parámetros.

#### 4.1.2.5 Comparación de resultados y análisis

Una vez que se concluyó la simulación, para el análisis de resultados se procedió a obtener los esfuerzos de von Mises de dos maneras, mediante el tensor de esfuerzos de Cauchy y mediante el segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff para observar la influencia de ambos, recordando que como se vio en la sección de Deformaciones finitas 2.11 lo correcto es aplicar el segundo tensor de Piola-Kirchhoff.

Al observar el comportamiento de la lámina al ser deformada, en primer lugar se analizaron los esfuerzos de von Mises mostrados en la Figura 4-10 y Figura 4-11 donde se puede observar una mayor concentración de esfuerzos en la región inferior, ya que el punzón produce cierta flexión en la lámina, quedando la parte superior a compresión y la parte inferior a una tensión adicional a la tensión que se genera por estirar la lámina. Otra observación que se hace es la variación de los resultados de esfuerzos obtenidos mediante los dos tensores diferentes, notando que los valores que se aproximan a la referencia mostrada en la Figura 4-12 son los obtenidos mediante el tensor de Cauchy, el cual como se ha comentado anteriormente no aplica para deformaciones finitas, siendo lo correcto considerar el esfuerzo equivalente obtenido mediante el segundo tensor de Piola-Kirchhoff mostrado en la Figura 4-11.

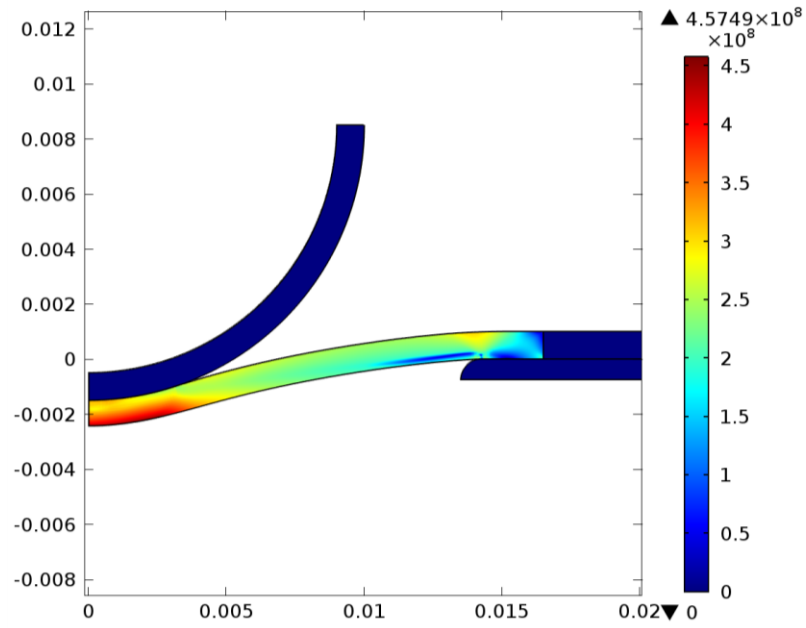


Figura 4-10 Esfuerzos de von Mises (Cauchy) modelo 2D axisimétrico (Pa).

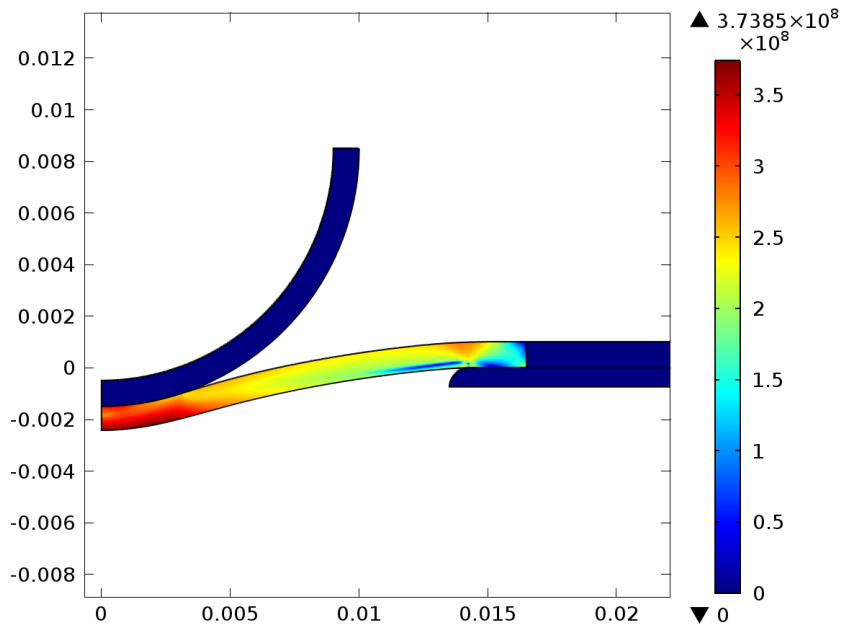


Figura 4-11 Esfuerzos de von Mises (2° Piola-Kirchhoff) modelo 2D axisimétrico (Pa).

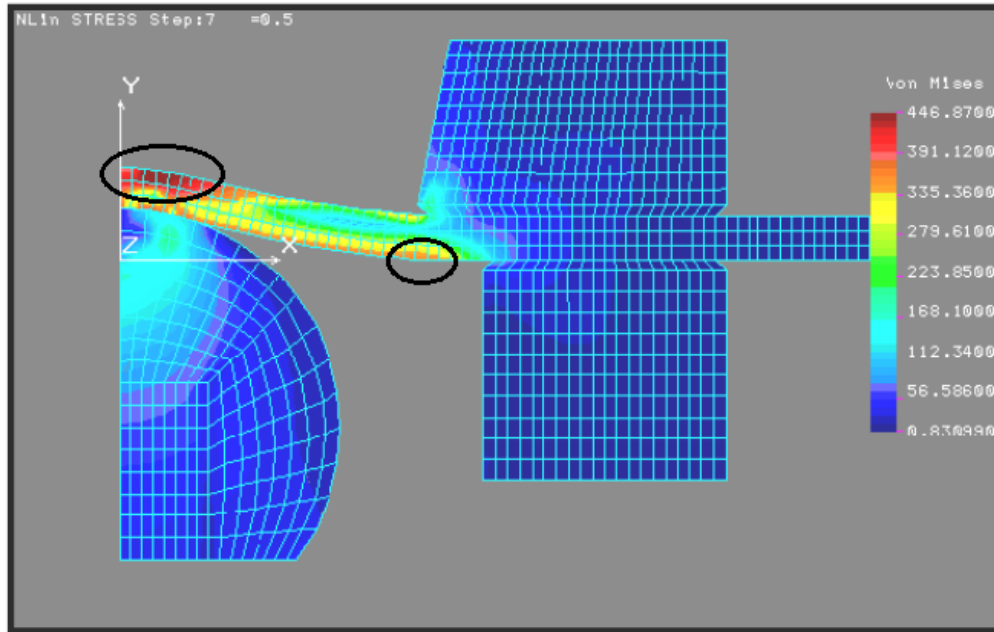


Figura 4-12 Esfuerzos de von Mises modelo AkROUT.(MPa) [31]

Tabla 4-3 Comparación de esfuerzos máximos de von Mises

Valores máximos	Modelo 2D axisimétrico (2° Tensor Piola-Kirchhoff)	Modelo 2D axisimétrico (Tensor Cauchy)	Modelo AkROUT
Esfuerzos de von Mises	373.85 (MPa)	457.49 (MPa)	446.87 (MPa)

Para el caso de las deformaciones plásticas, también se puede observar en la Figura 4-13 una mayor concentración en la región inferior de la lámina, debido al efecto de la flexión y comparando con el modelo de AkROUT Figura 4-14 observamos un comportamiento parecido con valores máximos de deformación muy aproximados como se muestra en la Tabla 4-4.

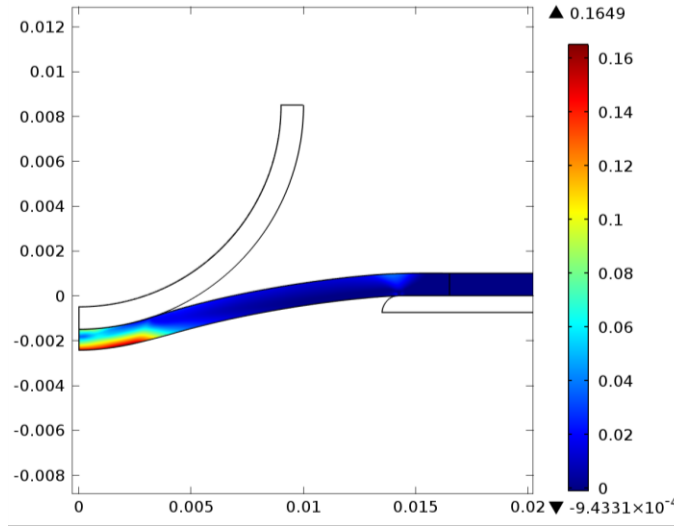


Figura 4-13 Deformación plástica efectiva modelo 2D axisimétrico.

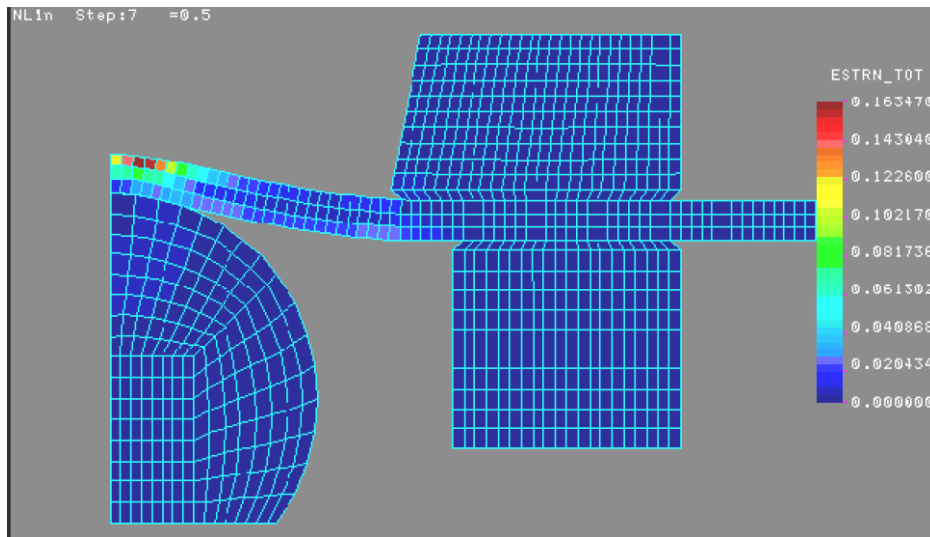


Figura 4-14 Deformación plástica efectiva modelo Akroust.

Tabla 4-4 Comparación de deformación plástica efectiva

Valores máximos	Modelo 2D axisimétrico	Modelo Akroust
Deformación plástica	0.165	0.1634

### 4.1.3 Comparación con modelo de Oleksik

Se realizó una comparación del modelo 2D axisimétrico contra un modelo en literatura de Oleksik [32] en donde se realiza un estudio para determinar el comportamiento de láminas metálicas con una simulación de elemento finito en FORGE2.

#### 4.1.3.1 Propiedades del material

Se tiene un espécimen de lámina de 0.4 mm de espesor y para caracterizar el material se consideraron las siguientes propiedades obtenidas de una caracterización del material en la literatura:

Tabla 4-5 Propiedades de lámina de acero.

	Módulo de Young ( $E$ )	Módulo de Poisson ( $\nu$ )	Esfuerzo de cedencia ( $\sigma_{y0}$ )	Rango de esfuerzo ultimo
Lámina de acero	210 (GPa)	0.3	324 (MPa)	420-450 (MPa)

Para el modelo elasto-plástico del material se utiliza un comportamiento de endurecimiento exponencial isótropico descrito por la ecuación de Ludwik.

$$\sigma = \sigma_{y0} + K\varepsilon^n \quad (4.2)$$

donde  $K$  es el coeficiente de resistencia,  $n$  es el exponente de endurecimiento por deformación y tienen los valores indicadas en la Tabla 4-6.

Tabla 4-6 Constantes de endurecimiento de Ludwik

$K$	$n$
281.46 MPa	0.514



#### 4.1.3.2 Creación de la malla

Para la Discretización del modelo se utilizó la descrita en la sección 4.1.2.2 la cual consta de 300 elementos cuadrangulares para el punzón, 2150 elementos cuadrangulares para la lámina y 500 elementos triangulares para la matriz.

#### 4.1.3.3 Condiciones del modelo:

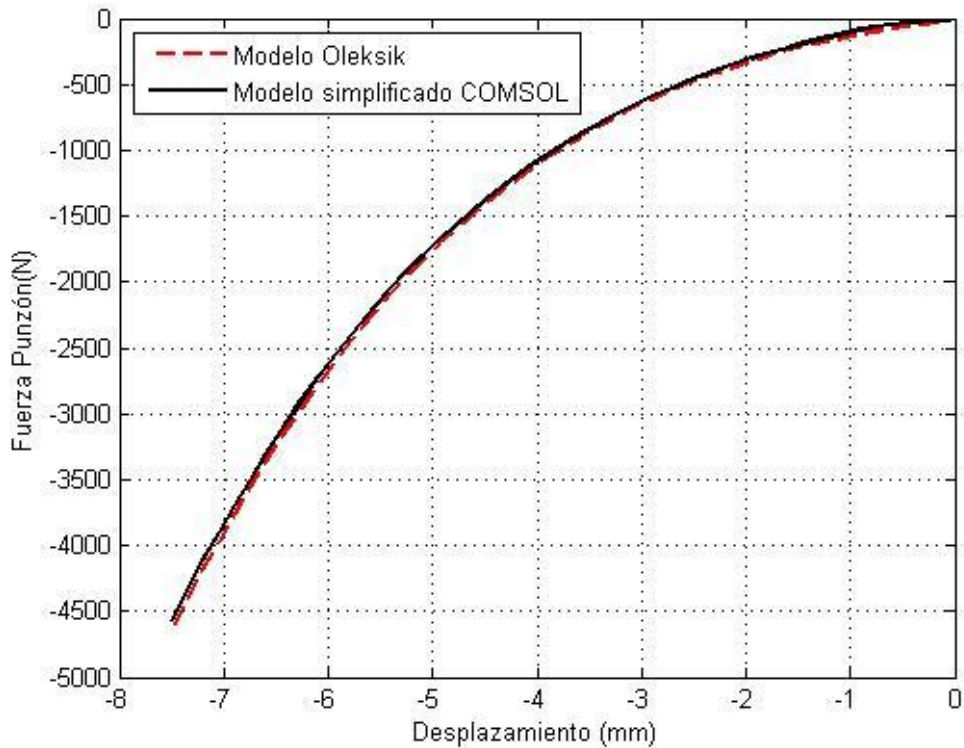
- Se define contacto punzón-lámina ( $\mu = 0.1$ ).
- Se define contacto lámina-matriz ( $\mu = 0.1$ ).
- Se considera un punzón rígido y se aplica un desplazamiento hacia abajo de 7.5 mm.
- Se considera una matriz rígida y se restringen sus desplazamientos en todas las direcciones.
- Se fija completamente la sección central de la lámina restringiendo sus desplazamientos en todas las direcciones para sustituir el efecto del pisador.

#### 4.1.3.4 Solución en Comsol:

En el modelo se considera fricción entre las superficies en contacto mediante el modelo de Coulomb con un coeficiente de  $\mu = 0.1$  proporcionado en literatura, el solucionador fue seleccionado como en la sección 4.1.2.4.

#### 4.1.3.5 Comparación de resultados y análisis

Una vez que se concluyó la simulación se compararon algunos resultados de referencia de Oleksik contra el modelo realizado. En principio se calculó la fuerza del punzón necesaria para deformar la lámina hasta una profundidad de copa de 7.5 mm, obteniendo la gráfica mostrada en la Figura 4-15, donde en línea continua se muestra el resultado del modelo simplificado en COMSOL y en línea discontinua el resultado del modelo de Oleksik, observándose un comportamiento similar en ambas curvas, siendo ligeramente inferiores los valores de fuerza para el modelo simplificado en COMSOL.



*Figura 4-15 Fuerza del punzón para deformar la lámina.*

En cuanto al análisis de esfuerzos de von Mises en la Figura 4-16, estos fueron calculados mediante el segundo tensor de Piola-Kirchhoff y no obtenidos directamente del programa, ya que estos son calculados por default con el tensor de Cauchy. Se pueden observar dos zonas de concentraciones de esfuerzos, debido al efecto de flexión. La primera en el contacto con el punzón y la segunda debido a la flexión de la lámina por efecto de la matriz.

En el caso de la deformación plástica efectiva en la Figura 4-17 se muestran los valores obtenidos para el modelo en COMSOL teniendo un valor máximo de 0.4722 y un mayor adelgazamiento en la región de contacto con el punzón, lo cual se puede explicar también debido a que en esa zona existe mayor tensión debida al efecto de flexión que tiene el punzón sobre la lámina, también se considera la influencia que pueda tener la fricción sobre el flujo del material, efecto que será estudiado más adelante.

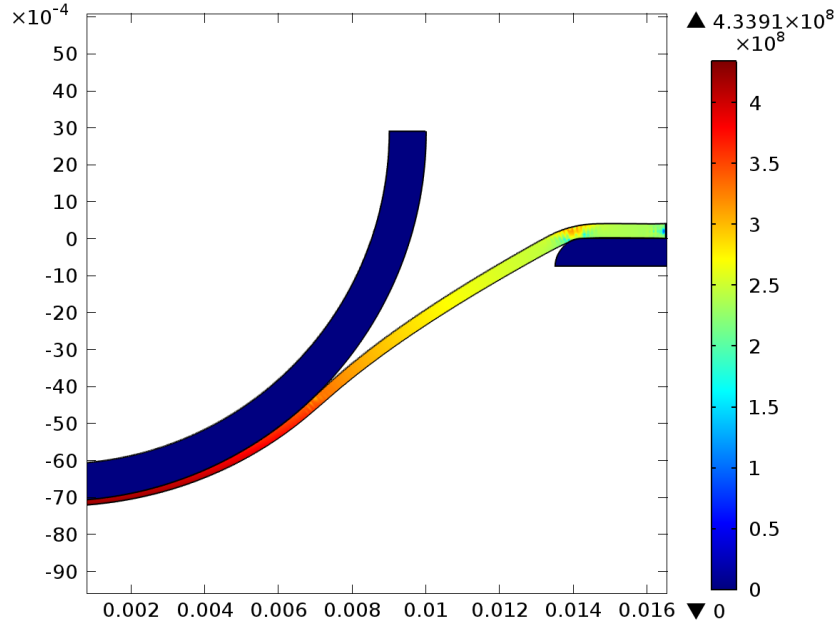


Figura 4-16 Esfuerzos de von Mises (2° Piola-Kirchhoff) modelo 2D axisimétrico.

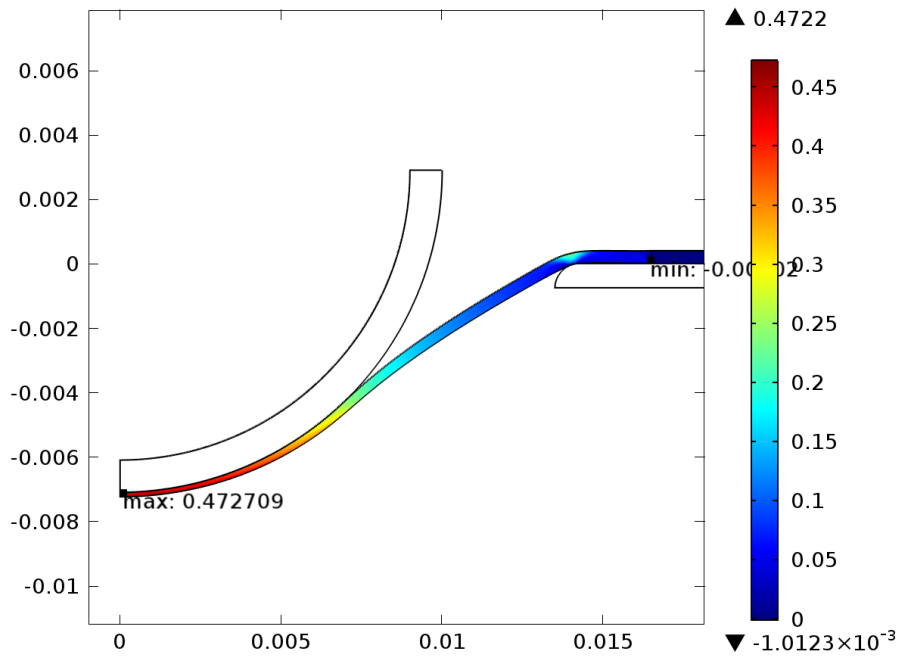


Figura 4-17 Deformación plástica efectiva modelo 2D axisimétrico.

#### 4.1.3.6 Comparación de esfuerzos en las fronteras de la lámina

El proceso de embutido profundo se define como un proceso de formado de tracción-compresión de lámina metálica. Durante el proceso de embutido profundo debido a la fuerza del punzón y el efecto del pisador se forman las siguientes zonas de esfuerzos:

- Zona de flexión
- Zona de transmisión de la fuerza
- Zona de aplicación de la fuerza

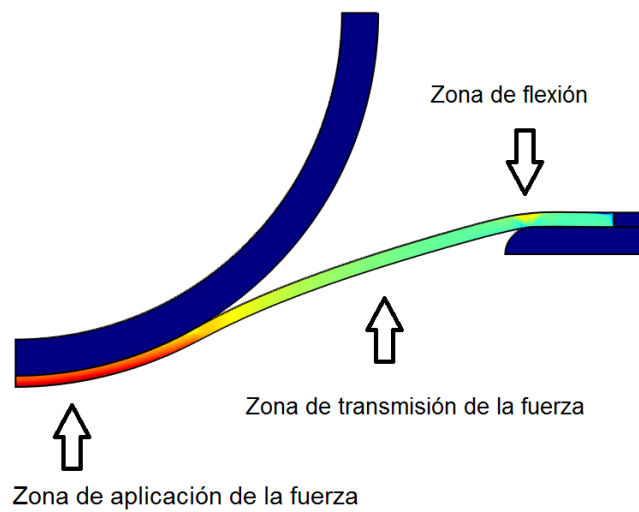


Figura 4-18 Zonas de esfuerzos en embutido profundo.

Para la presentación de los resultados se definieron dos fronteras en la lámina:

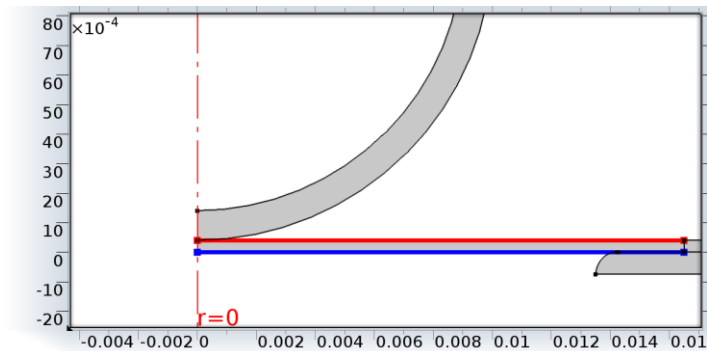


Figura 4-19 fronteras superior e inferior de la lámina.

En la gráfica de los esfuerzos de von Mises mostrados en la Figura 4-20 se observa que la zona de aplicación de la fuerza (zona de contacto punzón lámina) desde  $r=0$  hasta  $r=0.008$  m se tiene una mayor concentración de esfuerzos en la región inferior, ya que el punzón produce cierta flexión en la lámina quedando la parte superior a compresión y la parte inferior a una tensión adicional a la tensión que se genera por estirar la lámina, mientras que para la zona de transmisión de la fuerza con valores desde  $r=0.008$  m hasta  $r=0.0125$  m los valores de esfuerzos son muy similares debido a que esta zona se encuentra a tensión en ambas fronteras, en la zona de flexión desde  $r=0.0125$  hasta  $r=0.0155$  m también se tienen esfuerzos mayores en la frontera superior por el efecto de la flexión adicional a la tensión de estirado.

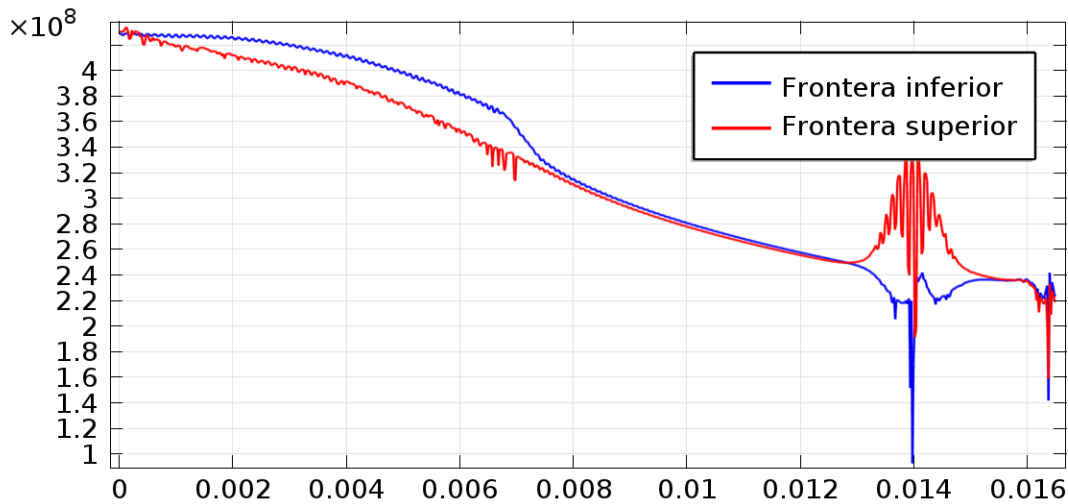


Figura 4-20 Esfuerzos de von Mises en las fronteras (Pa).

Para el análisis de las deformaciones plásticas efectivas Figura 4-21 se observa que la zona de aplicación de la fuerza (zona de contacto punzón lámina) desde  $r=0$  hasta  $r=0.008$  m. el valor de la deformación en la frontera superior es menor que el valor en la frontera inferior debido también al efecto de flexión que hace que los esfuerzos y deformaciones sean mayores en la región donde la flexión produce esfuerzos de tensión en la lámina, para la zona de transmisión de la fuerza con valores desde  $r=0.008$  m hasta  $r=0.0125$  m las deformaciones son muy similares debido a que esta zona se encuentra a tensión en ambas fronteras. En la zona de flexión para  $r > 0.0125$  m la combinación de esfuerzos de flexión al doblar y tensión al estirar la lámina generan que en la frontera superior se tenga una deformación mayor que en la frontera inferior.

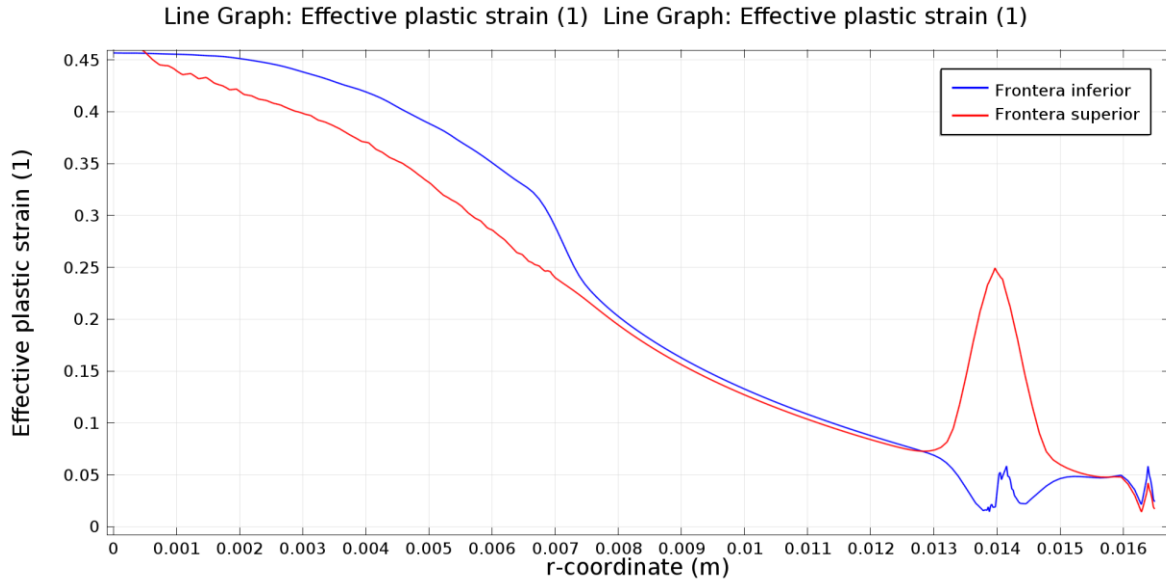


Figura 4-21 Deformaciones plásticas efectivas en las fronteras.

## 4.2 Modelo 2D axisimétrico con pisador

Se realizó un nuevo modelo 2D axisimétrico del dispositivo para la prueba de Erichsen, el cual consta de punzón, matriz, lámina, pero ahora incluyendo al pisador con la finalidad de comparar resultados obtenidos mediante el modelo simplificado en donde se fijaba la lámina rígidamente en la sección central y no se colocaba el pisador.

### 4.2.1 Geometría del modelo con pisador.

Para la realización del geometría se consideró un modelo 2D axisimétrico Figura 4-22 en un sistema de coordenadas cilíndricas y se siguieron las dimensiones descritas según la norma ISO 20482 Figura 1-16 con una tolerancia de 0.05 mm según la norma.

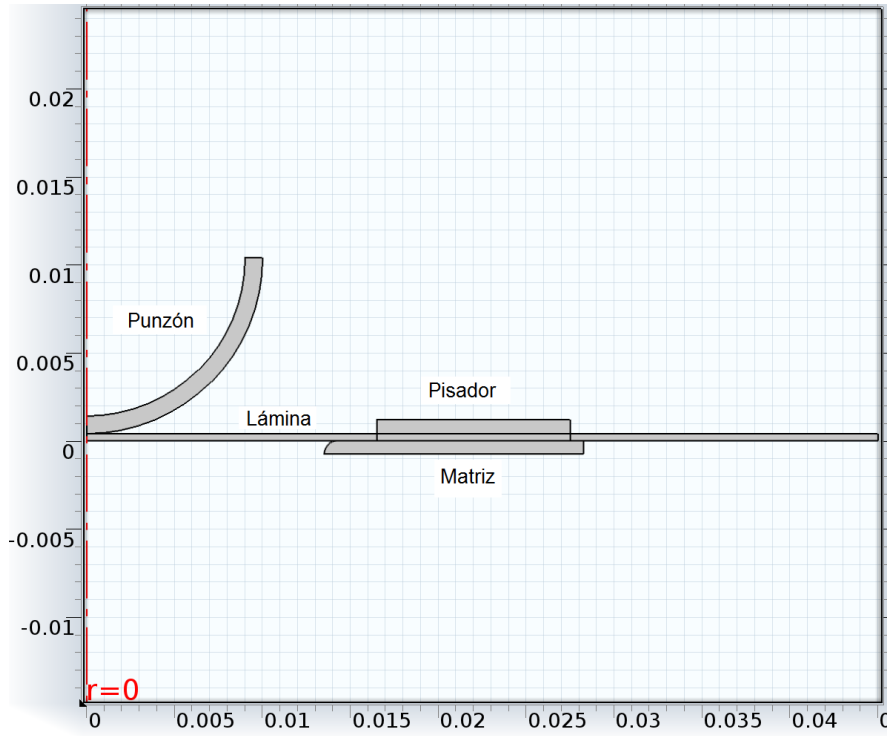


Figura 4-22 Geometría simplificada 2D con pisador.

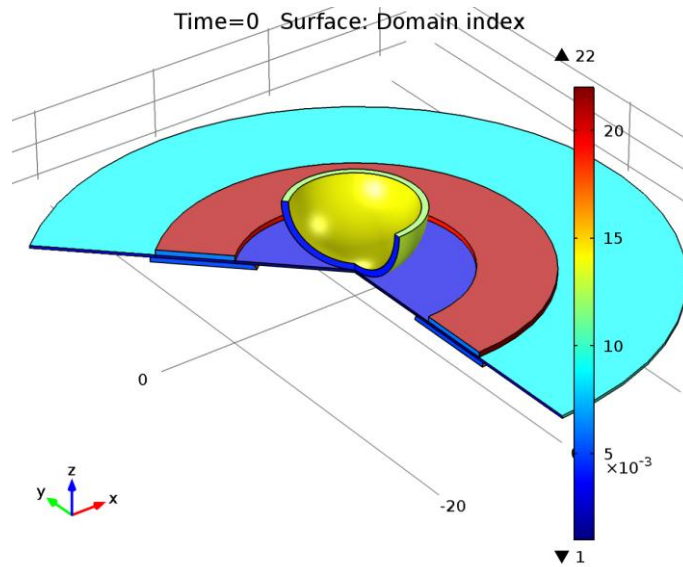


Figura 4-23 Geometría 3D con pisador.

Pisador:

Se incluyó al anterior modelo simplificado la geometría de un pisador según la norma de diámetro interno de 33 mm y diámetro externo de 55 mm que será el encargado de mantener fija la lámina a la matriz.

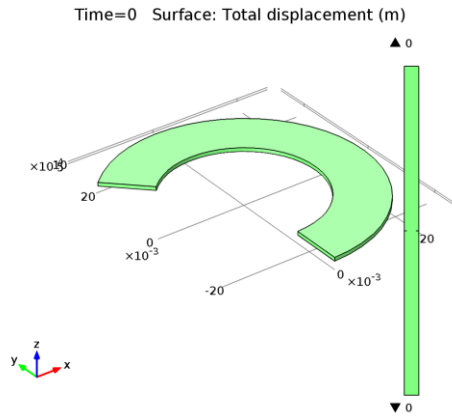


Figura 4-24 Espécimen de lámina.

#### 4.2.2 Comparación contra modelo simplificado

Se realizó una comparación del modelo 2D axisimétrico con pisador contra el modelo simplificado realizado anteriormente en COMSOL considerando las propiedades del material de la Tabla 4-5 y un modelo de endurecimiento de Hollomon (4. 2).

#### 4.2.3 Creación de la malla

Para el mallado del modelo se tomó el mostrado en la sección anterior (4.1.3.2), solamente agregando la malla del pisador y refinando más la sección que se encuentra bajo efectos del pisador Figura 4-25.



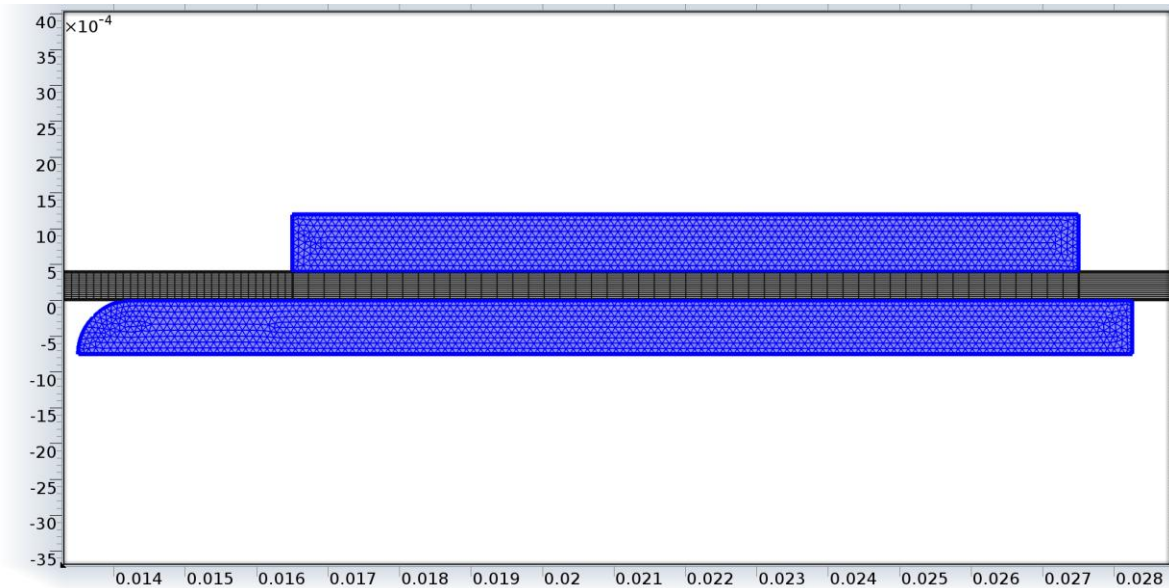


Figura 4-25 Mallado de lámina pisador y matriz.

La discretización total del modelo consta de 300 elementos cuadrangulares para el punzón, 2150 elementos cuadrangulares para la lámina y 500 elementos triangulares para la matriz y 400 elementos triangulares para el pisador.

#### 4.2.4 Condiciones del modelo:

- Se define contacto punzón-lámina ( $\mu = 0.1$ ).
- Se define contacto lámina-matriz ( $\mu = 0.1$ ).
- Se define contacto lámina-pisador ( $\mu = 0.1$ ).
- Se aplica un desplazamiento en el punzón hacia abajo de 7.5 mm.
- Se fija completamente la matriz restringiendo sus desplazamientos en todas las direcciones.
- Se aplica una carga en el pisador de hasta 9800 N según la norma para fijar la lámina a la matriz.

#### 4.2.5 Comparación de resultados y análisis

Una vez que se concluyó la simulación se compararon resultados contra el modelo en COMSOL simplificado y el modelo de Oleksik, en principio se analizó la fuerza del punzón necesaria para deformar la lámina hasta una profundidad de copa de 7.5 mm. En la Figura 4-26 en línea continua se muestra el resultado de la simulación del modelo con pisador en COMSOL, en línea discontinua el resultado del modelo de Oleksik y en línea y punto el resultado del modelo simplificado en COMSOL, observándose un comportamiento similar en las curvas, siendo la fuerza en el modelo con pisador inferior

a la fuerza obtenida en el modelo de Oleksik y a la fuerza en el modelo simplificado en COMSOL Figura 4-27.

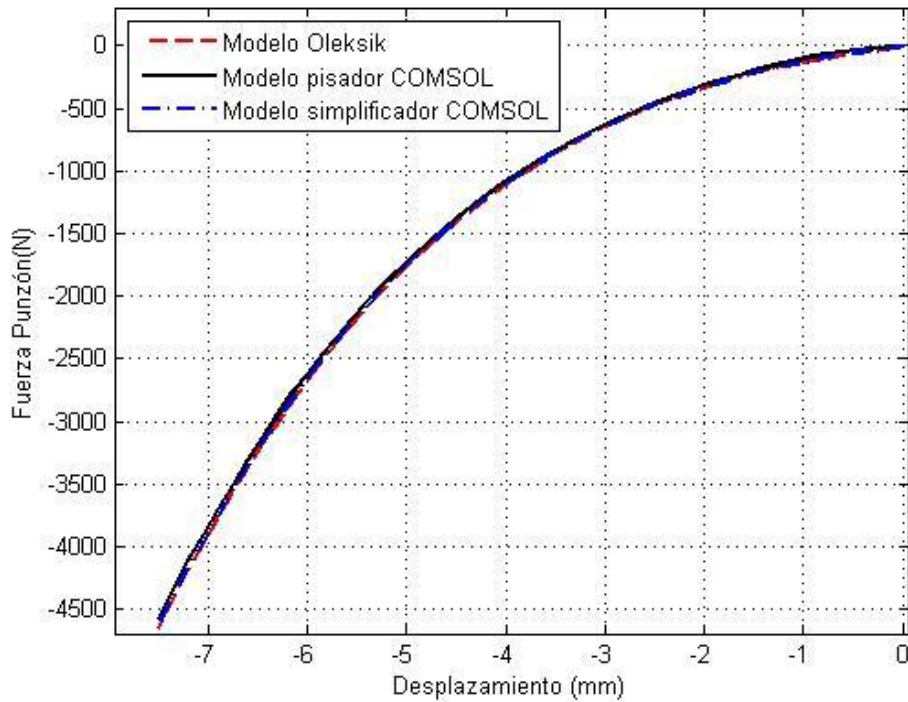


Figura 4-26 Fuerza del punzón para deformar la lámina para los 3 modelos.

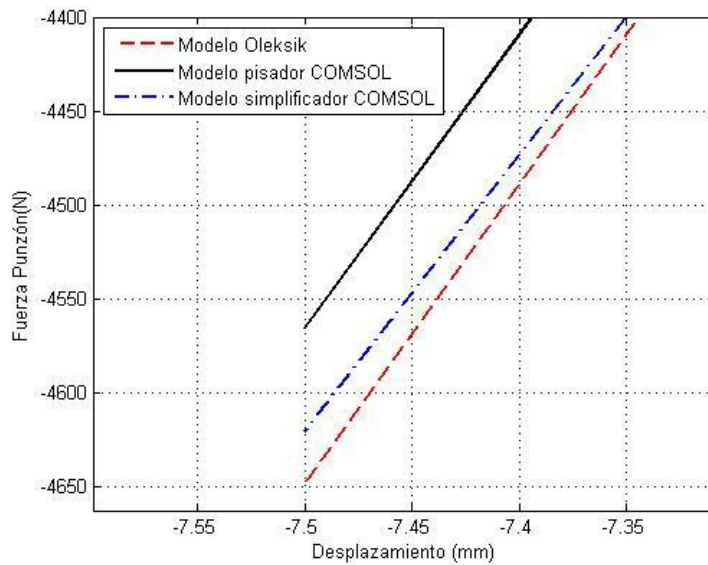


Figura 4-27 Acercamiento a la fuerza para un desplazamiento de 7.5 mm.

En el análisis de esfuerzos de von Mises, se puede observar que en el modelo con pisador también los esfuerzos máximos estén en la región de contacto con el punzón como se observa en la Figura 4-28, y estos son generados por el efecto de flexión en la lámina. En comparación con el modelo simplificado realizado anteriormente se observa que los valores de los esfuerzos disminuyeron debido a que al no estar completamente rígida la lámina puede existir cierto flujo del material que está bajo el pisador y así reducir los esfuerzos generados por tensión.

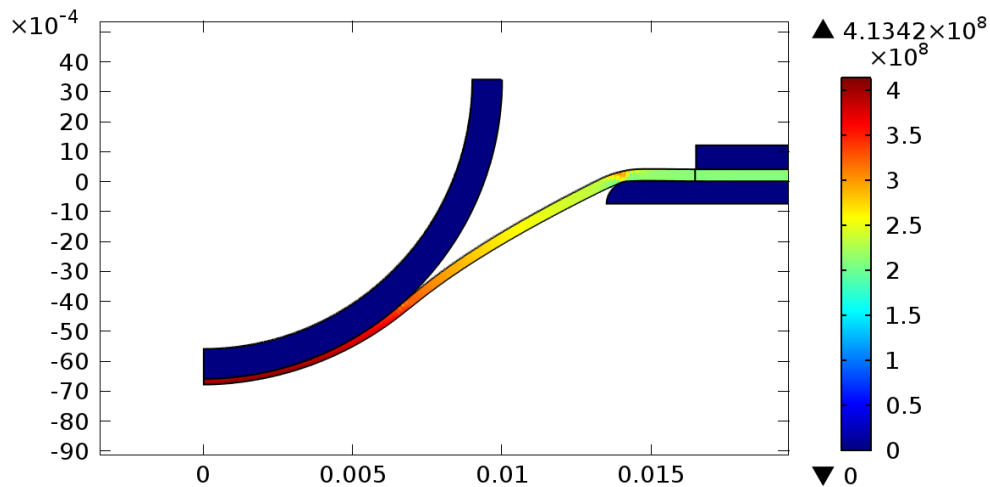


Figura 4-28 Esfuerzos de von Mises (2º Piola-Kirchhoff) en modelo con pisador (Pa).

En el caso de la deformación plástica efectiva en la Figura 4-29 se muestran los valores obtenidos para el modelo en COMSOL con pisador teniendo un valor máximo de 0.4216 y un mayor adelgazamiento en la región de contacto con el punzón, debido a que el efecto de flexión aumenta los esfuerzos en esa zona. Al comparar la deformación con la obtenida en el modelo simplificado se puede observar que también disminuyó por que el material bajo el pisador tiene cierta libertad de fluir al no estar fijo rígidamente.

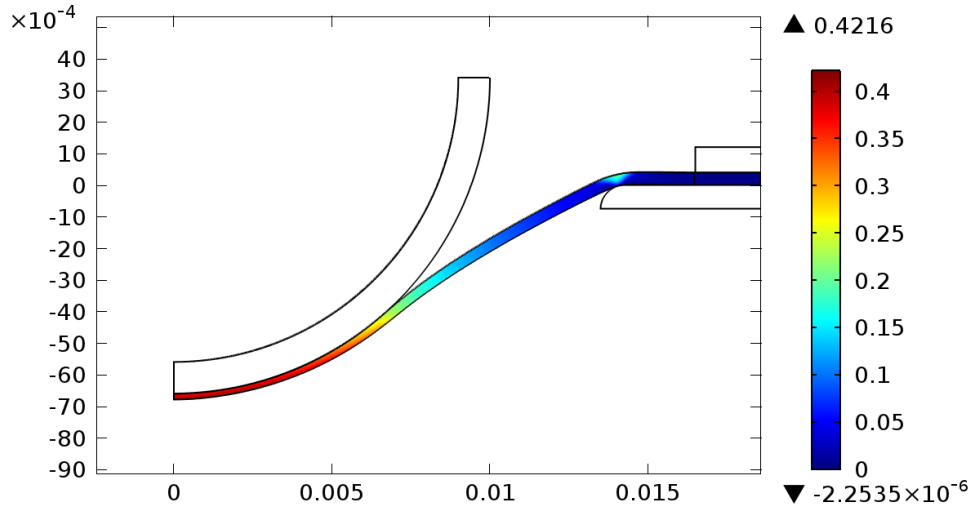


Figura 4-29 Deformación plástica efectiva en modelo con pisador.

Tabla 4-7 Comparaciones entre modelos de COMSOL y Oleksik.

	Modelo Simplificado en COMSOL	Modelo con Pisador en COMSOL	Modelo de Oleksik
Esfuerzo máximo de von Mises (2º tensor de Piola-Kirchhoff)	433.9 (MPa)	413.4 (MPa)	—————
Máxima deformación plástica efectiva	0.4722	0.4216	0.563

También se realizó una comparación contra el modelo de Akrouit [31], caracterizando el material y las condiciones de la prueba como se describe en la sección 4.1.2. Se agregó la geometría del pisador, el contacto y la fricción de éste con la lámina como es descrito en este nuevo modelo con pisador, obteniéndose para este nuevo modelo los resultados mostrados en la Tabla 4-8.

Tabla 4-8 Comparaciones entre modelos de COMSOL y Akrouit.

	Modelo Simplificado en COMSOL	Modelo con Pisador en COMSOL	Modelo de Akrouit
Esfuerzo máximo de von Mises (2º tensor de Piola-Kirchhoff)	373.85 (MPa)	371.23 (MPa)	————
Máxima deformación plástica efectiva	0.1649	0.159	0.1634

Se puede observar una reducción en los esfuerzos de von Mises obtenidos mediante el 2º tensor de Piola-Kirchhoff, como era de esperarse al quitar la restricción de poner la lámina fija completamente, pero con estos valores no se puede hacer una comparación con Akrouit [31] ya que no se especifica con cual tensor de esfuerzos fueron calculados, sin embargo hay que recordar que cuando se calculó el esfuerzo equivalente mediante el tensor de Cauchy en la sección 4.1.2.5, (lo cual no es correcto para deformaciones finitas) los valores se aproximaban.

### 4.3 Influencia de la fricción en el proceso

Se ha comprobado en anteriores estudios que la fricción entre la lámina y las herramientas en un proceso de estirado o embutido de lámina tiene una influencia en el flujo del material. Lumelsky [33] realizó un estudio en donde se observa la influencia de la fricción en la deformación de la lámina, en su estudio se muestra que para un proceso de estirado de lámina con bajo valor de fricción el mayor adelgazamiento se produce en la región central de la copa formada, mientras que al haber un mayor valor de fricción la región de adelgazamiento se desplaza como se muestra en la Figura 4-30.

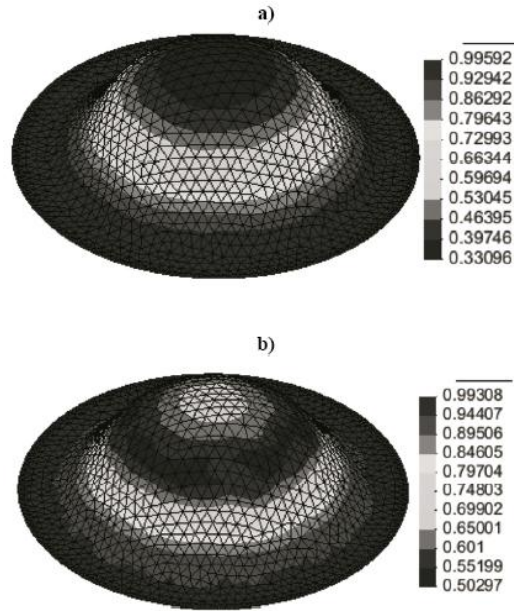


Figura 4-30 Distribución del espesor de la lámina a) sin fricción b) con fricción [33].

Para analizar este comportamiento se realizaron comparaciones en el modelo en COMSOL simplificado y con pisador, con las propiedades de una lámina de acero descritas en la sección 4.1.3.1, Los resultados obtenidos en términos de esfuerzos de von Mises y deformaciones plásticas efectivas se muestran de la Figura 4-31 a la Figura 4-34, para dos diferentes coeficientes de fricción 0.01 y 0.1, observándose que como se había mencionado antes, al tener un bajo valor de fricción los esfuerzos y las deformaciones se concentran en la región central indicando la presencia de la fractura en esta zona, este efecto es debido a que cuando se tiene un mayor coeficiente de fricción la zona de contacto tiene menos libertad de fluir por acción de la fuerza de fricción que se produce en las fronteras, adelgazando más en la zona donde no exista contacto entre la lámina y la herramienta. Por lo tanto se observa que es de gran importancia conocer el coeficiente de fricción al realizar el modelo de un proceso de estirado de lámina.

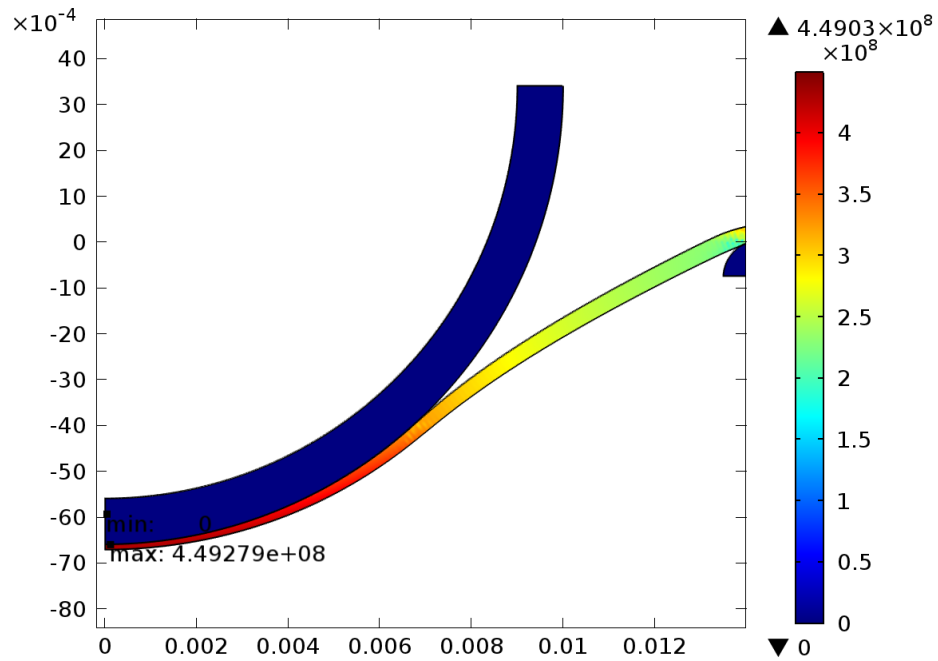


Figura 4-31 Esfuerzos de von Mises (Pa) con coeficiente de fricción de 0.01.

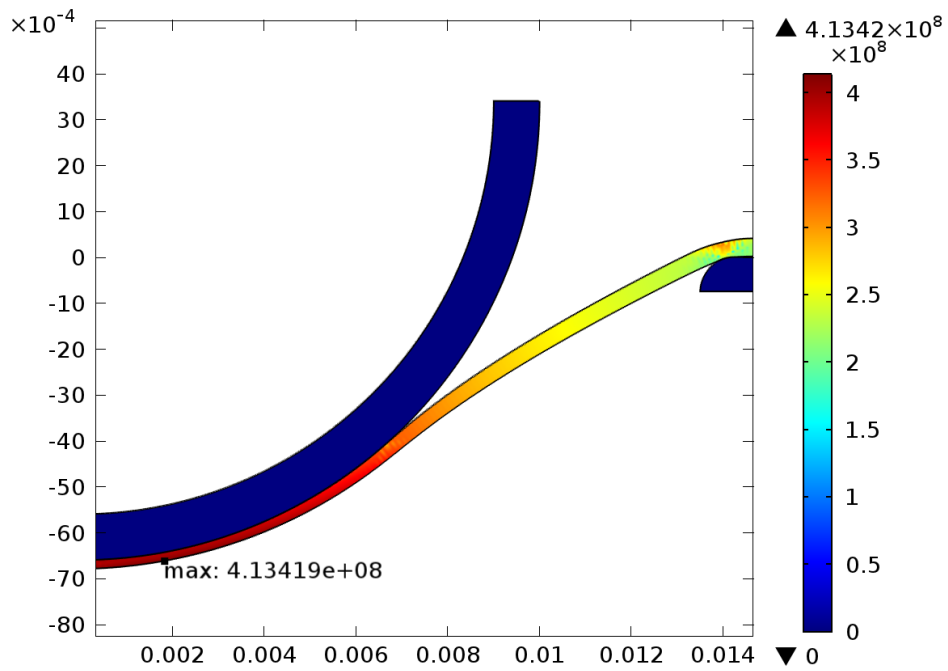


Figura 4-32 Esfuerzos de von Mises (Pa) con coeficiente de fricción de 0.1.

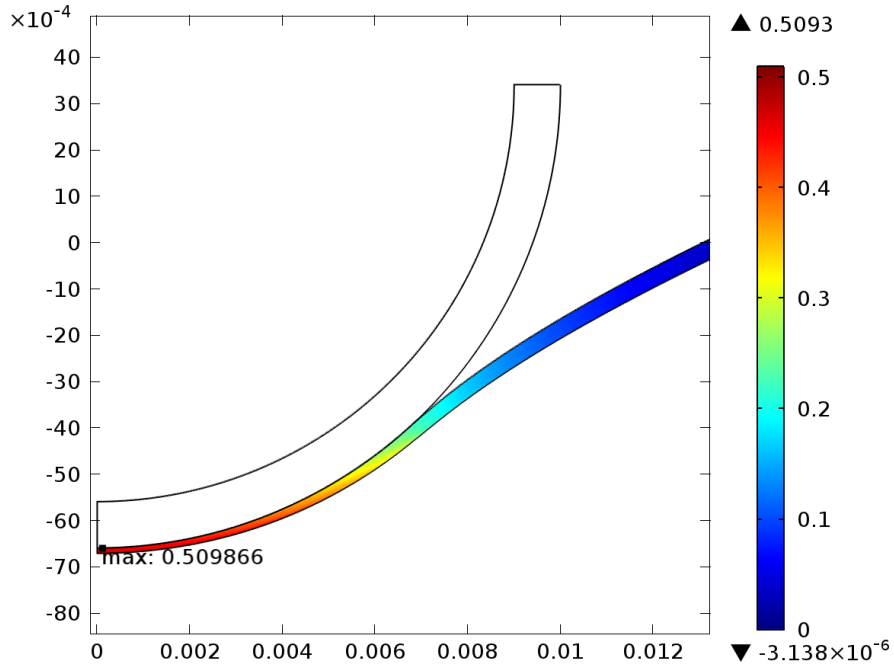


Figura 4-33 Deformación plástica efectiva con coeficiente de fricción de 0.01.

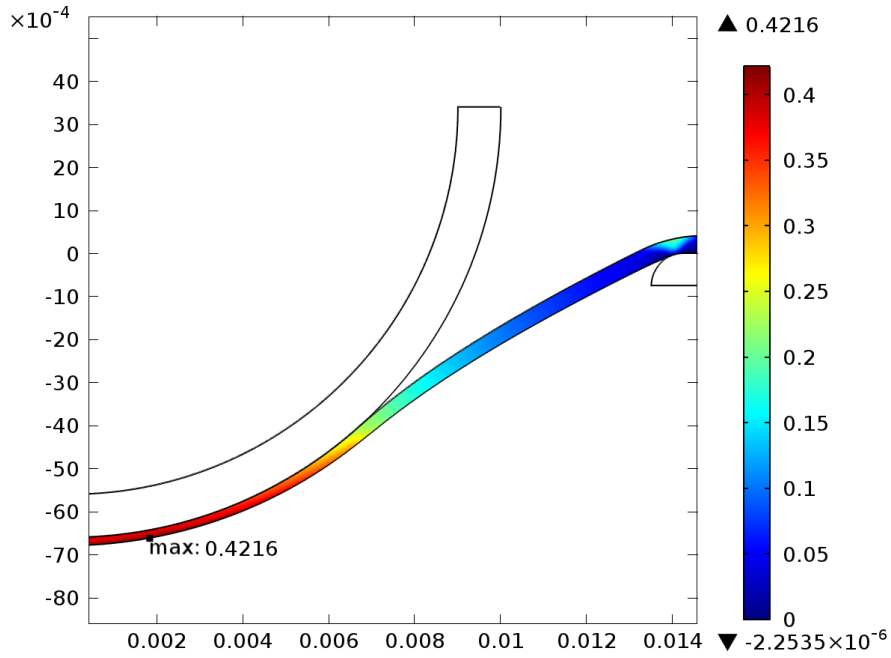


Figura 4-34 Deformación plástica efectiva con coeficiente de fricción de 0.1.



# CONCLUSIONES

En este trabajo se analizaron modelos de referencia para adquirir experiencia en el manejo de las no linealidades presentes en simulaciones numéricas de estirado de láminas como son la no linealidad del material, las no linealidades geométricas del modelo y los contactos presentes entre la herramienta y la lámina.

La solución de las no linealidades presentes se realizó mediante pasos pequeños, que aunque generan una mayor cantidad de operaciones numéricas, también permite efectuar un cálculo más simplificado de ciertas magnitudes. Todos estos análisis sirvieron para a partir de los modelos de referencia desarrollar un par de modelos que describe el comportamiento de la prueba de Erichsen.

Para el caso de los esfuerzos equivalentes de von Mises se observó la influencia que tienen al ser calculados a partir de dos diferentes tensores de esfuerzos, los cuales son el tensor de esfuerzos de Cauchy y el segundo tensor de esfuerzos de Piola Kirchhoff, lo cual se mencionó en la sección 2.11.3 y se comprobó mediante COMSOL en un caso de tensión uniaxial en la sección 3.1.2 concluyendo que como se dice en la teoría al utilizar deformaciones finitas se debe hacer uso del segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff.

Para analizar la prueba de Erichsen se partió de un modelo donde se sustituyó el pisador mediante la acción de fijar la sección de lámina que se encontraría bajo este efecto, lo cual como se demostró produce esfuerzos mayores ya que el material fijo no tiene libertad de fluir, flujo que en la realidad se presenta en pequeñas cantidades. Sin embargo se considera que este modelo es una buena aproximación ya que al eliminar el contacto pisador-lámina el costo de recursos para resolver el modelo disminuye y aun así se observa una buena concordancia con los resultados del modelo con pisador, para el caso en que se usaron las condiciones del modelo de Akrouit [31] mostrado en la Tabla 4-8. En el caso del modelo que se realizó bajo las condiciones de Oleksik, en Tabla 4-7 se puede observar que existe una mayor diferencia, esto es debido a que al presentarse mayores esfuerzos estos harán fluir más el material que está bajo el pisador, teniendo una mayor diferencia con el modelo en el que está completamente rígida la lámina.

Respecto a la influencia de la fricción se pudo observar que es un parámetro que se debe considerar en los procesos de embutido profundo ya que cambia considerablemente la distribución de los esfuerzos en la superficie de la lámina y esto puede afectar y producir fallas en una determinada zona de la pieza de trabajo.

## Trabajo Futuro

- Este trabajo de tesis sirve como punto de partida de análisis de procesos de deformaciones finitas en el software COMSOL 4.2.
- Se pueden hacer modificaciones a la geometría del punzón, matriz y pisador para comparar resultados con otras pruebas de estirado de lámina.
- Realizar un análisis de la influencia que tiene los parámetros de endurecimiento del material en la altura de la copa formada.



## BIBLIOGRAFIA

- [1] S. Kalpakjian y S. R. Schmid, Manufactura, ingeniería y tecnología, cuarta edición, Prentice-Hall Inc., 2002.
- [2] T. Altan, Metal forming hand book, Berlin: Springer, 1998.
- [3] D. Banabic, Sheet metal forming processes, Springer, 2010.
- [4] Z. Marciniak y J. L. Duncan, Mechanics of sheet metal forming, Lonodon, 1992.
- [5] ISO 20482, 2003.
- [6] ASTM E 643, 2000.
- [7] L. A. de Vedia, Estado de tensiones y deformaciones, Buenos Aires, 2002.
- [8] E. J. Hearn, Mechanics of materials 2, Boston: Butterworth, 1997.
- [9] D. Banabic y H. J. Bunge, Formability of metallic materials, Stuttgart: Springer, 2000.
- [10] J. Chakrabarty, Theory of plasticity, Texas: Butterworth-Heinemann, 2006.
- [11] P. Prat, Ecuaciones constitutivas Elasticidad y Plasticidad, Barcelona, 2006.
- [12] F. Dunne y N. Petrinic, Introduction to computational plasticity, New York: Oxford University Press Inc., 2005.
- [13] K. Chau Le, Plasticity Lecture Notes.
- [14] J. Lubliner, Plasticity theory, California: Pearson Education Inc., 2006.
- [15] R. M. McMeeking y J. R. Rice, Finite-Element Formulations for Problems of Large Elastic-Plastic Deformation, Providence, U.S.A.: Pergamon Press, 1974.
- [16] K. Hjelmstad, Fundamentals of structural engineering, Prentice Hall, 1997.
- [17] R. J. Atkin y N. Fox, An Introduction to the Theory of Elasticity, Dover, 1998.
- [18] L. E. Malvern, Introduction to the mechanics of a continuum medium, Prentice-Hall,

1999.

- [19] P. G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity*, Ámsterdam: Elsevier Science Publishers, 1998.
- [20] Y. S. Suh y R. Wagoner, *Application of the Finite-Element Method to Design of Optimized Tool Geometry for the O.S.U. Formability Test*, Ohio: ASM International, 1996.
- [21] K. Youngsuk y J. Dongwon, *A Study on Deformation Characteristics of the Plane Strain Punch Stretching Test*, KSME International Journal, 1997.
- [22] M. P. Miles, J. L. Siles y K. Krasimhan, *A Better Sheet Formability Test*, Metallurgical Transactions , 1993.
- [23] P. Larour, *Strain rate sensitivity of automotive sheet steels*, Germany, 2010.
- [24] K. L. Johnson, *Contact Mechanics*, New York: University of Cambridge, 1995.
- [25] Z. Xiaoyin, *Tutorial on Hertz contact Stress*, 2012.
- [26] COMSOL Multiphysics, *Cylinder roller contact*.
- [27] A. Konter, *Advanced finite element contact benchmarks*, 2005.
- [28] COMSOL Multiphysics, *Sheet metal forming*.
- [29] V. Popov, *Contact mechanics and friction*, Berlin: Springer, 2010.
- [30] I. I. Nawawi, *Finite element modelling of Erichsen Olsen sheet metal formability test*, Malaysia, 2009.
- [31] M. Akrouf, M. B. Amar y C. Chaker, *Numerical and experimental study of the Erichsen test for metal stamping*, Tunisia, 2008.
- [32] V. Oleksik y A. Gavrus, *Experimental and finite element analysis of Erichsen test*, Romania, 2009.
- [33] D. Lumelsky, I. Marczewska y J. Rojek, *Effect of friction on failure location in sheet metal formability tests*, Poland, 2013.

## ANEXOS

### Anexo A

*Tabla A-1 Modelos de endurecimiento exponencial [23].*

Modelo	Ecuación
Hollomon	$\sigma(\varepsilon) = C_1 \varepsilon^{C_2}$
Ludwik	$\sigma(\varepsilon) = C_1 + C_2 \varepsilon^{C_3}$
Swift	$\sigma(\varepsilon) = C_1 (C_2 + \varepsilon)^{C_3}$
Voce	$\sigma(\varepsilon) = C_1 + (C_2 - C_1) \exp(-C_3 \varepsilon)$
Hockett/Sherby	$\sigma(\varepsilon) = C_2 - (C_2 - C_1) \exp(-C_3 \varepsilon^{C_4})$
Gosh	$\sigma(\varepsilon) = C_1 + C_2 (C_3 + \varepsilon)^{C_4}$
Swift-Voce	$\sigma(\varepsilon) = C_1 \sigma_{Swift}(\varepsilon) + (1 - C_2) \sigma_{Voce}(\varepsilon)$
Swift-Hockett/Sherby	$\sigma(\varepsilon) = C_1 (C_2 + \varepsilon)^{C_3} + C_4 \exp(-C_5 \varepsilon^{C_6})$
El Magd	$\sigma(\varepsilon) = C_1 + C_2 \varepsilon + C_3 [1 - \exp(-C_4 \varepsilon)]$
Voce generalised	$\sigma(\varepsilon) = C_1 + (C_2 + C_3 \varepsilon) + [1 - \exp(-C_4 \varepsilon)]$
Bergström	$\sigma(\varepsilon) = C_1 + C_2 (C_3 (C_4 + \varepsilon)) + [1 - \exp(-C_5 (C_4 + \varepsilon))]$

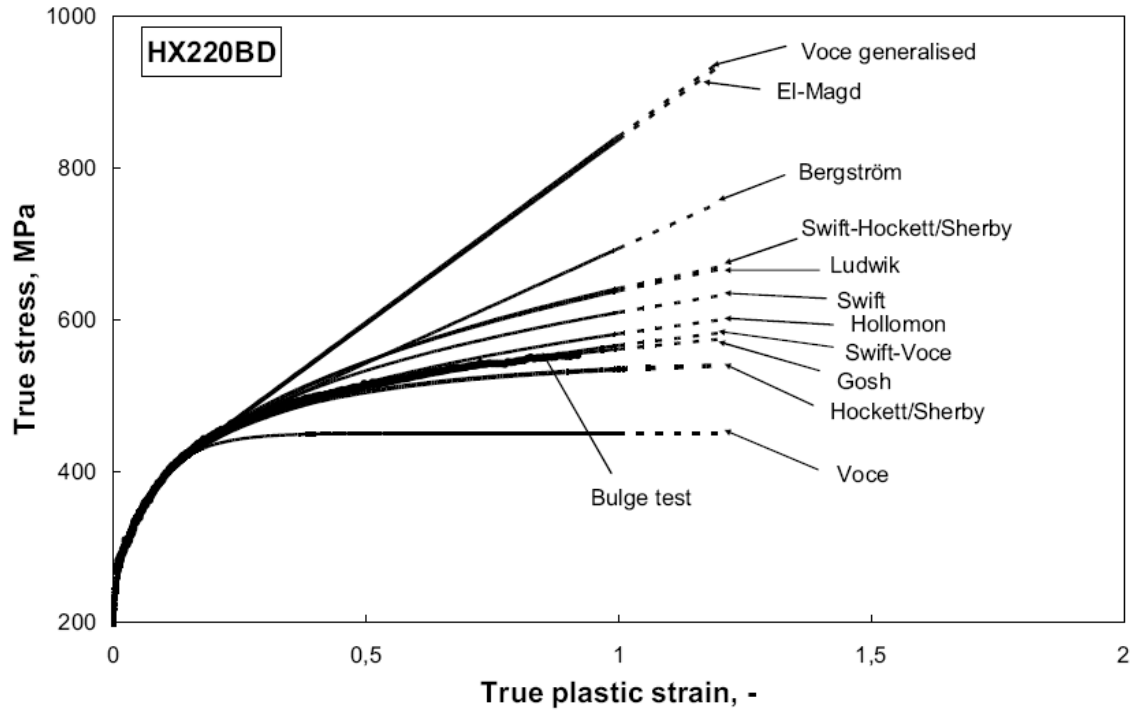


Figura A-1 Modelos de endurecimiento exponencial para acero galvanizado HX220BD, especial para embutido profundo [23].