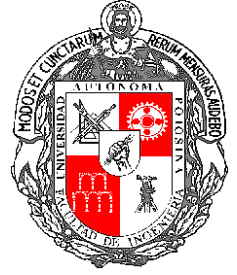




**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE  
SAN LUIS POTOSÍ  
FACULTAD DE INGENIERÍA**  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO



**ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO MECÁNICO Y  
ANISOTRÓPICO DE MATERIALES POROSOS**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA**

EN LA OPCIÓN DE:

**MECATRÓNICA Y SISTEMAS MECÁNICOS (MSM)**

PRESENTA:

**ING. EFRAÍN DE LA ROSA DÁVILA**

ASESOR:

**DR. DIRK FREDERIK DE LANGE.**

COASESOR:

**DR. HUGO IVÁN MEDELLÍN CASTILLO.**

**SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P., MEXICO, FEBRERO 2014.**





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
DE SAN LUIS POTOSÍ

11 de diciembre de 2013

**ING. EFRAÍN DE LA ROSA DÁVILA  
P R E S E N T E.**

En atención a su solicitud de Temario, presentada por los **Dres. Dirk Frederik de Lange y Hugo Iván Medellín Castillo**, Asesor y Coasesor de la Tesis que desarrollará Usted, con el objeto de obtener el Grado de **Maestría en Ingeniería Mecánica**, me es grato comunicarle que en la Sesión de Consejo Técnico Consultivo celebrada el día 11 diciembre del presente año, fue aprobado el Temario propuesto:

**TEMARIO:**

**"ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO MECÁNICO Y ANISOTRÓPICO DE MATERIALES POROSOS"**

Introducción.

- I. Estado del arte en la caracterización de materiales porosos y compuestos.
- II. Análisis teórico de materiales anisotrópicos.
- III. Desarrollo de modelos de simulación.
- IV. Análisis y discusión de resultados.

Conclusiones.

Bibliografía.

Anexos.



AÑOS DE  
**AUTONOMÍA**  
**UASLP**  
Primera Universidad  
Autónoma en México

**"MODOS ET CUNCTARUM RERUM MENSURAS AUDEBO"**

**ATENTAMENTE**



**M. I. JORGE ALBERTO PÉREZ GONZÁLEZ**  
**DIRECTOR.**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
DE SAN LUIS POTOSÍ  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIRECCION



**FACULTAD  
DE INGENIERÍA**

Av. Manuel Nava 8  
Zona Universitaria - CP 78290  
San Luis Potosí, S.L.P.  
tel. (444) 826 2330 al39  
fax (444) 826 2336  
www.uaslp.mx

\*etn.

**"90 Años de Autonomía, UASLP Primera Universidad Autónoma en México"**



## RESUMEN

Los materiales porosos, que incluyen metales, cerámicos y vidrios, son de particular importancia en aplicaciones industriales, en la química, la ingeniería mecánica, la biotecnología y la electrónica. La mayoría de estas aplicaciones exigen la existencia de porosidad abierta e interconectada, tal es el caso de filtros y membranas. Por su parte, la porosidad cerrada es útil en aplicaciones como aislantes térmicos y acústicos, y componentes estructurales de baja densidad.

La idea de combinar varios materiales para obtener un nuevo material con propiedades diferentes a los materiales originales está presente en la propia naturaleza. Sin embargo, la industria de los materiales compuestos se puede considerar como relativamente reciente; ha nacido y crecido en los últimos 50 años. Su enfoque es la obtención de propiedades superiores a las que proporcionan los materiales convencionales (madera, acero, hormigón, etc.), siguiendo los dictados de las industrias tecnológicamente más exigentes: aeronáutica, aeroespacial, automoción y deportiva. Este desarrollo de los materiales compuestos ha estado ligado a la posibilidad de fabricación de fibras de alto rigidez y resistencia mecánica: kevlar, carbono, vidrio, etc.

Un problema clásico en el campo de la Mecánica de Sólidos es el cálculo de las constantes elásticas de un material compuesto. Esta cuestión tiene importancia por sí, ya que constituye el primer paso para determinar el efecto de la microestructura (fracción volumétrica, forma y distribución espacial del refuerzo) en las propiedades mecánicas de los materiales compuestos. El presente proyecto de tesis está encaminado a desarrollar una técnica para el estudio de este tipo de materiales y obtener sus propiedades elásticas efectivas.

Para el desarrollo de este proyecto de tesis se propusieron modelos en dos y tres dimensiones de una celda porosa que se repite a lo largo de una estructura porosa. También se propusieron modelos de porosidad los cuales representan la porosidad por medio de una función de posición de sus propiedades mecánicas. De los análisis realizados se obtuvieron sus propiedades efectivas, al mismo tiempo se determinó que el error existente entre los modelos en dos dimensiones fue de 3.5% y 7.7% en los esfuerzos de Von Mises y en los modelos en tres dimensiones el error obtenido en las propiedades efectivas (módulo elástico y módulo de Poisson) fue de 0.22% y 1.1% respectivamente. Finalmente se propuso una simplificación para obtener el tensor de constantes elásticas de estos modelos concluyendo que se trata de un material ortorrómbico (ortotrópico) y se validaron los resultados obtenidos con la teoría.



# AGRADECIMIENTOS

Mi más sincero agradecimiento a:

A mis padres Griselda Dávila Huerta y Álvaro de la Rosa Rodríguez que con cariño y amor siempre me han apoyado y guiado en todo momento, han sido el motor que me impulsa a lograr mis metas.

A mi asesor y co-asesor de tesis Dr. Dirk Frederik de Lange y Dr. Hugo Iván Medellín Castillo por su asesoría, por todo su tiempo que con gran profesionalismo y calidad dedicaron a este trabajo de tesis, por sus comentarios y consejos para llevar por buen camino y terminación de este proyecto.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico durante mis estudios.

Al Comité Académico del Posgrado en Ingeniería Mecánica por su contribución a mi formación académica.

A la Universidad Autónoma de San Luis Potosí por haberme dado una formación integral, por brindarme los elementos necesarios para crecer como persona.





## DEDICATORIA

*A mis padres por darme los ánimos y las fuerzas, pero sobre todo su amor para poder seguir adelante.*



# CONTENIDO

RESUMEN .....	I
AGRADECIMIENTOS .....	III
DEDICATORIA.....	V
CONTENIDO.....	VII
LISTA DE FIGURAS .....	IX
LISTA DE TABLAS.....	XV
INTRODUCCIÓN .....	1
Justificación del estudio .....	2
Objetivos .....	2
Organización de la tesis.....	2
1 ESTADO DEL ARTE EN LA CARACTERIZACIÓN DE MATERIALES POROSOS Y COMPUESTOS .....	3
1.1 Materiales compuestos y su clasificación .....	3
1.2 Materiales porosos y su clasificación.....	4
1.3 Forma de describir a los materiales porosos .....	6
1.3.1 Diagramas de Voronoi.....	6
1.3.2 Modelos de homogeneización.....	8
1.3.3 Descripción de modelos de homogeneización.....	11
1.3.4 Mecánica de los panales.....	14
2 ANALISIS TEÓRICO DE MATERIALES ANISOTRÓPICOS.....	25
2.1 Anisotropía .....	25
2.2 Anisotropía y propiedades mecánicas en materiales .....	25
2.2.1 Constante elástica.....	26
2.2.2 Materiales elásticos isótropos .....	27

2.2.3	Materiales elásticos ortótropos.....	29
2.2.4	Materiales transversalmente isotrópicos.....	30
2.2.5	Tensor de constantes elásticas.....	31
2.3	Análisis de anisotropía.....	34
2.3.1	Tensor Cúbico.....	37
2.3.2	Tensor Hexagonal.....	41
2.3.3	Tensor Isotrópico.....	42
3	DESARROLLO DE MODELOS DE SIMULACIÓN.....	47
3.1	Modelos 2D.....	47
3.2	Modelos 3D.....	54
4	ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS.....	57
4.1	Rotación del estado de esfuerzo biaxial.....	57
4.2	Propiedades de los modelos.....	58
4.3	Resultados de modelos 2D.....	59
4.4	Resultados de modelos 3D.....	72
4.5	Discusión de resultados.....	85
	CONCLUSIONES.....	87
	Contribuciones.....	87
	Trabajo futuro.....	88
	BIBLIOGRAFÍA.....	89
	ANEXOS.....	91

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1-1 Ejemplo de material compuesto, en este caso de matriz elastomérica: (a) llanta automotriz, (b) pista de tartán.....	3
Figura 1-2 Representación esquemática de las diferentes morfologías de poros. ....	4
Figura 1-3 Ejemplos de materiales a) microporosa (zeolita ZSM-5), b) mesoporoso (SBA-15), y c) macroporosa (titania inversa de ópalo) [2]. ....	5
Figura 1-4 Diagrama de Voronoi de una nube puntos (en rojo) en el plano [3]. ....	7
Figura 1-5 Diagrama de Voronoi de 10 puntos aleatorios [3]. ....	7
Figura 1-6 Ramificaciones celdas de Voronoi apiladas [3]. ....	8
Figura 1-7 Sólido celular.....	12
Figura 1-8 Fracción de Volumen de células cuadradas panal de abeja [6]. ....	12
Figura 1-9 Estructura en forma de panal [6]. ....	15
Figura 1-10 Panal hexagonal regular [6]. ....	15
Figura 1-11 Panal deformado por esfuerzos normales cuando está cargado en $x_1$ y $x_2$ [6]. ....	16
Figura 1-12 Panal deformado por esfuerzo cortante.....	18
Figura 1-13- La estructura 3-dimensional de las espumas de célula abierta y cerrada, idealizada. Paredes celulares sometidas a cargas provocan momentos de flexión [6]. ....	19
Figura 1-14 La forma típica de la curva esfuerzo-deformación para una espuma [6]. ....	20

Figura 1-15 La deformación elástico-lineal de una espuma: las paredes celulares se doblan de manera que el $\delta$ deflexión a la flexión es proporcional a la fuerza F [6]....	20
Figura 1-16- El módulo de Young relativo $E/E_s$ frente a la densidad relativa, $\rho/\rho_s$ [6].....	22
Figura 1-17 La deformación no lineal de una espuma con las paredes celulares pandeadas, dando una gran deformación a un esfuerzo casi constante [6].....	23
Figura 1-18 El esfuerzo relativo en colapso elástico, $\sigma^*_{el}/E_s$ graficado contra la densidad relativa, $\rho/\rho_s$ [6].....	24
Figura 2-1 Representación de materiales isotrópicos (igual distribución en las tres direcciones) y anisotrópicos (diferente distribución en las tres direcciones).....	26
Figura 2-2 Diagramas esfuerzo-deformación unitaria, convencional y real.....	27
Figura 2-3 Material anisotrópico .....	32
Figura 2-4 Material ortorrómbico (ortotrópico, 9 constantes independientes) y Cúbico (3 constantes independientes).....	32
Figura 2-5 Hexagonal (5 constantes independientes).....	33
Figura 2-6 Isotrópico (2 constantes independientes). .....	33
Figura 2-7 Ejes y deformación del elemento a) antes de la rotación y b) después de la rotación de $180^\circ$ respecto al eje x.....	33
Figura 2-8 Rotación respecto a x, sustituyendo elementos negativos por ceros.....	34
Figura 2-9 Rotación respecto a y.....	34
Figura 2-10 Tensor para materiales ortorrómbicos .....	35
Figura 2-11 Tensor ortorrómbico rotado $45^\circ$ respecto a x. ....	35

Figura 2-12 Tensor ortorrómbico rotado $45^\circ$ respecto a y. ....	36
Figura 2-13 Tensor ortorrómbico rotado $45^\circ$ respecto a z. ....	36
Figura 2-14 Tensor ortorrómbico rotado $90^\circ$ respecto a x, se intercambian las componentes que corresponden al eje y, z y las componentes “xy” y “xz” .....	37
Figura 2-15 Tensor ortorrómbico rotado $90^\circ$ respecto a y, se intercambian las componentes que corresponden al eje x, z y las componentes “xy” y “yz” .....	37
Figura 2-16 Tensor ortorrómbico rotado $90^\circ$ respecto a z, se intercambian las componentes que corresponden al eje x, y y las componentes “xz” y “yz” .....	37
Figura 2-17 Tensor de constantes elásticas para un material cúbico.....	38
Figura 2-18 Tensor cúbico rotado $45^\circ$ respecto al eje x.....	38
Figura 2-19 Tensor cúbico rotado $45^\circ$ respecto al eje y.....	38
Figura 2-20 Tensor cúbico rotado $45^\circ$ respecto al eje z.....	39
Figura 2-21 Tensor cúbico rotado $30^\circ$ respecto a z. ....	39
Figura 2-22 Tensor tetragonal (forma 1 y 2). ....	40
Figura 2-23 Tensor cúbico rotado $60^\circ$ respecto a x. ....	40
Figura 2-24 Tensor de constantes elásticas para un material hexagonal (queda igual rotado $60^\circ$ respecto a z). ....	41
Figura 2-25 Tensor hexagonal rotado $90^\circ$ respecto a x, se intercambian componentes “y” y “z”. ....	41
Figura 2-26 Tensor hexagonal rotado $90^\circ$ respecto a y, se intercambian componentes “x” y “z”. ....	42

Figura 2-27 Tensor isotrópico.....	42
Figura 2-28 Tensor de deformación ( $\varepsilon_{kl}$ ) obtenido de Matlab .....	44
Figura 2-29 Nuevo tensor $C'_{ijkl}$ obtenido.....	45
Figura 3-1 Modelos 2D. Modelo G; huecos en la geometría y modelo F; sin huecos en la geometría pero representados por medio de una función de posición. ....	47
Figura 3-2 Transición como función escalón ancho de banda total 2(0.04) m. ....	49
Figura 3-3 Aplicación de los desplazamientos $u_i$ y $v_i$ .....	50
Figura 3-4 Aplicación de los desplazamientos $u_b$ y $v_b$ .....	51
Figura 3-5 Aplicación de las ecuaciones diferenciales (ODEs) en Comsol. ....	52
Figura 3-6 Módulo elástico de la celda porosa, sin la función de transición (cambio brusco de poro a material). ....	53
Figura 3-7 Módulo elástico de la celda porosa ( $E^*$ ) con la transición suavizada, la zona roja es la matriz (material) y las zonas azules son los poros. ....	53
Figura 3-8 Modelos en 3 dimensiones, modelo G, modelo F; huecos por medio de una función de posición. ....	54
Figura 3-9 Módulo elástico de la celda porosa ( $E^*$ ) en 3 dimensiones.....	54
Figura 3-10 Ecuaciones diferenciales (ODEs) que resultan en ( $u_i, v_i, w_i, u_b, v_b, w_b, u_f, v_f$ y $w_f$ ).....	55
Figura 4-1 Elemento sometido a esfuerzo plano [27].....	57
Figura 4-2 Modelo G y modelo F.....	59
Figura 4-3 Mallado con tamaño de elemento 0.005.....	59



Figura 4-4 Esfuerzo de Von Mises a 0°.....	60
Figura 4-5 Esfuerzo de Von Mises a 30°.....	60
Figura 4-6 Esfuerzo de Von Mises a 45°.....	61
Figura 4-7 Esfuerzo de Von Mises a 60°.....	61
Figura 4-8 Esfuerzo de Von Mises a 90°.....	62
Figura 4-9 Mallado con tamaño de elemento 0.005.....	62
Figura 4-10 Esfuerzo de Von Mises a 0° modelo F.....	63
Figura 4-11 Esfuerzo de Von Mises a 30° modelo F.....	63
Figura 4-12 Esfuerzo de Von Mises a 45° modelo F.....	64
Figura 4-13 Esfuerzo de Von Mises a 90° modelo F.....	64
Figura 4-14 Esfuerzo de Von Mises a 0° t. elemento 0.01 y transición 0.0025. ....	65
Figura 4-15 Esfuerzo de Von Mises a 45° t. elemento 0.005 y transición 0.0025. ....	67
Figura 4-16 Esfuerzo de Von Mises a 90° t. elemento 0.005 y transición 0.0025. ....	67
Figura 4-17 $\log_{10}$ del error de la deformación xx respecto a $\varphi$ .....	69
Figura 4-18 $\log_{10}$ del error de la deformación yy respecto a $\varphi$ .....	69
Figura 4-19 $\log_{10}$ del error de la deformación xy respecto a $\varphi$ .....	70
Figura 4-20 $\log_{10}$ del error de la deformación xx respecto a $\varphi$ .....	70
Figura 4-21 $\log_{10}$ del error de la deformación yy respecto a $\varphi$ .....	71
Figura 4-22 $\log_{10}$ del error de la deformación xy respecto a $\varphi$ .....	71
Figura 4-23 Mallado del modelo G en 3 dimensiones (elementos tetraédricos).....	73

Figura 4-24 Esfuerzo de Von Mises rotado 45° respecto a z. ....	73
Figura 4-25 Esfuerzo de Von Mises rotado 90° respecto a z. ....	74
Figura 4-26 Mallado del modelo F en 3 dimensiones. ....	74
Figura 4-27 Esfuerzo de Von Mises rotado 45° respecto a z. ....	75
Figura 4-28 Esfuerzo de Von Mises rotado 90° respecto a z. ....	75
Figura 4-29 Desplazamiento aplicado $u_i$ . ....	76
Figura 4-30 Desplazamiento aplicado $v_i$ . ....	77
Figura 4-31 Desplazamiento aplicado $u_b$ .....	77
Figura 4-32 Desplazamiento aplicado $v_b$ .....	78

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1-1 Densidad relativa de algunos sólidos celulares, [6]. .....	14
Tabla 1-2 Propiedades de materiales celulares [6]. .....	24
Tabla 2-1 Relaciones entre constantes elásticas (material isótropo lineal) [25]. .....	28
Tabla 4-1 Comparativa de los esfuerzos de Von Mises con $\eta = 10^{-6}$ en modelo F.....	66
Tabla 4-2 Esfuerzos máximos de Von Mises a diferentes valores de $\eta$ . .....	66
Tabla 4-3 Comparativa de esfuerzos de Von Mises (modelos 3D). .....	76
Tabla 4-4 Propiedades efectivas obtenidas de los modelos. ....	84



# INTRODUCCIÓN

Existe una gran cantidad de materiales compuestos los cuales se han utilizado durante toda la historia. De hecho, un material compuesto no es más que la resultante de la unión (heterogénea) de dos o más materiales obteniendo otro con propiedades diferentes a las de los materiales originales.

La evolución de la humanidad, desde diferentes aspectos, tanto sociales como culturales y técnicos, ha sido condicionada por el descubrimiento de nuevos materiales. Las edades de piedra, del cobre, del bronce, del hierro, constituyen etapas en la historia de la humanidad en las cuales a través del conocimiento y manejo de nuevos materiales y técnicas, permitieron al hombre desarrollar nuevas estructuras políticas y sociales gracias a esos materiales.

Aunque la fibra de vidrio es muy antigua, ésta era conocida por los egipcios, la historia de los materiales compuestos es la historia del siglo XX. En 1907, el químico belga Leo Baekeland obtuvo por primera vez una resina termoestable. Baekeland calentó y aplicó presión en un recipiente especial a un fenol y un formaldehído para obtener una resina líquida que polimerizó y tomó la forma del recipiente. A esta resina se le llamó bakelita. A lo largo de las tres primeras décadas de este siglo se van incorporando el resto de las matrices: las fenólicas, que fueron las primeras en desarrollarse industrialmente para aplicaciones de aislamiento, armamento y bisutería, poliéster, las vinil-ésteres y los epoxis.

Los materiales compuestos se desarrollan en paralelo con las matrices ya que, como se mencionó, las fibras ya eran conocidas y los tratamientos superficiales de las fibras para que tuvieran la adherencia necesaria para su combinación con las matrices no revistieron excesivas dificultades. Por lo tanto, los primeros materiales compuestos eran fibras de vidrio combinadas con matrices fenólicas y poliésteres para aplicaciones eléctricas, embarcaciones y placa ondulada.

Al contrario de lo que se pudiera pensar, el concepto de material compuesto es tan ambiguo como la naturaleza misma. Un ejemplo de ello lo tenemos en la madera, en la cual las fibras de celulosa se unen mediante una matriz de lignina. En el caso de los huesos, existen también estructuras reforzadas y rígidas con fibras. Las casas de adobe y paja constituyen otro ejemplo más de materiales compuestos.

El presente proyecto de tesis está enfocado al análisis de materiales porosos que bien pueden considerarse también como un materiales compuestos con constantes elásticas en los huecos correspondientes al aire (muy pequeñas) o en su defecto al fluido en que se encuentre inmerso el material, estudiar su comportamiento mecánico, obtener sus propiedades efectivas y determinar el tensor de constantes elásticas que lo representa.

El método de análisis desarrollado en este proyecto bien puede aplicarse a materiales compuestos considerando a los poros como otro material con sus correspondientes constantes elásticas. Aunque se aplica el estudio a una celda perteneciente a una estructura porosa, ésta se repite a lo largo de dicha estructura, por tanto es un análisis de materiales estructurados.

## **Justificación del estudio**

Los materiales porosos tienen gran importancia en diversas aplicaciones debido a que son ligeros y presentan propiedades mecánicas que los hacen interesantes como materiales estructurales de baja densidad. Aquí radica la importancia del estudio de materiales porosos, buscando entender el comportamiento de éstos e implementar una forma de análisis que describa el comportamiento mediante el desarrollo de modelos de simulación por el método del elemento finito, mediante los cuales se puedan calcular las propiedades efectivas del material.

## **Objetivos**

- Estudiar y analizar teorías existentes para predecir propiedades efectivas de materiales porosos.
- Desarrollar modelos por el método de elemento finito (MEF) para predecir el comportamiento mecánico de materiales porosos.
- Análisis de anisotropía de materiales porosos estructurados.

## **Organización de la tesis**

La tesis se organiza de la siguiente manera. En el capítulo 1 se definen los materiales compuestos y porosos así como las formas de describirlos. El capítulo 2 presenta el estudio de anisotropía. En el capítulo 3 se muestra el desarrollo de los modelos de simulación propuestos para el análisis de materiales porosos. El capítulo 4 muestran los resultados del análisis por medio de los modelos propuestos y la discusión de resultados. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo de tesis.

# 1 ESTADO DEL ARTE EN LA CARACTERIZACIÓN DE MATERIALES POROSOS Y COMPUESTOS

## 1.1 Materiales compuestos y su clasificación

Los materiales compuestos están formados por dos o más fases, con diferentes propiedades, separadas por sus correspondientes interfaces. Cuando existe una fase continua, se le denomina matriz. La fase que se añade a la matriz, que generalmente tiene unas propiedades superiores (en el sentido de las que se desean mejorar para el conjunto del material compuesto), se denomina refuerzo. Las propiedades mecánicas de los materiales compuestos formados por una matriz reforzada dependen de las propiedades mecánicas de cada fase y de las interfaces, así como de la fracción volumétrica, geometría y distribución espacial del refuerzo en el seno del material. Adicionalmente, las propiedades mecánicas de un material compuesto se ven a menudo influidas por la aparición de fenómenos de daño: rotura del refuerzo o de la matriz, decohesión a lo largo de las intercaras entre matriz y refuerzo [1].

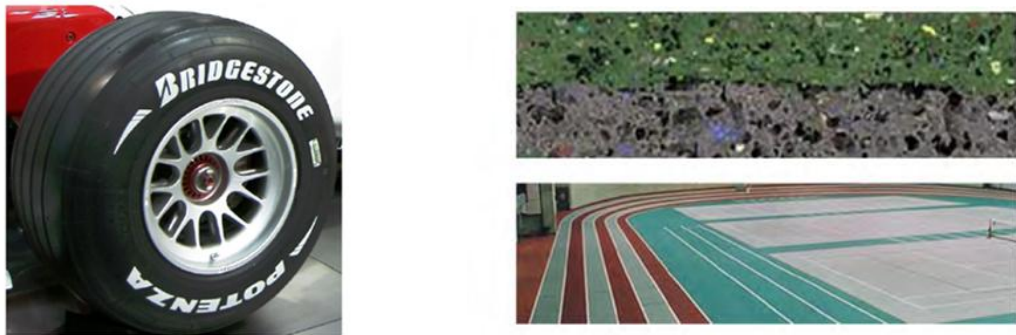


Figura 1-1 Ejemplo de material compuesto, en este caso de matriz elastomérica: (a) llanta automotriz, (b) pista de tartán.

Una primera clasificación es la que analiza el tipo de matriz, distinguiéndose los siguientes tipos:

Materiales compuestos de matriz metálica o MMC (METAL MATRIX COMPOSITES),

Materiales compuestos de matriz cerámica o CMC (CERAMIC MATRIX COMPOSITES),

Materiales compuestos de matriz de carbón

Materiales compuestos de matriz orgánica o RP (REINFORCED PLASTICS) y dentro de estos, son los más utilizados:

- Los CFRP (CARBON FIBER REINFORCED POLYMERS o materiales compuestos de fibra de carbono con matriz orgánica,
- Los GFRP (GLASS FIBER REINFORCED PLASTICS) o materiales compuestos de fibra de vidrio con matriz orgánica.

En lo que a los refuerzos se refiere, los hay de dos tipos:

- Fibras, elementos en forma de hilo en las que la relación  $L/D > 100$ ,
- Partículas arbitrarias y no orientadas, utilizadas en elementos de poca responsabilidad estructural.

Tal y como se han resaltado, los materiales compuestos más utilizados son los de matriz orgánica y refuerzos en forma de fibras.

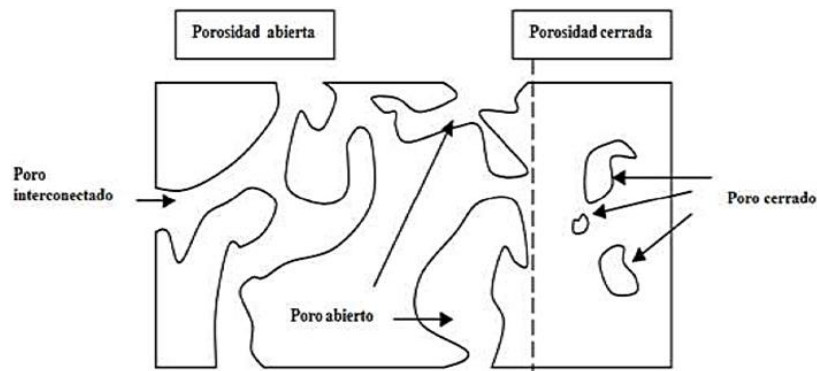
Las funciones que debe cumplir la matriz son:

- Dar estabilidad al conjunto, transfiriendo las cargas al refuerzo.
- Proteger al refuerzo del deterioro mecánico y químico.
- Evitar la propagación de grietas.

Para todo ello, se debe dar una buena adherencia entre la matriz y el refuerzo.

## 1.2 Materiales porosos y su clasificación

Un material poroso se define como un material sólido con una estructura porosa que le confiere cierta funcionalidad, ver Figura 1-2.



*Figura 1-2 Representación esquemática de las diferentes morfologías de poros.*

En general, una estructura porosa en un material da lugar a dos características esenciales: 1) La disminución de su densidad y 2) el aumento del área superficial específica.

Los materiales porosos pueden clasificarse siguiendo diferentes criterios, como: tamaño de poro, morfología de los poros, tipo de material o método de producción. Sin embargo, la clasificación por tamaño y morfología de poros es la más útil a fin de establecer las aplicaciones potenciales del material.

Los materiales porosos han sido durante mucho tiempo de interés en los campos industriales como soportes catalíticos en catálisis heterogénea, en la separación química y como adsorbentes. Muchos tipos diferentes de materiales porosos han sido usados en estas aplicaciones, que van desde carbonos a zeolitas. Por ejemplo, la



zeolita ZSM-5 se utiliza como un catalizador para la conversión de gas natural a gasolina, zeolitas A y X se utilizan en detergentes para ablandar el agua por eliminación de iones de calcio y de magnesio a través de intercambio de iones. Geles porosos de sílice se utilizan en filtración, cromatografía, y aislamiento térmico y acústico, y como desecantes. Cada uno tiene un cierto rango de uso práctico dictado por el tamaño, la forma y la selectividad de los poros en el material, y una distinta manera de preparación para producir la estructura de poro deseada. Esta diversidad de aplicaciones permite la exploración de otros campos también para el uso de materiales porosos.

Los materiales porosos se distinguen en función de sus propiedades de adsorción y se clasifican por su tamaño de poro resultante de la misma. De acuerdo con la definición de la IUPAC [2] (Norma ISO 15901-2) los sólidos porosos se dividen en 3 clases, dependiendo de su tamaño de poro (Figura 1-3):

- microporosa (con tamaños de poro  $< 2$  nm),
- mesoporoso (2-50 nm), y
- Los materiales macroporosos ( $> 50$  nm).

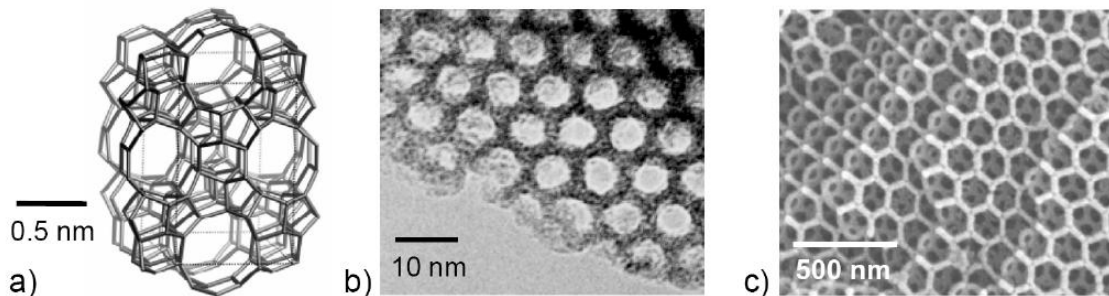


Figura 1-3 Ejemplos de materiales a) microporosa (zeolita ZSM-5), b) mesoporoso (SBA-15), y c) macroporosa (titania inversa de ópalo) [2].

Los materiales más utilizados son las zeolitas microporosas con geometrías de poros bien definidos. Las zeolitas son aluminosilicatos cristalinos con 133 marcos conocidos. Los poros están altamente monodispersos y tienen una direccionalidad fija dentro del cristal. Los poros en estos sistemas tienen a menudo un carácter de jaulas y tubos de conexión. La uniformidad de los canales en sistemas zeolíticos significa que son extremadamente adsorbentes, selectivos para moléculas pequeñas de geometrías particulares y tamaños y así, que los soportes catalíticos son altamente selectivos y adsorbentes. Debido a los tamaños de poro comparables a las de las moléculas, las zeolitas también se denominan tamices moleculares. Otros compuestos relacionados por lo general poseen estructuras similares con composiciones de marco diferentes, tales como fosfatos de aluminio  $AlPO_4$ . Una aplicación óptica de tamices moleculares es su uso como materiales de fotos conmutables. Aquí, se encontró que la isomerización foto-inducida trans-cis de azobenceno en tamices moleculares conduce al cambio de la birrefringencia después de la irradiación.

La estrecha gama de tamaños de poros disponibles y las relativamente pequeñas dimensiones de sección transversal de los poros restringen el tamaño de las moléculas

que pueden entrar en los poros para acceder a los sitios catalíticos o de adsorción. Esto limita su uso en aplicaciones que implican grandes moléculas orgánicas. El aumentar tamaños de poro es una medida especialmente necesaria para el craqueo de petróleo pesado y la conversión catalítica de moléculas grandes, medios de separación, o como una serie de voluminosas especies moleculares.

El rango de los materiales mesoporosos es poroso, como el prefijo griego meso indica, entre micro y macroporos. Materiales de silicato con poros en este rango incluyen vidrio Vycor, geles de sílice, los aerogeles (secado supercrítico de geles húmedos), xerogeles (geles secados al aire) y diversos tipos de membranas grabadas. Los geles porosos de sílice se preparan generalmente mediante métodos sol-gel, en el que las especies moleculares o silicato coloidal se dispersan en un disolvente y luego forman un gel. El resultado de la formación del gel tras la evaporación de disolvente y la condensación de sílice es la formación de poros.

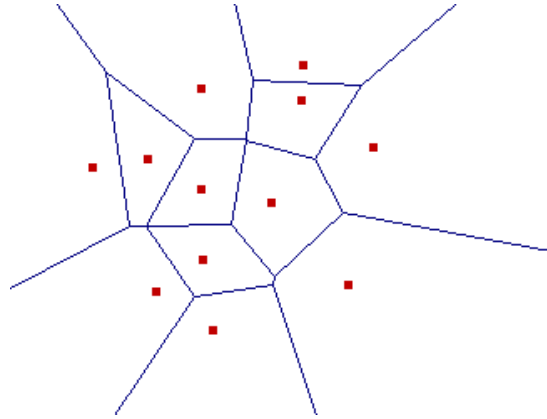
Otros materiales mesoporosos incluyen materiales estratificados modificados, tales como pilares, arcillas esmécticas y capas de hidróxidos dobles, así como vidrios porosos, que consisten en un sistema bicontinuo de poros. Los materiales mesoporosos pueden tener diferentes morfologías como partículas, membranas, monolitos, fibras y películas delgadas.

## 1.3 Forma de describir a los materiales porosos

### 1.3.1 Diagramas de Voronoi

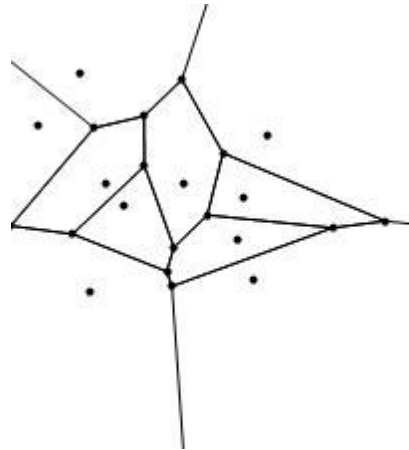
Los diagramas de Voronoi [3] son una de las estructuras fundamentales dentro de la geometría computacional, que de alguna forma almacenan toda la información referente a la proximidad entre puntos. Son numerosas sus aplicaciones.

La idea del diagrama de Voronoi se basa fundamentalmente en la proximidad. Se supone dado un conjunto finito de puntos en el plano  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  (con  $n$  mayor o igual que dos) y a cada  $p_i$  le asociamos aquellos puntos del plano que están más cerca o igual suya que de cualquier otro de los  $p_i$  con  $i$  distinto de  $j$ . Todo punto del plano queda así asociado a algún  $p_i$ , formándose conjuntos que recubren a éste. Existirán puntos que disten lo mismo de dos elementos de  $P$  y que formarán la frontera de cada región. Los conjuntos resultantes forman una teselación del plano, en el sentido de que son exhaustivos (todo punto del plano pertenece a alguno de ellos) y mutuamente excluyentes salvo en su frontera. Se llama a esta teselación *Diagrama de Voronoi* plano (denotado  $Vor(P)$ ). A cada una de las regiones resultantes se le denominará *regiones de Voronoi* o *polígonos de Voronoi* (denotado  $Vor(p_i)$ ). Los puntos del conjunto reciben el nombre de *generadores* del diagrama.



*Figura 1-4 Diagrama de Voronoi de una nube puntos (en rojo) en el plano [3].*

Para definir un diagrama de Voronoi lo primero que hace falta es un conjunto de puntos; las regiones de Voronoi de un conjunto de puntos son las regiones que están más cerca a uno de los puntos que a cualquiera de los otros puntos. Por ejemplo, si se tuvieran solo 2 puntos en el plano euclídeo en 2 dimensiones, entonces la recta equidistante a los 2 puntos estaría limitando cada una de las regiones. A continuación se presenta un ejemplo un poco más complicado Figura 1-5.



*Figura 1-5 Diagrama de Voronoi de 10 puntos aleatorios [3].*

Se puede comprobar que el segmento de línea que separa 2 regiones es un segmento equidistante a 2 puntos y los vértices son equidistantes a 3 puntos (esto se da en el caso en el que no haya degeneración, como cuando los puntos se eligen aleatoriamente; de forma manual se puede conseguir que se cumplan otras relaciones, pero lo que nos va a interesar por ahora son los casos sin degeneraciones).

El modelado de 2D a 3D por diagramas de Voronoi parte del diagrama de Voronoi ordinario para obtener patrones básicos de punto y los patrones básicos de teselación. El atributo de cada punto de generación se define para ser sólido o vacío. Cada celda de Voronoi se define para tener el mismo atributo que su punto de generación asociado. Es decir, una célula sólida se define como una célula de Voronoi asociada con un punto sólido. También, una célula de vacío se define como una celda de Voronoi asociado con un punto vacío. Las células conectadas se consideran como una región. Es así como se genera una estructura porosa a partir de los diagramas de Voronoi.

Para describir una estructura 3D, se apilan capas para formar la estructura como se muestra en la Figura 1-6.

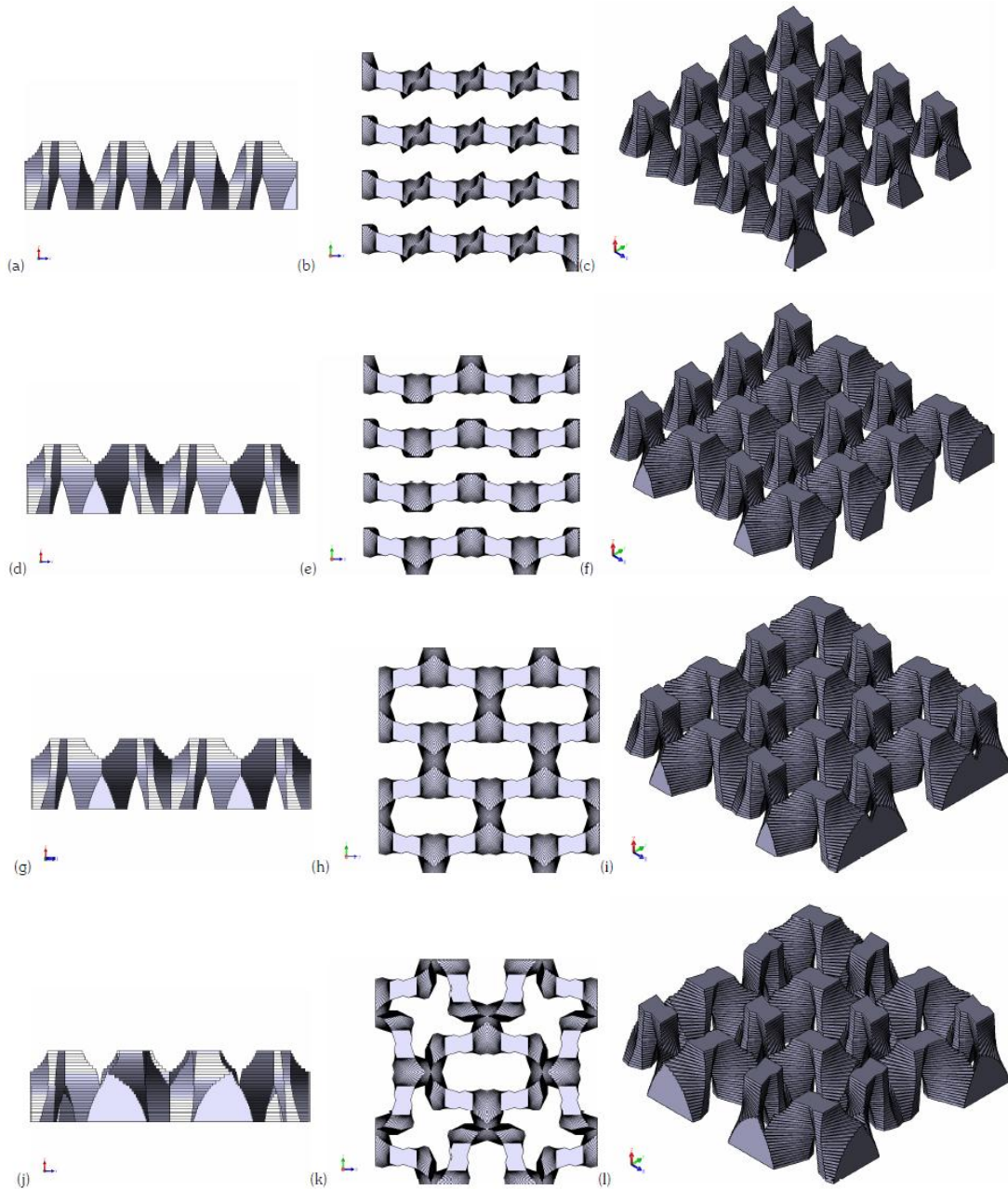


Figura 1-6 Ramificaciones celdas de Voronoi apiladas [3].

### 1.3.2 Modelos de homogeneización

Las propiedades básicas de la incertidumbre microestructural consideradas son la geometría de la microestructura y la orientación, la densidad relativa local y la

distribución local de tamaño de poro. Una de las principales desventajas es, en muchos casos, su microestructura muy desordenada. La incertidumbre de la geometría y la topología de la microestructura conducen a distintas incertidumbres en la respuesta del material macroscópico.

En los trabajos reportados en literatura, por razones de eficiencia numérica, el análisis numérico parcial o total de los componentes estructurales de los materiales celulares se realiza preferiblemente en términos de propiedades promedio “efectivas” en lugar de modelos detallados de la microestructura.

Las propiedades efectivas pueden determinarse experimentalmente o numéricamente, por medio de un análisis de homogeneización. El modelo más simple es solo indicar la razón volumétrica de los poros, sin nada más de información. El problema que presenta éste es la falta de información y características de los materiales como son, entre otras, el tamaño del poro, la forma, la distribución de tamaños y de posición y en caso que existe una orientación particular del poro o en la posición relativa entre poros, también la característica con respecto a esta orientación. Para mejorar esto se hace un análisis probabilístico, aunque estos modelos en general se toman en cuenta para la mayoría de los efectos microestructurales esenciales y, por tanto, obtener estimaciones fiables de las propiedades efectivas promedio del material, no son capaces de recuperar cualquier efecto de desorden y la incertidumbre resultante en la respuesta del material macroscópico. El análisis de estos tipos de efectos requiere la aplicación de enfoques estocásticos (no determinísticos).

Desde el estudio pionero de Gante y Thomas [4], se publicaron numerosos estudios sobre la determinación teórica y numérica de las propiedades efectivas de espumas sólidas y otros medios porosos. La mayoría de los estudios disponibles se basan en modelos idealizados periódicos para la estructura porosa, como el conocido Kelvin tetrakaidecahedro (Thomson y Kelvin, [5]), el ladrillo de espuma como modelo poroso empleado por Gibson y Ashby [6] o el modelo dodecaedro pentagonal propuesto por Christensen [7]. En un estudio más reciente, Weaire y Phelan [8] propusieron un modelo periódico de ocho celdas, que supera a la clásica espuma de Kelvin con respecto al criterio de optimalidad energético de Kelvin.

Para el estudio analítico y numérico de las propiedades efectivas de los materiales, los modelos idealizados de espuma tienen la ventaja de requerir sólo esfuerzo numérico limitado ya que es sólo una única célula o como en el caso del modelo Weaire y Phelan [8] un pequeño número de las células tiene que ser analizado. Por otro lado, aunque estos modelos en general se toman en cuenta para la mayoría de los efectos microestructurales esenciales y, por tanto obtener estimaciones fiables de las propiedades del material efectivas promedio, no son capaces de recuperar cualquier efecto de desorden y la incertidumbre resultante en la respuesta del material macroscópico. El análisis de estos tipos de efectos requiere la aplicación de enfoques estocásticos (Huysse y Maes, [9]).

Aunque los métodos estocásticos están bien establecidas en las investigaciones experimentales sobre la respuesta del material (por ejemplo Blazy, et al, [10]; Ramamurty y Paul, [11], todavía no son ampliamente establecidos en investigaciones

teóricas y numéricas. La mayoría de los estudios numéricos disponibles relacionados con los efectos del trastorno se basa en un análisis único o repetido de un elemento representativo a gran escala de volumen con un gran número de células, generado por un proceso Voronoi o método similar para la división aleatoria de espacio. Roberts y Garboczi [12] y Shulmeister et al. [13], así como van der Burg et al. [14] encontraron una dispersión fuerte de las propiedades efectivas de los materiales.

En un estudio reciente realizado por los autores Hardenacke y Hohe [15] sobre los efectos de la incertidumbre en dos dimensiones, una técnica submodelo se ha propuesto, en donde los subconjuntos de un elemento representativo de gran escala de volumen se emplean como elementos de volumen de “prueba”. Aplicando el procedimiento de homogeneización de los elementos de prueba, se obtiene una base de datos para el rango posible de las propiedades efectivas las cuales se evalúan por métodos estocásticos para determinar sus distribuciones de probabilidad. Como una alternativa, se ha propuesto el uso de modelos probabilísticos directos. En este contexto, Fortes y Ashby [16] emplean un modelo basado en la respuesta estructural de una sola célula puntal y las probabilidades de su orientación espacial. Un modelo más sofisticado basado en una mejora de las fórmulas de la estocástica determinista (Gibson y Ashby, [6]) para las propiedades efectivas de la espuma, ha sido proporcionada por Schraad y Harlow [17]. Otros enfoques de este tipo son por ejemplo el esquema propuesto por Taylor Cuitiño y Zheng [18]

Para el análisis numérico de los grandes elementos representativos de volumen, los resultados de Van der Burg et al. [14], así como Kanaun y Tkachenko [19] indican que el tamaño necesario de volumen de elemento representativo podría ser bastante grande, con el fin de ser estadísticamente representativa, requiriendo el número de células en el orden de 1000 y más allá. Dado que el análisis numérico de las microestructuras de este tipo requiere de un esfuerzo bastante grande, homogeneizar sobre la base de experimentos numéricos repetidos en los pequeños elementos de volumen de pruebas con microestructura aleatoria es una alternativa prometedora. Enfoques de este tipo han sido utilizados por Gan y col. [20], Li et al. [21], Zhu et al. [22], y Zhu y Windle [23]. Todos ellos se basan en simulaciones de tipo Monte Carlo, donde todas las microestructuras analizadas en los experimentos numéricos son de igual probabilidad. A pesar de su simplicidad, los enfoques directos de Monte Carlo tienen la desventaja de requerir un número bastante grande de experimentos numéricos con el fin de obtener resultados estadísticamente fiables, no sólo para la media y la varianza de la propiedad efectiva, como se considera en la mayoría de los estudios mencionados, sino también para los extremos superior e inferior de las distribuciones de probabilidad correspondientes.

Se considera un pequeño número de elementos a media escala de volumen de ensayo para la microestructura. Su microestructura se supone que se define por un número de variables inciertas tales como la densidad (local) relativa, la varianza en la distribución del tamaño de poro o la orientación del elemento de volumen de pruebas en el espacio tridimensional. En contraste con las mencionadas simulaciones directas de Montecarlo, se analizan casos pre-seleccionados de la microestructura en términos de conjuntos predefinidos de las variables inciertas, de tal forma que cubren toda la gama de posibles casos microestructurales.

Los resultados de los análisis de ensayo individuales de volumen de elemento son evaluados por los métodos estocásticos, considerando la probabilidad no uniforme de

ocurrencia de las microestructuras analizadas. En este contexto, el enfoque se extiende al análisis de tres micro dimensiones junto con un análisis estocástico refinado en cuanto a las distribuciones de probabilidad completa de las propiedades efectivas, en lugar de los parámetros estocásticos básicos por sí solos. El análisis de los casos pre-seleccionados, a través de los rangos pertinentes de los parámetros esenciales, empleados en el estudio anterior (en lugar de la simulación directa Montecarlo), requieren en general, un menor número de simulaciones y proporciona así una mayor eficiencia numérica, especialmente para la evaluación de los extremos superior e inferior de las distribuciones de probabilidad de las propiedades efectivas.

Los modelos de homogeneización para materiales compuestos tratan de determinar el comportamiento efectivo de materiales compuestos en función de las propiedades de cada una de las fases y de su distribución espacial dentro del material. Este problema no está perfectamente resuelto si una o varias fases del material compuesto presentan un comportamiento elastomérico. Ello es debido a las dificultades matemáticas asociadas a la no linealidad de los elastómeros y a la evolución de la microestructura del material compuesto durante la deformación, como resultado de los cambios geométricos.

La incertidumbre de la geometría y la topología de la microestructura conducen a incertidumbres distintas en la respuesta del material macroscópico.

### 1.3.3 Descripción de modelos de homogeneización

Puesto que la gran mayoría de los estudios actuales que existen acerca del estudio y descripción de los materiales porosos hacen referencia a los trabajos realizados por Gibson y Ashby [6], estos mismos aportes son los que se mencionan a continuación.

Los sólidos celulares son descritos por la estructura geométrica de las células, que es a la vez forma y el tamaño de las células y la forma en que las células se distribuyen. Las espumas son sólidos celulares tridimensionales y son más complejas que las estructuras de dos dimensiones, como nido de abeja-estructuras. Pero, mediante el estudio de las estructuras en dos dimensiones, se tiene como base para la comprensión de estructuras tridimensionales más difíciles y complejas de espumas.

Una de las características más importantes de un sólido celular es lo que se llama densidad relativa, definida por

$$\rho = \frac{\rho^*}{\rho_o} \quad (1-1)$$

donde  $\rho^*$  y  $\rho_o$  son respectivamente la densidad aparente del material celular y del material de lo que están compuestas las paredes celulares. Cuando aumenta la densidad relativa, la pared de la célula se hace más gruesa. La densidad relativa del material exterior es la misma que la fracción de volumen del material exterior,  $v_o$ , definido por

$$v_o = \frac{\text{volumen de material exterior (m}^3\text{)}}{\text{volumen de espuma (m}^3\text{)}} = \frac{V_o}{V^*} \quad (1-2)$$

(véase la Figura 1-7). Para ver esto, se observa que la densidad de la espuma

$$\rho^* = \frac{\text{masa de la espuma kg}}{\text{volumen de la espuma (m}^3\text{)}} = \frac{m^*}{V^*} \quad (1-3)$$

y la densidad del material externo conectado:

$$\rho_o = \frac{\text{masa del exterior kg}}{\text{volumen del exterior (m}^3\text{)}} = \frac{m_o}{V_o} \quad (1-4)$$

Para el caso en que el material interior en la Figura 1-7 y Figura 1-8 es aire, se tiene que:

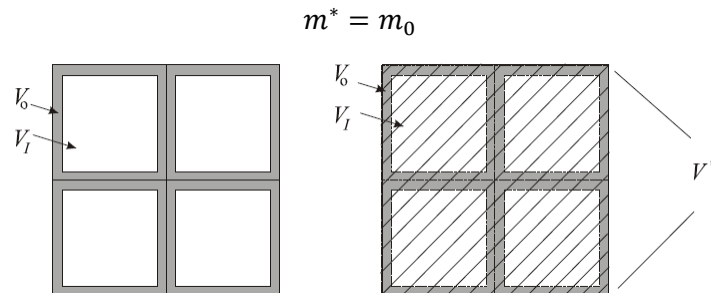


Figura 1-7 Sólido celular.

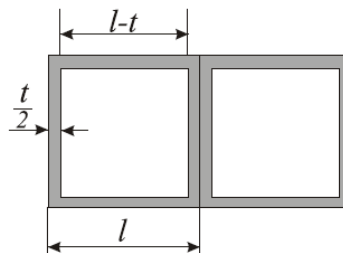


Figura 1-8 Fracción de Volumen de células cuadradas panal de abeja [6].

Por lo tanto, la fracción de volumen del material externo:



$$v_o = \frac{V_o}{V^*} = \frac{\frac{m_o}{\rho_o}}{\frac{m^*}{\rho^*}} = \frac{\frac{m^*}{\rho_o}}{\frac{m^*}{\rho^*}} = \frac{\rho^*}{\rho_o} \quad (1-5)$$

Además, la fracción de volumen del material interior:

$$v_I = \frac{\text{volumen de material interior (m}^3\text{)}}{\text{volumen de espuma (m}^3\text{)}} = \frac{V_I}{V^*} \quad (1-6)$$

Notar también que:

$$v_o = \frac{V_o}{V^*} = \frac{V^* - V_I}{V^*} = 1 - \frac{V_I}{V^*} = 1 - v_I \quad (1-7)$$

Cuando las células son paneles cuadrados, (Figura 1-8), las fracciones de volumen también se puede expresar en los términos de lado  $l$  longitud y de espesor de pared  $t$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} v_o = 1 - v_I &= 1 - \frac{(l-t)^2}{l^2} = 1 - \left(1 - \left(\frac{t}{l}\right)\right)^2 = 1 - \left(1 - 2\left(\frac{t}{l}\right) + \left(\frac{t}{l}\right)^2\right) \\ &= 2\left(\frac{t}{l}\right) - \left(\frac{t}{l}\right)^2 \end{aligned} \quad (1-8)$$

es decir, aproximadamente  $2(t/l)$  para valores pequeños de  $t/l$ . Para una estructura de celda cerrada, la densidad relativa  $\rho^*/\rho_o$  se puede escribir como

$$\frac{\rho^*}{\rho_o} = v_o = 2\left(\frac{t}{l}\right) \quad (1-9)$$

Si la densidad relativa ( $v_o = \rho^*/\rho_o$ ) es grande, digamos  $v_o > 0,3$ , la estructura se verá más como un material sólido con poros aislados que una estructura celular. Gibson y Ashby [8] se refieren a materiales con una densidad relativa inferior a 0,3 como verdaderos sólidos celulares. A lo largo se supone una densidad baja, de modo que

$t \ll l$  (espesor de pared  $\ll$  longitud de pared), ver la Figura 1-8 todas las paredes tienen el mismo espesor. La teoría de la viga simple es válida sólo cuando  $t/l < 1/4$ . Algunos ejemplos de la densidad relativa de algunos sólidos celulares se dan en la Tabla 1-1.

Material	$\rho$
Espumas especiales de ultra-baja densidad	0,001
Las espumas poliméricas (envasado y aislamiento)	0,05 - 0,20
Corcho	0,14
Maderas blandas	0,15 - 0,40

Tabla 1-1 Densidad relativa de algunos sólidos celulares, [6].

De la misma manera se define la relación de módulo de Young como:

$$E = \frac{E^*}{E_o} \quad (1-10)$$

Donde  $E^*$  y  $E_o$  son los módulos de Young del material celular y material sólido.

Con esta relación se puede observar cómo se afecta el módulo elástico del material con la presencia de poros.

### 1.3.4 Mecánica de los panales

Cuando se utilizan panales en estructuras sometidas a carga, es importante entender el comportamiento mecánico de estas estructuras de dos dimensiones, como se ilustra en forma de panal hexagonal estructuras en la Figura 1-9.

Además, muchos sólidos tridimensionales celulares (por ejemplo madera), que normalmente son demasiado complejos para ser tratados, pueden ser idealizados y analizados como estructuras de panal.

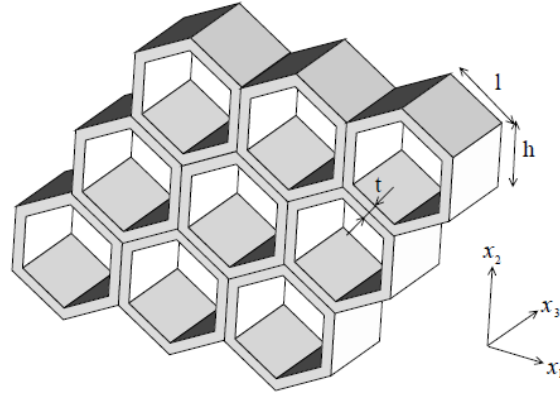


Figura 1-9 Estructura en forma de panal [6].

### 1.3.4.1 Deformación elástica lineal

Si el panal hexagonal es regular (todos los ángulos  $\theta$  son  $30^\circ$ ,  $h = l$  y espesores de pared son iguales como muestra la Figura 1-10), entonces las propiedades en el plano son isotrópicas. Esto significa que las propiedades en el plano del panal pueden ser descritas con sólo dos módulos de elasticidad independientes, por ejemplo por el módulo de Young  $E^*$  y un módulo de corte  $G^*$ . La notación  $*$  significa el valor efectivo. Si el panal no es regular, las propiedades en el plano, se describe con cuatro módulos (por ejemplo,  $E_1^*$ ,  $E_2^*$ ,  $G_{12}^*$ , y  $\nu_{12}^*$ ). Aquí,  $\nu$  es la relación de Poisson. Si el panal, en general hexagonal (célula arbitraria ángulo de pared  $\theta$ ), tiene una baja densidad relativa,  $\rho^*/\rho_o$  ( $t/l$  es pequeño), se tiene que.

$$\frac{\rho^*}{\rho_o} \approx \frac{\frac{t}{l} \left( \frac{h}{l} + 2 \right)}{2 \cos \theta \left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right)} \quad (1-11)$$

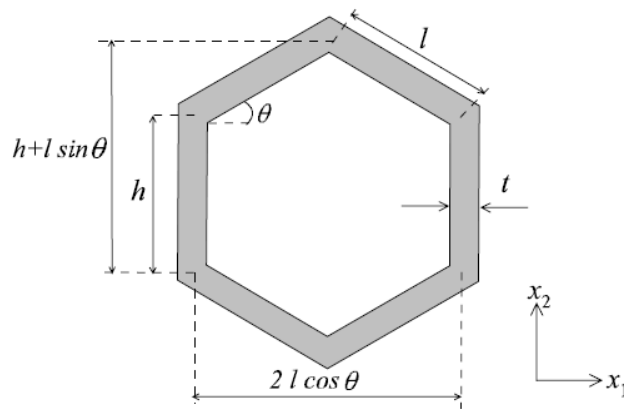


Figura 1-10 Panal hexagonal regular [6].

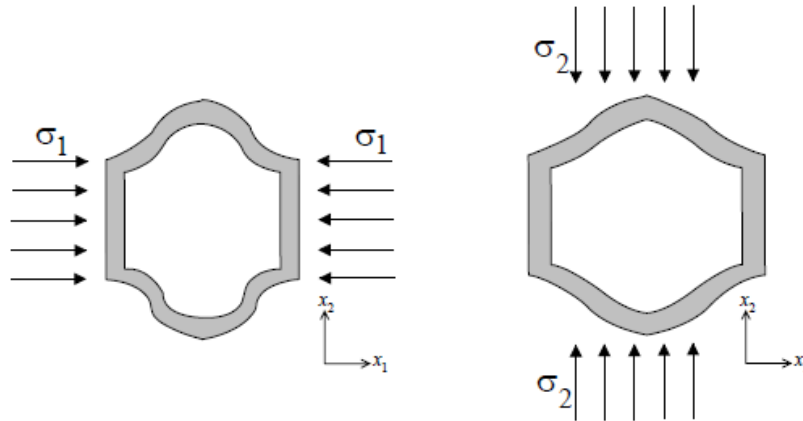


Figura 1-11 Panel deformado por esfuerzos normales cuando está cargado en  $x_1$  y  $x_2$  [6].

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} \approx \frac{\frac{t}{l} \left( \frac{h}{l} + 2 \right)}{2 \cos \theta \left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right)} \left( \frac{1}{l^2} \right) = \frac{t}{l} \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (1-12)$$

que se mantiene cuando las deformaciones son menos de 20% o  $t/l$  es pequeño.

La estructura, cuando se carga en la dirección  $x_1$  o  $x_2$  (ver Figura 1-9), se doblan las paredes de las células y se describe por cinco constantes elásticas: dos módulos de Young  $E^*_1$  y  $E^*_2$ , relación de un módulo de corte  $G^*_{12}$  y dos de Poisson  $\nu^*_{12}$  y  $\nu^*_{21}$ . La relación recíproca (según Ashby):

$$E^*_1 \nu^*_{21} = E^*_2 \nu^*_{12} \quad (1-13)$$

donde  $\nu^*_{12}$  es la relación negativa de la deformación en la dirección  $x_2$  que, en la dirección  $x_1$  para la carga normal en la dirección  $x_1$ , reducen las cinco constantes independientes a cuatro constantes independientes.

$$\frac{\nu^*_{21}}{E^*_1} = \frac{\nu^*_{12}}{E^*_2} \quad (1-14)$$

que da,

$$E^*_2 \nu^*_{21} = E^*_1 \nu^*_{12} \quad (1-15)$$

Cuando se carga en la dirección  $x_1$  o  $x_2$ , respectivamente, los cuatro módulos independientes se describen como:

$$\frac{E_1^*}{E_o} = \left(\frac{t}{l}\right)^3 \frac{\cos \theta}{\left(\frac{h}{l} + \sin \theta\right) \sin^2 \theta} \quad (1-16)$$

$$\frac{E_2^*}{E_o} = \left(\frac{t}{l}\right)^3 \frac{\left(\frac{h}{l} + \sin \theta\right)}{\cos^3 \theta} \quad (1-17)$$

$$\nu_{12}^* = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\cos^2 \theta}{\left(\frac{h}{l} + \sin \theta\right) \sin \theta} \quad (1-18)$$

$$\nu_{21}^* = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\left(\frac{h}{l} + \sin \theta\right) \sin \theta}{\cos^2 \theta} \quad (1-19)$$

Para panales hexagonales regulares, los dos módulos de Young se reducen a:

$$\frac{E_1^*}{E_o} = \frac{E_2^*}{E_o} = 2.3 \left(\frac{t}{l}\right)^3 \quad (1-20)$$

y los dos módulos de Poisson se reducen a  $\nu_{12}^* = \nu_{21}^* = 1$ .

El panal expuesto a un esfuerzo de corte se muestra en la Figura 1-12. Es posible mostrar que el módulo de corte  $G_{12}^*$  está dado por:

$$\frac{G_{12}^*}{E_o} = \left(\frac{t}{l}\right)^3 \frac{\left(\frac{h}{l} + \sin \theta\right)}{\left(\frac{h}{l}\right)^2 \left(1 + \frac{2h}{l}\right) \cos \theta} \quad (1-21)$$

que para panales regulares se reduce a

$$\frac{G_{12}^*}{E_o} = 0.57 \left( \frac{t}{l} \right)^3 = \frac{1}{4} \frac{E_1^*}{E_o} \quad (1-22)$$

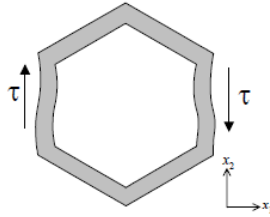


Figura 1-12 Panal deformado por esfuerzo cortante.

que correctamente obedece a la relación;

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1-23)$$

para sólidos isotrópicos.

#### 1.3.4.2 Análisis tridimensional

En el análisis, la estructura tridimensional de una espuma se ha idealizado, sin pérdida de características físicas de importancia, por medio de los modelos que se muestran en la Figura 1-13.

La espuma de células abiertas se modela como una matriz cúbica de los miembros de longitud  $l$  y de sección cuadrada de  $t$  secundarios. Células contiguas se escalonan de modo que los miembros se reúnen en la mitad de los puntos. La densidad relativa de la celda,  $\rho/\rho_s$  (donde  $\rho_s$ , anteriormente llamado  $\rho_o$ , es la densidad del material de la pared celular) está dado por:

$$\frac{\rho}{\rho_s} \propto \left( \frac{t}{l} \right)^2 \quad (1-24)$$

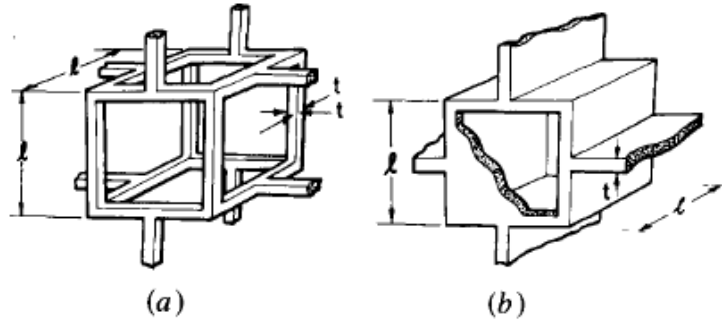


Figura 1-13- La estructura 3-dimensional de las espumas de célula abierta y cerrada, idealizada. Paredes celulares sometidas a cargas provocan momentos de flexión [6].

El momento de inercia está dado por:

$$I = \frac{t^4}{12} \quad (1-25)$$

Una espuma de célula cerrada se modela de manera similar. Los puntales cuadrados se sustituyen por placas cuadradas de lado  $L$  y espesor  $t$ .

$$\frac{\rho}{\rho_s} = \frac{t}{l} \quad (1-26)$$

$$I = \frac{lt^3}{12} \quad (1-27)$$

Como se señaló anteriormente, la mayoría de las espumas se comportan más como el primer modelo, porque la tensión superficial concentra el material en los bordes de la celda durante su fabricación. Esta propiedad se usará como base de los cálculos que figuran a continuación, que tratan las espumas de materiales isotrópicos.

#### 1.3.4.3 Propiedades Mecánicas

Cuando una espuma se comprime, la curva de tensión-deformación muestra tres regiones (Figura 1-14). En bajas deformaciones, la espuma se deforma de una manera lineal-elástica, luego hay una meseta de deformación a esfuerzo casi constante, y, finalmente, existe una región de densificación cuando las paredes celulares aplastadas se juntan. La extensión de cada región depende de la densidad relativa. Espumas

elásticas, espumas de plástico, y espumas incluso quebradizas todas tienen tres partes curvas esfuerzo-deformación de este tipo, aunque el mecanismo causante de la meseta es diferente en cada caso. La deformación de una espuma regular, de dos dimensiones como la que aparece en la Figura 1-15, se puede analizar con precisión.

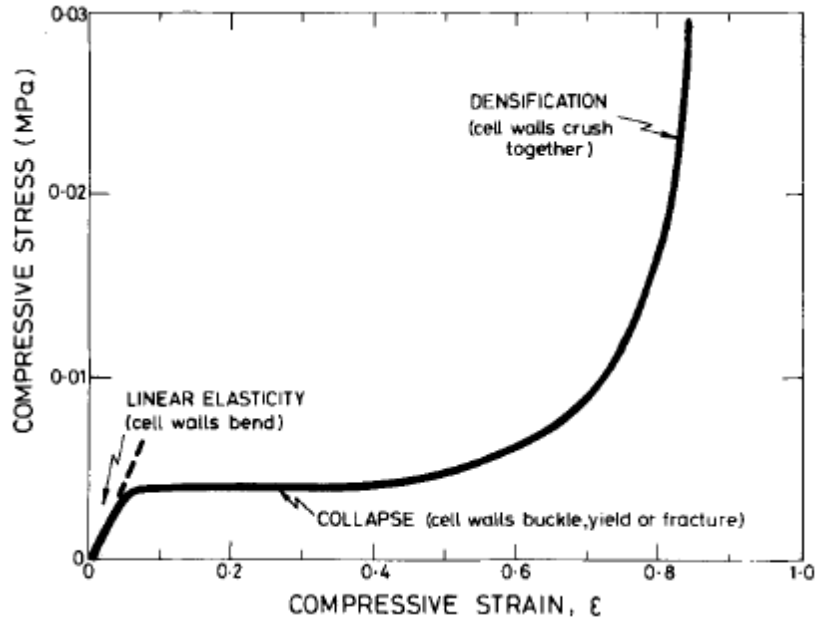


Figura 1-14 La forma típica de la curva esfuerzo-deformación para una espuma [6].

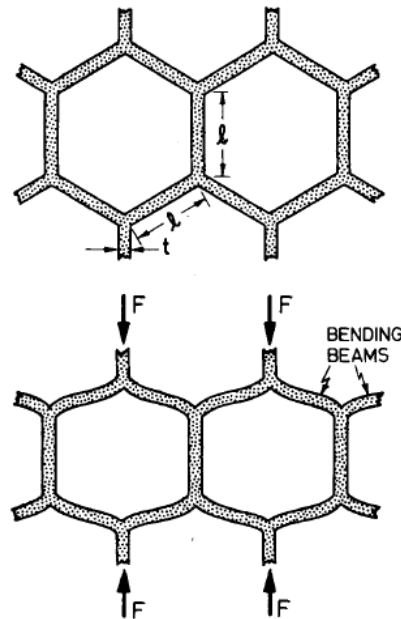


Figura 1-15 La deformación elástico-lineal de una espuma: las paredes celulares se doblan de manera que el  $\delta$  deflexión a la flexión es proporcional a la fuerza  $F$  [6].



Es mucho más difícil de hacer el mismo análisis para una espuma tridimensional, ya que la respuesta es un promedio de las paredes celulares de orientación aleatoria en el espacio, y con una distribución de longitud de la sección  $l$  y  $t^2$ . Es mejor utilizar el argumento dimensional y luego confiar en un experimento para determinar la constante única, desconocida de proporcionalidad.

A continuación se analizan algunas propiedades de las espumas.

#### 1.3.4.4 Propiedades Elásticas Lineales

Cuando se carga una espuma, las paredes celulares están en flexión, Figura 1-15, para el modelo de dos dimensiones; la misma deformación por flexión se produce en espumas tridimensionales. Una fuerza  $F$  aplicada, tal como se muestra, hace que las vigas no verticales se flexionen por  $\delta$ , que se calcula a partir de la teoría de viga simple como:

$$\delta = \frac{C_1 F l^3}{12 E_s I} \quad (1-28)$$

Aquí  $C_1$  es el factor de resolución que depende sólo de la geometría de la célula, y  $E_s$  es el módulo de Young del material de la pared celular sólida. Para la espuma de célula abierta de la Figura 1-13(a), el esfuerzo es proporcional a  $(F/l^2)$  la deformación de  $\delta/l$ . El segundo momento del área  $I$  es proporcional a  $t^4$  da:

$$E \propto E_s \frac{t^4}{l^4} \quad (1-29)$$

Usando (1-24) para la densidad, se llega a:

$$\frac{E}{E_s} = C_2 \left( \frac{\rho}{\rho_s} \right)^2 \quad (1-30)$$

donde  $C_2$  es una constante. Las escalas de módulo de corte, de una manera similar debido a deformación de corte en una espuma, también causa flexión simple en las paredes celulares.

Los datos se comparan con (1-30). En la Figura 1-16 se muestran módulos de Young para espumas poliméricas y de cerámica, en escalas logarítmicas. La línea completa es una representación gráfica de (1-30) con  $C_2 = 1$ , da una buena descripción.

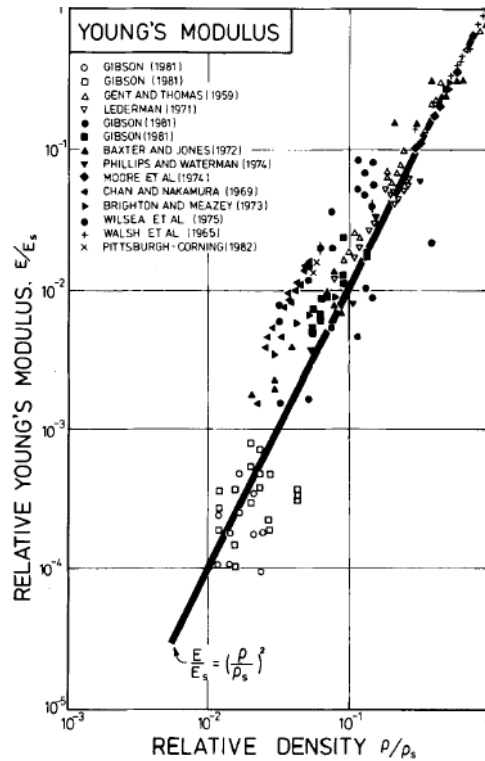


Figura 1-16- El módulo de Young relativo  $E/E_s$  frente a la densidad relativa,  $\rho/\rho_s$  [6].

Los símbolos abiertos representan espumas de células abiertas de polímero; símbolos sombreados representan células cerradas de espumas de polímero; cruces son de cerámica y espumas de vidrio. (Las referencias, en orden, son: 1, 5, 8, 11, 17; normalización de las constantes en la Tabla 1-2.) [6].

Se observa que el módulo cae rápidamente a medida que el volumen de espacio vacío en la espuma aumenta. El rango de módulos disponibles en la práctica por la formación de espuma es grande: que se extiende por un factor de  $10^4$ . El módulo es importante en el diseño de estructuras de carga que incorporan espumas (sándwich de paneles, por ejemplo).

#### 1.3.4.5 Comportamiento no lineal elástico

La elasticidad lineal, está limitada a pequeñas deformaciones. Para grandes deformaciones, ésta es todavía recuperable (y por lo tanto elástica), pero no es lineal, dado que es causada por flexión y pandeo elástico de las columnas o placas que forman los bordes de la celda o paredes, como se muestra en la Figura 1-17. La carga máxima a la que pandea una columna de longitud  $l$ , con módulo de Young  $E_s$ , y el segundo momento de área  $I$  está dada por la fórmula de Euler:

$$F_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 E_s I}{l^2} \quad (1-31)$$

La constante  $n^2$  describe el grado de restricción en los extremos de la columna. Si esta carga se alcanza por una capa de células que atraviesan la sección, que se pandeará, inicia el colapso de la espuma elástica. Para la espuma tridimensional de célula abierta de la Figura 1-13, el esfuerzo  $\sigma_{el}^*$  al que esto ocurre es proporcional a  $F_{el}/l^2$ , de modo que:

$$\sigma_{el}^* = n^2 \pi^2 \frac{E_s I}{l^4} \quad (1-32)$$

Usando las ecuaciones (1-1) y (1-2), se obtiene:

$$\frac{\sigma_{el}^*}{E_s} = C_3 \left( \frac{\rho}{\rho_s} \right)^2 \quad (1-33)$$

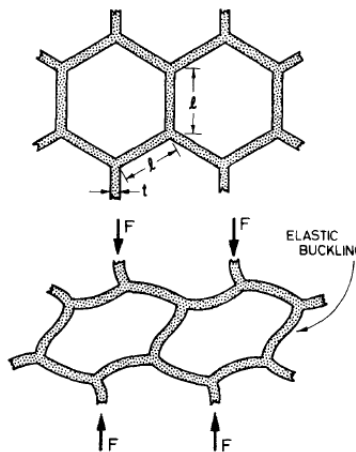


Figura 1-17 La deformación no lineal de una espuma con las paredes celulares pandeadas, dando una gran deformación a un esfuerzo casi constante [6].

Esto es válida para densidades relativas por debajo de 0.3, ya que, a densidades más altas, las paredes celulares son demasiado cortas y anchas para pandearse. Los datos de  $\sigma_{el}^*$ , para las espumas elastoméricas se comparan con (1-18) en la Figura 1-18. Se ajusta bien con la ecuación  $C_3 = 0.05$ . Al igual que el módulo, el esfuerzo elástico para el colapso abarca una amplia gama: para un material dado, una gama de  $10^4$  es accesible.

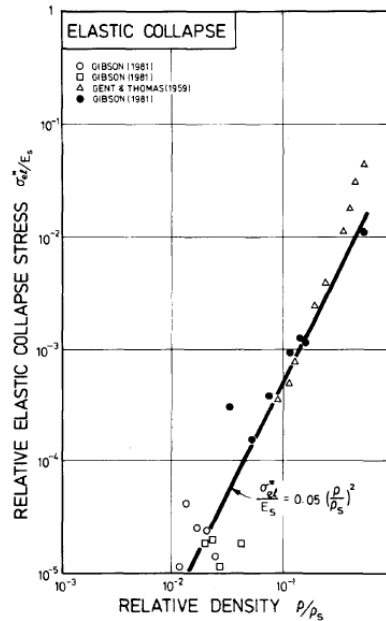


Figura 1-18 El esfuerzo relativo en colapso elástico,  $\sigma^*_{el}/E_s$  graficado contra la densidad relativa,  $\rho/\rho_s$  [6].

Los símbolos abiertos representan espumas de células abiertas de polímero; los símbolos sombreados representan células cerradas de espumas de polímeros. (Las referencias, en orden, son: 1, 5; normalización de las constantes en la Tabla 1-2.)

Reference	Material	$\rho_r$ (Kg m <sup>-2</sup> )	$E_r$ (MPa)	$\sigma_r$ (MPa)	$\sigma_f$ (MPa)
Baxter and Jones <sup>11</sup>	expanded polystyrene	1020 <sup>11</sup>	2650 <sup>11</sup>	—	—
Brighton and Meazey <sup>15</sup>	expanded polyvinyl chloride	1400 <sup>29,30</sup>	3000 <sup>29,30</sup>	49 <sup>29,30</sup>	—
Chan and Nakamura <sup>14</sup>	extruded polystyrene	1050 <sup>14</sup>	1400 <sup>14</sup>	—	—
Gent and Thomas <sup>5</sup>	rubber latex foam	—	2.64 <sup>5</sup>	—	—
Gibson and Ashby <sup>10</sup>	open-cell flexible polyurethane	1200 <sup>29</sup>	45 <sup>31</sup>	—	—
Gibson and Ashby <sup>10</sup>	closed-cell flexible cross-linked polyethylene	910 <sup>32</sup>	200 <sup>32</sup>	—	—
Gibson and Ashby <sup>10</sup>	closed-cell rigid polyurethane	1200 <sup>29</sup>	1600 <sup>3</sup>	127 <sup>31</sup>	—
Lederman <sup>8</sup>	rubber latex foam	—	—	—	—
Matonis <sup>19</sup>	rigid polystyrene	1050 <sup>29</sup>	1380 <sup>19</sup>	79 <sup>19</sup>	—
Moore <i>et al.</i> <sup>13</sup>	polypropylene copolymer	902 <sup>33</sup>	1130 <sup>33</sup>	—	—
	polystyrene acrylonitrile	1065 <sup>13</sup>	3670 <sup>13</sup>	—	—
Patel and Finnie <sup>3</sup>	rigid polyester-based polyurethane	1230 <sup>3</sup>	1600 <sup>3</sup>	127 <sup>3</sup>	—
Phillips and Waterman <sup>12</sup>	rigid polyurethane	1200 <sup>29</sup>	1600 <sup>3</sup>	—	—
Traeger <sup>23</sup>	rigid polyurethane foam	1200 <sup>29</sup>	1600 <sup>3</sup>	127 <sup>3</sup>	—
Wilsea <i>et al.</i> <sup>16</sup>	rigid polyurethane	1200 <sup>29</sup>	1600 <sup>3</sup>	127 <sup>3</sup>	127 <sup>3</sup>
McIntyre and Anderton <sup>27</sup>	rigid polyurethane	1200 <sup>29</sup>	1600 <sup>3</sup>	127 <sup>3</sup>	127
Fowlkes (1974) <sup>28</sup>	rigid polyurethane	1200 <sup>29</sup>	1600 <sup>3</sup>	127 <sup>3</sup>	127
Thornton and Magee <sup>21</sup>	aluminum	—	—	52.2	—
	Al 7 pct Mg	2700 <sup>17</sup>	69000	229	—
	Al 7075	—	—	342	—
Thornton and Magee <sup>22</sup>	Zn at -196 °C	5200	43000	—	207 <sup>22</sup>
Walsh <i>et al.</i> <sup>17</sup>	glass	2511 <sup>17</sup>	75000 <sup>17</sup>	—	—
Pittsburgh-Corning <sup>18</sup>	glass	2500 <sup>34</sup>	7000 <sup>34</sup>	—	—

Tabla 1-2 Propiedades de materiales celulares [6].

## 2 ANALISIS TEÓRICO DE MATERIALES

### ANISOTRÓPICOS

#### 2.1 Anisotropía

La anisotropía es una consecuencia de la estructura interna de los minerales. Si éstos carecen de organización interna (minerales amorfos) o si presentan una organización irregular, son isotrópicos, los que tienen estructuras regulares y periódicos, con direcciones y planos definidos son generalmente anisótropos.

La anisotropía [25] (opuesta de isotropía) es la propiedad general de la materia según la cual cualidades como: elasticidad, temperatura, conductividad, velocidad de propagación de la luz, etc., varían según la dirección en que son examinadas. Algo anisótropo podrá presentar diferentes características según la dirección.

#### 2.2 Anisotropía y propiedades mecánicas en materiales

La anisotropía de los materiales es más acusada en los sólidos cristalinos, debido a su estructura atómica y molecular regular. El tipo de anisotropía que presenta una propiedad puede caracterizarse mediante un subgrupo de un grupo de simetría de rotaciones.

Por ejemplo, si una determinada propiedad es invariante bajo la acción del grupo de rotaciones del espacio tridimensional, entonces se dice que presenta isotropía. Si no es invariante, existirá un subgrupo máximo de rotaciones tal que, bajo la acción de dicho subgrupo, la acción quede invariante.

Si bien muchos materiales tecnológicamente importantes producidos industrialmente, como el acero, el aluminio (y otros metales con estructuras policristalinas), el hormigón, los ladrillos o el caucho son materiales que se pueden considerar isotropos, aunque en realidad tienden a tener ligeros efectos anisotrópicos, en particular cuando fueron deformados en frío (estirados, laminados). Muchos materiales que ocurren en la naturaleza como la madera, los tejidos del cuerpo humano (huesos, piel, tejidos colaginosos), todos ellos formados por fibras, son de hecho anisótropos. Algunos materiales fabricados industrialmente y cuya estructura interna está formada por fibras alineadas como elementos de fibra de carbono son materiales anisótropos, con propiedades mecánicas diferentes si se miden en direcciones alineadas con las fibras o transversales a ellas.

Los materiales que cristalizan en el Sistema Cúbico (o Regular), es decir, el de máxima simetría, con sus átomos o iones igualmente distribuidos en tres direcciones principales y ortogonales en el espacio, son isotropos (Figura 2-1). Los pertenecientes al resto de los sistemas cristalinos (hexagonal, trigonal, tetragonal, rómbico, monoclinico y triclinico) son anisotrópicos; las disposiciones de sus elementos constituyentes varían con la dirección.

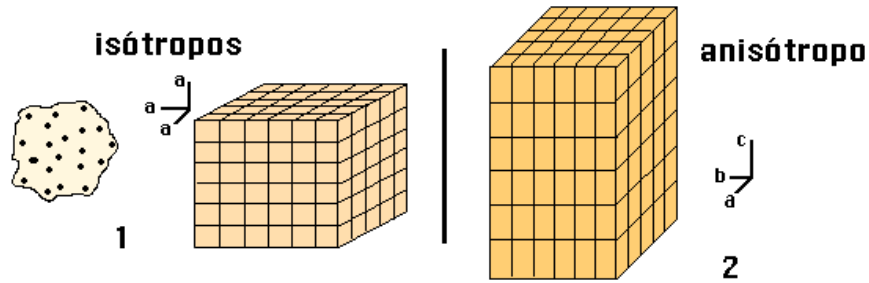


Figura 2-1 Representación de materiales isotrópicos (igual distribución en las tres direcciones) y anisotrópicos (diferente distribución en las tres direcciones).

Las propiedades mecánicas pueden definirse como aquellas que tienen que ver con el comportamiento de un material bajo fuerzas aplicadas. Las propiedades mecánicas se expresan como coeficientes en la relación entre el esfuerzo y la deformación.

Las propiedades mecánicas fundamentales son la resistencia (límite elástico), la rigidez, la elasticidad, la plasticidad y la capacidad energética. La resistencia de un material se mide por el esfuerzo según el cual desarrolla alguna condición limitativa específica. Las principales condiciones limitativas, o criterios de falla, son la terminación de la acción elástica y la ruptura. La dureza, usualmente indicada por la resistencia a la penetración o la abrasión en la superficie de un material, puede considerarse como un tipo o una medida particular de la resistencia. La rigidez tiene que ver con la magnitud de la deformación que ocurre bajo la carga; dentro del rango del comportamiento elástico, la rigidez se mide por el módulo de elasticidad.

La elasticidad se refiere a la capacidad de un material de deformarse no permanentemente al retirar el esfuerzo. El término plasticidad se usa para indicar la capacidad de deformación permanente sin que ocurra ruptura; un ejemplo de medición de la plasticidad es la ductilidad de algunos metales, llamados dúctiles. La capacidad de un material para absorber energía elástica depende de la resistencia y la rigidez; por ejemplo, la capacidad energética en el rango de acción elástica se denomina resiliencia; la energía requerida para romper un material se denomina tenacidad.

### 2.2.1 Constante elástica

Una constante elástica [25] y [26] es cada uno de los parámetros físicamente medibles que caracterizan el comportamiento elástico de un sólido deformable elástico (en la zona elástica según el diagrama esfuerzo deformación Figura 2-2). A veces se usa el término constante elástica también para referirse a los coeficientes de rigidez.

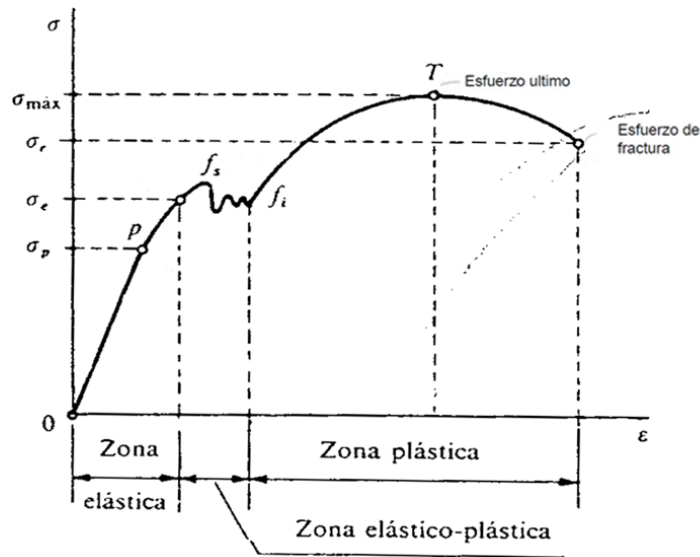


Figura 2-2 Diagramas esfuerzo-deformación unitaria, convencional y real.

Un sólido elástico lineal e isótropo queda caracterizado sólo mediante dos constantes elásticas. Aunque existen varias posibles elecciones de este par de constantes elásticas, las más frecuentes en ingeniería estructural son el módulo de Young y el coeficiente de Poisson (otras constantes son el módulo de rigidez, el módulo de compresibilidad, y los coeficientes de Lamé).

## 2.2.2 Materiales elásticos isótropos

Los materiales elásticos homogéneos e isótropos son los que presentan el mismo comportamiento mecánico para cualquier dirección de estiramiento alrededor de un punto. Así por ejemplo dado un ortoedro de un material homogéneo e isótropo, el módulo de Young y el coeficiente de Poisson son los mismos, con independencia de sobre qué par de caras opuestas se ejerza un estiramiento.

Debido a esa propiedad puede probarse que el comportamiento de un material elástico homogéneo isótropo queda caracterizado por sólo dos constantes elásticas. En diversos campos son comunes las siguientes elecciones de las constantes:

- En ingeniería estructural. La elección más frecuente es el módulo elástico uniaxial y el coeficiente de Poisson ( $E, \nu$ ) [a veces también se usa la elección equivalente ( $E, G$ ), ver más adelante].
- En termodinámica de sólidos deformables resulta muy útil escoger el par ( $K, G$ ) formado por el módulo de compresibilidad (isotérmica)  $K$  y el módulo elástico transversal  $G$ .
- Coeficientes de Lamé ( $\lambda, \mu$ ), que también aparecen en el desarrollo de Taylor de la energía libre de Helmholtz.

Así se tiene un total de seis constantes elásticas comúnmente usadas:  $E$ ,  $\nu$ ,  $K$ ,  $G$ ,  $\lambda$  y  $\mu$ . Dos de ellas caracterizan completamente el comportamiento elástico, es decir, dado cualquier parámetro elástico de un material puede expresarse como función de dos de los parámetros anteriores. Obviamente, todos estos pares de constantes elásticas están relacionados, como se resume en la Tabla 2-1:

	$E$ : módulo de Young $\nu$ : coeficiente de Poisson	$K$ : módulo de compresibilidad $G$ : módulo de rigidez	$\lambda$ : 1 <sup>er</sup> coeficiente de Lamé $\mu$ : 2 <sup>o</sup> coeficiente de Lamé
$(E, \nu)$ --	--	$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$	$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$
$(K, G)$	$E = \frac{9KG}{3K+G}$ $\nu = \frac{3K-2G}{2(3K+G)}$	--	$\lambda = K - \frac{2G}{3}$ $\mu = G$
$(\lambda, \mu)$	$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$K = \lambda + \frac{2\mu}{3}$ $G = \mu$	--

Tabla 2-1 Relaciones entre constantes elásticas (material isótropo lineal) [25].

Expresadas en términos del módulo de Young y el coeficiente de Poisson, las ecuaciones constitutivas son:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} \quad (2-1)$$

Las relaciones inversas vienen dadas por:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1+\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 1+\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix} \quad (2-2)$$



Donde  $\alpha = \frac{\nu}{1-2\nu}$

### 2.2.3 Materiales elásticos ortótropos

Algunos materiales elásticos son anisotrópicos, lo cual significa que su comportamiento elástico, en concreto la relación entre esfuerzos aplicados y deformaciones unitarias, es diferente para diferentes direcciones.

Los materiales elásticos ortótropicos presentan una forma común de anisotropía, en la que su comportamiento elástico queda caracterizado por una serie de constantes elásticas asociadas a tres direcciones mutuamente perpendiculares. El ejemplo más conocido de material ortótropico es la madera que presenta diferente módulo de elasticidad longitudinal (módulo de Young) a lo largo de la fibra, tangencialmente a los anillos de crecimiento y perpendicularmente a los anillos de crecimiento.

El comportamiento elástico de un material ortótropico queda caracterizado por nueve constantes independientes: 3 módulos de elasticidad longitudinal ( $E_x, E_y, E_z$ ), 3 módulos de rigidez ( $G_{xy}, G_{yz}, G_{zx}$ ) y 3 coeficientes de Poisson ( $\nu_{xy}, \nu_{yz}, \nu_{zx}$ ). De hecho, para un material ortótropico, la relación entre las componentes del tensor de esfuerzos y las componentes del tensor deformación viene dada por:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} \quad (2-3)$$

Donde:  $\frac{\nu_{yx}}{E_y} = \frac{\nu_{xy}}{E_x}$      $\frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x}$      $\frac{\nu_{yz}}{E_y} = \frac{\nu_{zy}}{E_z}$     (\*)

Como puede verse, las componentes que gobiernan el alargamiento y las que gobiernan la distorsión están desacopladas, lo cual significa que en general es posible producir alargamientos en torno a un punto sin provocar distorsiones y viceversa. Las

ecuaciones inversas que dan las deformaciones en función de los esfuerzos toman una forma algo más complicada:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 - \nu_{yz}\nu_{zy}}{E_y E_z \Delta} & \frac{\nu_{yx} + \nu_{yz}\nu_{zx}}{E_y E_z \Delta} & \frac{\nu_{zx} + \nu_{zy}\nu_{yx}}{E_y E_z \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{xy} + \nu_{xz}\nu_{zy}}{E_x E_z \Delta} & \frac{1 - \nu_{zx}\nu_{xz}}{E_x E_z \Delta} & \frac{\nu_{zy} + \nu_{zx}\nu_{xy}}{E_x E_z \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{xz} + \nu_{xy}\nu_{yz}}{E_x E_y \Delta} & \frac{\nu_{yz} + \nu_{yx}\nu_{xz}}{E_x E_y \Delta} & \frac{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}{E_x E_y \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{yz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix} \quad (2-4)$$

Donde

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{xy}\nu_{yx} - \nu_{xz}\nu_{zx} - \nu_{yz}\nu_{zy} - 2\nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx}}{E_x E_y E_z}$$

De hecho la matriz anterior, que representa al tensor de rigidez, es simétrica ya que las relaciones (✱) de simetría de la matriz aplican puesto que:

$$\frac{\nu_{yx} + \nu_{yz}\nu_{zx}}{E_y E_z \Delta} = \frac{\nu_{xy} + \nu_{xz}\nu_{zy}}{E_x E_z \Delta} \quad \frac{\nu_{zx} + \nu_{zy}\nu_{yx}}{E_y E_z \Delta} = \frac{\nu_{xz} + \nu_{xy}\nu_{yz}}{E_x E_z \Delta} \quad \frac{\nu_{zy} + \nu_{zx}\nu_{xy}}{E_x E_z \Delta} = \frac{\nu_{yz} + \nu_{yx}\nu_{xz}}{E_x E_y \Delta}$$

## 2.2.4 Materiales transversalmente isotrópicos

Un caso particular de material ortotrópico es el de los materiales transversalmente isotrópicos, en los que existe una dirección preferente o longitudinal y todas las secciones perpendiculares a la misma son mecánicamente equivalentes. Así, en cualquier sección transversal a la dirección diferente habrá isotropía y el número de constantes elásticas independientes necesarias para caracterizar dicho material será 5 y no 9, como en el caso de un material ortotrópico general. Las cinco constantes independientes serán de hecho: 2 módulos de elasticidad longitudinal ( $E_L$ ,  $E_t$ ), 1 módulo de rigidez ( $G_t$ ) y 2 coeficientes de Poisson ( $\nu_L$ ,  $\nu_t$ ). Estas constantes se relacionan con las demás constantes generales de un material ortotrópico mediante estas relaciones:

$$\begin{aligned} E_y &= E_L & E_x &= E_z = E_t \\ G_{xz} &= \frac{E_t}{2(1 + \nu_t)} & G_{zy} &= G_{xy} = G_t \\ \nu_{xz} &= \nu_{zx} = \nu_t & \nu_{xy} &= \nu_{zy} = \nu_{tL} \end{aligned}$$

## 2.2.5 Tensor de constantes elásticas

Para cuerpos elásticos lineales anisotrópicos, las relaciones entre esfuerzo y deformaciones se pueden expresar mediante un tensor de constantes elásticas o tensor de rigidez dado por

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2-5)$$

En tres dimensiones puesto que cada uno de los índices  $i, j, k$  y  $l$  puede tener 3 valores diferentes ( $x, y$  o  $z$ ), existen  $3^4$  componentes del tensor  $C_{ijkl}$ , sin embargo, de la simetría de las componentes de esfuerzo y deformación deben cumplirse las siguientes relaciones entre componentes:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (\text{debido a la simetría del tensor de esfuerzos})$$

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (\text{debido a la simetría del tensor de deformación})$$

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (\text{debido a que la energía elástica viene dada por una forma cuadrática})$$

Los tensores de esfuerzo y deformación se pueden escribir como tensor de orden 1 con longitud 6 en lugar de un tensor de orden 2 con dimensión  $3 \times 3$  y el tensor de orden 4 con dimensión  $3^4$  se reduce a uno de orden 2 con dimensión  $6 \times 6$  que, a su vez, es simétrico por lo que tiene máximo 21 componentes independientes. Esta reducción es válida para operaciones de suma y multiplicación entre tensores no así para rotación del tensor, las cuales deben aplicarse al tensor original de orden 4. Estas 21 componentes pueden escribirse en forma matricial del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{xxxx} & C_{xxyy} & C_{xxzz} & C_{xxxy} & C_{xxxz} & C_{xxyz} \\ C_{yyxx} & C_{yyyy} & C_{yyzz} & C_{yyxy} & C_{yyxz} & C_{yyyz} \\ C_{zzxx} & C_{zzyy} & C_{zzzz} & C_{zzxy} & C_{zzxz} & C_{zzyz} \\ C_{xyxx} & C_{xyyy} & C_{xyzz} & C_{xyxy} & C_{xyxz} & C_{xyyz} \\ C_{xzxx} & C_{xzyy} & C_{xzzz} & C_{xzxy} & C_{xzxz} & C_{xzyz} \\ C_{yzxx} & C_{zyyy} & C_{yzzz} & C_{yzxy} & C_{yzxz} & C_{zyyz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix} \quad (2-6)$$

### 2.2.5.1 Componentes tensoriales del tensor isótropo

Las relaciones anteriores se han escrito siempre en forma de matriz, pero para los diferentes tipos de sólidos es posible escribir también las componentes tensoriales

explícitas. Para un sólido isotrópico, el tensor de constantes elásticas en coordenadas cartesianas viene dado por:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2-7)$$

En un sistema de coordenadas curvilíneas (esféricas, cilíndricas, etc.) más general el tensor anterior es simplemente:

$$C_{ijkl} = \lambda g_{ij} g_{kl} + \mu (g_{ik} g_{jl} + g_{il} g_{jk}) \quad (2-8)$$

Donde  $g_{ij}$  es el tensor métrico asociado a las coordenadas curvilíneas correspondientes.

Las constantes elásticas de un material se determinan usualmente mediante ensayos de tracción normalizados, aunque existen otros métodos alternativos como la medición de la velocidad propagación de ondas elásticas a través del medio.

#### 2.2.5.2 Tensor de constantes elásticas para diferentes materiales.

Cada tipo de material está representado por su correspondiente tensor de constantes elásticas, a continuación se muestra la forma de dichos tensores.

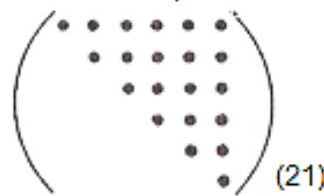


Figura 2-3 Material anisotrópico.

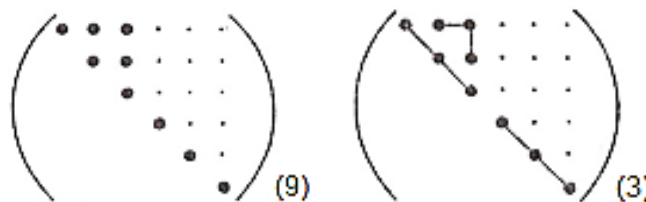


Figura 2-4 Material ortorrómbico (ortotrópico, 9 constantes independientes) y Cúbico (3 constantes independientes).

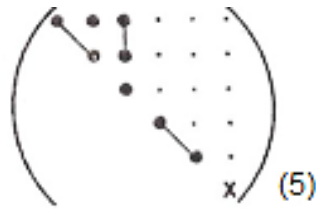


Figura 2-5 Hexagonal (5 constantes independientes).



Figura 2-6 Isotrópico (2 constantes independientes).

Los puntos grandes representan las constantes elásticas, los puntos pequeños representan ceros, las líneas que unen a las constantes indica que éstas son iguales y las x indican que están en función de las constantes 11 y 12, donde el primer dígito indica el renglón y el segundo dígito indica la columna del tensor.

A partir del tensor de material anisotrópico se obtiene el tensor de constantes elástica para materiales ortorrómbicos de la siguiente manera:

Se supone una forma rectangular como la de la figura, la cual se hace rotar  $180^\circ$  respecto al eje x, Figura 2-7

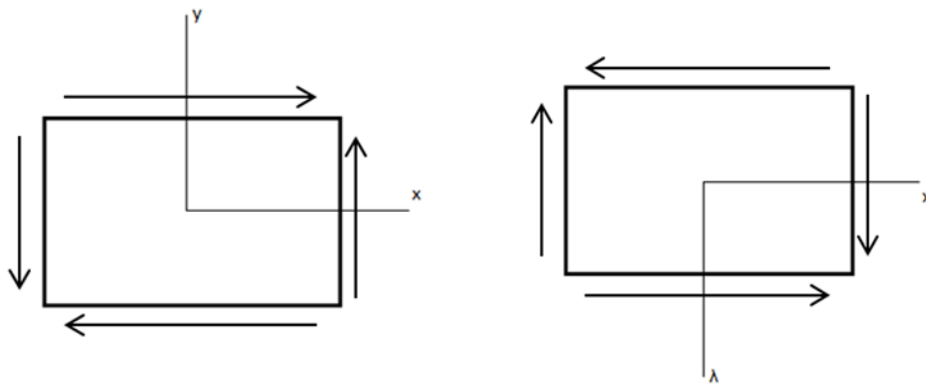


Figura 2-7 Ejes y deformación del elemento a) antes de la rotación y b) después de la rotación de  $180^\circ$  respecto al eje x.

Después de la rotación hay un cambio de signo en los esfuerzos cortantes, pero hay una deformación igual a la inicial ( (2-9), (2-10) y (2-11)), entonces:

$$\varepsilon_1 = S_{16}\sigma_6 \quad (2-9)$$

$$\varepsilon_1' = S_{16}(-\sigma_6) \quad (2-10)$$

Y

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_1 \quad (2-11)$$

Entonces  $\varepsilon_1 = 0$  y  $S_{16} = 0$ , donde  $\sigma_6 = \sigma_{12}$  y completando el proceso de forma similar para cada término, cada cambio de signo será igual a cero.

### 2.3 Análisis de anisotropía

Se desarrolló un código en Matlab para poder hacer estas operaciones obteniendo lo siguiente Figura 2-8.

+-		T11,	T12,	T13,	T14,	-T15,	-T16		+-		11	12	13	14		55	56		
	T21,	T22,	T23,	T24,	-T25,	-T26			12	22	23	24							
	T31,	T32,	T33,	T34,	-T35,	-T36			13	23	33	34							
	T41,	T42,	T43,	T44,	-T45,	-T46			14	24	34	44							
	-T51,	-T52,	-T53,	-T54,	T55,	T56													
	-T61,	-T62,	-T63,	-T64,	T65,	T66													
+-									+-									+-	

Figura 2-8 Rotación respecto a x, sustituyendo elementos negativos por ceros.

Luego se hace otra de 180° ahora respecto al eje “y” y las componentes 14, 24, 34 y 56 cambian de signo Figura 2-9.

+-		T11,	T12,	T13,	-T14,	0,	0		+-		T11,	T12,	T13,	-T14,	0,	0		+-	
	T12,	T22,	T23,	-T24,	0,	0				T12,	T22,	T23,	-T24,	0,	0				
	T13,	T23,	T33,	-T34,	0,	0				T13,	T23,	T33,	-T34,	0,	0				
	-T14,	-T24,	-T34,	T44,	0,	0				-T14,	-T24,	-T34,	T44,	0,	0				
	0,	0,	0,	0,	T55,	-T56				0,	0,	0,	0,	T55,	-T56				
	0,	0,	0,	0,	-T56,	T66				0,	0,	0,	0,	-T56,	T66				
+-									+-									+-	

Figura 2-9 Rotación respecto a y.

Entonces se obtiene el tensor para materiales ortorrómbicos:

$$\begin{array}{c}
 +- \\
 | \quad T_{11}, T_{12}, T_{13}, 0, 0, 0 \quad | \\
 | \quad T_{12}, T_{22}, T_{23}, 0, 0, 0 \quad | \\
 | \quad T_{13}, T_{23}, T_{33}, 0, 0, 0 \quad | \\
 | \quad 0, 0, 0, T_{44}, 0, 0 \quad | \\
 | \quad 0, 0, 0, 0, T_{55}, 0 \quad | \\
 | \quad 0, 0, 0, 0, 0, T_{66} \quad | \\
 +- \\
 \end{array}$$

Figura 2-10 Tensor para materiales ortorrómbicos.

Las operaciones de rotación se deben hacer sobre el tensor de cuarto orden (de 81 componentes) el código que se desarrolló precisamente fue pensado para hacer esto y es capaz de interpretar su forma reducida (de 6x6 componentes) convertirla al tensor de orden 4 (81 componentes) y aplicar las rotaciones.

Si el tensor ortorrómbico Figura 2-10 se hace rotar 45° respecto a x, y o z, se obtienen los siguientes tensores:

$$\begin{array}{c}
 +- \\
 | \quad T_{11}, \quad \frac{T_{12}}{2} + \frac{T_{13}}{2}, \quad \frac{T_{12}}{2} - \frac{T_{13}}{2}, \quad \frac{T_{12}}{2} - \frac{T_{13}}{2}, \quad 0, \quad 0 \quad | \\
 | \quad \frac{T_{12}}{2} + \frac{T_{13}}{2}, \quad \frac{T_{22}}{4} + \frac{T_{23}}{4} + T_{44}, \quad \frac{T_{22}}{4} + \frac{T_{23}}{4} - T_{44}, \quad \frac{T_{22}}{4} - \frac{T_{23}}{4}, \quad 0, \quad 0 \quad | \\
 | \quad \frac{T_{12}}{2} + \frac{T_{13}}{4}, \quad \frac{T_{22}}{4} + \frac{T_{23}}{4} - T_{44}, \quad \frac{T_{22}}{4} + \frac{T_{23}}{4} + T_{44}, \quad \frac{T_{22}}{4} - \frac{T_{23}}{4}, \quad 0, \quad 0 \quad | \\
 | \quad \frac{T_{12}}{2} - \frac{T_{13}}{4}, \quad \frac{T_{22}}{4} - \frac{T_{23}}{4}, \quad \frac{T_{22}}{4} - \frac{T_{23}}{4}, \quad \frac{T_{22}}{4} - \frac{T_{23}}{4} + T_{44}, \quad 0, \quad 0 \quad | \\
 | \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad \frac{T_{55}}{2} + \frac{T_{66}}{2}, \quad \frac{T_{66}}{2} - \frac{T_{55}}{2} \quad | \\
 | \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad \frac{T_{66}}{2} - \frac{T_{55}}{2}, \quad \frac{T_{55}}{2} + \frac{T_{66}}{2} \quad | \\
 +- \\
 \end{array}$$

Figura 2-11 Tensor ortorrómbico rotado 45° respecto a x.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \frac{T_{11}}{4} + \frac{T_{13}}{2} + \frac{T_{33}}{4} + T_{55}, & \frac{T_{12}}{2} + \frac{T_{23}}{2}, & \frac{T_{11}}{4} + \frac{T_{13}}{2} + \frac{T_{33}}{4} - T_{55}, & 0, & \frac{T_{11}}{4} - \frac{T_{33}}{4}, & 0 \\
 \frac{T_{12}}{2} + \frac{T_{23}}{2}, & T_{22}, & \frac{T_{12}}{2} + \frac{T_{23}}{2}, & 0, & \frac{T_{12}}{2} - \frac{T_{23}}{2}, & 0 \\
 \frac{T_{11}}{4} + \frac{T_{13}}{2} + \frac{T_{33}}{4} - T_{55}, & \frac{T_{12}}{2} + \frac{T_{23}}{2}, & \frac{T_{11}}{4} + \frac{T_{13}}{2} + \frac{T_{33}}{4} + T_{55}, & 0, & \frac{T_{11}}{4} - \frac{T_{33}}{4}, & 0 \\
 0, & 0, & 0, & \frac{T_{44}}{2} + \frac{T_{66}}{2}, & 0, & \frac{T_{66}}{2} - \frac{T_{44}}{2} \\
 \frac{T_{11}}{4} - \frac{T_{33}}{4}, & \frac{T_{12}}{2} - \frac{T_{23}}{2}, & \frac{T_{11}}{4} - \frac{T_{33}}{4}, & 0, & \frac{T_{11}}{4} - \frac{T_{13}}{2} + \frac{T_{33}}{4}, & 0 \\
 0, & 0, & 0, & \frac{T_{66}}{2} - \frac{T_{44}}{2}, & 0, & \frac{T_{44}}{2} - \frac{T_{66}}{2}
 \end{array}$$

Figura 2-12 Tensor ortorrómbico rotado 45° respecto a y.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \frac{T_{11}}{4} + \frac{T_{12}}{2} + \frac{T_{22}}{4} + T_{66}, & \frac{T_{11}}{4} + \frac{T_{12}}{2} + \frac{T_{22}}{4} - T_{66}, & \frac{T_{13}}{2} + \frac{T_{23}}{2}, & 0, & 0, & \frac{T_{22}}{4} - \frac{T_{11}}{4} \\
 \frac{T_{11}}{4} + \frac{T_{12}}{2} + \frac{T_{22}}{4} - T_{66}, & \frac{T_{11}}{4} + \frac{T_{12}}{2} + \frac{T_{22}}{4} + T_{66}, & \frac{T_{13}}{2} + \frac{T_{23}}{2}, & 0, & 0, & \frac{T_{22}}{4} - \frac{T_{11}}{4} \\
 \frac{T_{13}}{2} + \frac{T_{23}}{2}, & \frac{T_{13}}{2} + \frac{T_{23}}{2}, & T_{33}, & 0, & 0, & \frac{T_{23}}{2} - \frac{T_{13}}{2} \\
 0, & 0, & 0, & \frac{T_{44}}{2} + \frac{T_{55}}{2}, & \frac{T_{44}}{2} - \frac{T_{55}}{2}, & 0 \\
 0, & 0, & 0, & \frac{T_{44}}{2} - \frac{T_{55}}{2}, & \frac{T_{44}}{2} + \frac{T_{55}}{2}, & 0 \\
 \frac{T_{22}}{4} - \frac{T_{11}}{4}, & \frac{T_{22}}{4} - \frac{T_{11}}{4}, & \frac{T_{23}}{2} - \frac{T_{13}}{2}, & 0, & 0, & \frac{T_{11}}{4} - \frac{T_{12}}{2} + \frac{T_{22}}{4}
 \end{array}$$

Figura 2-13 Tensor ortorrómbico rotado 45° respecto a z.

Se puede observar como algunos elementos que inicialmente son 0, ahora se llenan con valores en función de las demás componentes. Algo similar pasa para cualquier otro ángulo diferente de 90°, 180° y 270°. Si se hace rotar 90° o 270° respecto a cualquiera de los 3 ejes el tensor ortorrómbico conserva la misma forma pero se intercambian componentes:



$$\begin{array}{c}
 +- \\
 | \quad T_{11}, T_{13}, T_{12}, 0, 0, 0 \quad | \\
 | \\
 | \quad T_{13}, T_{33}, T_{23}, 0, 0, 0 \quad | \\
 | \\
 | \quad T_{12}, T_{23}, T_{22}, 0, 0, 0 \quad | \\
 | \\
 | \quad 0, 0, 0, T_{44}, 0, 0 \quad | \\
 | \\
 | \quad 0, 0, 0, 0, T_{66}, 0 \quad | \\
 | \\
 | \quad 0, 0, 0, 0, 0, T_{55} \quad | \\
 +- \\
 --+
 \end{array}$$

Figura 2-14 Tensor ortorrómbico rotado 90° respecto a x, se intercambian las componentes que corresponden al eje y, z y las componentes “xy” y “xz”.

$$\begin{array}{c}
 +- \\
 | \quad T_{33}, T_{23}, T_{13}, 0, 0, 0 \quad | \\
 | \\
 | \quad T_{23}, T_{22}, T_{12}, 0, 0, 0 \quad | \\
 | \\
 | \quad T_{13}, T_{12}, T_{11}, 0, 0, 0 \quad | \\
 | \\
 | \quad 0, 0, 0, T_{66}, 0, 0 \quad | \\
 | \\
 | \quad 0, 0, 0, 0, T_{55}, 0 \quad | \\
 | \\
 | \quad 0, 0, 0, 0, 0, T_{44} \quad | \\
 +- \\
 --+
 \end{array}$$

Figura 2-15 Tensor ortorrómbico rotado 90° respecto a y, se intercambian las componentes que corresponden al eje x, z y las componentes “xy” y “yz”.

$$\begin{array}{c}
 +- \\
 | \quad T_{22}, T_{12}, T_{23}, 0, 0, 0 \quad | \\
 | \\
 | \quad T_{12}, T_{11}, T_{13}, 0, 0, 0 \quad | \\
 | \\
 | \quad T_{23}, T_{13}, T_{33}, 0, 0, 0 \quad | \\
 | \\
 | \quad 0, 0, 0, T_{55}, 0, 0 \quad | \\
 | \\
 | \quad 0, 0, 0, 0, T_{44}, 0 \quad | \\
 | \\
 | \quad 0, 0, 0, 0, 0, T_{66} \quad | \\
 +- \\
 --+
 \end{array}$$

Figura 2-16 Tensor ortorrómbico rotado 90° respecto a z, se intercambian las componentes que corresponden al eje x, y y las componentes “xz” y “yz”.

Si la rotación es de 180° no hay cambio y el tensor queda exactamente igual en todas sus componentes.

### 2.3.1 Tensor Cúbico

El comportamiento del tensor para un material cúbico se describe a continuación.

$$\begin{array}{cccccc}
 + & & & & & - \\
 | & T_{11}, & T_{12}, & T_{12}, & 0, & 0, & 0 & | \\
 | & T_{12}, & T_{11}, & T_{12}, & 0, & 0, & 0 & | \\
 | & T_{12}, & T_{12}, & T_{11}, & 0, & 0, & 0 & | \\
 | & 0, & 0, & 0, & T_{44}, & 0, & 0 & | \\
 | & 0, & 0, & 0, & 0, & T_{44}, & 0 & | \\
 | & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & T_{44} & | \\
 + & & & & & & - & 
 \end{array}$$

Figura 2-17 Tensor de constantes elásticas para un material cúbico.

$$\begin{array}{cccccc}
 + & & & & & - \\
 | & T_{11}, & & T_{12}, & & T_{12}, & 0, & 0, & 0 & | \\
 | & & \frac{T_{11}}{2} & & \frac{T_{12}}{2} & & \frac{T_{11}}{2} & & \frac{T_{12}}{2} & | \\
 | & T_{12}, & + & + & + & T_{44}, & - & - & - & | \\
 | & & \frac{T_{11}}{2} & & \frac{T_{12}}{2} & & \frac{T_{11}}{2} & & \frac{T_{12}}{2} & | \\
 | & T_{12}, & + & - & - & - & + & + & + & | \\
 | & & \frac{T_{11}}{2} & & \frac{T_{12}}{2} & & \frac{T_{11}}{2} & & \frac{T_{12}}{2} & | \\
 | & 0, & & 0, & & 0, & \frac{T_{11}}{2} & & \frac{T_{12}}{2} & | \\
 | & & & & & & & & & | \\
 | & 0, & & 0, & & 0, & 0, & & T_{44}, & | \\
 | & 0, & & 0, & & 0, & 0, & & 0, & | \\
 | & & & & & & & & & | \\
 + & & & & & & & & & - \\
 \end{array}$$

Figura 2-18 Tensor cúbico rotado 45° respecto al eje x.

$$\begin{array}{cccccc}
 + & & & & & - \\
 | & \frac{T_{11}}{2} & & \frac{T_{12}}{2} & & \frac{T_{11}}{2} & & \frac{T_{12}}{2} & & | \\
 | & + & + & + & T_{44}, & T_{12}, & - & - & - & | \\
 | & & \frac{T_{11}}{2} & & \frac{T_{12}}{2} & & \frac{T_{11}}{2} & & \frac{T_{12}}{2} & | \\
 | & & & & & & & & & | \\
 | & & T_{12}, & & T_{11}, & & T_{12}, & & 0, & | \\
 | & & & & & & & & 0, & | \\
 | & & & & & & & & 0, & | \\
 | & \frac{T_{11}}{2} & & \frac{T_{12}}{2} & & \frac{T_{11}}{2} & & \frac{T_{12}}{2} & & | \\
 | & + & - & - & - & - & + & + & + & | \\
 | & & \frac{T_{11}}{2} & & \frac{T_{12}}{2} & & \frac{T_{11}}{2} & & \frac{T_{12}}{2} & | \\
 | & & & & & & & & & | \\
 | & & 0, & & 0, & & 0, & & T_{44}, & | \\
 | & & & & & & & & & | \\
 | & & 0, & & 0, & & 0, & & \frac{T_{11}}{2} & | \\
 | & & & & & & & & \frac{T_{12}}{2} & | \\
 | & & & & & & & & & | \\
 | & & 0, & & 0, & & 0, & & 0, & | \\
 | & & & & & & & & & | \\
 + & & & & & & & & & - \\
 \end{array}$$

Figura 2-19 Tensor cúbico rotado 45° respecto al eje y.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline +- \\ \hline
 \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \text{---} + \text{---} + T_{44}, \text{---} + \text{---} - T_{44}, T_{12}, 0, 0, 0 \\ \hline
 \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline +- \\ \hline
 \end{array}
 \\
 \begin{array}{|c|} \hline \text{---} + \text{---} + T_{44}, \text{---} + \text{---} + T_{44}, T_{12}, 0, 0, 0 \\ \hline
 \end{array}
 \\
 \begin{array}{|c|} \hline T_{12}, T_{12}, T_{11}, 0, 0, 0 \\ \hline
 \end{array}
 \\
 \begin{array}{|c|} \hline 0, 0, 0, T_{44}, 0, 0 \\ \hline
 \end{array}
 \\
 \begin{array}{|c|} \hline 0, 0, 0, 0, T_{44}, 0 \\ \hline
 \end{array}
 \\
 \begin{array}{|c|} \hline 0, 0, 0, 0, 0, \frac{T_{11}}{2} - \frac{T_{12}}{2} \\ \hline
 \end{array}
 \\
 \begin{array}{|c|} \hline +- \\ \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 2-20 Tensor cúbico rotado 45° respecto al eje z.

Se puede observar cómo después de ser rotado 45° y sus múltiplos respecto a cualquiera de los 3 ejes, sigue conservándose la forma del tensor aunque algunas componentes cambian de valor. De hecho, si se hace rotar 90° y sus múltiplos, el tensor queda exactamente igual al original, pero si se hace rotar a un ángulo diferente, algunos coeficientes que inicialmente son 0 dejan de serlo; a continuación se muestra el tensor rotado 30° respecto a z (Figura 2-21).

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline +- \\ \hline
 \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \frac{5 T_{11}}{8} + \frac{3 T_{12}}{8} + \frac{3 T_{44}}{4}, \frac{3 T_{11}}{8} + \frac{5 T_{12}}{8} - \frac{3 T_{44}}{4}, T_{12}, 0, 0, \frac{1/2}{3} (T_{12} - T_{11} + 2 T_{44}) \\ \hline
 \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline +- \\ \hline
 \end{array}
 \\
 \begin{array}{|c|} \hline \frac{3 T_{11}}{8} + \frac{5 T_{12}}{8} - \frac{3 T_{44}}{4}, \frac{5 T_{11}}{8} + \frac{3 T_{12}}{8} + \frac{3 T_{44}}{4}, T_{12}, 0, 0, \frac{1/2}{3} (T_{12} - T_{11} + 2 T_{44}) \\ \hline
 \end{array}
 \\
 \begin{array}{|c|} \hline T_{12}, T_{12}, T_{11}, 0, 0, 0 \\ \hline
 \end{array}
 \\
 \begin{array}{|c|} \hline 0, 0, 0, T_{44}, 0, 0 \\ \hline
 \end{array}
 \\
 \begin{array}{|c|} \hline 0, 0, 0, 0, T_{44}, 0 \\ \hline
 \end{array}
 \\
 \begin{array}{|c|} \hline \frac{1/2}{3} (T_{12} - T_{11} + 2 T_{44}), \frac{1/2}{3} (T_{12} - T_{11} + 2 T_{44}), 0, 0, 0, \frac{3 T_{11}}{8} - \frac{3 T_{12}}{8} + \frac{T_{44}}{4} \\ \hline
 \end{array}
 \\
 \begin{array}{|c|} \hline +- \\ \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 2-21 Tensor cúbico rotado 30° respecto a z.

El tensor mostrado en la Figura 2-20 y Figura 2-21 (resultado de la rotación del tensor cúbico) es un tensor llamado tetragonal, hay dos formas de este tensor y se muestran a continuación.

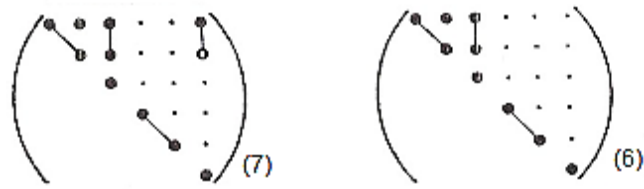


Figura 2-22 Tensor tetragonal (forma 1 y 2).

Se puede observar que la forma 2 del tensor tetragonal es como el tensor hexagonal, solo que la componente (6,6) no está en función de las componentes (1,1) y (1,2) únicamente, y es una componente independiente. El punto vacío que se observa en la forma 1 del tensor tetragonal significa que es de signo opuesto, entonces las componentes (1,6) y (2,6) son iguales pero de signo opuesto, siendo la primera positiva.

El comportamiento que se acaba de describir solo se presenta en rotaciones respecto a z, pero si las rotaciones son respecto a x o y se obtienen resultados muy diferentes pero aun así algunas componentes que inicialmente eran cero ahora se llenan con valores, ver Figura 2-23.

+	T11,	T12,	T12,	0,	0,	0	+	
	$\frac{5}{8} T_{11}$	$\frac{3}{8} T_{12}$	$\frac{3}{4} T_{44}$	$\frac{3}{8} T_{11}$	$\frac{5}{8} T_{12}$	$\frac{3}{4} T_{44}$	$\frac{1}{8} (T_{12} - T_{11} + 2 T_{44})$	
	T12,	$\frac{3}{8} T_{11}$	$\frac{5}{8} T_{12}$	$\frac{3}{4} T_{44}$	$\frac{3}{8} T_{11}$	$\frac{5}{8} T_{12}$	$\frac{3}{4} T_{44}$	
	T12,	$\frac{3}{8} T_{11}$	$\frac{5}{8} T_{12}$	$\frac{3}{4} T_{44}$	$\frac{3}{8} T_{11}$	$\frac{5}{8} T_{12}$	$\frac{3}{4} T_{44}$	
	0,	$\frac{1}{8} (T_{12} - T_{11} + 2 T_{44})$	$\frac{1}{8} (T_{12} - T_{11} + 2 T_{44})$	$\frac{3}{8} T_{11}$	$\frac{3}{8} T_{12}$	$\frac{1}{4} T_{44}$	0,	
	0,	0,	0,	0,	0,	0	T44,	
	0,	0,	0,	0,	0,	0	0,	T44
+	-	-	-	-	-	-	-	+

Figura 2-23 Tensor cúbico rotado 60° respecto a x.

### 2.3.2 Tensor Hexagonal

El tensor de constantes elásticas para un material hexagonal tiene características diferentes a los anteriores descritos.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 + & - & & & & & - & + \\
 | & T_{11}, & T_{12}, & T_{13}, & 0, & 0, & 0 & | \\
 | & T_{12}, & T_{11}, & T_{13}, & 0, & 0, & 0 & | \\
 | & T_{13}, & T_{13}, & T_{33}, & 0, & 0, & 0 & | \\
 | & 0, & 0, & 0, & T_{44}, & 0, & 0 & | \\
 | & 0, & 0, & 0, & 0, & T_{44}, & 0 & | \\
 | & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{T_{11}}{2} & \frac{T_{12}}{2} & | \\
 | & & & & & & & & | \\
 + & - & & & & & - & + \\
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 2-24 Tensor de constantes elásticas para un material hexagonal (queda igual rotado 60° respecto a z).

De hecho, el tensor hexagonal rotado a cualquier ángulo respecto a z da como resultado el mismo tensor por tanto, se puede concluir que el tensor hexagonal es isotrópico respecto al eje z.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 + & - & & & & & - & + \\
 | & T_{11}, & T_{13}, & T_{12}, & 0, & 0, & 0 & | \\
 | & T_{13}, & T_{33}, & T_{13}, & 0, & 0, & 0 & | \\
 | & T_{12}, & T_{13}, & T_{11}, & 0, & 0, & 0 & | \\
 | & 0, & 0, & 0, & T_{44}, & 0, & 0 & | \\
 | & 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{T_{11}}{2} & \frac{T_{12}}{2}, & 0 & | \\
 | & & & & & & & & | \\
 | & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & T_{44} & | \\
 + & - & & & & & - & + \\
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 2-25 Tensor hexagonal rotado 90° respecto a x, se intercambian componentes "y" y "z".

$$\begin{array}{c}
 + - \\
 | \quad T_{33}, T_{13}, T_{13}, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \quad | \\
 | \quad T_{13}, T_{11}, T_{12}, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \quad | \\
 | \quad T_{13}, T_{12}, T_{11}, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \quad | \\
 | \\
 | \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad \frac{T_{11}}{2} \quad \frac{T_{12}}{2}, \quad 0, \quad 0 \quad | \\
 | \\
 | \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad T_{44}, \quad 0 \quad | \\
 | \\
 | \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad T_{44} \quad | \\
 + -
 \end{array}$$

Figura 2-26 Tensor hexagonal rotado 90° respecto a y, se intercambian componentes "x" y "z".

### 2.3.3 Tensor Isotrópico

El tensor isotrópico permanece igual después de ser rotado a cualquier ángulo y respecto a cualquier eje.

$$\begin{array}{c}
 + - \\
 | \quad T_{11}, T_{12}, T_{12}, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \quad | \\
 | \quad T_{12}, T_{11}, T_{12}, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \quad | \\
 | \quad T_{12}, T_{12}, T_{11}, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \quad | \\
 | \\
 | \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad \frac{T_{11}}{2} \quad \frac{T_{12}}{2}, \quad 0, \quad 0 \quad | \\
 | \\
 | \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad \frac{T_{11}}{2} \quad \frac{T_{12}}{2}, \quad 0 \quad | \\
 | \\
 | \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad \frac{T_{11}}{2} \quad \frac{T_{12}}{2} \quad | \\
 + -
 \end{array}$$

Figura 2-27 Tensor isotrópico.

Para obtener el tensor de constantes elásticas para un material de estudio se ha pensado en resolverlo de la siguiente manera:

Si de los resultados obtenidos en los modelos se parte de un estado de esfuerzos se pueden obtener las deformaciones, entonces es todo lo que se necesita para resolver el problema.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \tag{2-12}$$

Entonces

$$C_{ijkl} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}^{-1}) \quad (2-13)$$

Se buscó demostrar que esta técnica funciona de la siguiente manera:

Si se tiene el siguiente estado de esfuerzos

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y un tensor de constantes elásticas ortorrómbico

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

Con  $c_{21} = c_{12}$ ,  $c_{31} = c_{13}$ ,  $c_{32} = c_{23}$

Entonces se obtiene el tensor de deformación como sigue

$$\varepsilon_{kl} = \sigma_{ij}(C_{ijkl}^{-1}) \quad (2-14)$$

Y resulta:

```

-----+-----
      c22 c33 - c23  2
-----+-----
- c33 c12  2 + 2 c23 c12 c13 - c22 c13  2 + c11 (c22 c33 - c23 )  2
-----+-----
      c13 c23 - c12 c33
-----+-----
- c33 c12  2 + 2 c13 c12 c23 - c11 c23  2 + c22 (c11 c33 - c13 )  2
-----+-----
      c11 c33 - c13  2
-----+-----
- c33 c12  2 - 2 c12 c13 c23 + c22 c13  2 + c11 c23  2 - c11 c22 c33
-----+-----
      c12 c13 - c11 c23
-----+-----
- c22 c13  2 + 2 c12 c13 c23 - c11 c23  2 + c33 (c11 c22 - c12 )  2
-----+-----
      c12 c13 - c11 c23
-----+-----
- c33 c12  2 - 2 c12 c13 c23 + c22 c13  2 + c11 c23  2 + c22 (c11 c33 - c13 )  2
-----+-----
      c11 c22 - c12  2
-----+-----
- c33 c12  2 - 2 c12 c13 c23 + c22 c13  2 + c11 c23  2 - c11 c22 c33
-----+-----
      1
-----+-----
      c44, 0, 0
-----+-----
      1
-----+-----
      0, c55, 0
-----+-----
      1
-----+-----
      0, 0, c66
-----+-----

```

Figura 2-28 Tensor de deformación  $(\epsilon_{kl})$  obtenido de Matlab.



Ahora se puede suponer que no se tiene el tensor de constantes elásticas pero que se conoce el tensor de esfuerzos y el tensor de deformación (acabado de obtener), entonces haciendo uso de (2-13) se obtiene un tensor  $C'_{ijkl}$

$$\begin{array}{c}
 + - \\
 | \quad c_{11}, c_{12}, c_{13}, 0, 0, 0 \quad | \\
 | \quad c_{12}, c_{22}, c_{23}, 0, 0, 0 \quad | \\
 | \quad c_{13}, c_{23}, c_{33}, 0, 0, 0 \quad | \\
 | \quad 0, 0, 0, c_{44}, 0, 0 \quad | \\
 | \quad 0, 0, 0, 0, c_{55}, 0 \quad | \\
 | \quad 0, 0, 0, 0, 0, c_{66} \quad | \\
 + -
 \end{array}$$

Figura 2-29 Nuevo tensor  $C'_{ijkl}$  obtenido.

Se puede observar que:

$$C_{ijkl} = C'_{ijkl} \quad (2-15)$$

Puesto que el tensor obtenido es exactamente igual al tensor de constantes elásticas propuesto inicialmente, se puede concluir que este método de obtención del tensor C por medio de la inversión del tensor de deformaciones funciona. Por tanto, siempre que se tenga el tensor de esfuerzos y el tensor de deformaciones correspondientes a un caso de estudio (modelo), se puede obtener el tensor de constantes elásticas que lo describe. La rotación de este tensor determinará qué tipo de anisotropía presenta.

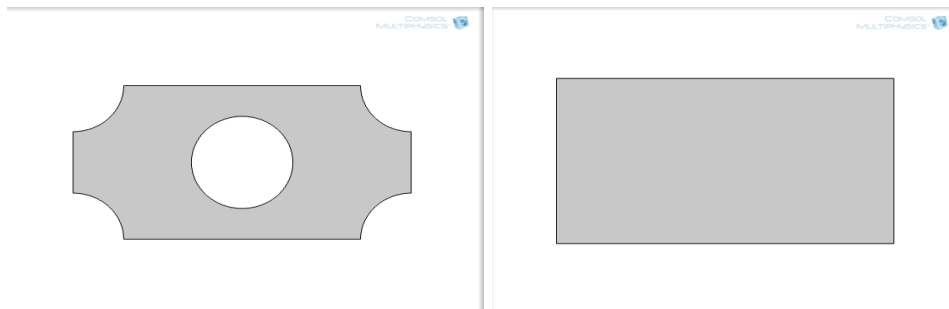


### 3 DESARROLLO DE MODELOS DE SIMULACIÓN

Para comenzar el análisis, se propone un modelo 2D que representa una celda unitaria porosa (perteneciente a una estructura porosa) en la que en las esquinas se tienen huecos (que representan poros, una cuarta parte) y en el centro un hueco. Si bien este modelo se puede extender a la tercera dimensión, siendo los huecos ahora cilindros, por lo pronto se realiza el análisis en dos dimensiones.

Haciendo uso del paquete de simulación por elemento finito COMSOL Multiphysics, se decide desarrollar dos modelos para analizar el mismo problema; el primer modelo se llamará modelo G será el que tiene los huecos incluidos en la geometría y el segundo modelo será modelo F es simplemente un bloque sólido que tiene la porosidad representada por medio de una función de posición (Figura 3-1). El modelo G no es flexible para adaptarse a distintas estructuras porosas, sino que cada estructura es una geometría diferente por lo cual requiere el desarrollo de un modelo nuevo, cosa que no pasa con el modelo F ya que tiene la ventaja de poderse aplicar a cualquier estructura porosa, solo con cambiar la función.

El modelo G, por ser el más exacto, se tomará como referencia para comparar los resultados con el modelo F. Siendo el modelo G el modelo con huecos en la geometría y el modelo F es el modelo que describe la porosidad por medio de una función. Como primera instancia estos modelos son 2D y se busca obtener los mismos resultados en ambos modelos y posteriormente pasar a 3D, ambos modelos trabajan a deformación plana.



*Figura 3-1 Modelos 2D. Modelo G; huecos en la geometría y modelo F; sin huecos en la geometría pero representados por medio de una función de posición.*

#### 3.1 Modelos 2D

Las características del modelo G son:

- Es un simple bloque (que puede ser rectangular o cuadrado) con un hueco en el centro y un cuarto de hueco en cada esquina.
- Los lados guardan una proporción.

Características del modelo F:

- Es un bloque sólido (sin huecos, rectangular o cuadrado), el cual debe representar la porosidad por medio de una ecuación en función de su posición.
- Los huecos tienen constantes elásticas que tienden a cero (si está en algún medio gaseoso o expuesto al ambiente), pero no son cero para evitar indeterminaciones al momento de resolverlo o bien pueden ser algún tipo de refuerzo. Por tanto, tendrá propiedades mecánicas correspondientes al material del que está hecho dicho refuerzo, siendo diferente a los correspondientes del material de la matriz.

El módulo de elasticidad para el modelo F viene dado por la siguiente ecuación:

$$E^* = E(\eta + (1 - \eta)F(x, y)) \quad (3-1)$$

Donde  $E$  es el módulo elástico del material “puro”.

$E^*$  es el módulo elástico local del material en el dominio computacional.

$\eta$  es la relación entre el material del poro y el material de la matriz.

$F(x, y)$  es la función de fase y es igual a 1 donde hay material y 0 en el hueco.

Ahora, para determinar  $F(x, y)$ , se hace una comparativa entre distancias de la siguiente manera.

Distancia del centro de un hueco hasta un punto en la celda es menor al radio del hueco como:

$$d_{dist} = \sqrt{((x - x_c)^2 + (y - y_c)^2)} \quad (3-2)$$

Donde

$x_c$  y  $y_c$  son las coordenadas del hueco.

Luego: si  $d_{dist} < r$ , entonces está dentro del poro, por tanto,  $F = 0$  sino  $F = 1$ .

Entonces, para un hueco,  $F(x, y) = 1 - (d_{dist} < r)$ , donde la expresión entre paréntesis representa una función booleana que arroja un valor discreto de 0 (falso) o 1 (verdadero). Ahora aplicándolo para cada hueco y suponiendo 5 huecos (uno en cada esquina y uno más en el centro), se obtiene:

$$F(x, y) = 1 - (d_{dist}(x, y, x_{c1}, y_{c1}) < r) - (d_{dist}(x, y, x_{c2}, y_{c2}) < r) - (d_{dist}(x, y, x_{c3}, y_{c3}) < r) - (d_{dist}(x, y, x_{c4}, y_{c4}) < r) - (d_{dist}(x, y, x_{c5}, y_{c5}) < r) \quad (3-3)$$

$F(x, y)$  será una función de coeficientes variables, dependiendo de la ubicación, y es capaz de discriminar entre hueco y material.

El modelo F (con función) tiene un detalle extra, la frontera entre hueco y material está dada por una función de transición (función escalón) suavizada (ver Figura 3-2) para evitar un cambio brusco (Figura 3-6), la cual está controlada como un ancho de banda que se puede manipular y que está relacionada con el tamaño de elementos del mallado que pueden quedar dentro de esta banda; entonces la ec (3-1) también queda definida por medio de esta transición.

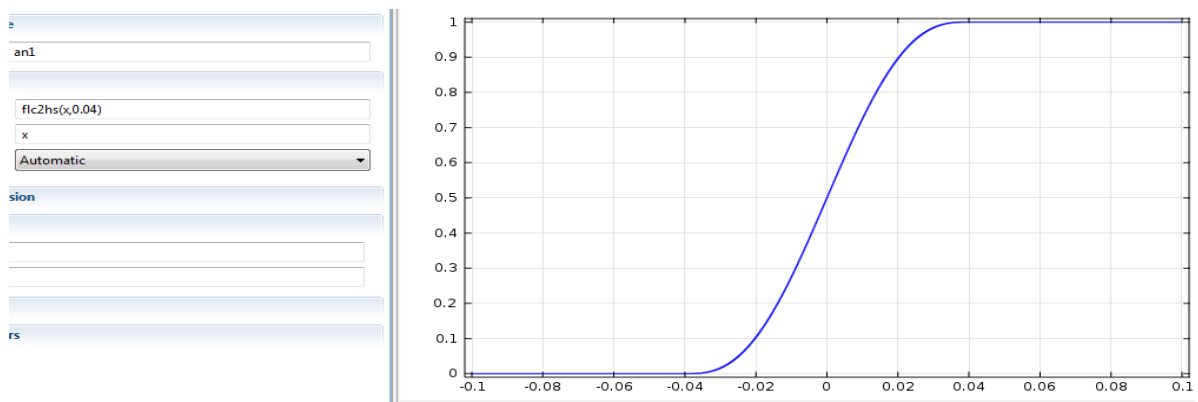


Figura 3-2 Transición como función escalón ancho de banda total 2(0.04) m.

En ambos modelos la geometría representa una celda perteneciente a una estructura porosa. Por tanto, para mantener la periodicidad en toda la estructura, se debe garantizar la continuidad en la misma. Para lograr hacerlo se aplicó un acoplamiento en caras opuestas de la celda, donde la cara opuesta se comporta de tal forma que se puede acoplar perfectamente con otra celda perteneciente a la estructura.

En Comsol existe una herramienta llamada boundary similarity en donde se acoplan dos fronteras, de tal forma que se hacen disponibles las variables locales en un punto en una frontera (la de origen) a un punto correspondiente en la otra frontera (la de destino). Con estas se puede acoplar o “copiar” los desplazamientos de las fronteras opuestas de la celda unitaria para hacer periódica la deformación de la celda unitaria. Entonces, si la frontera de origen tiene un desplazamiento (cada punto), se impone a la frontera de destino el mismo desplazamiento aparte de un cierto desplazamiento uniforme sobre toda la frontera que corresponde a un estiramiento o deslizamiento efectivo de toda la celda. Expresado en forma matemática se obtiene:

$$u(y)|_{x=x_i} = u(y)|_{x=x_d} + u_i \quad (3-4)$$

Y en Comsol se aplica de la siguiente forma

$$u = bndsim1(u) + u_i$$

$$v = \text{bndsim1}(v) + v_i$$

Donde  $\text{bndsim1}$  significa acoplamiento (comportamiento igual en caras opuestas) para así garantizar continuidad. Los  $u_i$  y  $v_i$  son desplazamientos en  $x$  y  $y$  respectivamente resultado de la solución de una ecuación diferencial que se describe enseguida, Figura 3-3 y Figura 3-4.

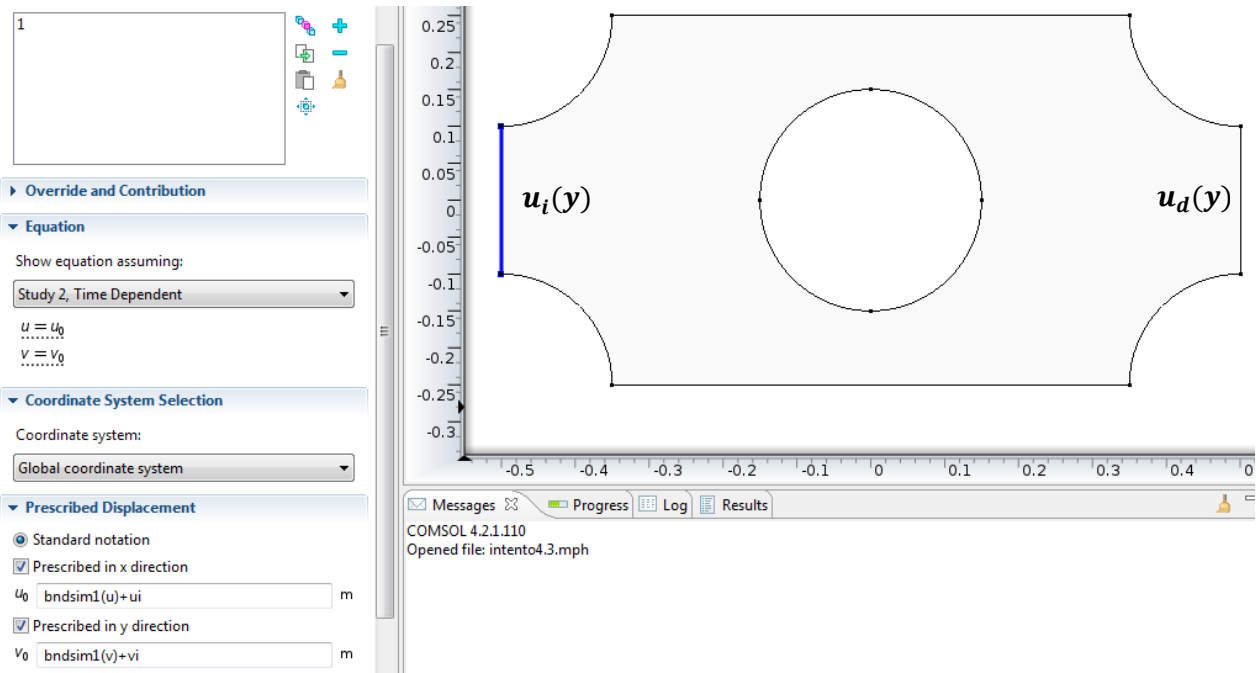


Figura 3-3 Aplicación de los desplazamientos  $u_i$  y  $v_i$ .

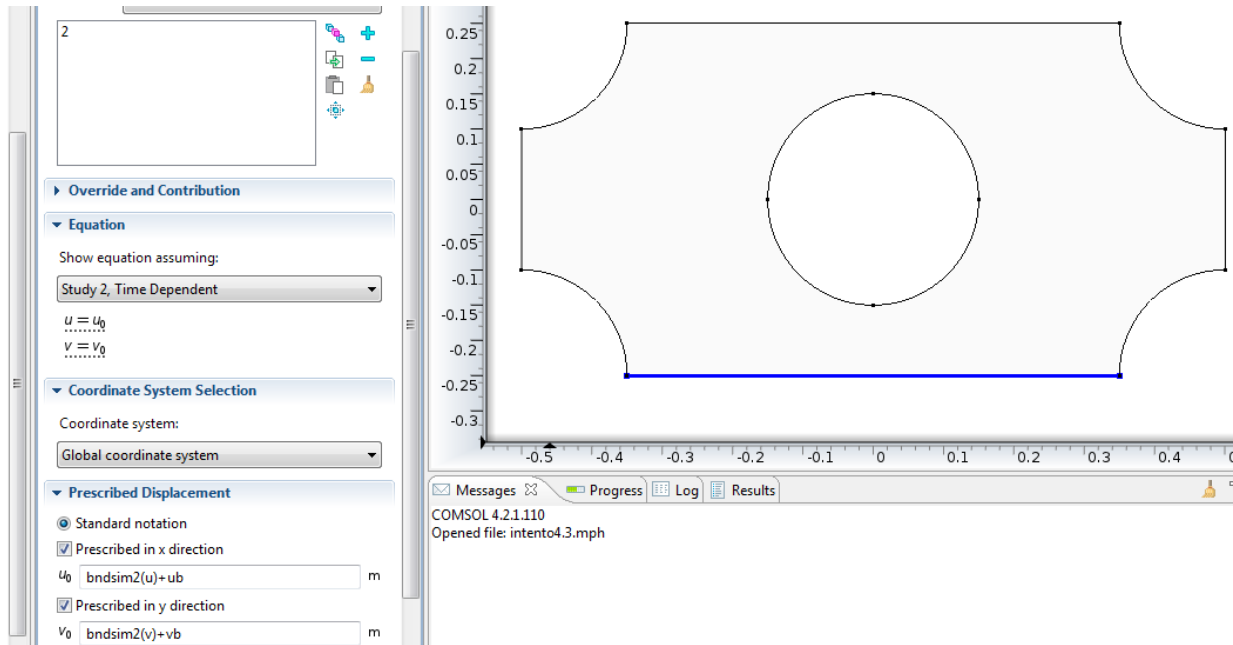


Figura 3-4 Aplicación de los desplazamientos  $u_b$  y  $v_b$ .

Para resolver las variables globales (no relacionados con un nodo o elemento en particular)  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $u_b$  y  $v_b$ , donde estas tres variables se reducen a 3 independientes por suponer relaciones entre esfuerzos cortantes como  $v_i = u_b(B/H)$ , ( $B$  y  $H$  son base y altura respectivamente de la celda unitaria) se propusieron ecuaciones diferenciales globales que internamente resuelve Comsol y cuyo resultado arroja los desplazamientos  $u$  y  $v$  (Figura 3-5).

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{[F_{cond,n} + \int \sigma_{i_s_i} dl]}{C} \quad (3-5)$$

$$0 = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{F_x + (Na(solid.Tax))[m]}{1e-5 \left[ \frac{N * s}{m} \right]} \quad (3-6)$$

$$0 = \frac{\partial u_b}{\partial t} + \frac{F_{x_2} + (Na2(solid.Tax))[m]}{1e-5 \left[ \frac{N * s}{m} \right]} \quad (3-7)$$

$$0 = \frac{\partial v_b}{\partial t} + \frac{F_{y_2} + (Na2(solid.Tay))[m]}{1e-5 \left[ \frac{N * s}{m} \right]} \quad (3-8)$$

Las  $F_{x,y}$  representan fuerzas aplicadas sobre las caras;  $Na$  es la integral de línea de los esfuerzos resultantes sobre la cara opuesta,  $C$  es un factor de escalamiento de iteración, para controlar la velocidad de convergencia. Y  $t$  no es un tiempo físico, sino de iteración.

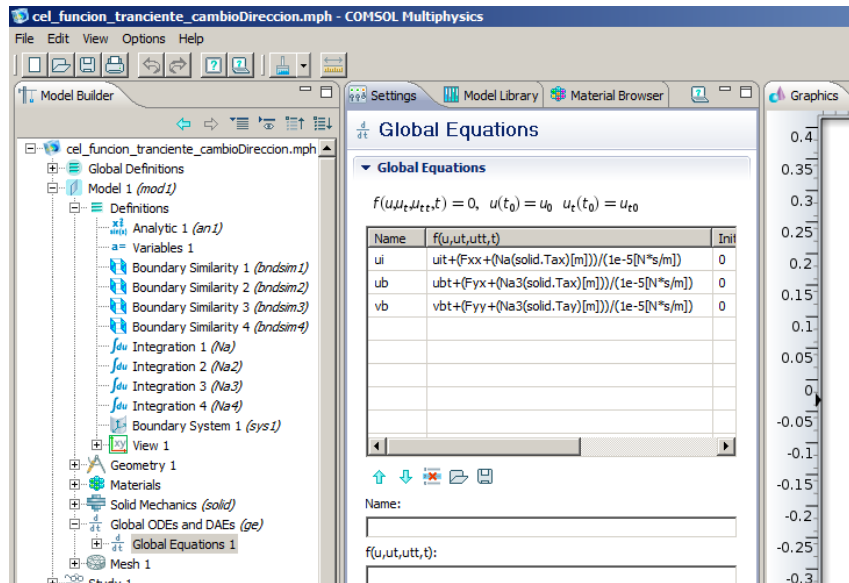


Figura 3-5 Aplicación de las ecuaciones diferenciales (ODEs) en Comsol.

A continuación, se grafica el módulo elástico, suponiendo una celda porosa de acero sin aplicar la función de transición (Figura 3-6) y aplicando la transición (Figura 3-7), para un mismo tipo de mado.



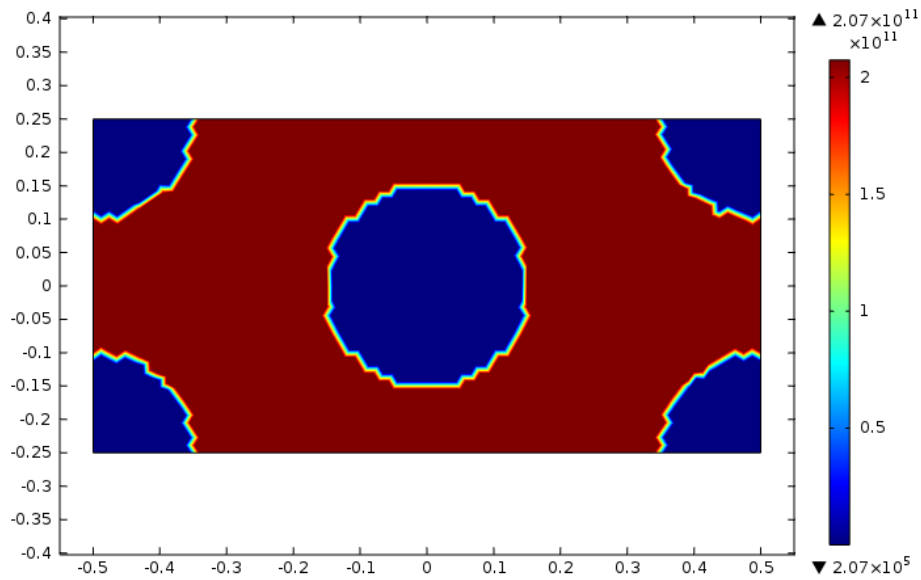


Figura 3-6 Módulo elástico de la celda porosa, sin la función de transición (cambio brusco de poro a material).

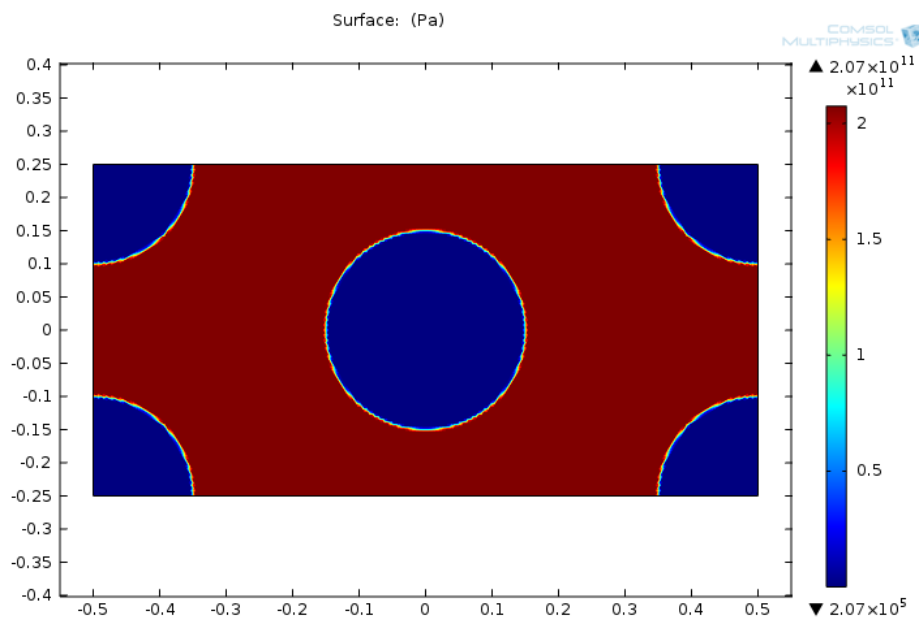


Figura 3-7 Módulo elástico de la celda porosa ( $E^*$ ) con la transición suavizada, la zona roja es la matriz (material) y las zonas azules son los poros.

De estas últimas figuras puede observarse que con la función de transición se representa mejor la ubicación de las fronteras entre hueco y material

Los resultados obtenidos se presentan en el capítulo 4.

### 3.2 Modelos 3D

Ahora los modelos 3D son bloques en los cuales los huecos se convierten en cilindros, todos los detalles están definidos de forma similar:

Los acoplamientos están aplicados en caras opuestas (en los modelos 2D estaban definidos en lados).

Las integrales están aplicadas sobre áreas, lo mismo para fuerzas, esfuerzos y deformaciones.

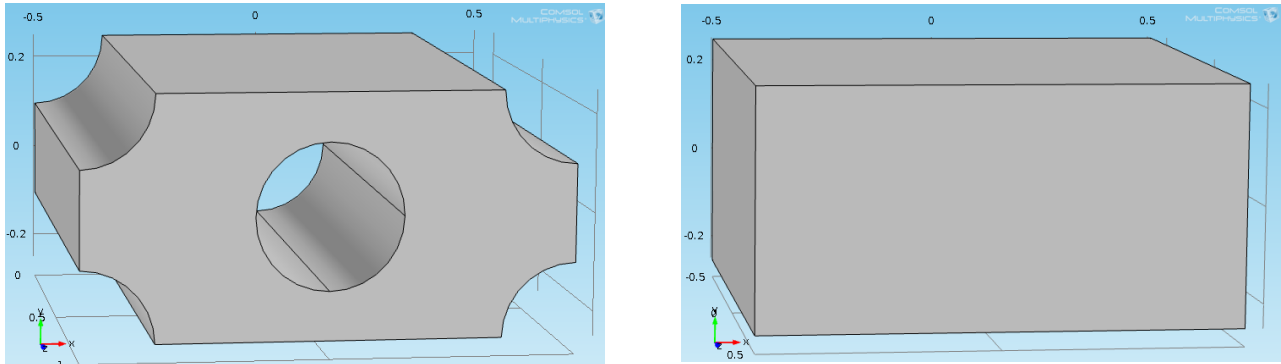


Figura 3-8 Modelos en 3 dimensiones, modelo G, modelo F; huecos por medio de una función de posición.

A continuación, en la Figura 3-9, se puede apreciar el módulo elástico en la celda en 3 dimensiones su distribución a lo largo de la geometría y la transición en las fronteras entre poro y material.

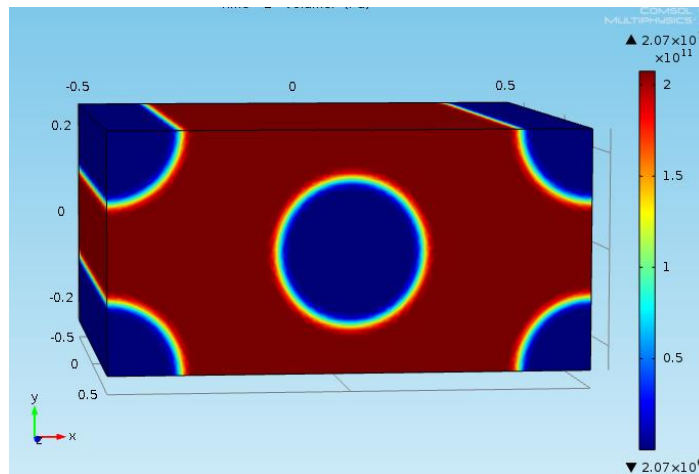


Figura 3-9 Módulo elástico de la celda porosa ( $E^*$ ) en 3 dimensiones.

La técnica descrita bien puede aplicarse a celdas unitarias con mayor o menor número de poros.

Los modelos G y F se extendieron a la tercera dimensión y ahora los huecos se convierten en cilindros, las ecuaciones diferenciales, ecuaciones ((3-6), (3-7) y (3-8)) en

los ODEs (Figura 3-5) aumentan, para así obtener los desplazamientos correspondientes a la tercera dimensión. Por tanto, ahora los desplazamientos serán  $u$ ,  $v$  y  $w$  los cuales se aplican a las caras izquierda, base y cara frontal, quedando de la siguiente manera.

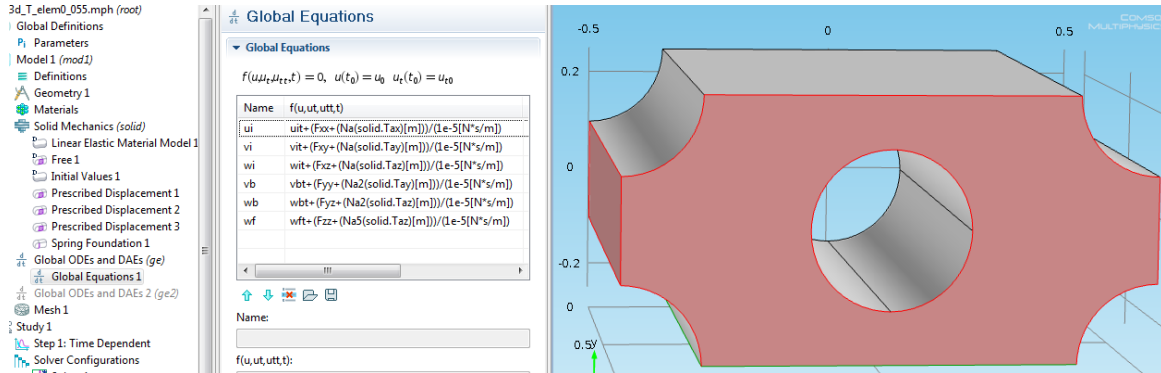


Figura 3-10 Ecuaciones diferenciales (ODEs) que resultan en  $(u_i, v_i, w_i, u_b, v_b, w_b, u_f, v_f, w_f)$ .

Haciendo una reducción para suponer deformación plana como en el modelo 2D, entonces no hay deformación en el eje  $z$ , entonces  $w_f = 0$  y solo se aplicarán los correspondientes a las caras izquierda e inferior. También existe relación entre esfuerzos cortantes por tanto, entre desplazamientos, quedando de la siguiente manera:

$$u_b = v_i(H/B) \quad (3-9)$$

$$u_f = w_i(D/H) \quad (3-10)$$

$$v_f = w_b(B/H) \quad (3-11)$$

Donde  $B$  es la base,  $H$  la altura y  $D$  profundidad, de la celda unitaria.

Los resultados obtenidos de las simulaciones y el análisis de los mismos se presentan en el siguiente capítulo (capítulo 4) en el cual además se obtienen las propiedades efectivas de los modelos.



## 4 ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

### 4.1 Rotación del estado de esfuerzo biaxial

Haciendo uso de la definición de esfuerzo plano [26] y [27] donde se define como un estado de esfuerzo en el cual el esfuerzo normal  $\sigma$  en el eje z, perpendicular al plano x-y y todos los esfuerzos cortantes asociados perpendiculares al plano x-y, son asumidos como de magnitud 0. Suponiendo un estado de esfuerzos biaxial y haciendo rotar la geometría para observar el comportamiento que tiene dicha geometría con la aplicación de esfuerzos a diferentes ángulos, se define la Figura 4-1, donde, inicialmente, se tienen esfuerzos axiales ( $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ ) y esfuerzo cortante  $\tau_{xy}$  se traduce en nuevos esfuerzos axiales y cortantes en función de los originales ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ) para cuando el material es rotado un ángulo  $\theta$  cualquiera. Se obtienen las relaciones ((4-1), (4-2) y (4-3))

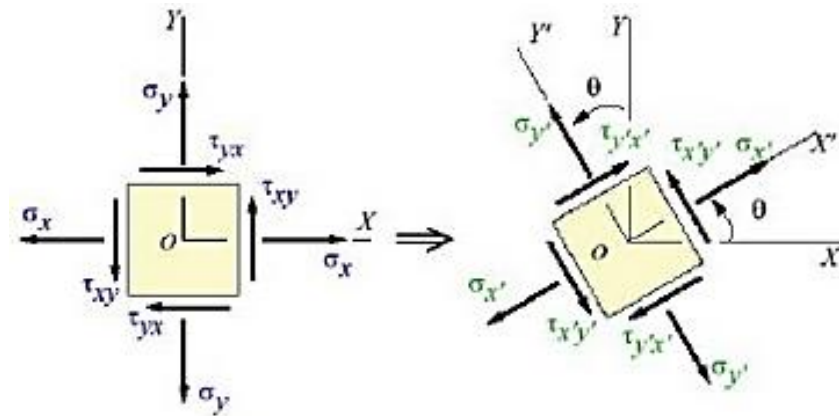


Figura 4-1 Elemento sometido a esfuerzo plano [27].

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \quad (4-1)$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta) \quad (4-2)$$

$$\sigma_{y_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \quad (4-3)$$

En el caso que suponer un estado de esfuerzo biaxial no existen esfuerzos cortantes pero si hay esfuerzos en ambas direcciones del plano xy obteniendose nuevas relaciones ((4-4), (4-5) y (4-6)).

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) \quad (4-4)$$

$$\tau_{x_1y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) \quad (4-5)$$

$$\sigma_{y_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) \quad (4-6)$$

Los modelos G y F se hacen rotar para observar el comportamiento que presentan a diferentes ángulos usando (4-4), (4-5) y (4-6).

Se aplican 2 esfuerzos a tensión en las caras horizontal y verticales, a partir de 2 fuerzas, usando la definición de esfuerzo como fuerza sobre área ( $\sigma = F/A$ ).

## 4.2 Propiedades de los modelos

El material aplicado a los modelos es acero ( $E = 207 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.28$ ), relación de módulos elásticos  $\eta = 10^{-6}$  y misma relación para módulo de Poisson.

Se utilizaron los siguientes valores de fuerza  $F_x=10000 \text{ N}$ ,  $F_y=5000 \text{ N}$ , y las dimensiones de la celda  $H = 0.5 \text{ m}$ ,  $B = 1 \text{ m}$  y  $D = 1 \text{ m}$ , donde  $H, B$  y  $D$  son las medidas de altura, base y profundidad respectivamente

$$A_i = HD \quad (4-7)$$

$$A_b = BD \quad (4-8)$$

Entonces de  $\sigma = F/A$ ,  $\sigma_x = 20000 \text{ Pa}$ ,  $\sigma_y = 5000 \text{ Pa}$ . Sustituyendo estos valores en (4-4), (4-5) y (4-6) y utilizando nuevamente la ley de Hooke, se obtienen 4 fuerzas ( $F_{xx}$ ,  $F_{yy}$ ,  $F_{xy}$  y  $F_{yx}$ ) que son aplicadas en las ecuaciones diferenciales propuestas

(3-6), (3-7) y (3-8) que en Comsol se introducen como ODEs Figura 3-5. El mismo paquete de simulación resuelve internamente arrojando como resultados los desplazamientos aplicados como condiciones de frontera (descritos en el capítulo 3).

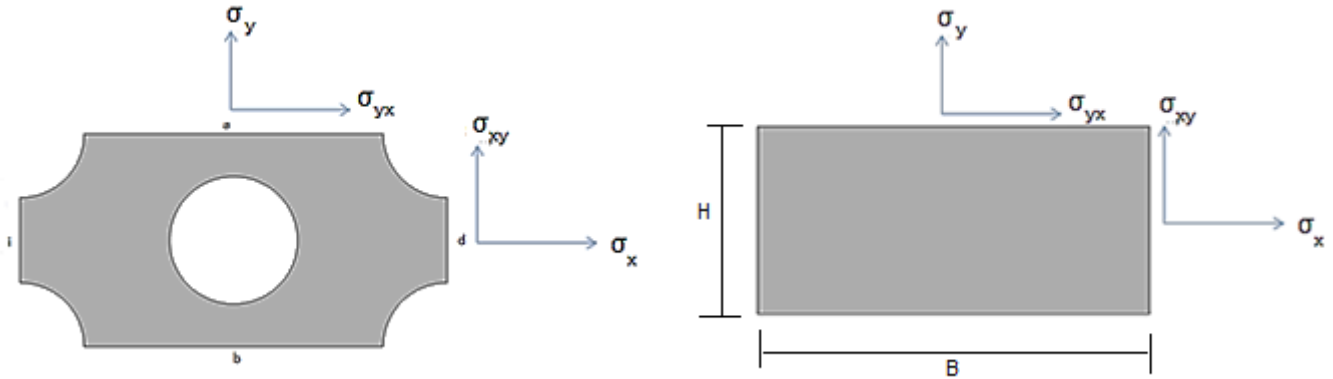


Figura 4-2 Modelo G y modelo F.

### 4.3 Resultados de modelos 2D

A continuación se muestran los resultados obtenidos en los modelos G y F a diferentes tamaños de malla y transición (para el modelo con función).

#### Modelo G

Se aplica un tipo de mallado; Free Triangular, tamaño de elemento 0.005 m. Número de elementos 42670, número de grados de libertad 172155.

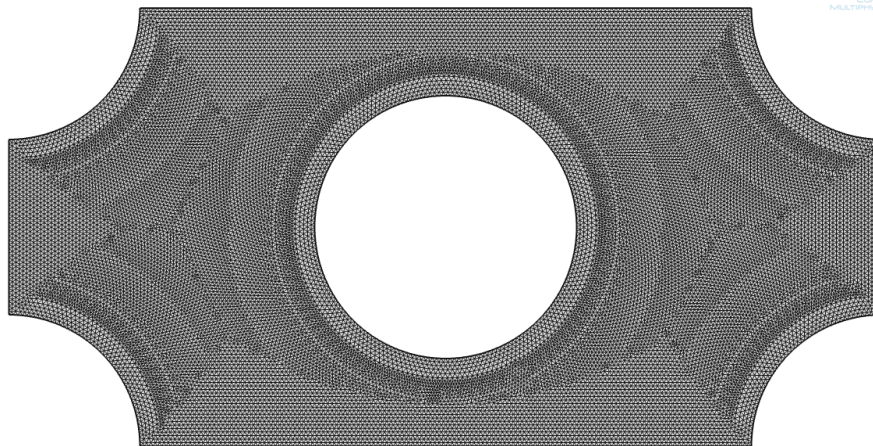


Figura 4-3 Mallado con tamaño de elemento 0.005.

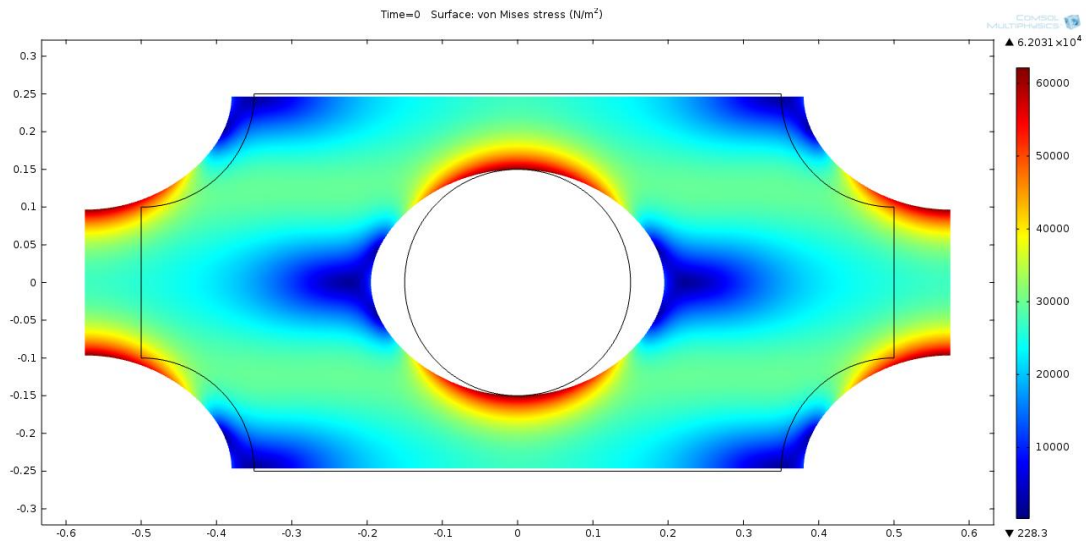


Figura 4-4 Esfuerzo de Von Mises a 0°.

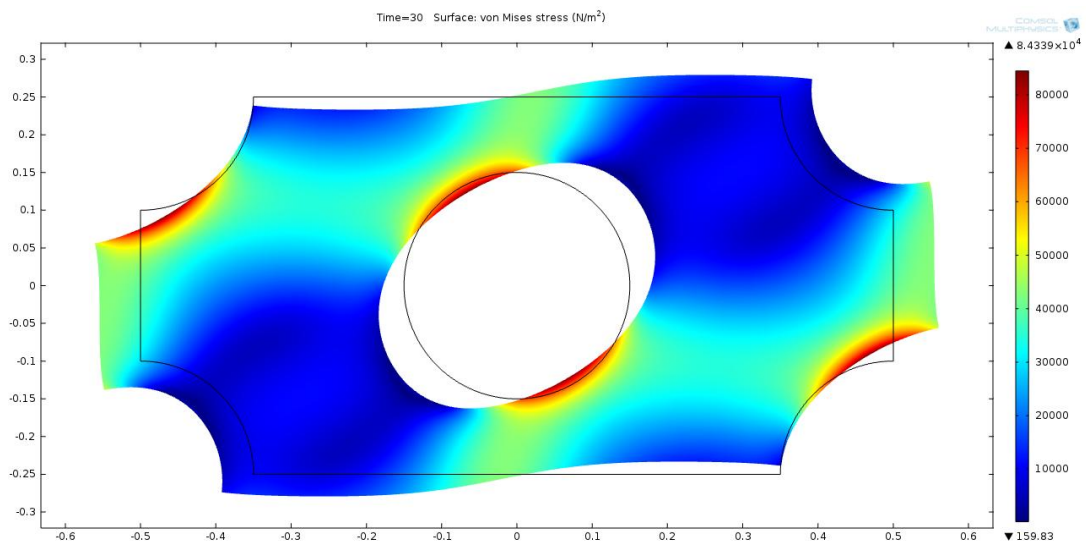


Figura 4-5 Esfuerzo de Von Mises a 30°.



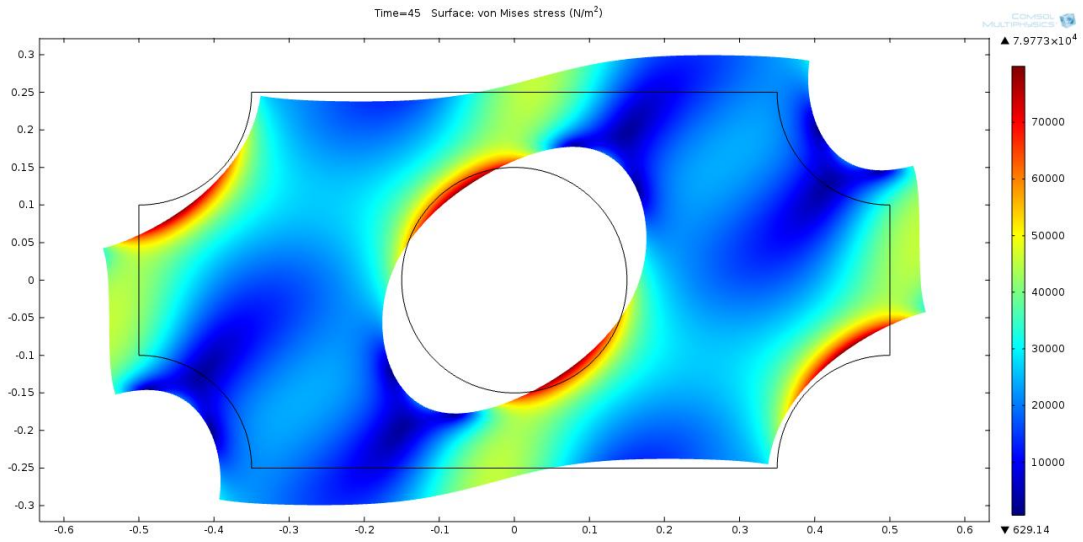


Figura 4-6 Esfuerzo de Von Mises a 45°.

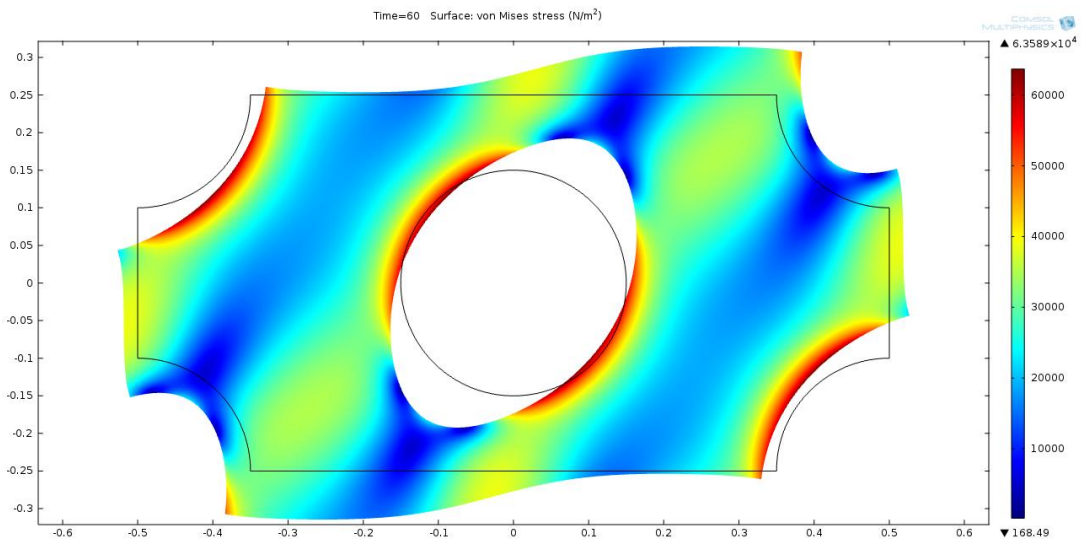
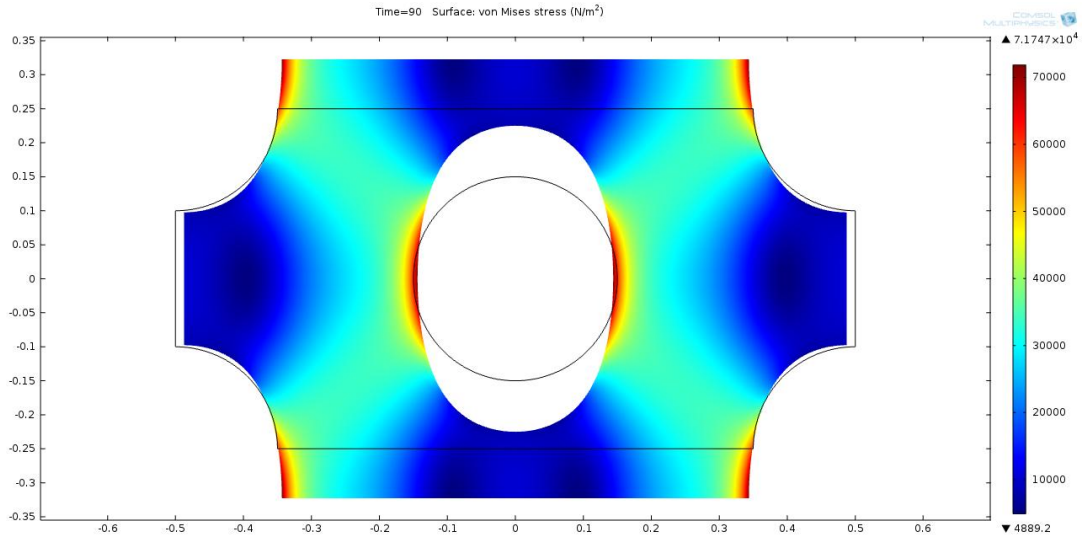


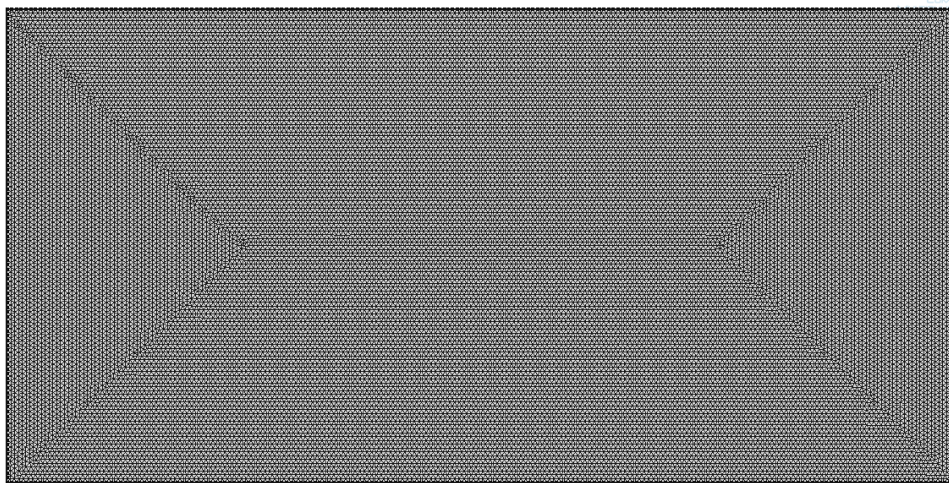
Figura 4-7 Esfuerzo de Von Mises a 60°.



*Figura 4-8 Esfuerzo de Von Mises a 90°.*

### Modelo F

Tipo de mallado; Free Triangular, tamaño de elemento 0.005 y transición 0.005 m, número de elementos 49712, número de grados de libertad 200053.



*Figura 4-9 Mallado con tamaño de elemento 0.005.*

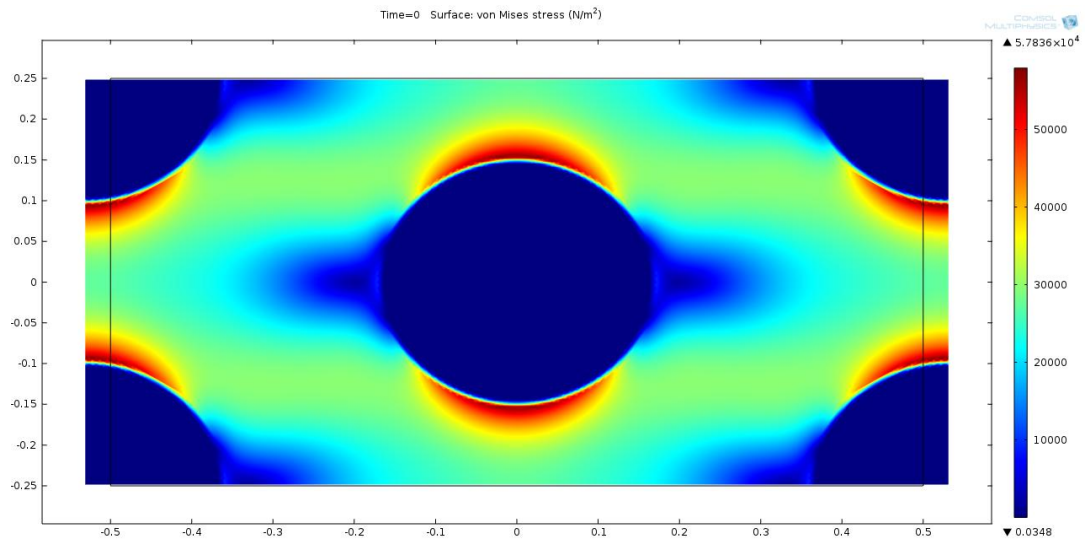


Figura 4-10 Esfuerzo de Von Mises a 0° modelo F.

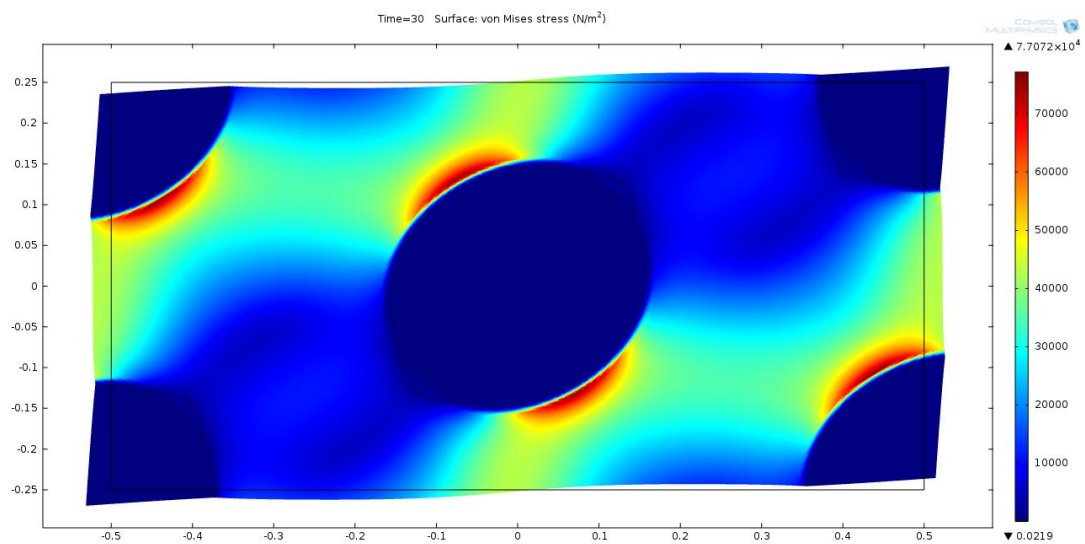


Figura 4-11 Esfuerzo de Von Mises a 30° modelo F.

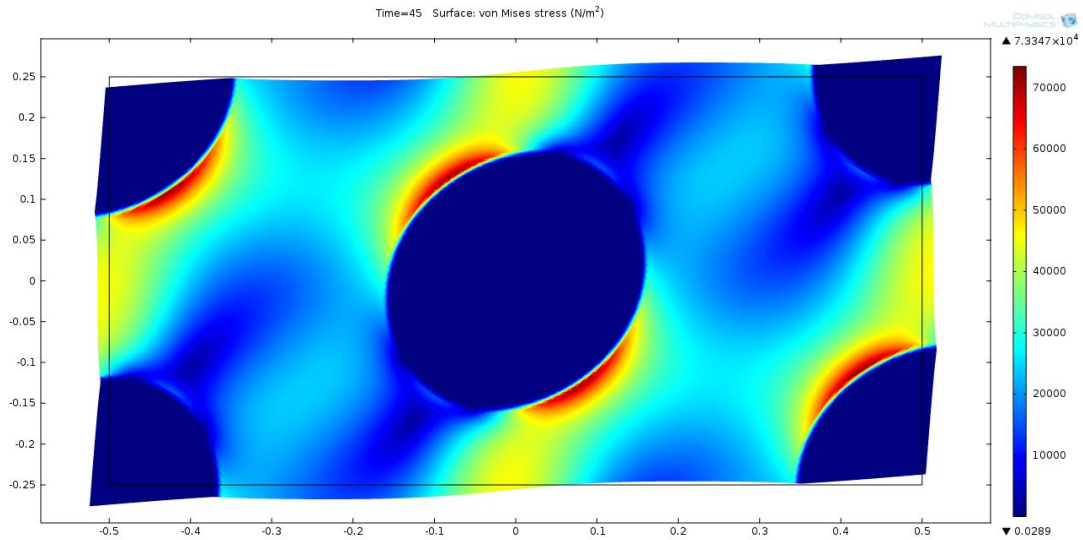


Figura 4-12 Esfuerzo de Von Mises a 45° modelo F.

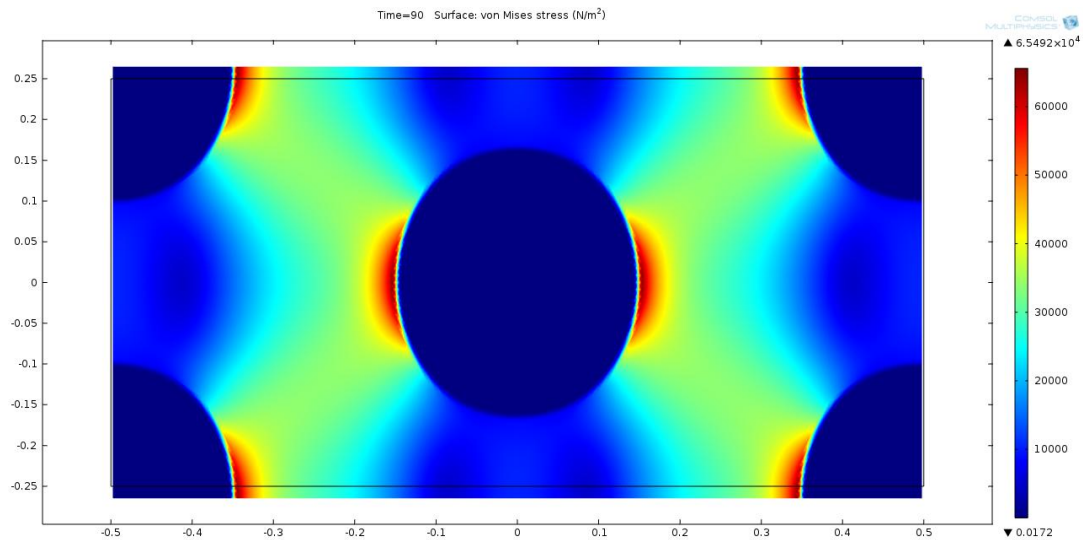


Figura 4-13 Esfuerzo de Von Mises a 90° modelo F.

Se observó que hay un buen comportamiento en el modelo F (modelo con función) mientras que el tamaño de elemento sea menor o igual a la transición: Cuando el tamaño de elemento es mayor que la transición, aparecen picos tanto en los valores de esfuerzo como en desplazamientos. Esto debido a que la transición está dada por un valor el cual en realidad su ancho de banda es dos veces el valor predefinido (Figura 3-2).

A continuación se presentan resultados con la presencia de picos, debido a que el mallado es mayor al tamaño de la transición.

Tamaño de elemento 0.01 y transición 0.0025 m

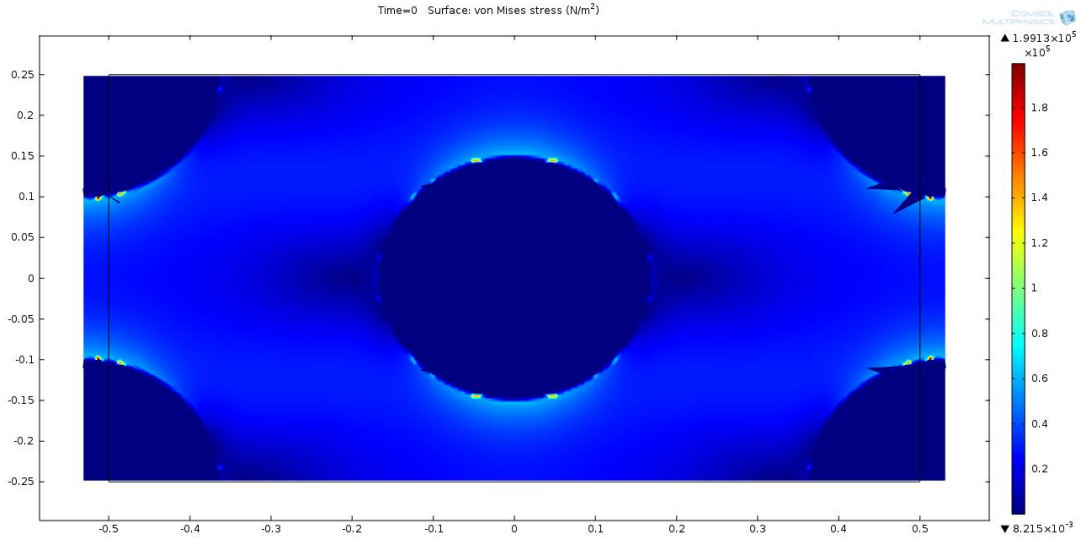


Figura 4-14 Esfuerzo de Von Mises a 0° t. elemento 0.01 y transición 0.0025.

Se realizó un estudio de convergencia para determinar el mejor tamaño de elementos del mallado y transición. Enseguida se presentan los resultados en la Tabla 4-1; en el modelo F se aplica la relación  $\eta = 10^{-6}$ , enseguida se muestran resultados a diferentes valores de  $\eta$ .

Máximos valores de esfuerzo de Von Mises (en Pa) a diferentes angulos							
Modelo	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°
Función (T.elem=0.005 y Trans=0.0025)	6.0456E+04	7.9958E+04	7.6801E+04	6.1766E+04	6.9079E+04	7.6801E+04	6.0456E+04
Función (T.elem=0.005 y Trans=0.005)	5.7836E+04	7.7072E+04	7.3347E+04	5.9069E+04	6.5492E+04	7.3347E+04	5.7836E+04
Función (T.elem=0.005 y Trans=0.0075)	5.5886E+04	7.4088E+04	7.0118E+04	5.6840E+04	6.2766E+04	7.0118E+04	5.5886E+04
Función (T.elem=0.005 y Trans=0.01)	5.4403E+04	7.1129E+04	6.7427E+04	5.4812E+04	6.0960E+04	6.7427E+04	5.4403E+04
Función (T.elem=0.01 y Trans=0.0025)	1.9913E+05	2.1867E+05	1.9540E+05	1.7424E+05	2.2561E+05	1.9582E+05	1.9913E+05
Función (T.elem=0.01 y Trans=0.005)	5.8008E+04	7.7244E+04	7.3567E+04	5.9147E+04	6.5373E+04	7.3567E+04	5.8008E+04
Función (T.elem=0.01 y Trans=0.0075)	5.5818E+04	7.3677E+04	6.9931E+04	5.7086E+04	6.3731E+04	6.9931E+04	5.5818E+04
Función (T.elem=0.01 y Trans=0.01)	5.4238E+04	7.1067E+04	6.7316E+04	5.4927E+04	6.0905E+04	6.7316E+04	5.4238E+04
Geometria (T.elem = 0.005)	6.2031E+04	8.4339E+04	7.9773E+04	6.3589E+04	7.1747E+04	7.9776E+04	6.2031E+04
Geometria (T.elem = 0.01)	6.1955E+04	8.4236E+04	7.9702E+04	6.3530E+04	7.1591E+04	7.9696E+04	6.1955E+04

	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	Transición	Promedio
	2.5%	5.2%	3.7%	2.9%	3.7%	3.7%	2.5%	<b>0.0025</b>	3.5%
Error (con t.e_función 0.005 y t.e_geom 0.005)	6.8%	8.6%	8.1%	7.1%	8.7%	8.1%	6.8%	<b>0.005</b>	7.7%
	9.9%	12.2%	12.1%	10.6%	12.5%	12.1%	9.9%	<b>0.0075</b>	11.3%
	12.3%	15.7%	15.5%	13.8%	15.0%	15.5%	12.3%	<b>0.01</b>	14.3%
	221.0%	159.3%	144.9%	174.0%	214.5%	145.5%	221.0%	<b>0.0025</b>	182.9%
Error (con t.e_función 0.01 y t.e_geom 0.005)	6.5%	8.4%	7.8%	7.0%	8.9%	7.8%	6.5%	<b>0.005</b>	7.5%
	10.0%	12.6%	12.3%	10.2%	11.2%	12.3%	10.0%	<b>0.0075</b>	11.3%
	12.6%	15.7%	15.6%	13.6%	15.1%	15.6%	12.6%	<b>0.01</b>	14.4%

Tabla 4-1 Comparativa de los esfuerzos de Von Mises con  $\eta = 10^{-6}$  en modelo F.

Se observó que los resultados se ven afectados a diferentes valores de  $\eta$  (relación entre módulos elásticos) se presentan en la siguiente tabla para un ángulo de 45°.

$\eta$	Esfuerzo máximo de Von Mises a 45° (Pa)
$10^{-2}$	7.3550 E+4
$10^{-4}$	7.6713 E+4
$10^{-6}$	7.6801 E+4
$10^{-7}$	1.8096 E+5

Tabla 4-2 Esfuerzos máximos de Von Mises a diferentes valores de  $\eta$ .

De la Tabla 4-2 puede observarse que para  $\eta = 10^{-7}$  se dispara el valor de esfuerzo máximo. La razón es la presencia de picos y valores más bajos significaría que los nodos pertenecientes a los poros son tan poco rígidos que no hay fuerza presente que impida que se muevan libremente, vistos como picos.

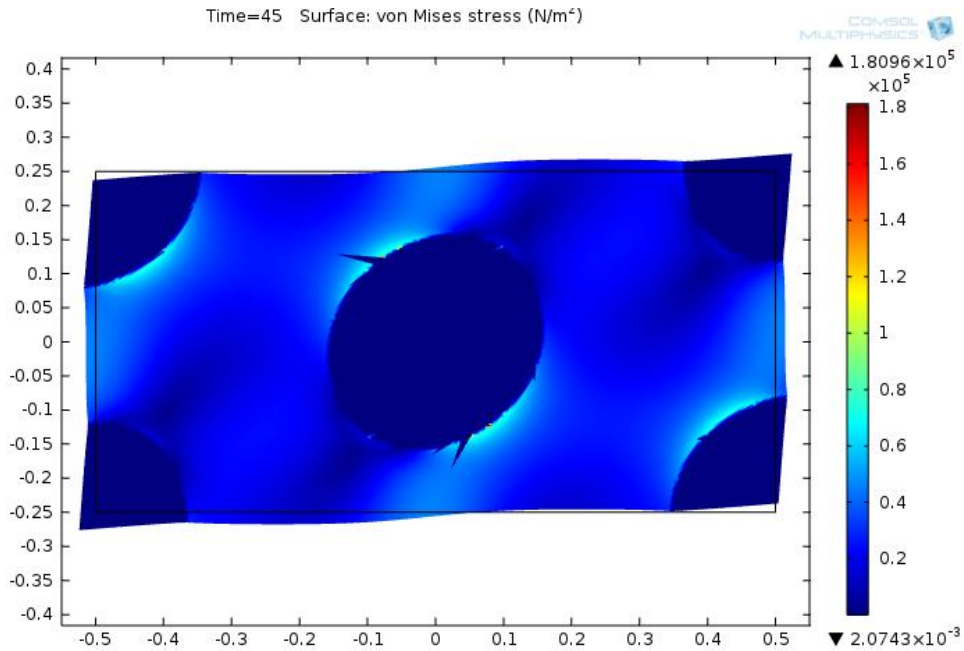


Figura 4-15 Esfuerzo de Von Mises a 45° t. elemento 0.005 y transición 0.0025.

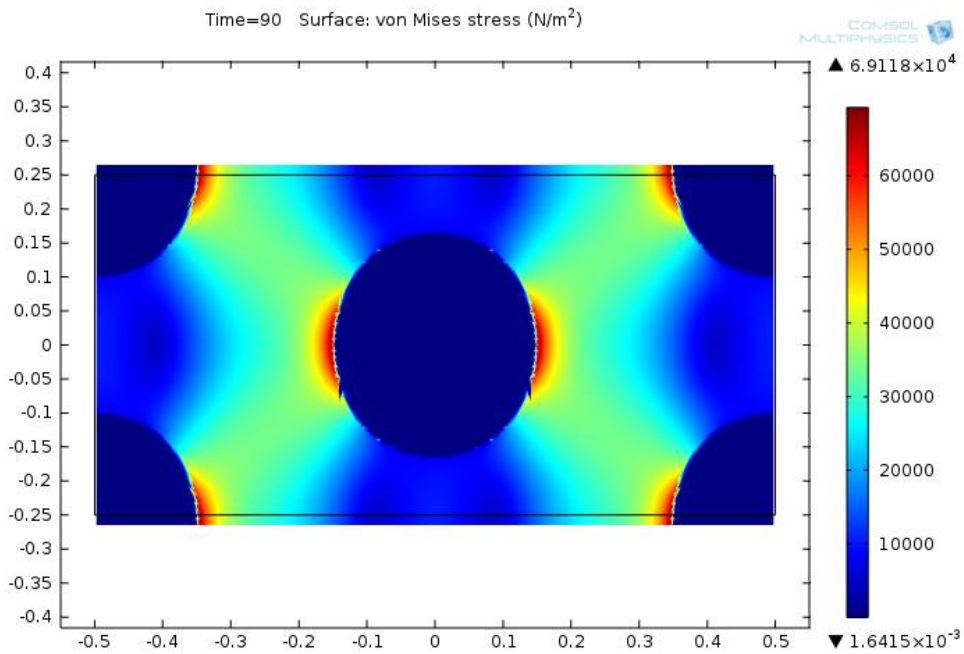


Figura 4-16 Esfuerzo de Von Mises a 90° t. elemento 0.005 y transición 0.0025.

Este es el motivo por el cual se decide usar la relación  $\eta = 10^{-6}$ , puesto que es la menor relación permisible (por el propio modelo) y que arroje buenos resultados.

Una vez calculado el error de que existe entre modelos G y F respecto a los esfuerzos máximos se calcula ahora el error que existe respecto a las deformaciones, haciendo variar con pasos uniformes tanto en el tamaño del mallado como en la transición.

De los resultados presentados en la Tabla 4-1 el tamaño de elemento y mallado que mejores resultados arrojan (menor error) son:

- Tamaño de elemento 0.005 y transición 0.0025 tiempo de simulación de 23 minutos).
- Tamaño de elemento 0.005 y transición 0.005 (mismo tiempo de simulación).

Primero se calcula la máxima deformación que existe en todo el cálculo para usarlo como valor para normalizar el error de las deformaciones.

$$M = [\max(\varepsilon_{xx}) \max(\varepsilon_{yy}) \max(\varepsilon_{xy})] \quad (4-9)$$

Una vez obtenido el vector de deformaciones máximas, se determina la deformación máxima en el vector de máximos, para normalizar los resultados.

$$M_T = \max(M)$$

Además se calcula el error de cada deformación del modelo con función, tomando como referencia al modelo F con elementos finos (tamaño de elemento 0.005 y transición 0.0025), se toma la raíz cuadrada de la sumatoria de cada diferencia normalizada.

$$e_{Ep_{xx}} = \left( \frac{\left( \sum \left( \frac{(\varepsilon_{xx_i} - \varepsilon_{xx_1})^2}{M_T} \right) \right)}{N_\theta} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4-10)$$

$N_\theta$  = Número de ángulos (en que se ha rotado)

Obteniendo un vector de errores como sigue

$$e_{Ep} = [e_{Ep_{xx_1}} \ e_{Ep_{yy_1}} \ e_{Ep_{xy_1}}]$$

Graficando el  $\log_{10}$  de los errores respecto a la relación que existe entre la transición y el tamaño de elemento (del mallado), llamándola  $\varphi$ .

$$\varphi = \frac{\Delta h}{\Delta x} \quad (4-11)$$

Donde

$\Delta h$  es el ancho medio de la transición y  $\Delta x$  es el tamaño de los elementos del mallado.



Se obtienen resultados para 6 tamaños diferentes de mallado y 6 tamaños de transición (es decir 36 simulaciones).

Tomando como referencia al modelos F con tamaño de elemento 0.005 y transición 0.0025 ( $\varphi = 0.5$ ).

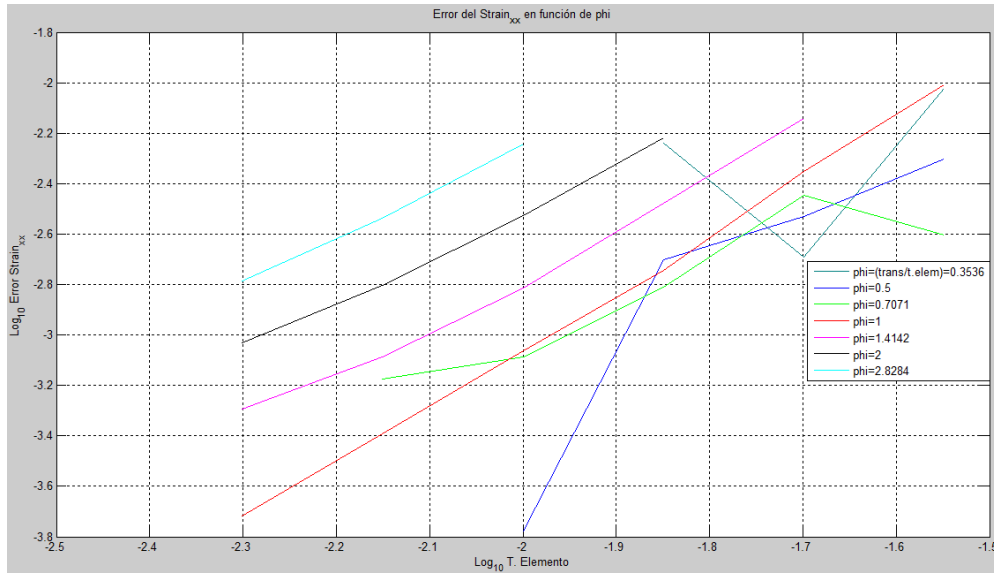


Figura 4-17  $\log_{10}$  del error de la deformación xx respecto a  $\varphi$ .

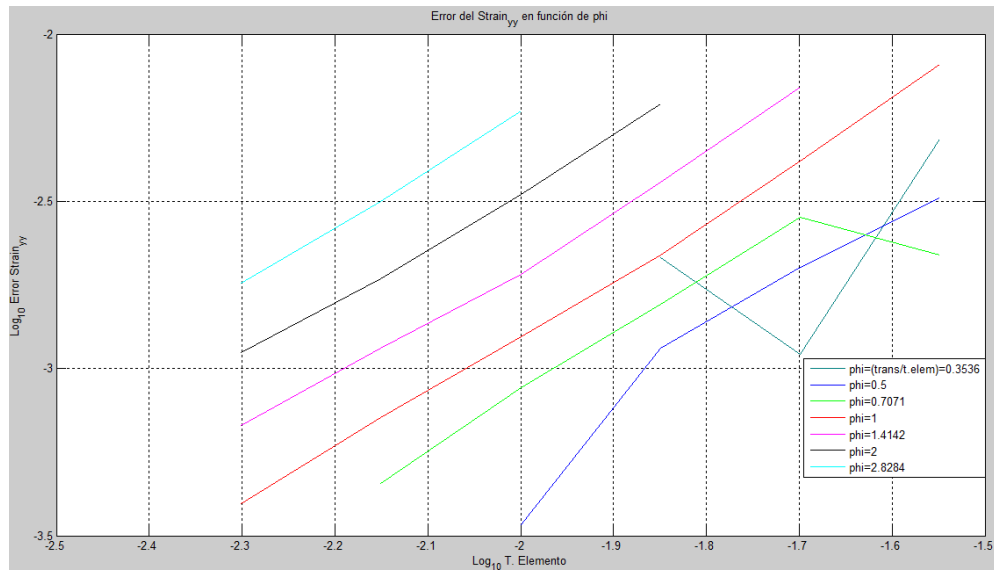


Figura 4-18  $\log_{10}$  del error de la deformación yy respecto a  $\varphi$ .

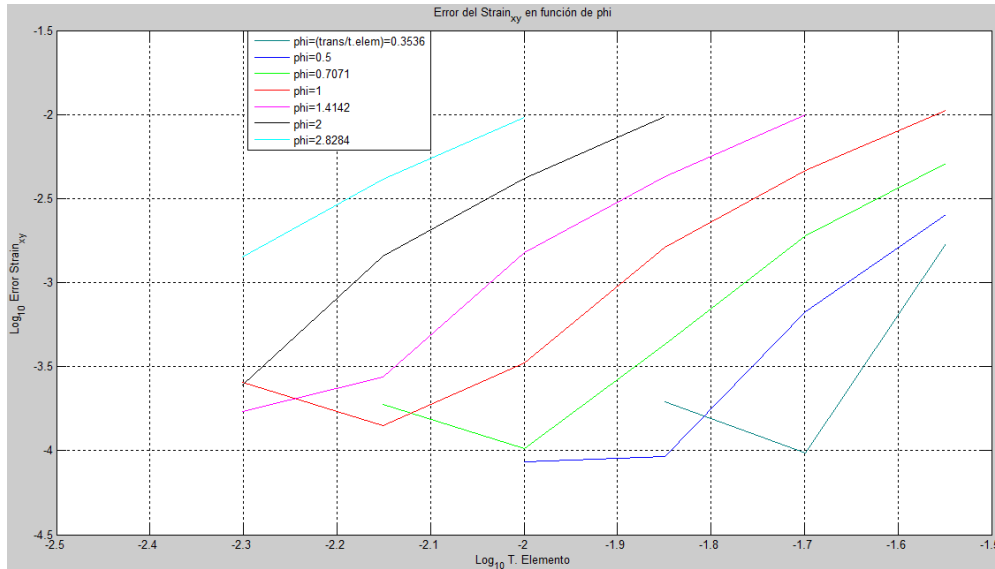


Figura 4-19  $\log_{10}$  del error de la deformación xy respecto a  $\phi$ .

En las 3 gráficas se puede observar que con  $\phi = 0.5$  (línea azul), cuando la transición es la mitad del tamaño de los elementos del mallado, converge rápido (al menos la deformación xx y la deformación yy) pero en la deformación xy y la deformación yx se percibe una desaceleración en la convergencia pero sigue convergiendo, cuando  $\phi = 1$  (línea roja, transición igual que el tamaño de los elementos) presentan una muy buena convergencia en los la deformación xx, y yy, pero se observa que al final deja de converger y comienza a subir en la deformación xy.

Tomando como referencia al modelos F con tamaño de elemento 0.005 y transición 0.005 ( $\phi = 1$ ).

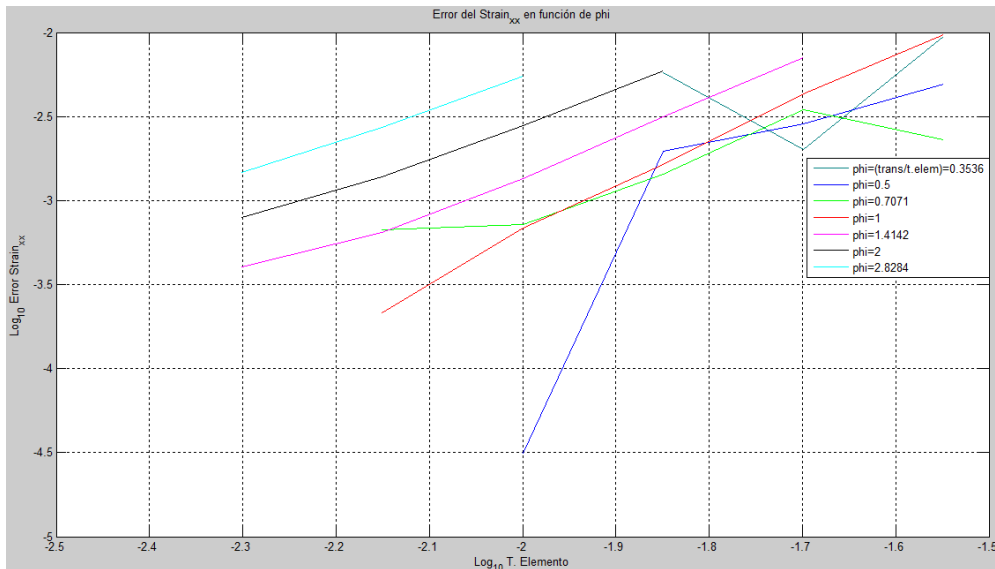


Figura 4-20  $\log_{10}$  del error de la deformación xx respecto a  $\phi$ .

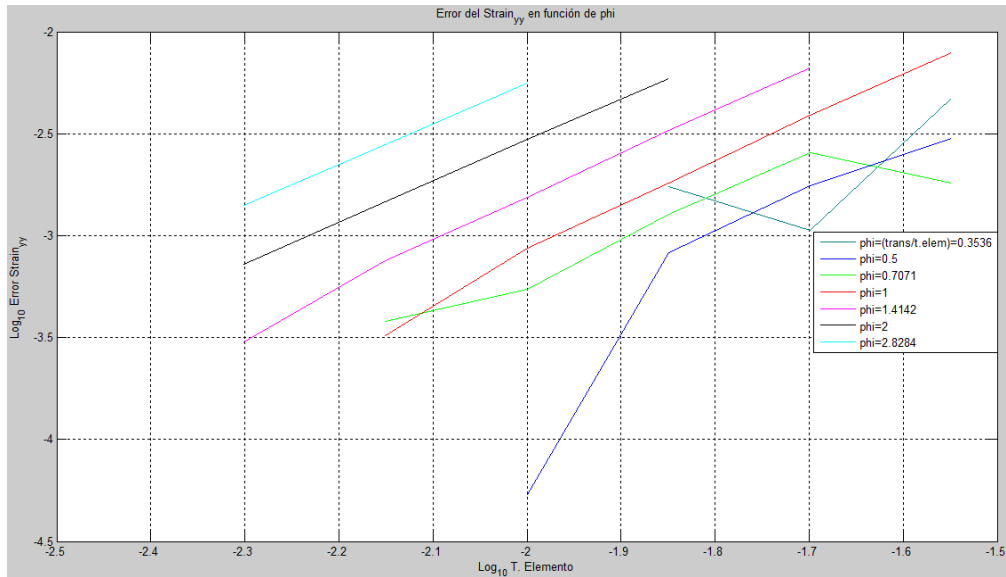


Figura 4-21  $\log_{10}$  del error de la deformación yy respecto a  $\phi$ .

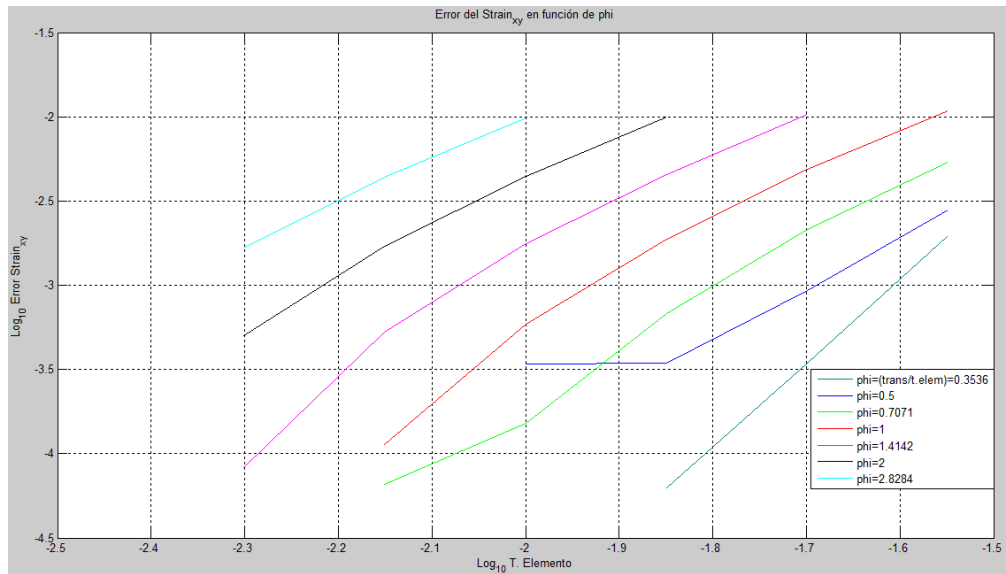


Figura 4-22  $\log_{10}$  del error de la deformación xy respecto a  $\phi$ .

En estas últimas 3 gráficas se puede observar que, igual que las anteriores que con  $\phi = 0.5$  (línea azul), converge rápido (al menos la deformación xx y la deformación yy), pero en la deformación xy y la deformación yx desacelera la convergencia, pero cuando  $\phi = 1$  (línea roja; transición igual que el tamaño de los elementos) presentan una muy buena convergencia incluso en la deformación xy. El último valor no aparece puesto que es cuando transición y tamaño de elemento son 0.005, y es lo que se está tomando

como referencia; entonces el error es 0 y como se están graficando los  $\log_{10}$ , entonces ese valor es  $-\infty$ .

Si se someten los modelos solo a un estado de esfuerzo uniaxial, en la que sólo se aplica esfuerzo en  $x$ , se obtienen los módulos elásticos y de Poisson efectivos para los modelos G y F (2D).

$$E_G = \sigma_{xG} / \varepsilon_{xxG}, \quad \nu_g = -\varepsilon_{yyG} / \varepsilon_{xxG}$$

$$E_F = \sigma_{xF} / \varepsilon_{xxF}, \quad \nu_f = -\varepsilon_{yyF} / \varepsilon_{xxF}$$

Módulo de elasticidad y de Poisson del modelo G (2D)

$$E_G = 1.0468 * 10^{11} \text{ Pa}, \quad \nu_G = 0.3250$$

Módulo de elasticidad y de Poisson del modelo F (2D)

$$E_F = 1.0457 * 10^{11} \text{ Pa}, \quad \nu_F = 0.3250$$

Se observa que las propiedades efectivas entre modelos comparan bien, presentando los siguientes errores:

$$e_{E(G-F)} = 0.1 \%$$

$$e_{\nu(G-F)} = 0 \%$$

De los resultados obtenidos tanto de los esfuerzos de Von Mises como de las deformaciones, se puede concluir que la mejor opción es utilizar tamaño de elementos de 0.005 y transición 0.0025, ( $\varphi = 0.5$ ) y como límite se debe usar tamaño de elementos de 0.005 y transición 0.005, ( $\varphi = 1$ ).

## 4.4 Resultados de modelos 3D

Modelo G 3-D, tamaño de elemento 0.05, 46756 elementos, gdl 201533, tiempo de simulación 7 horas, 56 minutos, 38 segundos.

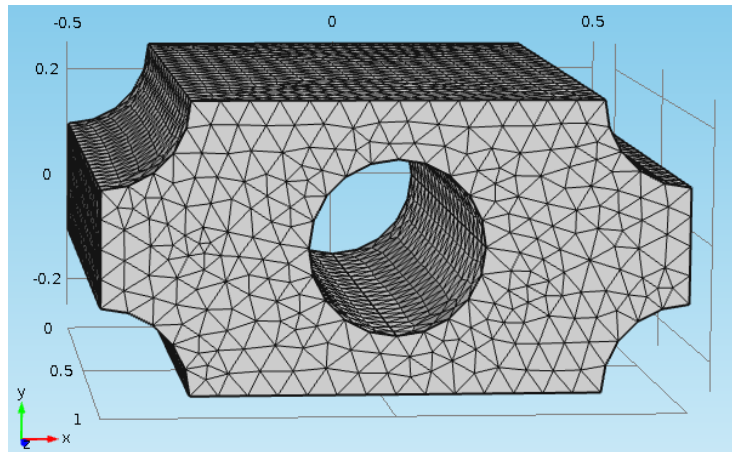


Figura 4-23 Mallado del modelo G en 3 dimensiones (elementos tetraédricos).

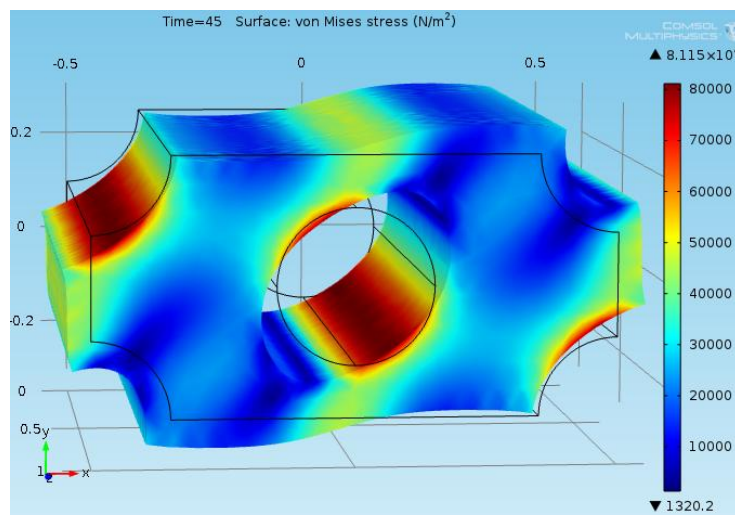


Figura 4-24 Esfuerzo de Von Mises rotado 45° respecto a z.

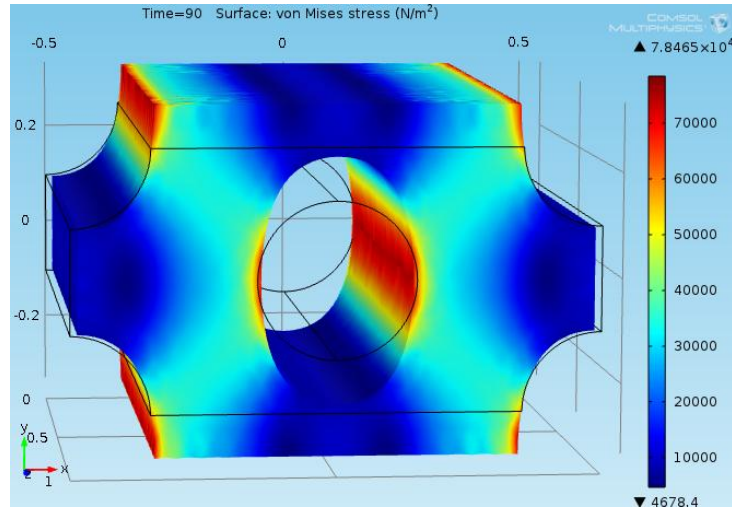


Figura 4-25 Esfuerzo de Von Mises rotado 90° respecto a z.

Se observa que la concentración de esfuerzos es en la misma zona que en el modelo G (2D).

Pasando al modelo F (3D), la relación  $\eta = E/E^*$  se debió aumentar de  $10^{-6}$  a  $10^{-3}$  ya que pasa algo similar a lo observado en el modelo F (2D) en la cual se observan picos que significaría que los nodos pertenecientes a los poros son tan poco rígidos que no hay fuerza presente que impida que se muevan libremente (Figura 4-15 y Figura 4-16).

Modelo F 3D, transición 0.015, tamaño de elemento 0.03, 43178 elementos, gdl 185372 y tiempo de simulación 4 horas, 56 minutos, 13 segundos.

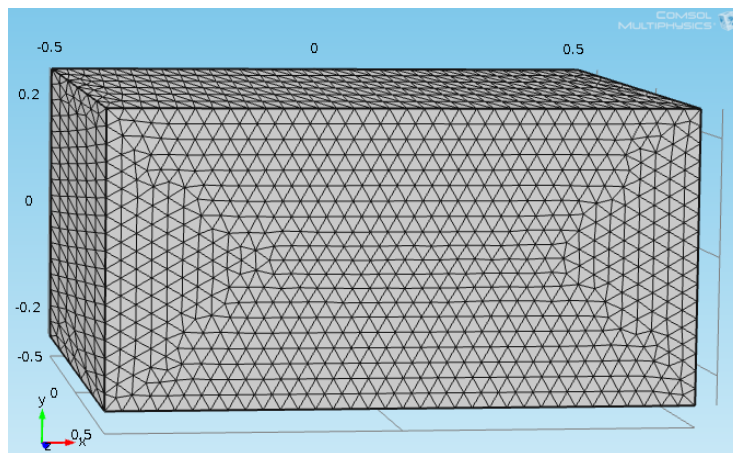


Figura 4-26 Mallado del modelo F en 3 dimensiones.

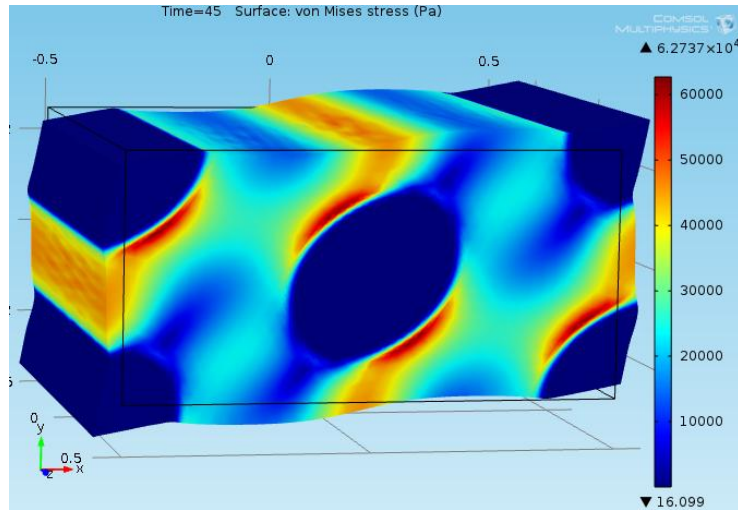


Figura 4-27 Esfuerzo de Von Mises rotado 45° respecto a z.

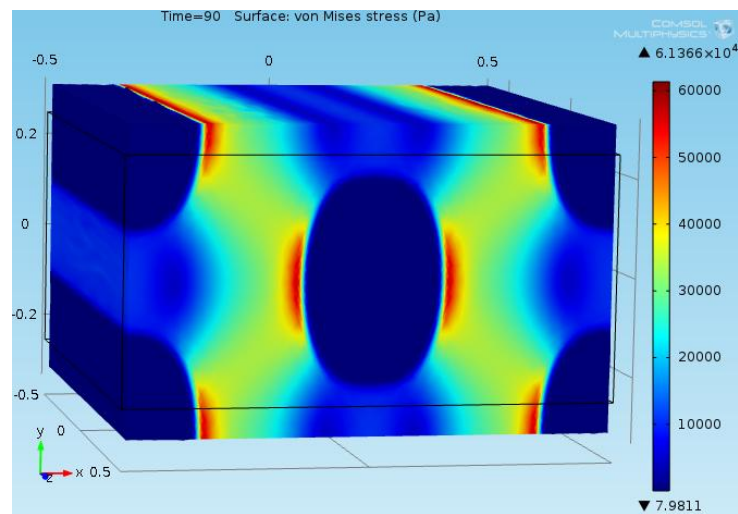


Figura 4-28 Esfuerzo de Von Mises rotado 90° respecto a z.

A continuación se presentan resultados del esfuerzo de Von Mises a diferentes ángulos y en error presente entre modelos G y F.

Modelo G					
Angulo (°)	Esf. Von Mises (Pa)	T. elem			
		0.05			
0	7.1573E+04				
30	8.6047E+04				
45	8.1150E+04				
60	6.4339E+04				
90	7.8465E+04				
135	8.0903E+04				
180	7.1573E+04				
Modelo F					
Ángulo (°)	T. elemento	Transición	Esf. Von Mises (Pa)	Error modelo F vs Modelo G	Error promedio
	0.03	0.015			
0			5.6123E+04	21.5863524	
30			6.5973E+04	23.32911083	
45			6.2737E+04	22.6900801	
60			5.1809E+04	19.47496853	21.91849486
90			6.1366E+04	21.79188173	
135			6.2319E+04	22.97071802	
180			5.6123E+04	21.5863524	

Tabla 4-3 Comparativa de esfuerzos de Von Mises (modelos 3D).

Los resultados presentados en la Tabla 4-3 son los que menor error presentaron en el esfuerzo de Von Mises para el modelo F.

Ahora, graficando el efecto de los desplazamientos totales aplicados ( $u_i, v_i, u_b, v_b$ ) en los 2 modelos (G y F).

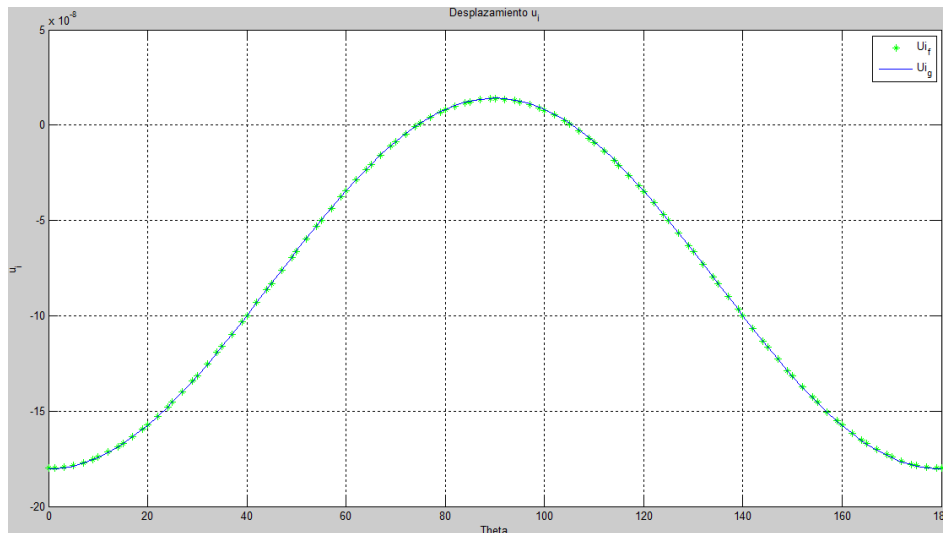


Figura 4-29 Desplazamiento aplicado  $u_i$ .



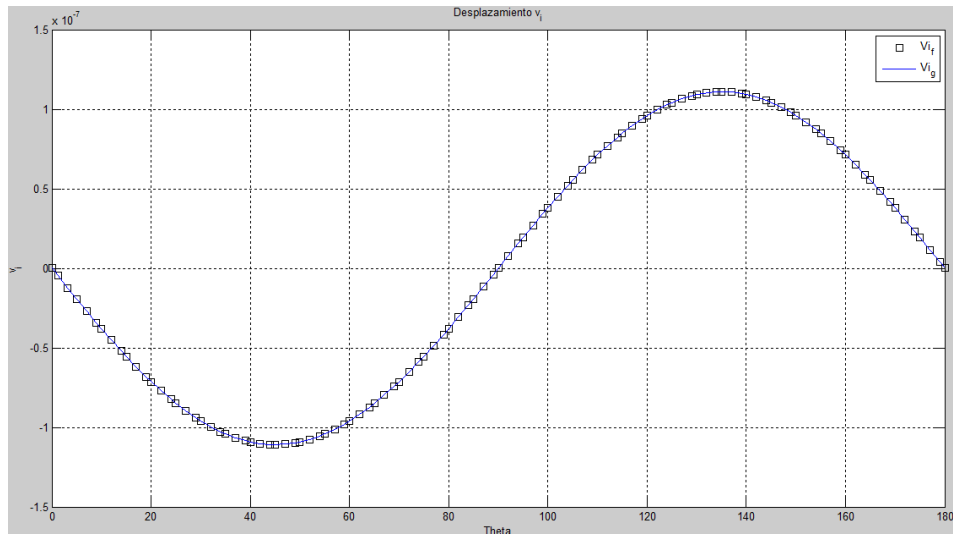


Figura 4-30 Desplazamiento aplicado  $v_i$ .

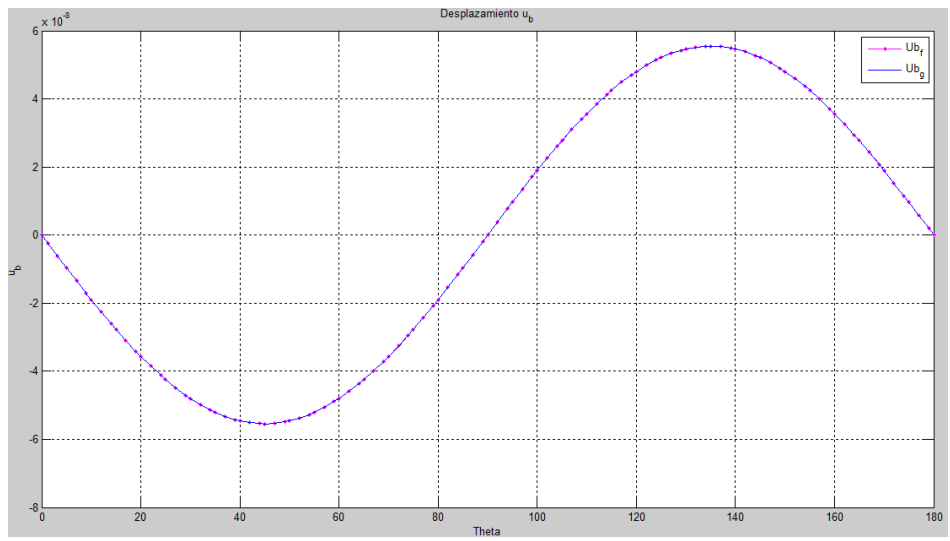


Figura 4-31 Desplazamiento aplicado  $u_b$ .

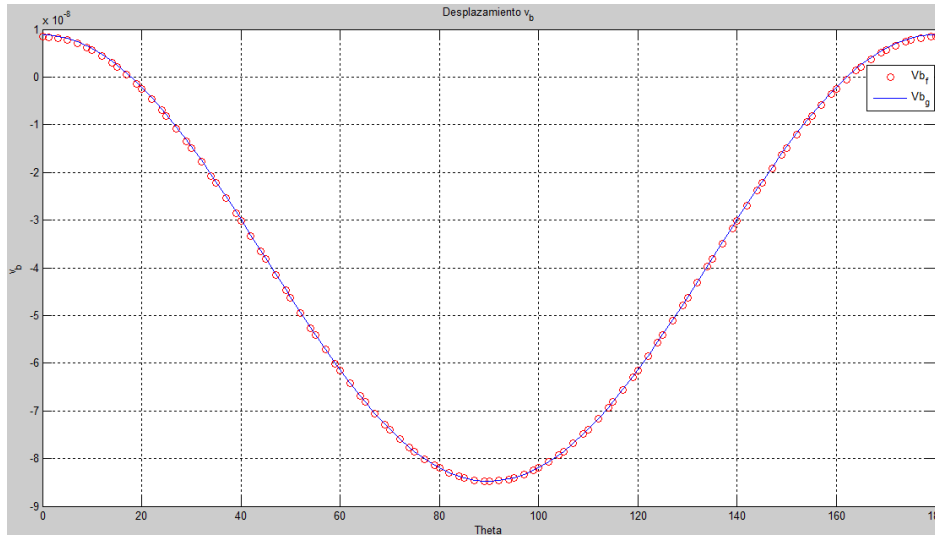


Figura 4-32 Desplazamiento aplicado  $v_b$ .

De los gráficos anteriores puede apreciarse únicamente que el comportamiento entre los modelos G y F es igual y como se traslapan las curvas, pero no el error presente en los datos por tal motivo se optó por calcular el error de forma similar a las deformaciones correspondientes de los modelos 2D (4-10), obteniendo así los errores para  $u_i, v_i, u_b, v_b$ , como sigue;

$$e_u = \left( \sqrt{\frac{\left( \sum \left( \frac{(u_{iG} - u_{iF})^2}{M_{u,vG}} \right) \right)}{N_\theta}} \right) \quad (4-12)$$

Donde  $u_{iG}$  es el desplazamiento del modelo G.

$u_{iF}$  es el desplazamiento del modelo F.

$M_{u,vG}$  es el máximo de los desplazamientos del modelo G.

$N_\theta$  es el número de pruebas tomadas.

Acomodando los errores en forma de vector:

$$e_{u,v} = [e_{u_i} \ e_{v_i} \ e_{u_b} \ e_{v_b}]$$

$$e_{u,v} = [2.2e - 003, 8.5409e - 005, 4.27e - 005, 2.4e - 003]$$

Ahora, sometiendo los modelos solo a esfuerzo uniaxial, en la que sólo se aplica esfuerzo en x, y en y se obtienen los módulos elásticos y de Poisson para los modelos G y F (3D).

$$E_{x_G} = \sigma_{x_G} / \varepsilon_{xx_G}, \quad \nu_{xy_G} = -\varepsilon_{yy_G} / \varepsilon_{xx_G}$$

$$E_{y_G} = \sigma_{y_G} / \varepsilon_{yy_G}, \quad \nu_{yx_G} = -\varepsilon_{xx_G} / \varepsilon_{yy_G}$$

$$E_F = \sigma_{x_F} / \varepsilon_{xx_F}, \quad \nu_{xy_F} = -\varepsilon_{yy_F} / \varepsilon_{xx_F}$$

$$E_{y_F} = \sigma_{y_F} / \varepsilon_{yy_F}, \quad \nu_{yx_F} = -\varepsilon_{xx_F} / \varepsilon_{yy_F}$$

Módulo de elasticidad y de Poisson del modelo G (3D)

$$E_{x_G} = \frac{\sigma_{x_G}}{\varepsilon_{xx_G}} = 1.0202 * 10^{11}$$

$$E_{y_G} = \frac{\sigma_{y_G}}{\varepsilon_{yy_G}} = 1.0777 * 10^{11}$$

$$\nu_{xy_G} = 0.3268$$

$$\nu_{yx_G} = 0.3402$$

Módulo de elasticidad y de Poisson del modelo F (3D)

$$E_{x_F} = \frac{\sigma_{x_F}}{\varepsilon_{xx_F}} = 1.0225 * 10^{11} \text{ Pa}$$

$$E_{y_F} = 1.0788 * 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\nu_{xy_F} = 0.3232$$

$$\nu_{yx_F} = 0.3379$$

Aunque los esfuerzos máximos de Von Mises en ambos modelos presentan un error, los resultados son comparables tanto en los desplazamientos como en las propiedades efectivas, por tanto se concluye que el modelo F con tamaño de elementos 0.03 y transición 0.015 presenta buenos resultados en comparación al modelo G, comparando las propiedades efectivas de los modelos G (2D y 3D) por ser los más exactos, para obtener el error presente.

$$e_{E(G_{3D}-G_{2D})} = 2.5 \%$$

$$e_{\nu(G_{3D}-G_{2D})} = 0.6 \%$$

Puesto que los modelos G son más exactos ya que la porosidad está aplicada de forma geométrica, entonces se compararon las propiedades efectivas (módulo elástico y de Poisson) presentándose errores pequeños lo cual se comprueba que éstas propiedades describen bien a los modelos propuestos. Errores similares se obtienen en la comparativa entre modelos F (2D y 3D).

Como el módulo elástico aplicado al material sólido es el correspondiente al acero,  $2.07 * 10^{11}$  Pa, entonces se ve reducido a la mitad en los modelos, debido a la presencia de los poros. El módulo de Poisson se aumenta ya que el aplicado al modelo es de 0.28. Entonces, se puede concluir que el volumen no se ve afectado tanto es decir, el material se encoje más en las direcciones laterales cuando el módulo de Poisson es más grande. Pero, al estar más cerca de 0.5, entonces el volumen del material se cambia menos que en un material sin poros, bajo condiciones de tensión uniaxial

Retomando el tema de anisotropía (del capítulo 2) y para obtener el tensor de constantes elásticas correspondiente a estos modelos se propone una reducción de 3 a 2 dimensiones teniendo lo siguiente:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xxa} & \sigma_{xxb} & \sigma_{xxc} \\ \sigma_{yya} & \sigma_{yyb} & \sigma_{yyc} \\ \tau_{xya} & \tau_{xyb} & \tau_{xyc} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xxa} & \varepsilon_{xxb} & \varepsilon_{xxc} \\ \varepsilon_{yya} & \varepsilon_{yyb} & \varepsilon_{yyc} \\ \varepsilon_{xya} & \varepsilon_{xyb} & \varepsilon_{xyc} \end{pmatrix}$$

Donde a, b y c significan datos tomados a diferentes ángulos.

Tomando datos a  $0^\circ$   $45^\circ$  y  $90^\circ$ , se obtienen los tensores de esfuerzo y deformación siguientes para el modelo F (3D):

$$\varepsilon = 10^{-6} * \begin{pmatrix} 0.1799 & 0.0830 & -0.0137 \\ -0.0169 & 0.0764 & 0.1696 \\ -0.0000 & 0.1109 & -0.0000 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = 10^4 \begin{pmatrix} 2.0000 & 1.2500 & 0.5000 \\ 0.5000 & 1.2500 & 2.0000 \\ 0 & 0.7500 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

Y como

$$C = \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}^{-1})$$

Entonces

$$C = 10^{11} \begin{pmatrix} 1.1478 & 0.3878 & 0.0010 \\ 0.3914 & 1.2111 & 0.0002 \\ 0.0000 & 0.0001 & 0.3381 \end{pmatrix}$$

Este mismo tensor C se obtiene si se eligen datos correspondientes a otros ángulos, comprobando así que existe un único tensor de constantes elásticas para un mismo material no importando el estado de esfuerzos.

Estos resultados fueron obtenidos por medio de Matlab y debido a errores numéricos, se hace una corrección del tensor. Suponiendo un material ortotrópico (ortorrómbico) (de la ec. (2-3), página 29) para encontrar las constantes elásticas para los modelos propuestos.

$$C = 10^{11} \begin{pmatrix} 1.1478 & 0.38959 & 0 \\ 0.38959 & 1.2111 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3381 \end{pmatrix}$$

Entonces el tensor C se puede definir por 4 constantes elásticas que son 2 módulos elásticos y 2 módulos de Poisson, para deformación plana.

En la ec. (2-3) se muestra el tensor de constantes elásticas invertido, entonces, se invierte nuevamente para obtener el tensor C original para materiales ortotrópicos

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{E_x}{\nu_{xy}\nu_{yx} - 1} & -\frac{E_x\nu_{yx}}{\nu_{xy}\nu_{yx} - 1} & 0 \\ -\frac{E_y\nu_{xy}}{\nu_{xy}\nu_{yx} - 1} & -\frac{E_y}{\nu_{xy}\nu_{yx} - 1} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{pmatrix}$$

Si se toma la ec. (2-3) ahora (4-13) y lo que se invierte es el tensor C obtenido:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{pmatrix} \quad (4-13)$$

$$C^{-1} = 10^{-10} \begin{pmatrix} 0.0978 & -0.031463 & 0 \\ -0.031463 & 0.0927 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2958 \end{pmatrix}$$

Se puede obtener  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $\nu_{xy}$  y  $\nu_{yx}$  de la siguiente forma

$$\frac{1}{E_x} = 0.0978 * 10^{-10} \quad (4-14)$$

$$\frac{1}{E_y} = 0.0927 * 10^{-10} \quad (4-15)$$

$$-\frac{\nu_{yx}}{E_y} = -0.031463 * 10^{-10} \quad (4-16)$$

$$-\frac{\nu_{xy}}{E_x} = -0.031463 * 10^{-10} \quad (4-17)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$E_x = 1.0225 * 10^{11} \text{ Pa}$$

$$E_y = 1.0788 * 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\nu_{xy} = 0.3217$$

$$\nu_{yx} = 0.3394$$

Para validar los resultados se retoma la teoría desarrollada por Gibson y Ashby [6] en la cual se obtiene la relación mostrada en el capítulo 2, ec. (1-30) (pag. 21) ahora ec. (4-17):

$$\frac{E_p}{E_s} = C \left( \frac{\rho_p}{\rho_s} \right)^2 \quad (4-18)$$

Donde  $E_p$  es el módulo elástico del material poroso.

$E_s$  es el módulo elástico de las paredes celulares.

$C$  es una constante que depende de las características geométricas, tomada generalmente como 1.

$\rho_p$  es la densidad aparente del material poroso.

$\rho_s$  es la densidad del material de las paredes celulares.

El radio de los poros aplicados en el modelo es de 0.15 m y se calcula la densidad como:

$$\rho_p = \frac{m}{V} \quad (4-19)$$

$$\rho_s = \frac{m_s}{V_s} \quad (4-20)$$

Donde  $V$  y  $m$  son el volumen y masa aparentes del material poroso respectivamente.

$V_s$  y  $m_s$  son el volumen y masa correspondientes a las paredes celulares respectivamente.

Si se suponen huecos “vacíos”, entonces:

$$m = m_s$$

$$\frac{\rho_p}{\rho_s} = \frac{\frac{m}{V}}{\frac{m_s}{V_s}} = \frac{V_s}{V} \quad (4-21)$$

En los volúmenes unitarios para el modelo propuesto se tienen 2 poros completos (1 central y 1/4 en cada esquina):

$$V = BHD = (0.5)(1)(1) = 0.5 \text{ m}^3 \quad (4-22)$$

$$V_s = V - \sum V_{poros} = 0.5 - 2(\pi r^2 D) = 0.5 - \frac{9\pi}{200} = 0.3586 \text{ m}^3 \quad (4-23)$$

Entonces

$$\frac{\rho_p}{\rho_s} = \frac{0.3586}{0.5} = 0.7172$$

$$E_p = E_s C_2 \left( \frac{\rho_p}{\rho_s} \right)^2 = 207 * 10^{11} (0.7172)^2 = 1.065 * 10^{11}$$

Haciendo una nueva comparación entre propiedades efectivas en la Tabla 4-4

	<b>Módulo Elástico (Pa)</b>	<b>Módulo de Poisson</b>
<b>Modelo G</b>	$E_x = \frac{\sigma_{xG}}{\varepsilon_{xxG}} = 1.0202 * 10^{11}$ $E_y = \frac{\sigma_{yG}}{\varepsilon_{yyG}} = 1.0777 * 10^{11}$	$\nu_{xy} = 0.3268$ $\nu_{yx} = 0.3402$
<b>Modelo F</b>	$E_x = \frac{\sigma_{xF}}{\varepsilon_{xxF}} = 1.0225 * 10^{11}$ $E_y = 1.0788 * 10^{11}$	$\nu_{xy} = 0.3232$ $\nu_{yx} = 0.3379$
<b>Del tensor C</b>	$E_x = 1.0225 * 10^{11}$ $E_y = 1.0788 * 10^{11}$	$\nu_{xy} = 0.3217$ $\nu_{yx} = 0.3394$
<b>Teoría de Gibson y Ashby</b>	$E_p = 1.065 * 10^{11}$	

*Tabla 4-4 Propiedades efectivas obtenidas de los modelos.*

Se calcula el error presente en los módulos elásticos y de Poisson, tomando como real los correspondientes al modelo G

Entre modelos G y F (3D):

$$e_{E_x(G-F)} = 0.22 \%$$

$$e_{\nu_{xy}(G-F)} = 1.1 \%$$

$$e_{E_y(G-F)} = 0.1 \%$$

$$e_{\nu_{yx}(G-F)} = 0.7 \%$$

Entre modelo G (3D) y teoría de Gibson y Ashby:

$$e_{(E_{xG}-E_p)} = 4.3 \%$$

$$e_{(E_{yG}-E_p)} = 1.1 \%$$



Entre modelo F (3D) y tensor ortorrómbico (ortotrópico):

$$e_{E_x(F-C)} = 0 \%$$

$$e_{\nu_{xy}(F-C)} = 0.4 \%$$

$$e_{E_y(F-C)} = 0 \%$$

$$e_{\nu_{yx}(F-C)} = 0.4 \%$$

Puede observarse que los errores entre módulos elásticos y de Poisson entre modelos G y F (3D), son pequeños por tanto el modelo F funciona bien y arroja resultados comparables respecto al modelo G, las mismas propiedades efectivas obtenidas del tensor de constantes elástica son exactamente iguales a las obtenidas a partir de las definiciones:  $E = \sigma/\varepsilon$  y  $\nu = -\varepsilon/\varepsilon$  en  $x$  y  $y$  respectivamente.

La comparativa con la teoría de Gibson y Ashby [6] entre módulos elásticos arroja resultados muy aproximados por tanto con esto se valida el cálculo.

## 4.5 Discusión de resultados

El análisis en dos dimensiones realizado arrojó resultados comparables en los modelos G y F tanto para los esfuerzos como para las deformaciones. Se observa cómo afecta el tamaño de los elementos del mallado en los resultados obtenidos, así como el tamaño de la transición entre hueco y material y como están relacionados éstos en el modelo F.

La comparación entre esfuerzos de Von Mises y el estudio de convergencia arrojaron la misma información respecto al tamaño de los elementos del mallado y ancho de banda en la transición, que deben ser elegidos para obtener mejores resultados en la simulación. Se obtuvo que la mejor relación entre el tamaño de la transición ( $\Delta h$ ) y el tamaño de elemento ( $\Delta x$ ) es:

$$\varphi = \Delta h/\Delta x = 0.5$$

Y como máximo

$$\varphi = 1$$

En el análisis tridimensional se observó algo similar a lo que pasa en el análisis en dos dimensiones respecto al tamaño de elemento y transición, pero no así con la relación  $\eta$  la cual se debió aumentar para evitar que los nodos pertenecientes a los huecos en el modelo F fueran tan poco rígidos como para presentar picos en los esfuerzos.

El error entre propiedades efectivas de los modelos G y F es muy pequeño mientras que la comparativa con las propiedades obtenidas del tensor C es de 0% y 0.4% el error presente en las correspondientes constantes elásticas ( $E_x, E_y, \nu_{xy}, \nu_{yx}$ ).

Se validaron los resultados obtenidos con la teoría de desarrollada por Gibson y Ashby [6], obteniendo errores de 4.3% y 1% entre módulos de elasticidad.



# CONCLUSIONES

Con el presente trabajo de tesis se logró estudiar, analizar y observar el comportamiento mecánico de materiales porosos, y el efecto que tiene la aplicación de esfuerzos en diferentes orientaciones en sus propiedades efectivas.

Se estudió el efecto anisotrópico en materiales y se desarrolló un código en Matlab capaz de realizar las operaciones de rotación al tensor de constantes elásticas de orden 4 (81 componentes) y presentarlo en su forma reducida de orden 2 (36 componentes). Se propuso una reducción a dos dimensiones para obtener el tensor de constantes elásticas correspondiente a los modelos analizados, con la motivación de tratar de describir los modelos propuestos por medio de propiedades efectivas.

La técnica de análisis descrita en este proyecto de tesis bien puede adaptarse para otro tipo de estructuras porosas en la cual solo se debe modificar la función de posición descrita en el modelo F.

Las principales conclusiones de este trabajo son:

- El tamaño de elementos del mallado y transición están íntimamente relacionadas y son de gran influencia en los resultados obtenidos en la solución, tanto que para obtener el menor error entre los modelos G y F la relación  $\varphi$  se debe de mantener en el rango de 0.5 a 1.
- La relación entre módulos de elasticidad y de Poisson aplicados en el material poroso (modelo F) tiene gran importancia sobre todo en las zonas pertenecientes a los poros y las fronteras entre poro y material, siendo ésta para los modelo 2D un valor de  $\eta = 10^{-6}$  y para los modelos 3D un valor de  $\eta = 10^{-3}$ .
- Las propiedades efectivas como módulo elástico y de Poisson obtenidas por medio del modelo G respectivamente por medio del modelo F son comparables, presentando un error muy pequeño.
- A partir de la simplificación propuesta (de 3D a 2D), se obtuvo el tensor de constantes elásticas y las propiedades efectivas que lo definen ( $E$  y  $\nu$ ), llegando a la conclusión de que el modelo es un material ortotrópico.
- Los módulos elásticos y de Poisson efectivos obtenidos del tensor C corresponden en forma exacta a los valores obtenidos de la deformación bajo cargas uniaxiales.
- El cálculo de propiedades efectivas (módulo elástico) se validó a partir de la teoría de Gibson y Ashby [6].

## Contribuciones

Las principales contribuciones de este trabajo de tesis son:

Se desarrolló un código en Matlab capaz de interpretar la forma simplificada de orden 2 (36 componentes) de los tensores de constantes elásticas convertirla

al tensor de orden 4 (81 componentes) y realizar las operaciones de rotación para finalmente presentarlo en su forma reducida de orden 2.

Se desarrollaron modelos de simulación para el análisis de materiales porosos capaces de describir porosidades por medio de una función de posición que bien puede adaptarse para mayor y/o menor porosidad.

Se lograron obtener las constantes elásticas de los modelos propuestos y se validaron las mismas con la teoría de trabajos publicados.

## **Trabajo futuro**

Proponer otro tipo de estructuras porosas y adaptar la función de posición para éstas, para definir y describir su morfología, así como la obtención de sus propiedades efectivas.

Hacer un estudio más profundo para obtener el tensor de constantes elásticas para las estructuras que se propongan y determinar qué tipo de anisotropía presentan.

Usar éste análisis en materiales bajo condiciones reales de trabajo tales como una estructura usada en alguna aplicación la cual está sometida a esfuerzos.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1]. Ishizaki, K., Komarneni, S. & Nanko, M., 1998. Porous Materials: Process technology and applications. Materials Technology Series, Kluwer Academic Publishers.
- [2]. Lowell, S., Shields, J.E., Thomas, M.A. & Thommes, M., 2004. Characterization of Porous Solids and Powders: Surface Area, Pore Size and Density. Particle Technology Series, Kluwer Academic Publishers.
- [3]. H. N. Chow, S. T. Tan and W. S. Sze, 2007. Layered Modeling of Porous Structures with Voronoi Diagrams, in Computer Aided Design and Applications, v.4, p. 321-330
- [4]. Gent, A. N. Thomas, A. G., 1963. Mechanics of foamed elastic materials. Rubber Chem. Technol, 36 597-610
- [5]. Thompson, W. (Lord Kelvin), 1887. On the division of space with minimal partitional area. Philosophical Magazine 24 (5th Series), 503–514.
- [6]. Gibson, L.J., 1997, Cellular Solids- Structure and Properties. Second edition. Lorna J. Gibson, Michael F. Ashby Ph.D. Thesis, Engineering Department, Cambridge University.
- [7]. Christensen, R.M., 1987. Sufficient symmetry conditions for isotropy of the elastic moduli tensor. Journal of Applied Mechanics 54, 772–777.
- [8]. Weaire, D., Phelan, R., 1994. A counter-example to Kelvin’s conjecture on minimal surfaces. Philosophical Magazine Letters 69, 107–110.
- [9]. Huyse, L., Maes, M.A., 2001. Random field modeling of elastic properties using homogenization. Journal of Engineering Mechanics 127, 27–36.
- [10]. Blazy, J.S., Marie-Louise, A., Forest, S., Chastel, Y., Pineau, A., Awade, A., Grolleron, C., Moussy, F., 2004. Deformation and fracture of aluminium foams under proportional and multi-axial loading: statistical analysis and size effect. International Journal of the Mechanical Sciences 46, 217–244.
- [11]. Ramamurty, U., Paul, A., 2004. Variability in mechanical properties of a metal foam. Acta Materialia 52, 869–876.
- [12]. Roberts, A.P., Garboczi, E.J., 2002. Elastic properties of model random three-dimensional open-cell solids. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 50, 33–55.
- [13]. Shwartz, D. S., Shih, D. S., Evans, A. G. & Wadley, H. N. G. (eds) 1998 Porous and cellular materials for structural applications. Materials Research Society Proceedings, vol. 521. Warrendale, PA: MRS.
- [14]. Van Der Burg, M.W.D., Shulmeister, V., Van Der Geissen, E., Marissen, R., 1997. On the linear elastic properties of regular and random open-cell foam models. Journal of Cellular Plastics 33 (1), 31–54.

- [15]. Hardenacke, V. and Hohe, J., 2009. Local probabilistic homogenization of two-dimensional model foams accounting for micro structural disorder, *Int. J. Solids Struct.* 46 989-1006.
- [16]. Fortes, M.A., Ashby, M.F., 1999. The effect of non-uniformity on the in-plane modulus of honeycombs. *Acta Materialia* 47, 3469–3473.
- [17]. Schraad, M. W., and Harlow, F. H., 2006. A stochastic constitutive model for disordered cellular materials: finite-strain uni-axial compression. *International Journal of Solids and Structure* 43, 3542–3568.
- [18]. Cuitiño, A.M., Zheng, S., 2003. Taylor averaging on heterogeneous foams. *Journal of Composite Materials* 37, 701–713.
- [19]. Kanaun S, Tkachenko O, 2006. Mechanical properties of open cell foams: Simulations by laguerre tessellation procedure. *Int J Fracture* 140:305–12.
- [20]. Gan, Y.X., Chen, C., Shen, Y.P., 2005. Three-dimensional modeling of the mechanical property of linearly elastic open cell foams. *International Journal of Solids and Structures* 42 (26), 6628–6642.
- [21]. Li, K., Gao, X.-L., Subhash, G., 2005. Effects of cell shape and cell wall thickness variations on the elastic properties of two-dimensional cellular solids. *International Journal of Solids and Structures* 42 (5–6), 1777–1795.
- [22]. Zhu, H.X., Hobdell, J.R., Windle, A.H., 2000. Effects of cell irregularity on the elastic properties of open-cell foams. *Acta Materialia* 48, 4893–4900.
- [23]. Zhu, H.X., Windle, A.H., 2002. Effects of cell irregularity on the high strain compression of open-cell foams. *Acta Materialia* 50, 1041–1052.
- [24]. Lee, S., Barthelat, F., Moldovan, N., Espinosa, H.D., Wadley, H.N.G., 2006. Deformation rate effects on failure modes of open-cell Al foams and textile cellular materials. *Int. J. Solids Struct.* 43, 53–73.
- [25]. Love, A. E. H, 1941, 4th edition. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, New York, Dover Publications.
- [26]. Landau y Lifschitz, 1969. *Teoría de la Elasticidad*, Reverté. ISBN 84-291-4080-8.
- [27]. Saracibar, Oliver y Agelet de, 2000. *Mecánica de Medios Continuos para Ingenieros*, Edicions UPC. ISBN 84-8301-412-2.

## ANEXOS

### Código de programación para el tensor de constantes elásticas

El siguiente código de programación, desarrollado en Matlab, interpreta la forma reducida de los tensores de constantes elásticas, lo convierte al tensor de orden 4 para realizar las operaciones de rotación y regresarlo en su forma de orden 2 (36 componentes).

#### Archivo principal

```
%Anisotropia%
clear all
clc
syms a11 a12 a13 a21 a22 a23 a31 a32 a33...
thet T11 T12 T13 T14 T15 T16 T21 T22 T23 T24 T25 T26...
T31 T32 T33 T34 T35 T36 T41 T42 T43 T44 T45 T46...
T51 T52 T53 T54 T55 T56 t61 T62 T63 T64 T65 T66

%%_--Tensor de segundo orden, Material Ortorrombico--_%
T2=[T11 T12 T13 0 0 0;
T12 T22 T23 0 0 0;
T13 T23 T33 0 0 0;
0 0 0 T44 0 0;
0 0 0 0 T55 0;
0 0 0 0 0 T66]
pretty(T2)
%%%-Función que transforma tensor de orden 2 a 4
%-----
T4=T2aT4 (T2);
%-----
%%%-Función que transforma tensor de orden 4 a 2
%-----
Ts2=T4aT2 (T4);
%-----
%Rotación 1
```

```

T4r=rotacion(T4,Ry);
T2r=T4aT2(T4r)
pretty(simplify(T2r))
% pretty (Ts)

```

## Archivos función

### Función que verifica las simetrías

```

function [mn,op]=conv3a6(m,n,o,p,simetria)
if m==n
    mn=m;
else
    switch m+n
        case 3
            mn=6;
        case 4
            mn=5;
        case 5
            mn=4;
    end
end
if o==p
    op=o;
else
    switch o+p
        case 3
            op=6;
        case 4
            op=5;
        case 5
            op=4;
    end
end
end
end

```



### Función que convierte el tensor de orden 2 a 4

```
function T4=T2aT4(T2)
T4=vpa(zeros(3,3,3,3));
for m=1:3
    for n=1:3
        for o=1:3
            for p=1:3
                [mn,op]=conv3a6(m,n,o,p,1);
                T4(m,n,o,p)=T2(mn,op);
            end;
        end;
    end;
end;
end
```

### Función que convierte el tensor de orden 4 a 2

```
function T2=T4aT2(T4)
T2=vpa(zeros(6,6));
D=zeros(6,6);
for m=1:3
    for n=1:3
        for o=1:3
            for p=1:3
                [mn,op]=conv3a6(m,n,o,p,1);
                if D(mn,op)==0
                    T2(mn,op)=T4(m,n,o,p);
                    D(mn,op)=1;
                else
                    if vericomp(T2(mn,op),T4(m,n,o,p))
                        %comparacion ok
                        D(mn,op)=D(mn,op)+1;
                    else
                        % NO son iguales
                        disp(['NO son iguales ']);
                        T2(mn,op),
                        T4(m,n,o,p),
                    end;
                end;
            end;
        end;
    end;
end;
end
```

### Función que realiza las operaciones de rotación

```
function Trot=rotacion(T4,a);
Trot=vpa(zeros(3,3,3,3));
%Primera rotación en x
for i=1:3
    for j=1:3
        for k=1:3
            for l=1:3
                for m=1:3
                    for n=1:3
                        for o=1:3
                            for p=1:3

Trot(i,j,k,l)=Trot(i,j,k,l)+(a(i,m)*a(j,n)*a(k,o)*a(l,p)*T4(m,n,o,p));
                                end
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
```

### Función que compara si los tensores de orden 2 y orden 4 son equivalentes

```
function res=vericomp(C1,C2);

res=(simplify(C1-C2)==sym('0'));
if not(res)
    beep;pause(1)
end
```