



Universidad Autónoma de San Luis Potosí  
Facultad de Ingeniería  
Centro de Investigación y Estudios de Posgrado

Modelo dinámico de la recuperación del equilibrio y estimación de  
parámetros viscoelásticos en tobillo y cadera.

T E S I S

Que para obtener el grado de:  
Maestro en Ingeniería Mecánica  
Opción: Mecatrónica y Sistemas Mecánicos

Presenta:  
**Ing. Angel de Jesús Cerda Lugo**

Asesor:  
**Dr. Alejandro González de Alba**

Coasesor:  
**Dr. Juan Antonio Cárdenas Galindo**





**ING. ANGEL DE JESÚS CERDA LUGO  
P R E S E N T E.**

En atención a su solicitud de Temario, presentada por los **Dres. Alejandro González de Alba y Juan Antonio Cárdenas Galindo**, Asesor y Co-asesor de la Tesis que desarrollará Usted, con el objeto de obtener el Grado de **Maestro en Ingeniería Mecánica con Orientación Terminal en Mecatrónica y Sistemas Mecánicos**, me es grato comunicarle que en la Sesión del H. Consejo Técnico Consultivo celebrada el día 14 de diciembre del presente, fue aprobado el Temario propuesto:

**TEMARIO:**

**“Modelo dinámico de la recuperación del equilibrio y estimación de parámetros viscoelásticos en tobillo y cadera”**

Introducción

1. Revisión del estado del arte
2. Modelado, estimación y validación experimental de un modelo dinámico de segundo orden
3. Modelado, estimación y validación experimental de un modelo dinámico de tercer orden
4. Estimación de parámetros inerciales del cuerpo humano en plano sagital

Conclusiones

Bibliografía

**“MODOS ET CUNCTARUM RERUM MENSURAS AUDEBO”**

~~ATENTAMENTE~~

**M. I. JORGE ALBERTO PÉREZ GONZÁLEZ**  
**DIRECTOR**

SAN LUIS POTOSÍ  
FACULTAD DE INGENIERIA  
DIRECCION



# Resumen

El presente trabajo de tesis, se centra en la estimación de los parámetros viscoelásticos de los músculos del tobillo y la cadera que llevan a la recuperación de postura vertical. Primero se realiza una revisión bibliográfica de los trabajos relacionados con el trabajo de tesis y tener un punto de partida para la investigación del mismo. Asimismo, se investiga el marco teórico necesario para llevar a cabo el trabajo de investigación.

Posteriormente se desarrolla un modelo dinámico de un doble péndulo invertido de segundo orden, que pueda simular el movimiento del cuerpo humano para la recuperación del equilibrio. Se hacen simulaciones de estimación de parámetros haciendo uso de algoritmos de estimación de parámetros como mínimos cuadrados y filtro de Kalman. Se presentan resultados de la fase de experimentación y se interpretan los mismos.

Se desarrolla el modelado dinámico de un doble péndulo invertido de tercer orden, el cual es un modelo que tiene una relación más estrecha con la realidad y permite la estimación de más parámetros. Se realizan estudios en simulación de la estimación de los parámetros utilizando las mismas técnicas para el modelo de segundo orden. Se presentan los resultados de la experimentación y se concluye en función a los mismos.

Se hace uso de un sistema de captura de movimiento con el objetivo de realizar estimaciones de los parámetros inerciales del cuerpo humano, se desarrollan las ecuaciones que describen el comportamiento de las reacciones en el suelo durante el movimiento del doble péndulo invertido. Usando esta información se utilizan los algoritmos de identificación del sistema y se encuentran resultados experimentales.

Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo de tesis y el trabajo a futuro para esta línea de investigación.

---

# Agradecimientos

A mis padres Juan Angel Cerda Torres y Elida Lugo Rodríguez , por siempre apoyarme en toda decisión tomada, por orientarme, por brindarme la oportunidad de estudiar y por todo ese sacrificio y todas esas horas trabajadas para que lograra cumplir mis metas. A mis hermanas Nubia Juaneli Cerda Lugo y Sarai Priscila Cerda Lugo, por el ejemplo de ser un buen profesional, y por enseñarme, que a pesar de que la vida te pueda hacer caer siempre hay que levantarse.

A mi esposa Diana Araceli Salazar Hernández, por ser mi más grande motivación, agradezco los regaños, las palabras de aliento y por decirme “tienes que...”. Gracias por siempre apoyarme, y a pesar de todo, ver primero por mi felicidad. Gracias por permitir cumplir mi sueños y por el más grande regalo que pudiera recibir. Te amo mucho.

A mis asesores Alejandro González de Alba y Juan Antonio Cárdenas Galindo, por su apoyo, orientación y paciencia a lo largo del desarrollo de esta tesis y de manera personal.

A Miguel Ángel Salinas Cobián, por que sin tu ayuda me hubiera sido imposible, culminar esta etapa, gracias por ser mi compañero y sobre todo mi amigo.

A Omar Pérez Martínez, por la gran amistad ofrecida durante la maestría, por escuchar cuando lo necesité y por los momentos de diversión.

A mis compañeros de generación Eduardo Piña, Luis Martínez, Carlos Bermúdez, Hiram Olivares, Elena Martínez, Oscar Alcocer y Juan Compeán, por los momentos vividos durante el posgrado, por las risas y por el estrés comunitario.

A la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por permitirme ser parte del programa de maestría y otorgarme la beca durante mi estadía durante este programa.

Al personal docente del programa de maestría, por el nuevo conocimiento impartido durante las asignaturas correspondientes.





# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Revisión del estado del arte</b>	<b>5</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	5
1.1.1. Biomecánica . . . . .	5
Medición, descripción, análisis, y evaluación. . . . .	6
Análisis . . . . .	7
Evaluación e interpretación . . . . .	7
Tópicos importantes dentro de la biomecánica . . . . .	8
1.1.2. Recuperación de postura vertical estática . . . . .	9
1.1.3. Modelos dinámicos para la recuperación de la postura vertical . . . . .	11
1.1.4. Algoritmos de identificación del sistema . . . . .	13
1.1.5. Antecedentes de identificación de parámetros biomecánicos . . . . .	14
1.2. Conclusiones del capítulo . . . . .	20
<b>2. Modelado, estimación y validación experimental de un modelo dinámico de segundo orden</b>	<b>23</b>
2.1. Introducción . . . . .	23
2.2. Marco teórico . . . . .	24
2.2.1. Mecánica Analítica . . . . .	24
2.2.2. Algoritmos de estimación de los parámetros del sistema . . . . .	24
Mínimos Cuadrados . . . . .	24
Filtro de Kalman discreto . . . . .	25
2.2.3. Procesamiento de Señales . . . . .	27

---

Filtro Butterworth . . . . .	27
Filtro Savitsky-Golay . . . . .	27
2.2.4. Paradigma <i>Hold &amp; Release</i> . . . . .	28
2.3. Modelado dinámico basado en la estrategia de cadera . . . . .	28
2.4. Estimación de parámetros viscoelásticos . . . . .	32
2.4.1. Estimación de parámetros constantes . . . . .	32
2.4.2. Parámetros variantes en el tiempo . . . . .	35
Estimación con mediciones ideales . . . . .	35
Estimación de parámetros con mediciones ruidosas . . . . .	37
2.5. Validación de modelo . . . . .	38
2.5.1. Estimación de los parámetros, asumiendo rigidez rotacional constante . . . . .	39
2.5.2. Estimación de la rigidez como función de los ángulos de posición . . . . .	41
2.6. Validación experimental con sujetos de prueba . . . . .	41
2.7. Resultados . . . . .	44
2.8. Conclusiones del capítulo . . . . .	46
<b>3. Modelado, estimación y validación experimental de un modelo dinámico de tercer orden</b>	<b>47</b>
3.1. Introducción . . . . .	47
3.2. Marco teórico . . . . .	47
3.2.1. Modelos viscoelásticos de tercer orden . . . . .	47
3.3. Modelado dinámico basado en la estrategia de cadera . . . . .	49
3.4. Estimación de parámetros viscoelásticos . . . . .	52
3.4.1. Estimación de parámetros viscoelásticos constantes . . . . .	54
3.4.2. Estimación de parámetros viscoelásticos variantes en el tiempo . . . . .	55
Estimación con mediciones ideales . . . . .	55
Estimación con mediciones ruidosas . . . . .	57
3.5. Experimentación y resultados . . . . .	61
3.6. Conclusiones del capítulo . . . . .	64
<b>4. Estimación de parámetros inerciales del cuerpo humano en plano sagital</b>	<b>65</b>
4.1. Introducción . . . . .	65
4.2. Marco teórico . . . . .	65
4.2.1. Parámetros inerciales . . . . .	65
4.3. Sistema de captura de movimiento . . . . .	66
4.3.1. Desarrollo de calibración y obtención de los parámetros de visión . . . . .	69
Modelo CSM lineal . . . . .	69

---

4.4. Estimación de parámetros inerciales . . . . .	74
4.4.1. Modelo dinámico de las reacciones . . . . .	74
4.4.2. Desarrollo del experimento . . . . .	77
4.5. Validación experimental . . . . .	79
4.6. Resultados . . . . .	81
4.7. Conclusiones del capítulo . . . . .	84
<b>Conclusiones</b>	<b>85</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>87</b>

---

# Índice de Figuras

1.1. Patín “clap”. . . . .	6
1.2. Alguna de las aplicaciones de la biomecánica es para tomar mediciones cinemáticas y mediante un software utilizar las mediciones para el desarrollo de videojuegos o en industrias como el cine. . . . .	7
1.3. Ejemplo de medición en aplicaciones de la biomecánica; medición del centro de presión utilizando plataforma de fuerzas. . . . .	7
1.4. Ejemplo de análisis donde se realiza un experimento en el que se miden señales EMG y utilizando modelos matemáticos, se obtiene el movimiento de cada uno de los dedos. . . . .	8
1.5. Ejemplo de evaluación utilizando estudios biomecánicos: diferencia entre la señal EMG normal y con miopatía. . . . .	8
1.6. Planos primarios de persona de pie. . . . .	9
1.7. Estrategia de tobillo para la recuperación de la posición vertical, esta estrategia es utilizada para la recuperación ante pequeñas perturbaciones. . . . .	10
1.8. Estrategia de cadera para la recuperación de la posición vertical, esta estrategia es utilizada para la recuperación ante perturbaciones mayores a las que se presentan en la estrategia de tobillo. . . . .	11
1.9. Estrategia de paso para la recuperación de la posición vertical, esta estrategia es utilizada para la recuperación ante perturbaciones tan grandes que es imposible utilizar las estrategias anteriores. . . . .	11
1.10. Modelo dinámico esquemático de un péndulo invertido para representar la recuperación de la postura vertical, utilizando ecuaciones diferenciales de segundo orden, basándose en el modelo de Kelvin-Voigt. . . . .	12
1.11. Modelo dinámico de un péndulo invertido para representar la recuperación de la postura vertical, utilizando ecuaciones diferenciales de tercer orden, basándose en el modelo viscoelástico de Poynting-Thomson. . . . .	13
1.12. Ejemplo de Diagrama de Proceso de implementación de algoritmos de identificación. . . . .	14
1.13. Modelo propuesto por Johansson et. al. para la identificación de rigidez, amortiguamiento y rapidez. . . . .	15
1.14. Resultados de la identificación de los experimentos realizados por Johansson. . . . .	16
1.16. Comportamiento de rigidez de tobillo y cadera a diferentes frecuencias. . . . .	18

---

1.15. Configuración del experimento. . . . .	18
1.17. Modelo de Hill-Stroevé . . . . .	19
1.18. Movimiento flexión/extensión de brazo . . . . .	19
1.19. Equipo de experimentación: Electrodo de superficie EMG's y marcadores ópticos . . . . .	20
1.20. Sistema de simulación de terremotos . . . . .	21
2.1. Movimiento del paradigma <i>Hold &amp; Release</i> . . . . .	28
2.2. Modelo esquemático de doble péndulo emulando la estrategia de cadera para la recuperación de postura vertical. . . . .	29
2.3. Valores angulares obtenidos en simulación para la orientación de cada segmento. La línea azul representa los valores de la posición angular con ruido agregado, mientras que la línea punteada roja representa los valores después del filtrado. . . . .	34
2.4. Posición angular obtenida solucionando el sistema de ecuaciones diferenciales utilizando Runge-Kutta de cuarto orden. . . . .	35
2.5. Comparación de los parámetros viscoelásticos ideales estimados utilizando filtro de Kalman con respecto a los propuestos. a) Rigidez de tobillo $k_1(t)$ . b) Rigidez de cadera $k_2(t)$ c) Amortiguamiento de tobillo $b_1(t)$ . d) Amortiguamiento de cadera $b_2(t)$ . . . . .	36
2.6. Comparación de los valores angulares obtenidos en simulación. La línea azul representa la posición angular añadiendo ruido gaussiano, mientras que la línea punteada roja la posición después de utilizar el filtro Savitsky-Golay. . . . .	37
2.7. Evolución de los parámetros viscoelásticos estimados utilizando mediciones ruidosas. a) Rigidez de tobillo $k_1(t)$ . b) Rigidez de cadera $k_2(t)$ c) Amortiguamiento de tobillo $b_1(t)$ . d) Amortiguamiento de cadera $b_2(t)$ . . . . .	38
2.8. a) Maqueta construida para validar el procedimiento de estimación de parámetros. b) Parámetros medidos de la maqueta de doble péndulo invertido. . . . .	39
2.9. Validación de trayectoria angular para la maqueta utilizando los valores estimados para los parámetros viscoelásticos. La línea azul es la trayectoria medida en una prueba no utilizada para la estimación de parámetros, mientras que la línea roja discontinua muestra la trayectoria predicha para la maqueta. . . . .	41
2.10. Rigidez alrededor del eje de articulaciones del péndulo doble construido. . . . .	42
2.11. Cálculo de las posiciones angulares, utilizando las mediciones de posición obtenidas por el software KINOVEA. . . . .	43
2.12. Experimento <i>Hold &amp; Release</i> para la estimación de parámetros viscoelásticos. . . . .	43
2.13. Comportamiento de las posiciones angulares medidas con el software KINOVEA durante el experimento <i>Hold &amp; Release</i> . . . . .	44
2.14. Comportamiento estimado de los parámetros viscoelásticos utilizando el experimento <i>Hold &amp; Release</i> del sujeto 6. . . . .	44

---

2.15. Rigidez estimada de la articulación en función del ángulo articular para seis sujetos humanos. Cada sujeto está representado por un diferente línea de color. La rigidez de la articulación se normaliza con respecto al momento de inercia alrededor del segmento corporal correspondiente mientras las medidas angulares se normalizaron a la altura del sujeto. . . . .	45
3.1. Modelo esquemático de un grado de libertad basándose en el modelo de Hill. . . . .	48
3.2. Modelo mecánicos de tercer orden, basados en los modelo viscoelásticos de a) Maxwell y b) Poynting-Thomson. . . . .	49
3.3. Modelo esquemático de doble péndulo invertido basándose en el modelo viscoelástico de Poynting-Thomson, para encontrar la dinámica del movimiento de la estrategia de cadera. . . . .	50
3.4. Comportamiento de las posiciones angulares de cada uno de los segmentos. La línea azul representa la señal ruidosa, mientras que la línea roja representa la señal filtrada. . . . .	55
3.5. Comparación de resultados de identificación con respecto al parámetro objetivo. . . . .	56
3.6. Comportamiento de las posiciones angulares calculada mediante un modelo de tercer orden y parámetros viscoelásticos variantes. . . . .	57
3.7. Comparación de resultados de estimación utilizando un filtro de Kalman para parámetros viscoelásticos variantes en un modelo de tercer orden. . . . .	58
3.8. Comportamiento de las posiciones angulares. La línea azul representa la señal obtenida por el método de Runge Kutta de 4° orden añadiendo ruido y la línea roja representa la señal filtrada. . . . .	58
3.9. Comparación de resultados obtenidos en la estimación de los parámetros viscoelásticos mediante el filtro de Kalman. . . . .	59
3.10. Comportamiento de las posiciones angulares. La línea azul representa la señal obtenida por el método de Runge Kutta de 4° orden añadiendo solo un valor con ruido y la línea roja representa la señal filtrada. . . . .	60
3.11. Comparación de resultados obtenidos en la estimación de los parámetros viscoelásticos mediante el filtro de Kalman. . . . .	61
3.12. Comportamiento de las posiciones angulares del sujeto 1. La línea azul representa las posiciones angulares calculadas por las coordenadas medidas en KINOVEA y la línea punteada roja representada las señales filtradas. . . . .	62
4.1. a) Cámara Mako g125b poe usada en el sistema de captura de movimiento. b) Tabla de especificaciones de cámara Mako g125b PoE. . . . .	67
4.2. a) Plataforma de fuerzas AMTI ACG-O utilizada en el sistema de captura de movimiento. b) Tabla de especificaciones. . . . .	68
4.3. Estructura patrón para la calibración de cámaras. . . . .	70
4.4. Modelo de cámara de orificio. . . . .	70
4.5. Modelo para la obtención de reacciones. . . . .	75
4.6. Preparación y movimiento del sujeto de prueba. . . . .	77
4.7. Layout del sistema de captura de movimiento. a) Vista Lateral. b) Vista frontal. . . . .	78

---

4.8. Distribución de los ejes en plataforma de fuerzas en vista de alzado. . . . .	78
4.9. Comportamiento de las posiciones angulares medidas durante el experimento. . . . .	80
4.10. Comportamiento de las reacciones en la fase de experimentación. . . . .	81
4.11. Comportamiento del COM del sujeto de prueba uno en el plano sagital $y - z$ y el comportamiento de cada una de las direcciones con respecto al tiempo. . . . .	83



# Índice de Tablas

2.1. Parámetros usados para la simulación del modelo de segundo orden. . . . .	33
2.2. Condiciones iniciales para estimación de parámetros viscoelásticos usando valores ideales. . .	33
2.3. Comparación de resultados obtenidos con mínimos cuadrados y filtro de Kalman con respecto a los parámetros viscoelásticos propuestos. . . . .	34
2.4. Datos de simulación para estimación de parámetros viscoelásticos. . . . .	35
2.5. Estimación del error utilizando mediciones ideales. . . . .	36
2.6. Error en la estimación de parámetros con mediciones con ruido. . . . .	38
2.7. Tabla comparativa entre los valores viscoelásticos medidos y los estimados. . . . .	40
2.8. Tabla de características de los sujetos de experimentación. . . . .	42
3.1. Parámetros propuestos para la simulación de identificación de parámetros viscoelásticos. . . .	54
3.2. Condiciones iniciales para la solución de las ecuaciones de movimiento del modelo de tercer orden. . . . .	54
3.3. Comparación de resultados estimados utilizando Pseudoinversa y Filtro de Kalman. . . . .	55
3.4. Parámetros usados para la estimación de parámetros viscoelásticos variantes. . . . .	56
3.5. Errores de estimación RMSE y NRMSE en estimación de parámetros variables. . . . .	57
3.6. Errores de estimación RMSE y NRMSE en estimación de parámetros variables con mediciones ruidosas. . . . .	59
3.7. Errores de estimación RMSE y NRMSE en estimación de parámetros variables con un valor atípico en las mediciones. . . . .	60
3.8. Valores estimados de los parámetros viscoelásticos, utilizando el algoritmo de estimación para parámetros constantes. . . . .	62
3.9. Valores normalizados de la estimación de los parámetros viscoelásticos con respecto a la altura del sujeto. . . . .	63
3.10. Valores normalizados de la estimación de los parámetros viscoelásticos con respecto a la masa del sujeto. . . . .	63
3.11. Valores normalizados de la estimación de los parámetros viscoelásticos con respecto a la inercia del sujeto. . . . .	63

---

4.1. Errores de estimación de puntos tridimensionales en el sistema de captura de movimiento. . .	74
4.2. Características de los sujetos de prueba. . . . .	80
4.3. Tabla comparativa de parámetros inerciales estimados utilizando mínimos cuadrados y parámetros ideales de tablas antropométricas. . . . .	81
4.4. Errores RMSE, RMSE/H y NRMSE de la proyección del centro de masa en a) eje z del experimento, b) eje y del experimento. . . . .	82

# Introducción

La idea central de este trabajo de tesis es el conocer los parámetros viscoelásticos de los músculos, asociados al movimiento de las juntas de tobillo y cadera, para la recuperación de la postura vertical. Para encontrar dichos parámetros se estudiarán distintos modelos dinámicos, los cuales sirven como punto de partida para la estimación de los parámetros. Por otra parte, el conocer la dinámica de los sistemas no es suficiente para estimar el valor de los parámetros viscoelásticos, por lo cual se hará uso de diferentes técnicas para la estimación de parámetros. Por otra parte, se realizará la estimación de los parámetros inerciales base, para el movimiento dinámico estudiado, con el fin de obtener los parámetros necesarios para realizar la estimación de los parámetros viscoelásticos.

## Justificación

En Estados Unidos se ha detectado que cerca de un 30 % de la población de adultos mayores han presentado problemas de equilibrio en posición vertical [1]. Debido a esto, ha sido necesario realizar diagnósticos para conocer la rigidez del tobillo [2] y, con dicha información, diseñar las rutinas de rehabilitación pertinentes. Por estos antecedentes, se considera importante hacer un estudio de esta índole en México, con el propósito de tener un equipo que obtenga los parámetros de rigidez al igual que en otros países como Estados Unidos y Japón [3, 4], pero sin la necesidad de realizar viajes al extranjero para así, minimizar su costo.

Con el fin de analizar el movimiento de la recuperación de postura debido a una perturbación, se plantea una representación de un doble péndulo, que se puede representar en dos formas diferentes: Modelo de Segundo Orden y Modelo de Tercer Orden. El primer modelo toma en cuenta una rigidez aparente entre los músculos y tendones involucrados en el movimiento, mientras que en el segundo modelo se toma la rigidez del tendón y del músculo por separado, lo que permite obtener más información con respecto al modelo anterior.

En la literatura se presentan algunos modelos dinámicos que intentan reproducir el movimiento de la recuperación de postura vertical estática, basándose en el movimiento de un péndulo invertido simple [5, 6]. En estos trabajos se realiza el modelado dinámico linealizando las ecuaciones de movimiento haciendo modelos matemáticos más sencillos de analizar que sin embargo, eliminan información. Por ello, las ecuaciones de movimiento que se desarrollan a lo largo del trabajo de tesis con ecuaciones no lineales, que se espera puedan tener una representación más fiel con respecto al fenómeno de estudio.

## Objetivos

### Objetivo principal

- Desarrollar modelo dinámico del cuerpo humano para la recuperación de postura vertical, basándose

en modelos dinámicos de doble péndulo invertido en el plano sagital.

## Objetivos específicos

- Desarrollar el modelado dinámico de un doble péndulo invertido obteniendo ecuaciones de movimiento de segundo orden y tercer orden.
- Validar modelos dinámicos en simulación y experimentación.
- Estimar el valor y el comportamiento de los parámetros que llevan al cuerpo humano a la recuperación vertical estática.
- Obtener parámetros inerciales del cuerpo humano.

## Metodología

Primero se realiza una revisión bibliográfica para conocer los trabajos anteriores al trabajo de tesis propuesto, con el fin de obtener información y conocer las necesidades del trabajo en curso. Posteriormente se realiza el diseño del experimento, el cual consiste en obtener las ecuaciones de movimiento de los modelos de segundo orden, tercer orden y las ecuaciones de las reacciones en el suelo calculadas por el movimiento de las juntas del tobillo y cadera; así mismo, delimitar la tarea de experimentación al sujeto de prueba. Seguido de la adecuación del sistema de captura de movimiento ubicado en el laboratorio de Proyectos mecatrónicos de la Facultad de Ingeniería, para el tipo de experimentación propuesto para el trabajo de tesis.

Se plantea también desarrollar los algoritmos de estimación de parámetros para cada uno de los modelos de estudio. Seguido de la fase de experimentación y finalmente interpretar los resultados obtenidos por los algoritmos antes realizados. Por último se plantea la escritura de un artículo y la escritura del trabajo de tesis.

## Contenido de los capítulos

A continuación se presenta una síntesis del contenido de cada uno de los capítulos escritos en este trabajo de tesis:

- **Capítulo 1.** Comienza con las generalidades del estudio de la biomecánica, así como se mencionan las diferentes estrategias para la recuperación de postura vertical. Se mencionan aspectos generales y los diferentes tipos de algoritmos de identificación del sistema. Además, se incluyen algunos trabajos de investigación en los que se realizan estimaciones de parámetros biomecánicos.
- **Capítulo 2.** En este capítulo se hace el desarrollo de un modelo de segundo orden para el modelo de un doble péndulo invertido. Se realizan estudios en simulación, así como la validación de las ecuaciones de movimiento, utilizando una maqueta. Finalmente se presenta la validación experimental con sujetos de prueba y la discusión de los resultados obtenidos.
- **Capítulo 3.** En este capítulo se hace el desarrollo matemático de un modelo de tercer orden, para obtener las ecuaciones gobernantes de un modelo esquemático de un doble péndulo invertido. Se presentan diferentes estudios en simulación y finalmente, se realiza la fase de experimentación aplicando

---

los algoritmos de estimación de parámetros para este modelo, así como, la discusión de los resultados obtenidos en esta fase.

- **Capítulo 4.** Se hace uso de un sistema de captura de movimiento, con el fin de obtener mediciones en sujetos de prueba en el plano sagital. Se realizan adecuaciones a los algoritmos de este sistema, se encuentran los parámetros de visión utilizando la metodología de manipulación en espacio de cámara. Finalmente se realiza la fase de experimentación, se estiman parámetros en el plano sagital y se realiza la discusión de los resultados obtenidos.
- **Conclusiones.** Se presentan las conclusiones a las que se llegaron durante el desarrollo del trabajo de tesis. Se presenta el trabajo a futuro para continuar con el tema de investigación.



# Capítulo 1

## Revisión del estado del arte

### 1.1. Antecedentes

#### 1.1.1. Biomecánica

La biomecánica del movimiento humano puede ser definida como la interdisciplina que describe, analiza y evalúa el movimiento humano. Una amplia variedad de movimientos físicos está involucrada; todo desde el andar físico de un discapacitado, el levantamiento de una carga por un trabajador hasta el desempeño de un atleta de alto rendimiento [7].

El nombre dado a la ciencia dedicada a la amplia área del movimiento humano es la kinesiología [8]. La biomecánica en la kinesiología involucra la descripción precisa de las causas del movimiento humano.

Según Knudson [7] las aplicaciones de la biomecánica para el movimiento humano pueden ser clasificadas dentro de dos áreas principales:

- **La mejora del rendimiento**

El rendimiento del movimiento humano puede ser mejorado de distintas maneras. La biomecánica es mayormente usada en la mejora del rendimiento en deportes o actividades donde la técnica es el factor dominante en lugar de la estructura física o capacidad fisiológica.

La investigación en biomecánica sobre las técnicas deportivas tienden a estar por detrás de los cambios que naturalmente ocurren en los deportes. Esto es así porque los atletas y los entrenadores experimentan todo el tiempo nuevas técnicas. Por lo tanto, las sugerencias de la investigación en biomecánica ayudan a los entrenadores a refinar la técnica de la actividad, pero solo se esperan pequeños cambios en el rendimiento.

El rendimiento humano también puede ser mejorado con el diseño de equipamiento. Muchas de estas mejoras se relacionan con el diseño de nuevos materiales. Cuando estos cambios son integrados con la información acerca del sujeto ejecutante, se puede decir que el mejoramiento del equipamiento se encuentra basado en biomecánica. Un ejemplo de esto es el desarrollo del patín de velocidad “clap” que incrementa el tiempo y el rango de movimiento de cada empuje en las competencias de patinaje sobre hielo mejorando, con ello, drásticamente los tiempos y batiendo récords mundiales (véase la Figura 1.1). Esto le dio una gran ventaja



Figura 1.1: El patín “clap” se utilizó por primera vez en la temporada de patinaje de 1984/1985. En la temporada 1996/1997, el equipo de mujeres holandesas comenzó a usar los patines con gran éxito. El resto del mundo del patinaje pronto hizo lo mismo, causando un torrente de récords mundiales que se romperán en las siguientes temporadas, incluidos los Juegos Olímpicos de Invierno de 1998 en Nagano, Japón [9, 10].

a Holanda donde se desarrollaron estos patines, y hubo controversia sobre la cantidad de tiempo que otros patinadores pudieron practicar con los nuevos patines antes de la competencia. Estas dramáticas mejoras en los equipos en muchos deportes tienen a algunas personas preocupadas de que ganar las medallas olímpicas pueda estar más en manos de los ingenieros que en los atletas [8].

- **La reducción o tratamiento de lesiones.**

El movimiento seguro, o prevención de lesiones es otra área primaria donde la biomecánica puede ser aplicada. La investigación biomecánica es una poderosa aliada en la búsqueda de medicina deportiva para prevenir y tratar lesiones. Los estudios biomecánicos ayudan a prevenir lesiones proporcionando información sobre las propiedades mecánicas de los tejidos, cargas mecánicas durante el movimiento y terapias preventivas o de rehabilitación [8].

La biomecánica ayuda al fisioterapeuta a prescribir ejercicios de rehabilitación, dispositivos de asistencia, o aparatos ortopédicos. Muchas de estas áreas están relacionadas con el tratamiento y la prevención de lesiones humanas. Los estudios biomecánicos ayudan a evaluar estrategias para prevenir caídas y fracturas en los ancianos [11]. Algunos especialistas en biomecánica han desarrollado software usado para la adaptación del movimiento humano para videojuegos con el fin de obtener movimientos cercanos a la realidad (véase la Figura 1.2) [8].

### **Medición, descripción, análisis, y evaluación.**

Cualquier evaluación cuantitativa del movimiento humano debe estar precedida por una fase de medición y descripción y, si se necesitan diagnósticos más significativos, generalmente es necesario un análisis biomecánico. La interpretación, evaluación o diagnóstico final es específica del movimiento y está limitada a los ejemplos dados.

Los primeros estudios biomecánicos tenían el único propósito de describir un movimiento dado y cualquier evaluación que se realizaba era el resultado de una inspección visual de los datos. La descripción de los datos puede tomar muchas formas: diagramas de coordenadas del cuerpo, diagramas de barras o simples medidas



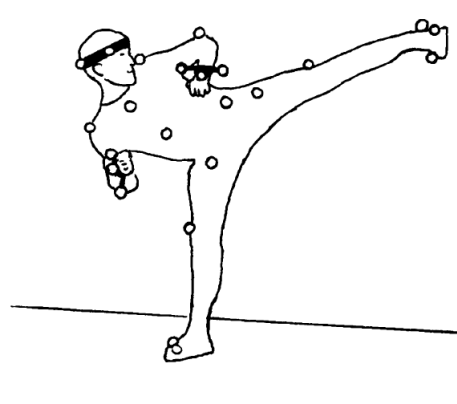


Figura 1.2: Alguna de las aplicaciones de la biomecánica es para tomar mediciones cinemáticas y mediante un software utilizar las mediciones para el desarrollo de videojuegos o en industrias como el cine [8].

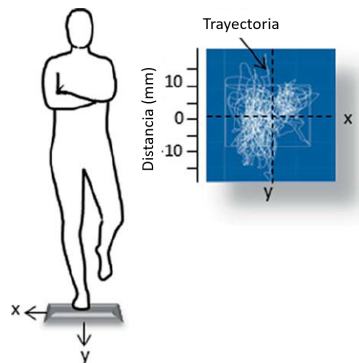


Figura 1.3: Ejemplo de medición en aplicaciones de la biomecánica; medición del centro de presión utilizando plataforma de fuerzas [12].

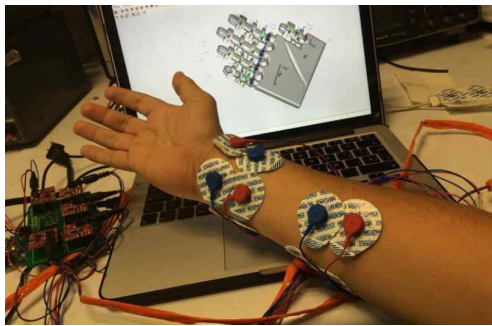
de resultado, como la velocidad de la marcha, la carga levantada o la altura de un salto [7]. En la Figura 1.3 se observa la medición de centro de presión a partir de una plataforma de fuerzas.

### Análisis

El análisis se puede definir como cualquier operación matemática que se realiza en un conjunto de datos para presentarlos en otra forma o para combinar los datos de varias fuentes para producir una variable que no se puede medir directamente. A partir de los datos analizados, se puede extraer información para ayudar en la etapa de evaluación [7]. En la figura 1.4 se muestra un ejemplo de análisis utilizando mediciones de señales electromiográficas (EMG).

### Evaluación e interpretación

El propósito de cualquier evaluación es tomar una decisión positiva sobre un movimiento físico. La decisión puede ser positiva ya que puede confirmar que el entrenamiento, la cirugía o la terapia han sido correctos y deben continuar exactamente como antes. La información también puede causar una decisión negativa, por



(a) Experimento utilizando EMG

Dedo	$\sigma^2$		$\bar{X}$		Probabilidad		
	Min	Max	Min	Max	$r$	$P_r$	$\min(Val_r)$
Meñique	0.15	0.09	0.34	0.27	2	0.57	0.22
Anular	0.17	0.11	0.32	0.24	5	0.89	0.7
Medio	0.35	0.27	0.15	0.09	4	0.61	0.4
Índice	0.18	0.03	0.41	0.22	3	0.91	0.77
Pulgar	0.18	0.12	0.31	0.23	1	0.98	0.81

(b) Tabla de resultados del movimiento de cada uno de los dedos de la mano utilizando EMG.

Figura 1.4: Ejemplo de análisis donde se realiza un experimento en el que se miden señales EMG y utilizando modelos matemáticos, se obtiene el movimiento de cada uno de los dedos [13].

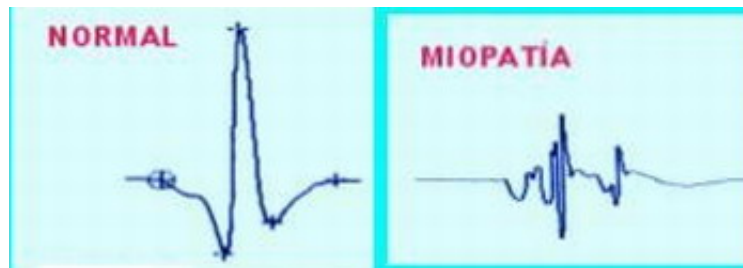


Figura 1.5: Ejemplo de evaluación utilizando estudios biomecánicos: diferencia entre la señal EMG normal y con miopatía [14].

ejemplo, cancelar un procedimiento quirúrgico planificado y prescribir terapia en su lugar [7]. En la figura 1.5 se presenta un ejemplo de evaluación para los músculos utilizando estudios EMG.

### Tópicos importantes dentro de la biomecánica

Winter [7] define que las variables usadas en la descripción y análisis de los movimientos pueden categorizarse como:

- **Procesamiento de señales.** Es una actividad importante, ya que las mediciones de EMG, fuerzas de reacción, desplazamiento, velocidad, etc; suelen contar con ruido por errores en la medición simplemente por algún fallo en el dispositivo utilizado. Por lo tanto es importante filtrar estas señales para no alterar el análisis y tener resultados satisfactorios.
- **Cinemática.** Las variables cinemáticas están involucradas en la descripción del movimiento, independientemente de las fuerzas que lo causan. Incluyen desplazamientos lineales y angulares, velocidades y aceleraciones. Los datos de desplazamiento se toman de cualquier referencia anatómica: centro de gravedad de los segmentos del cuerpo, centros de rotación de las articulaciones, segmentos extremos de las extremidades o promedios anatómicos clave.
- **Dinámica.** El término general dado a las fuerzas que causan el movimiento es la dinámica. Ambas fuerzas internas y externas están incluidas. Las fuerzas internas provienen de la actividad muscular, los

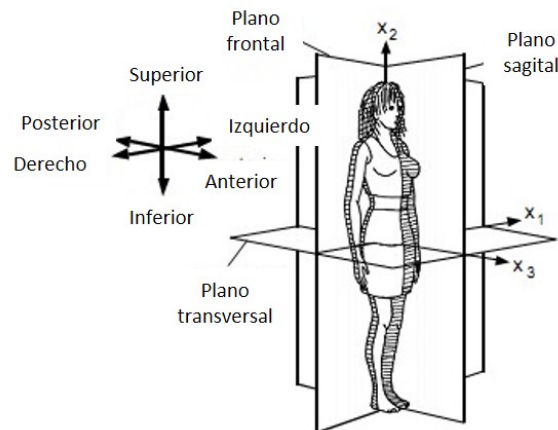


Figura 1.6: Planos primarios de persona de pie [7].

ligamentos o la fricción en los músculos y las articulaciones. Las fuerzas externas provienen del suelo o de cargas externas, de cuerpos activos (por ejemplo, aquellas fuerzas ejercidas por un oponente en el fútbol americano), o de fuentes pasivas (por ejemplo, la resistencia al viento).

- Antropometría.** Muchos de los primeros estudios anatómicos que incluían mediciones de cuerpo y extremidades no se consideraron de interés de la biomecánica. Sin embargo, es imposible desarrollar un modelo biomecánico sin datos sobre masas de extremidades, ubicación de centros de masa, longitudes de segmento, centros de rotación, ángulos de tracción de músculos, masa y área de sección transversal de músculos, momentos de inercia, etc. La precisión de cualquier análisis depende tanto de la calidad y la integridad de las medidas antropométricas como de la cinemática y la dinámica.
- Electromiografía.** La EMG es la señal principal para describir la entrada al sistema muscular. Proporciona información sobre qué músculo o músculos son responsables de un movimiento o si se está produciendo actividad de oposición. Debido a la relación entre el EMG de un músculo y su tensión, varios modelos biomecánicos han evolucionado. El EMG también tiene información sobre el reclutamiento de diferentes tipos de fibras musculares y el estado de fatiga del músculo.

### 1.1.2. Recuperación de postura vertical estática

El estudio de la biomecánica requiere el entendimiento de los sistemas músculo-esqueléticos y sus propiedades mecánicas [8].

La base del cuerpo humano es un árbol de huesos unidos por ligamentos en juntas llamadas articulaciones. El esqueleto por sí mismo colapsaría si éste no fuera sostenido por músculos. Estos músculos están conectados a los huesos a través de estructuras similares a un cable llamadas tendones, o a otros músculos, por tejidos conectivos planos llamados aponeurosis [7].

La posición espacial de varias partes del cuerpo humano, puede ser descrita refiriéndose a un sistema de coordenadas Cartesianas, cuyo origen se encuentra en el centro de gravedad del cuerpo humano en posición de pie. En la Figura 1.6 se muestra la estructura cartesiana del cuerpo humano dividida en planos.

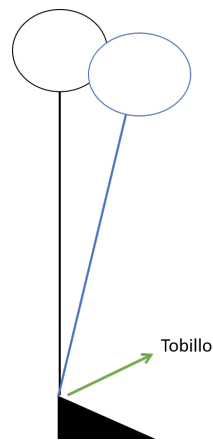


Figura 1.7: Estrategia de tobillo para la recuperación de la posición vertical, esta estrategia es utilizada para la recuperación ante pequeñas perturbaciones.

Mantener una postura adecuada y estable depende de la orientación espacial, el impacto de varias fuerzas sobre el cuerpo y el control motriz humano. El control de la postura corporal y preservación del equilibrio se dividen en dos procesos: el control de la postura y el control de estabilidad de la postura. El control de la postura depende de darle al cuerpo la posición adecuada. El control de la estabilidad de la postura consiste más bien en la oposición a las diversas perturbaciones en la posición vertical. Entonces éste es un proceso dinámico. Estas perturbaciones pueden provenir tanto del entorno externo como del entorno humano interno [15]. El control de la posición vertical se realiza mediante un ligero movimiento del cuerpo en los planos sagital y frontal (Véase la Figura 1.6), a menudo pasando por el punto de equilibrio.

Respecto al proceso de control de balance del cuerpo, se usan diferentes estrategias de recuperación de equilibrio, tales como:

- **Estrategia de tobillo.** La cual ocurre cuando una persona en posición de pie es sujeta a cambios de posición pequeños en el plano sagital (véase la Figura 1.7) [15]. El tobillo es el eje de la respuesta observada. Los músculos gastrocnemios se activan para los movimientos posturales hacia atrás, mientras que las contracciones del tibial anterior producen movimientos hacia adelante [16].
- **Estrategia de cadera.** La estrategia de la cadera ocurre cuando la interferencia es mayor o el uso de la estrategia del tobillo es imposible (véase la Figura 1.8). En el plano frontal, esta estrategia depende de la ubicación y el tamaño de la aplicación de una fuerza actuante externa [15]. Los cuádriceps y abdominales son activados para flexionar la cadera y mover el centro de gravedad hacia atrás. La rodilla permanece relativamente estable debido a que estos músculos tienen efectos funcionales opuestos sobre esta articulación. La activación paraespinal e isquiotibial extiende las caderas y mueve el centro de gravedad (COG) hacia atrás, estos músculos también ayudan a mantener las rodillas estables [16]. Cabe mencionar que esta estrategia será el centro de estudio para el trabajo de tesis.
- **Estrategia de paso.** La estrategia de paso se asocia con una mayor desviación del centro de gravedad fuera de los límites de estabilidad, es decir, en el caso de un fuerte estímulo desestabilizador. Al dar un

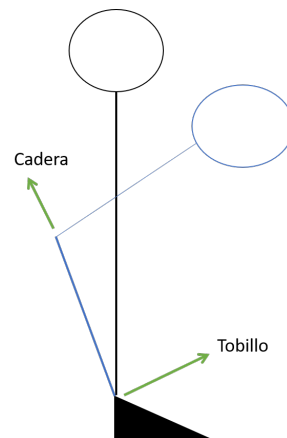


Figura 1.8: Estrategia de cadera para la recuperación de la posición vertical, esta estrategia es utilizada para la recuperación ante perturbaciones mayores a las que se presentan en la estrategia de tobillo.

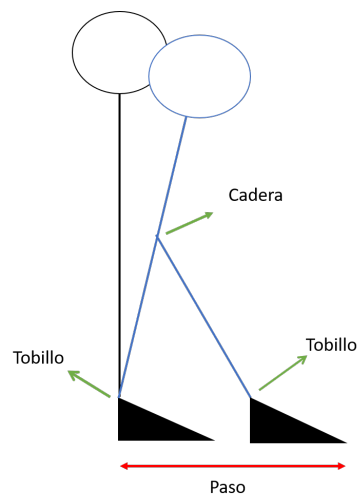


Figura 1.9: Estrategia de paso para la recuperación de la posición vertical, esta estrategia es utilizada para la recuperación ante perturbaciones tan grandes que es imposible utilizar las estrategias anteriores.

paso hacia adelante aumenta la superficie de soporte y así evitar el colapso en esta estrategia (véase la Figura 1.9) [15].

### 1.1.3. Modelos dinámicos para la recuperación de la postura vertical

En la literatura se han planteado modelos dinámicos para la recuperación de la postura vertical partiendo de la estrategia de tobillo [5, 15, 17, 4]. El modelo neuromecánico responsable de mantener la estabilidad durante la posición bípeda se puede representar matemáticamente mediante ecuaciones de espacio de estado lineales o no lineales, que representan la interacción entre los parámetros mecánicos de unidades músculo-tendón (por ejemplo, rigidez y amortiguamiento) y la inercia de todo el cuerpo [5].

En un sistema Kelvin-Voigt [18], las propiedades inerciales se concentran en el centro de masa del cuerpo,

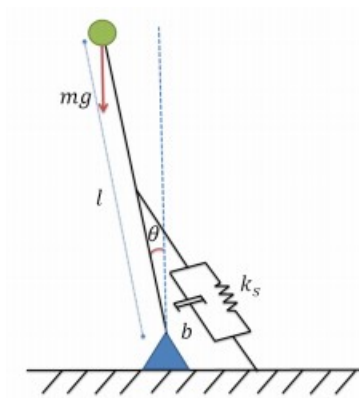


Figura 1.10: Modelo dinámico esquemático de un péndulo invertido para representar la recuperación de la postura vertical, utilizando ecuaciones diferenciales de segundo orden, basándose en el modelo de Kelvin-Voigt [5].

mientras que las características viscoelásticas de las unidades músculo-tendón alrededor del tobillo se modelan con un resorte y un amortiguador en paralelo. Este modelo generalmente se prefiere por su bajo número de parámetros comparado con el modelo propuesto por Hill en 1938 [19]. Es inmediato ver que un aumento en la rigidez muscular disminuirá la amplitud de las oscilaciones del cuerpo y que un aumento en el amortiguamiento por encima de un umbral crítico eliminará todas las oscilaciones residuales [5].

En la Figura 1.10 se muestra la representación esquemática de un modelo de péndulo invertido simple, desarrollado a partir de un sistema viscoelástico de Kelvin-Voigt, el cual es modelado para pequeñas oscilaciones [5].

La ecuación que define al modelo de segundo orden es:

$$I_h \ddot{\theta} + b \dot{\theta} + k_s \theta = 0 \quad (1.1)$$

Donde  $\theta$  es el desplazamiento angular relativo del centro de masa con respecto al tobillo,  $b$  es el coeficiente de amortiguamiento del músculo,  $I_h = ml^2$  es la inercia de todo el cuerpo con respecto al tobillo,  $m$  es la masa del sujeto,  $l$  es el radio de giro del sujeto,  $k_s = k - mgl$  es la rigidez aparente del sistema dada por la diferencia de la rigidez del tobillo  $k$  y el efecto de la aceleración de la gravedad  $g$ .

En un modelo más fisiológicamente preciso, los tendones actúan como amortiguadores de impedancia estabilizadores entre el elemento generador de fuerza (músculo) y el ambiente. Esta característica podría estar mejor representada por un modelo Poynting-Thomson (PT) de tercer orden [20].

En la Figura 1.11 se muestra la representación esquemática del péndulo invertido basándose en el modelo viscoelástico de Poynting-Thomson, obteniendo un modelo dinámico de tercer orden.

Para oscilaciones pequeñas, la representación del sistema músculo-tendón de tercer orden durante el reposo, es expresada por la siguiente ecuación:

$$I_h \ddot{\theta} + \frac{I_h}{b_m(k_m + k_t)} \ddot{\theta} + (k_t + k_g) \dot{\theta} + \frac{1}{b_m(k_m k_t + k_m k_g + k_t k_g)} \theta = 0 \quad (1.2)$$

Donde la energía potencial es modelada como una rigidez negativa y es equivalente a  $k_g = -mgh$ . También

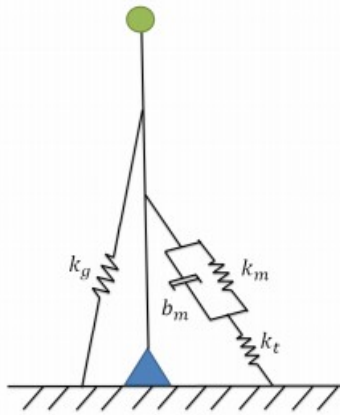


Figura 1.11: Modelo dinámico de un péndulo invertido para representar la recuperación de la postura vertical, utilizando ecuaciones diferenciales de tercer orden, basándose en el modelo viscoelástico de Poynting-Thomson [5].

$k_t$ ,  $k_m$  y  $b_m$  son los parámetros desconocidos de amortiguamiento y rigidez del músculo respectivamente, así como de la rigidez del tendón.

#### 1.1.4. Algoritmos de identificación del sistema

Desde los años 60's, el campo de identificación de sistemas se ha desarrollado como una herramienta indispensable con aplicaciones a la ingeniería [21]. Una de sus primeras definiciones de éste, fue dada por Zadeh [22]: "La identificación es la determinación, sobre la base de la entrada y de la salida, de un sistema dentro de una clase especificada son las que el sistema bajo prueba es equivalente". Hay tres elementos esenciales para un problema de identificación del sistema, un sistema (modelo), un experimento y una respuesta (salida o medida). El subcampo de identificación del sistema más ampliamente aplicado es el de estimación de parámetros en el que se utiliza un modelo matemático supuesto basado en las consideraciones fenomenológicas para estimar las propiedades del sistema dinámico [23]. Sin embargo, el modelo supuesto no será una representación exacta del sistema. Además, los datos experimentales hechos con instrumentos reales no serán consistentes con respecto al modelo matemático propuesto. Por lo tanto, la tarea para determinar las mejores estimaciones, más que los valores exactos, se denomina estimación de parámetros. Los dos problemas más importantes de la estimación de parámetros son: la definición de los criterios para la mejor estimación y la caracterización de los errores potenciales durante la estimación [21]. En la Figura 1.12 se muestra el diagrama de proceso general para el uso de Algoritmos de Identificación del Sistema.

Los métodos modernos de estimación de parámetros pueden clasificarse en tres categorías [23]:

- Métodos de Error de Ecuación (EEM, por sus siglas en inglés)
- Métodos de Error de Salida (OEM, por sus siglas en inglés)
- Métodos de Error de Filtro (FEM, por sus siglas en inglés)

Los métodos EEM's y OEM's son determinísticos, en oposición al enfoque estocástico de los métodos FEM's.

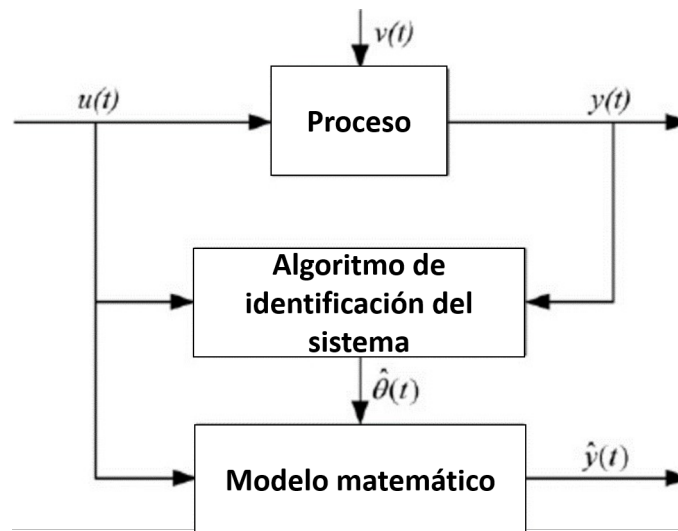


Figura 1.12: Ejemplo de Diagrama de Proceso de implementación de algoritmos de identificación [24].

Los EEM's, se basan en la regresión lineal utilizando la técnica de mínimos cuadrados ordinarios. Su principal ventaja radica en su simplicidad computacional y naturaleza no-iterativa. Sin embargo, en presencia de ruido de medición, las estimaciones de mínimos cuadrados están asintóticamente sesgadas, inconsistentes e ineficientes [25].

Los OEM, buscan aquellos valores de parámetros que minimizan el error entre las respuestas medidas y las respuestas correspondientes del modelo matemático supuesto. La versión más utilizada, el Método de Máxima Verosimilitud (ML) que tiene como principal ventaja, las estimaciones de los parámetros son asintóticamente imparciales, consistentes y eficientes. El método también proporciona una medida de precisión en términos de Desviación Estándar como en los cálculos [25]. Las estimaciones de ML de los parámetros del modelo que solo tienen en cuenta el ruido de medición se pueden utilizar con eficacia para los sistemas lineales y no lineales [26].

FEM, es quizás el enfoque estocástico más general para la estimación de parámetros [26], que explica tanto el ruido de proceso como de medición, y fue propuesto por Balakrishnan [27].

### 1.1.5. Antecedentes de identificación de parámetros biomecánicos

Algunos autores [28, 29] mencionan que la estimación de la rigidez del tobillo durante el reposo puede ser crucial en la comprensión del control motriz y puede resultar en una herramienta clínica de gran utilidad. Por ejemplo, en 1988 Johansson et. al. [6] realizaron la estimación de los parámetros de rigidez, amortiguamiento y rigidez; que logran estabilizar a una persona ante una perturbación, basándose en el modelo dinámico de un péndulo invertido simple utilizando las teorías de control clásico. El modelo está formulado para la dinámica en el plano sagital con el cuerpo concebido como un péndulo invertido. El péndulo invertido tiene un equilibrio inestable en  $\theta = 0$  como se muestra en la Figura 1.13, lo que significa que las fuerzas estabilizadoras activas deben compensar las desviaciones en la posición para mantener la postura. En la Figura 1.13 se muestra el modelo de control en el plano sagital para determinar la ecuación dinámica que lo gobierna.



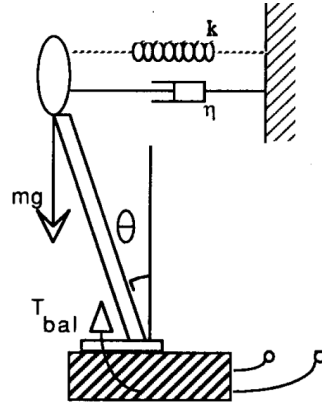


Figura 1.13: Modelo propuesto por Johansson et. al. para la identificación de rigidez, amortiguamiento y rapidez [6].

Basándose del modelo de la Figura 1.13 Johansson et. al. se pueden hacer algunas suposiciones:

1. El cuerpo es rígido, y tiene una masa  $m$
2. El centro de masa del cuerpo esta localizado a una distancia  $l$  desde la superficie de movimiento.
3. Existe un equilibrio entre el par provocado por la inercia del cuerpo y las fuerzas que actúan sobre el péndulo.

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = mgl \cdot \text{sen}\theta(t), \quad J = ml^2 \quad (1.3)$$

donde  $J$  es la inercia del cuerpo,  $g$  es la aceleración debido a la gravedad y  $\theta$  el desplazamiento angular del péndulo.

4. Supone que existe un torque de estabilización en el tobillo  $T_{bal}(t)$
5. Supone que existe un torque de perturbación en el entorno  $T_d(t)$ . El torque de balance ahora tiene la forma:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = mgl \cdot \text{sen}\theta(t) + T_{bal}(t) + T_d(t), \quad J = ml^2 \quad (1.4)$$

6. Supone que  $T_{bal}$  estabiliza la postura con un control PID, con componentes P, I y D, las cuales son determinadas por los coeficientes  $k$ ,  $\eta$  y  $\rho$ .

$$P : -mgl \text{sen}\theta(t) - kJ\theta(t)$$

$$D : -\eta J \dot{\theta}(t)$$

$$I : -\rho J \int \theta(t) dt$$

Sujeto	$\eta$	$k$	$\rho$
Sujeto 1	6.09	49.25	18.67
Sujeto 2	4.43	43.99	10.46
Sujeto 3	3.64	32.15	14.85
Sujeto 4	2.90	10.44	4.39
Sujeto 5	6.89	47.79	28.68
Sujeto 6	4.97	49.45	31.99

Figura 1.14: Resultados de la identificación de los experimentos realizados por Johansson [6].

El parámetro  $k$  puede ser interpretado como un resorte constante, y  $\eta$  podría ser comparado con el amortiguamiento viscoso. El parámetro  $\rho$  puede interpretarse como una constante para la acción de restablecimiento lento en el sistema de control.

7. Es necesario introducir el efecto de vibración  $v$ , el cual introduce una entrada errónea para la estabilización del sistema, causando una percepción errónea de la posición  $\theta$  y la velocidad angular  $\dot{\theta}$  de modo que las acciones P, D del sistema de retroalimentación se modifican a:

$$\begin{aligned}
 P & : -mgl\sin\theta(t) - kJ\theta(t) + b_1v(t) \\
 D & : -\eta J\dot{\theta}(t) + b_2v(t)
 \end{aligned}$$

donde se supone que  $v$  perturba tanto el estiramiento como la percepción de velocidad pero en diferentes proporciones  $b_1$  y  $b_2$ , respectivamente.

Se encuentra la función de transferencia utilizando el concepto de las transformadas de Laplace tal como se usan en la teoría de control [30].

La experimentación se realizó en seis sujetos y constaba de mover la plataforma con una frecuencia de 10 Hz con los ojos cerrados. Se realiza la identificación de los parámetros  $k$ ,  $\eta$ ,  $\rho$ ; con la ayuda de la metodología de Máxima Verosimilitud (previamente mencionada en la sección 1.1.4). En la Figura 1.14 se presentan los resultados de la identificación.

Los coeficientes identificados  $k$ ,  $\eta$  y  $\rho$  representan diferentes aspectos del sistema de control de la postura. La amplitud del balanceo del cuerpo puede hacerse grande para una  $k$  pequeña, mientras que una  $k$  grande proporciona un buen control postural de la posición angular. El parámetro  $\eta$  representa el amortiguamiento del balanceo del cuerpo. Un valor demasiado pequeño de  $\eta$  significa bajo amortiguamiento de la oscilación del cuerpo, mientras que un valor grande significa rigidez. El parámetro  $\rho$  representa el restablecimiento automático, es decir, la acción compensatoria para eliminar el sesgo en la posición angular. Con una combinación de los parámetros  $k$ ,  $\eta$  y  $\rho$ , se puede describir una gran variedad de patrones de balanceo del cuerpo. Las acciones proporcionales y derivadas representadas por los parámetros  $k$  y  $\eta$  son indispensables para mantener la estabilidad.

Por otra parte, Azaman et.al. [4] realizaron un modelo dinámico para obtener los parámetros de control de postura basándose en la estrategia de cadera. Su trabajo consistía en la medición de la rigidez a través de un análisis en frecuencia. La experimentación consiste en mover una plataforma a distintas frecuencias y se espera que mientras la frecuencia de oscilación va aumentando, la rigidez de ambas extremidades aumente.

Basándose en el patrón de rigidez, se observó que ambas articulaciones (tobillo y cadera) presentan una frecuencia de oscilación más pequeña con respecto a la frecuencia de la perturbación. Para encontrar la rigidez, se utilizó una solución de aproximación a las ecuaciones de movimiento:

$$I \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + B \frac{d\Theta}{dt} + K \Theta = mgh \cdot \text{sen} \Theta \quad (1.5)$$

$$\Theta = A \text{sen}(\omega t) \quad (1.6)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_h \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

donde  $I$  es la inercia del sistema,  $B$  el coeficiente de amortiguamiento del músculo en cuestión,  $K$  el coeficiente de rigidez (tobillo/cadera),  $m$  es la masa del sujeto,  $h$  el radio de giro del sujeto. En (1.6) se encuentra la solución de aproximación, la cual está en función de  $A$  que es la amplitud de las posiciones angulares de ambos segmentos, de  $\omega$  que es la frecuencia de oscilación de la perturbación y de  $t$  que es el tiempo de duración del estudio.

Las personas involucradas en el experimento fueron 5 jóvenes sanos (edad  $22.3 \pm 0.8$  años; altura  $169 \pm 2.5$  cm; peso  $63.9 \pm 1.85$  kg). Se pidió a los sujetos que mantuviesen una posición de reposo cuando se expusieran a una perturbación externa (desplazamiento: 70 mm) a cuatro frecuencias de perturbación diferentes (0,2, 0,4, 0,6 y 0,8 Hz). En la Figura 1.15 se observa la configuración del experimento el cual, principalmente, contiene los marcadores de posición sobre el sujeto de prueba, un sistema de captura de movimiento y una plataforma de fuerzas.

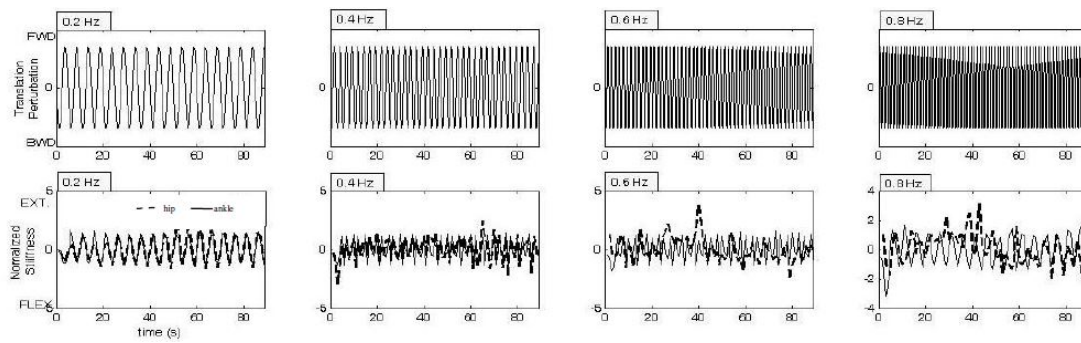


Figura 1.16: Comportamiento de rigidez de tobillo y cadera a diferentes frecuencias [4].

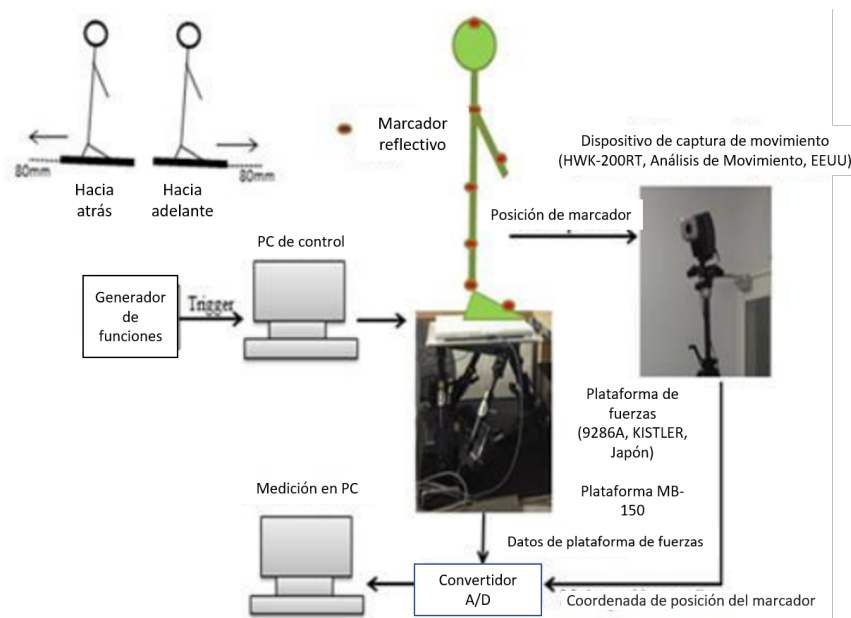


Figura 1.15: Configuración del experimento [4].

Para calcular la rigidez del tobillo y cadera, se utilizó el ángulo de balanceo y el par de torsión capturado por la plataforma de fuerza. Los resultados del experimento se muestran en la Figura 1.16.

Los autores concluyen que la rigidez del tobillo y cadera aumentan, de manera proporcional al valor de la frecuencia. Se observa que a bajas frecuencias la junta de la cadera no genera un movimiento significativo, ya que, aplicar la estrategia de tobillo es suficiente para el control de la recuperación del equilibrio.

Otra alternativa de estimación es considerar a los elementos de control de rigidez y amortiguamiento para la recuperación vertical, no son elementos pasivos. En algunos trabajos, se ha estudiado que los parámetros de control dinámicos de los músculos no se pueden considerar como elementos pasivos, y que estos se encuentran en función de la actividad muscular. La actividad muscular, es la respuesta del elemento en cuestión ante diferentes tareas. Este comportamiento se puede obtener realizando estudios de EMG, lo cuales arrojan una respuesta en voltaje.

Un modelo que realiza la anterior suposición es el modelo empírico de Hill-Stroeve [2, 31]. El modelo de

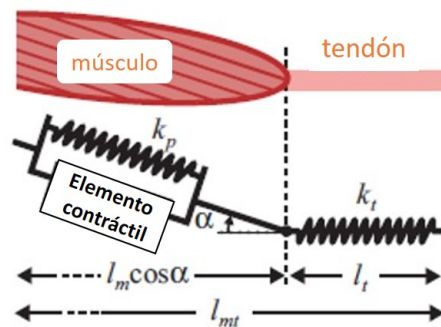


Figura 1.17: Modelo de Hill-Stroevé [2].

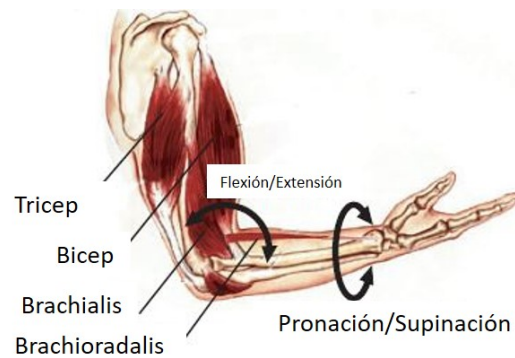


Figura 1.18: Movimiento flexión/extensión de brazo [2].

Hill-Stroevé ayuda a conocer las fuerzas que se presentan en los músculos en función del tiempo ya que se encuentran en función de la actividad muscular, la cual se presenta en relación a las fuerzas de oposición del músculo. Estas representan la rigidez del tendón, rigidez del músculo y amortiguamiento del mismo [2]. En la Figura 1.17 se muestra la configuración del modelo de Hill-Stroevé, el cual consta de un elemento rígido  $k_t$  para modelar el comportamiento del tendón, unido a la combinación en paralelo de un elemento rígido  $k_p$  y un elemento contráctil que modela el comportamiento del músculo.

Una de las aplicaciones que ha tenido este modelo ha sido para encontrar las fuerzas musculares para el movimiento de brazo, los músculos que fueron analizados fueron: Tricep, Bicep, Brachialis y Brachioradalis[2]. En la Figura 1.18 se muestra el movimiento de flexión/extensión del brazo.

Para encontrar las fuerzas musculares, el modelo de Hill-Stroevé propone encontrar la actividad muscular, la cual es medida con un conjunto de electrodos de EMG y un sistema de marcadores ópticos para registrar la posición común con un sistema de captura de movimiento. En la Figura 1.19 se observa el sistema de captura de movimiento con los electrodos de superficie EMG.

El resultado del experimento es la fuerza en función del tiempo de los músculos descritos previamente, debido a la actividad muscular registrada por los electrodos EMG's y los marcadores ópticos aunados al modelo empírico de Hill-Stroevé.

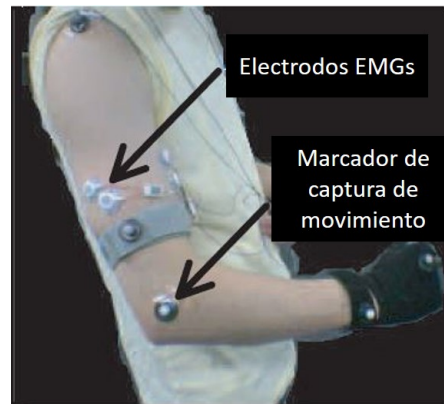


Figura 1.19: Equipo de experimentación: Electrodo de superficie EMG's y marcadores ópticos [2].

Así como fueron usados los electrodos EMG's para este tipo de aplicación, estos han sido utilizados de distintas maneras, algunos ejemplos de su uso han sido:

- Respuesta muscular en voltaje de rodilla [32].
- Respuesta muscular ocasionado por fenómenos naturales (terremotos) [33].

En el primero de estos ejemplos, los electrodos EMG's son usados para comprobar el comportamiento de los músculos "Gastrocnemio" y "Vasto Medial", para con ello obtener el comportamiento aparente de la rodilla en función de dichos músculos. El fin de este estudio es comparar los resultados entre personas sanas de 60 años con personas de 20 años, con el propósito de saber si se presenta un deterioro en la función del músculo con el paso del tiempo, o si alguna enfermedad como la Osteoartritis podría predecirse con un estudio de este tipo [32].

El segundo ejemplo es utilizado para predecir el comportamiento durante un terremoto a diferentes magnitudes en la escala de Richter, yendo desde los movimientos de menor intensidad a movimientos de alta frecuencia siendo de niveles catastróficos [33]. El principal motivo de este estudio fue encontrar la señal muscular (mV) de: "Gastrocnemio", "Soleo" y "Tibial anterior". Para este caso de estudio se realizó el experimento en 5 personas (3 hombres y 2 mujeres) libres de desordenes músculo-esqueléticos y neurológicos; el experimento consiste de dos intentos por sujeto, estos intentos comprenden 10 escenarios de 10 segundos cada uno, empezando en posición de pie y seguido por una simulación incremental en magnitud del terremoto desde 3.5 a 6.5 grados en la escala de Richter [33]. En la Figura 1.20 se observa la configuración del experimento.

## 1.2. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se hizo una revisión bibliográfica, primero de las generalidades de la biomecánica; la definición de la biomécanica, así como algunas tareas, que involucran el estudio del movimiento en el cuerpo humano tales como, el procesamiento de señales, la cinemática, la dinámica o la electromiografía.

Se estudiaron las diferentes estrategias para la recuperación de la postura vertical, las cuales son la estrategia de tobillo, estrategia de cadera y estrategia de paso. La estrategia de cadera será el tema de interés del presente trabajo de tesis.

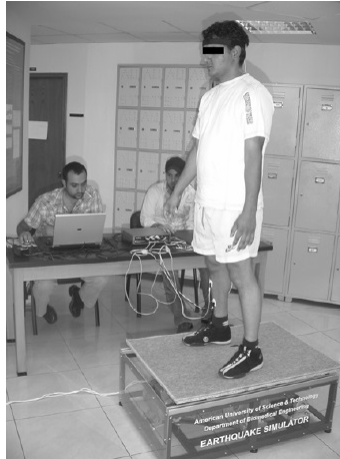


Figura 1.20: Sistema de simulación de terremotos [33] .

Se revisaron los modelos ya implementados para la estrategia de tobillo, los cuales, son la base para el desarrollo de los modelos dinámicos propuestos para la estimación de los parámetros viscoelásticos.

Se revisaron las generalidades y los diferentes tipos de algoritmos de identificación del sistema. Esto es una parte fundamental en el desarrollo de la tesis ya que, no solo el modelo dinámico de la estrategia de cadera será de utilidad para la estimación, sino, también la utilización de estos algoritmos.

Finalmente se mostraron algunos antecedentes de estimación de algunos parámetros biomecánicos; no todos estos parámetros fueron estimados en el movimiento de la postura vertical. Una parte fundamental de esta investigación fue que según el modelo de Hill, los parámetros viscoelásticos no son elementos pasivos, si no que son variantes en el tiempo en función de la actividad muscular, la cual puede ser medida a través de estudios de electromiografía.





## Capítulo 2

# Modelado, estimación y validación experimental de un modelo dinámico de segundo orden

### 2.1. Introducción

En este capítulo se analiza la recuperación del equilibrio por medio de la estrategia de cadera que es una de las estrategias para la recuperación vertical. Se realiza el análisis con un enfoque dinámico, el cual puede ser modelado como un doble péndulo invertido y sus ecuaciones de movimiento pueden ser obtenidas mediante la metodología de Euler-Lagrange. Se buscan estimar los parámetros viscoelásticos de los eslabones utilizados para la estrategia de cadera, basándose en las ecuaciones de movimiento no lineales descritas a partir de un modelo de segundo orden. Se busca también validar las metodologías de estimación y el modelo mediante una maqueta de un doble péndulo invertido. Por último, se presenta la fase de experimentación aplicando todo lo visto anteriormente y se buscan encontrar características similares entre sujetos diferentes, tanto de manera cuantitativa como cualitativa.

En la literatura se ha desarrollado el modelo dinámico de la recuperación de postura vertical humana, basándose en la estrategia de tobillo, aproximando este movimiento al de un péndulo invertido simple [5]. Por otro lado, el uso de modelos de mayor complejidad podría dar oportunidad de destacar diferentes estrategias de control que implican el control coordinado de múltiples grados de libertad [34].

En el presente capítulo se ha utilizado el paradigma de sostener y liberar “*Hold & Release*” propuesto por Bortolami et. al. [35], combinado con una técnica de estimación del sistema basada en el tiempo [36], para determinar la rigidez variable de la cadera y el tobillo los cuales permiten a los individuos recuperarse de una caída. El objetivo final de este proyecto es encontrar las estrategias de control utilizadas por los individuos para evitar caídas, así como mostrar la modulación de la rigidez y el amortiguamiento en las articulaciones. La técnica propuesta en este documento permitirá alcanzar el objetivo práctico de crear una herramienta para evaluar el riesgo de caídas en las personas mayores.

En este capítulo se presentan las ecuaciones de movimiento no lineales asociadas con el modelo y cómo se usan para la estimación de los parámetros viscoelásticos utilizando algunos algoritmos de estimación. Después de una validación de la técnica de estimación, se presenta un conjunto de mediciones directas en sujetos humanos donde se puede destacar un comportamiento similar entre los sujetos. Específicamente, se observa que la rigidez de la cadera se mantiene constante mientras que la rigidez del tobillo cambia activamente de signo para inyectar o disipar energía en el sistema, con el fin de realizar la tarea de control más sencilla.

## 2.2. Marco teórico

### 2.2.1. Mecánica Analítica

Las leyes de Newton se realizaron para el análisis de partículas individuales y sistemas de partículas. Para la solución de problemas de mecánica, se puede utilizar la mecánica vectorial, la cual se basa en las leyes de Newton y analiza el movimiento utilizando conceptos como fuerza y momentos. Con este método es necesario encontrar fuerzas y momentos para llevar a cabo el análisis, aunque no sean de interés.

Leibnitz y Lagrange propusieron una alternativa a la solución de problemas de mecánica, la cual se conoce como mecánica analítica. Este enfoque de solución considera el sistema como un todo. Estos problemas formulan a partir de la energía cinética y potencial. A diferencia del enfoque de la mecánica vectorial, las ecuaciones de movimiento se calcula a partir de las coordenadas generalizadas. Las necesidades especiales de la mecánica analítica se denomina como el enfoque variacional de la mecánica [37, 38].

### 2.2.2. Algoritmos de estimación de los parámetros del sistema

En el capítulo anterior se habló de los algoritmos de identificación del sistema de forma generalizada, sin embargo, este apartado tiene una alta relevancia en el desarrollo del presente capítulo ya que por medio de estos algoritmos se realiza la estimación de los parámetros viscoelásticos del modelo de segundo orden descrito más adelante. Existen muchos algoritmos de estimación, sin embargo, en ese capítulo se hablará en detalle de dos de ellos: Mínimos cuadrados y Filtro de Kalman. Estos métodos fueron los utilizados durante el desarrollo de este trabajo.

#### Mínimos Cuadrados

Gauss inventó y usó el método de los mínimos cuadrados como su técnica de estimación. Sugirió que los valores más apropiados para los parámetros desconocidos pero deseados son los valores más probables. Los cuales los definió como: «El valor más probable de las cantidades desconocidas será aquel en que la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores efectivamente observados y calculados multiplicados por números que midan el grado de precisión sea un mínimo». La diferencia entre la medida observada y calculada es generalmente llamada el residuo.

Suponiendo que los parámetros  $x$  se determinan a partir de los datos y relaciones como:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x} + \rho \tag{2.1}$$

donde  $\rho$  representa el error de la medición que ocurre en cada tiempo de observación. Como es visto en la ecuación (2.1), se supone que los datos de medición y los parámetros  $x$  se encuentran linealmente relacionados. El método de mínimos cuadrados relacionado con la determinación del valor más probable de  $x$ . Este valor más probable es definido como el valor que minimiza la suma de los cuadrados de los residuos. Así, escoger  $x$  tal que

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n [\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}]^T \mathbf{W}_k [\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}] \quad (2.2)$$

es minimizado. Los elementos de la matriz  $\mathbf{W}_k$  son seleccionados para indicar el grado de confianza que se tiene en cada medición [39, 40].

### Filtro de Kalman discreto

Fue publicado por primera vez por Rudolf E. Kalman en su artículo seminal de 1960 titulado «A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems» [41]. En su núcleo, propaga un estado caracterizado por una distribución Gaussiana que usa funciones de transición lineal de una manera óptima.

Supongamos que tenemos un sistema lineal de tiempo discreto dado de la siguiente manera:

$$x_k = \mathbf{A}_{k-1} x_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mu_{k-1} + w_{k-1} \quad (2.3)$$

$$z_k = \mathbf{H}_k x_k + v_k \quad (2.4)$$

Los ruidos  $w_k$  y  $v_k$  son blancos, con promedio cero, no correlacionado. La meta es estimar el estado  $x_k$  basado en el conocimiento de la dinámica del sistema y la disponibilidad de las mediciones ruidosas  $z_k$ . Si se tienen todas las mediciones hasta e incluyendo en el tiempo  $k$  disponible para usar en la estimación de  $x_k$  entonces se puede formar una estimación *a posteriori*, la cual se puede denotar como  $\hat{x}_k^+$ .

Si tenemos todas las mediciones antes del tiempo  $k$  disponible para usar en nuestra estimación de  $x_k$ , entonces se puede formar una estimación *a priori*, que denotamos como  $\hat{x}_k^-$ .

En la siguiente notación, se usa  $\hat{x}_0^+$  para denotar la estimación inicial de  $x_0$  antes de que cualquier medición esté disponible. La primera medición es tomada en el tiempo  $k = 1$ . Ya que no se tiene ninguna medición disponible para estimar  $x_0$ , es razonable considerar que  $x_0^+$  como el valor del estado inicial  $x_0$ .

Se usa el término  $\mathbf{P}_k$  para denotar la covarianza del error de estimación.  $\mathbf{P}_k^-$  denota la covarianza del error de estimación de  $\hat{x}_k^-$ , y  $\mathbf{P}_k^+$  denota la covarianza del error de estimación de  $\hat{x}_k^+$ .

Después de procesar la medición en el tiempo  $(k - 1)$ , se tiene una estimación de  $x_{k-1}$  (denotada  $x_{k-1}^+$ ) y la covarianza de esa estimación (denotada  $\mathbf{P}_{k-1}^+$ ). Cuando llega el tiempo  $k$ , antes de procesar la medición en el tiempo  $k$  se calcula una estimación de  $x_k$  (denotada como  $\hat{x}_k^-$ ) y la covarianza de esa estimación (denotada como  $\mathbf{P}_k^-$ ). Luego se procesa la medición en el tiempo  $k$  para refinar nuestra estimación de  $x_k$ . La estimación resultante de  $x_k$  se denota  $\hat{x}_k^+$ , y su covarianza se denota  $\mathbf{P}_k^+$ .

Se comienza el proceso de estimación con  $\hat{x}_0^+$ . Sustituyendo el valor dado  $\hat{x}_0^+$  en la ecuación (2.3) se obtiene:

$$\hat{x}_1^+ = \mathbf{A}_0 \hat{x}_0^+ + \mathbf{B}_0 \mu_0 \quad (2.5)$$

Esta es una ecuación específica que muestra como obtener  $\hat{x}_1^-$  de  $\hat{x}_0^+$ . Sin embargo, el razonamiento se puede extender para obtener la siguiente ecuación más general:

$$\hat{x}_k^- = \mathbf{A}_{k-1} \hat{x}_{k-1}^+ + \mathbf{B}_{k-1} \mu_{k-1} \quad (2.6)$$

La ecuación (2.6) se llama la ecuación de actualización de tiempo para  $\hat{x}$ . desde el tiempo  $(k-1)^+$  hasta el tiempo  $k^-$ . No se tiene ninguna medida adicional disponible para ayudar a actualizar la estimación de estado entre el tiempo  $(k-1)^+$  y  $k^-$ , así que solo se debe actualizar la estimación del estado en función del de la dinámica del sistema.

Dado  $\mathbf{P}_0^+$ , se puede obtener  $\mathbf{P}_1^-$  utilizando la ecuación:  $\mathbf{P}_k = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$  por lo que se obtiene:

$$\mathbf{P}_1^- = \mathbf{A}_0 \mathbf{P}_0 \mathbf{A}_0^T + \mathbf{Q}_0 \quad (2.7)$$

Esta es una ecuación específica que muestra como obtener  $\mathbf{P}_1^-$  de  $\mathbf{P}_0^+$ . Sin embargo, el razonamiento se puede extender para obtener la siguiente ecuación más general:

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (2.8)$$

La ecuación (2.8) es conocida como la ecuación de actualización de tiempo para  $\mathbf{P}$ .

Se ha derivado las ecuaciones de actualización de tiempo para  $\hat{x}$  y  $\mathbf{P}$ . Ahora necesitan derivar las ecuaciones de actualización de medición para  $\hat{x}$  y  $\mathbf{P}$ . La cantidad  $\hat{x}_k^-$  es una estimación de  $x_k$ , y la cantidad  $\hat{x}_k^+$  también es una estimación de  $x_k$ . La única diferencia entre  $\hat{x}_k^-$  y  $\hat{x}_k^+$  es que  $\hat{x}_k^+$  toma la medida  $z_k$  en cuenta. La disponibilidad de la medida  $z_k$  cambia la estimación de  $x$  de la siguiente manera:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (2.9)$$

$$= \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \quad (2.10)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + \mathbf{K}_k (z_k - \mathbf{H}_k \hat{x}_{k-1}) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \quad (2.12)$$

$$= (\mathbf{P}_{k-1}^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1} \quad (2.13)$$

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k-1} \quad (2.14)$$

Donde  $\hat{x}_{k-1}$  y  $\mathbf{P}_{k-1}$  son la estimación y su covarianza antes de que se procese la medición  $z_k$ , y  $\hat{x}_k$  y  $\mathbf{P}_k$  son la estimación y su covarianza después de que se procese la medición  $z_k$  [42, 43].

### 2.2.3. Procesamiento de Señales

El procesamiento de señales digitales tradicionalmente ha sido muy usado en las áreas de la medición y el análisis de dos maneras diferentes. Una forma es precondicionar la señal medida rechazando el ruido y la interferencia. La otra es interpretar las propiedades de los datos recopilados mediante, por ejemplo, correlación y transformaciones espectrales. En el área de equipos electrónicos médicos, se pueden encontrar filtros digitales más o menos sofisticados en equipos de electrocardiograma (ECG) y electroencefalograma para registrar las señales débiles en presencia de ruido de fondo e interferencia [44].

#### Filtro Butterworth

El físico Británico Stephen Butterworth realizó el diseño de este filtro en 1930[45]. Es un filtro de procesamiento de señal, diseñado, para dar una respuesta lo más suave posible por debajo de la frecuencia de corte. La frecuencia de corte es una límite en la respuesta de un sistema en el cual la energía comienza a disminuir.

Butterworth mostró que sucesivamente se lograron aproximaciones más cercanas con un número creciente de elementos de filtro de los valores correctos. En ese momento, los filtros generaron fluctuaciones sustanciales en la banda de paso, y la elección de los valores de los componentes fue altamente interactiva. Butterworth demostró que se podía diseñar un filtro de paso bajo cuya frecuencia de corte se normalizaba a 1 radián por segundo y cuya respuesta de frecuencia (ganancia) era:

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}} \quad (2.15)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular en radianes por segundo y  $n$  es el número de polos en el filtro.

Butterworth también demostró que el filtro pasa bajas básico podría modificarse para proporcionar la funcionalidad pasa bajas, pasa altas, pasa banda y rechaza banda.

Por ejemplo, Anjana Luke et. al. [46] utilizan un filtro Butterworth pasa bajas, para eliminar el ruido de medición en los equipos de Fotopleletismografico (PPG, por sus siglas en inglés) y ECG. Donde los estudios de PPG determinar el volumen de la sangre y los estudios ECG determinan la actividad cardíaca.

#### Filtro Savitsky-Golay

El filtro Savitzky-Golay es un filtro digital que se puede aplicar a un conjunto de puntos de datos digitales con el fin de suavizar los datos, es decir, aumentar la relación señal / ruido sin distorsionar en gran medida la señal. Esto se logra en un proceso conocido como convolución, mediante el ajuste de subconjuntos sucesivos de puntos de datos adyacentes con un polinomio de bajo grado por el método de mínimos cuadrados lineales. Cuando los puntos de datos están espaciados equitativamente, se puede encontrar una solución analítica para las ecuaciones de mínimos cuadrados, en forma de un único conjunto de "coeficientes de convolución" que se puede aplicar a todos los subconjuntos de datos, para proporcionar estimaciones del suavizado señal, en el punto central de cada subconjunto [47].

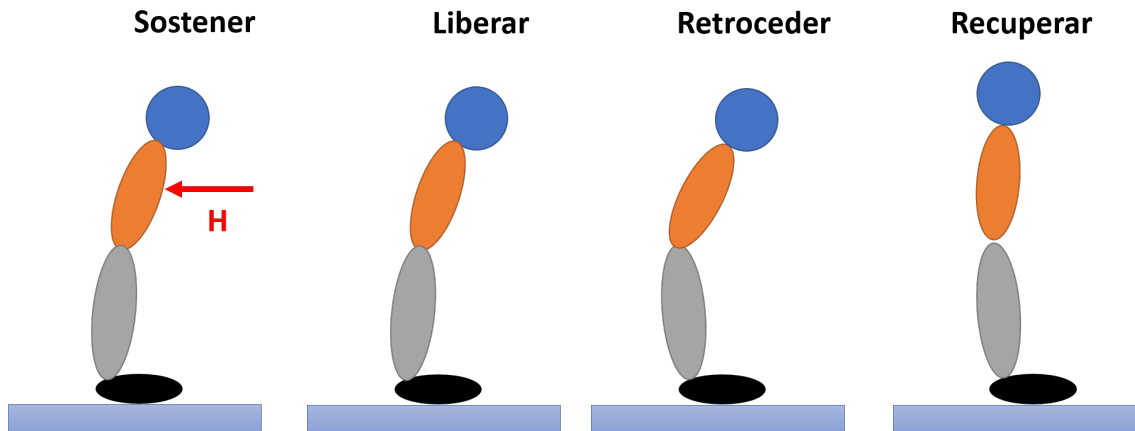


Figura 2.1: Descripción gráfica del paradigma *Hold & Release*, el cual cuenta con cuatro fases durante su ejecución: Sostener, Liberar, Retroceder y Recuperar.

#### 2.2.4. Paradigma *Hold & Release*

Bortolami et. al. desarrollaron una metodología para el estudio de la recuperación de la postura vertical [35], la cual consiste en emplear una técnica para crear una aceleración repentina y simultánea de todos los segmentos corporales alrededor de los pies utilizando un enfoque susceptible de caracterización matemática para poder modelar el patrón de recuperación postural. Se pretende que el paradigma comparta características clave con el inicio de la caída, ya que el control de la postura, por su naturaleza, funciona para evitar caídas. Esto permitirá determinar si la rigidez es un mecanismo empleado para recuperarse de la caída. El paradigma se muestra en la Figura 2.1. En esta situación, un sujeto se mantiene de pie y resiste activamente una fuerza horizontal aplicada al esternón. La fuerza se retira repentinamente y el sujeto se proyecta hacia adelante pivotando en los tobillos, rodillas y caderas porque el centro de presión del pie se desplazó hacia los talones por la fuerza de sujeción en el esternón. Una característica importante del H&R es que imita, de manera funcionalmente relevante y repetible, lo que sucede durante una pérdida inesperada de equilibrio, como tropiezos o pérdida de equilibrio. En H&R cuando se libera la fuerza de sujeción en el esternón, el cuerpo adquiere rápidamente un momento angular alrededor de los tobillos. Es este momento angular (no la fuerza de retención) y la desalineación repentina del centro de masa y del centro de presión del pie lo que constituye la perturbación que necesita acomodarse para mantener el equilibrio.

### 2.3. Modelado dinámico basado en la estrategia de cadera

Como se vio en el capítulo anterior, se han realizado trabajos basados en la estrategia de tobillo para la recuperación de la postura vertical [4, 5, 31], con el fin de estimar parámetros viscoelásticos. Se vio una mayor necesidad del estudio dinámico de la estrategia de cadera, pues proporciona mayor información que los trabajos anteriores; tanto en la cantidad de parámetros a estimar, como en la oportunidad de tareas de rehabilitación con mayor precisión al problema de postura vertical, así como permitir un mayor rango de movimiento.

Se propuso un modelo dinámico para estudiar el movimiento realizado durante la estrategia de cadera.

Esta estrategia fue explicada en detalle en el capítulo anterior. Debido a las características del movimiento, es posible modelarlo como un doble péndulo invertido, cuyos segmentos están conectados por resortes y amortiguadores rotacionales. De esta manera es posible modelar la recuperación de la postura vertical ya que estos elementos dan un comportamiento aproximado a la función de los músculos durante este movimiento. En la figura 2.2 se muestra el modelo esquemático de doble péndulo propuesto para el análisis de la recuperación de postura, en el cual  $m_i$  representa la masa del  $i$ -ésimo eslabón,  $l_i$  la longitud del mismo,  $r_i$  la distancia entre el eje de rotación de la junta y la posición del centro de masa del segmento,  $k_i$  y  $b_i$  respectivamente los parámetros viscoelásticos de rigidez y amortiguamiento, de los músculos asociados a cada eslabón y  $\theta_i$  representa el ángulo de cada uno de los eslabones, siendo  $\theta_1$  referido a la vertical y  $\theta_2$  medido a partir del eslabón anterior.

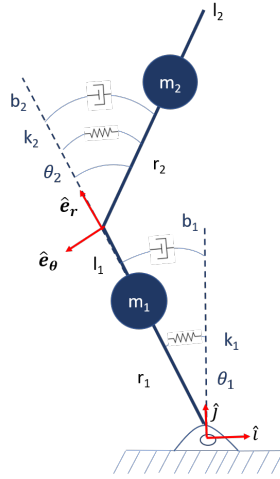


Figura 2.2: Modelo esquemático de doble péndulo emulando la estrategia de cadera para la recuperación de postura vertical.

Para obtener las ecuaciones de movimiento que gobiernan la física del problema, se utilizó la metodología de Euler-Lagrange [37]. Dicha metodología se basa en el estudio de las energías potencial y cinética, para ello, es necesario escribir el vector de posición de cada una de las masas involucradas en el sistema.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{m_1} \\ \mathbf{r}_{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_1 \text{sen} \theta_1 & r_1 \cos \theta_1 \\ -l_1 \text{sen} \theta_1 & l_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r_2 \cos \theta_2 & -r_2 \text{sen} \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

donde,  $\mathbf{r}_{m_1}$  y  $\mathbf{r}_{m_2}$  son los vectores de posición de las masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente. Y donde  $\begin{bmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta \end{bmatrix}^T$  corresponden a los ejes móviles asociados al primer eslabón. Es necesario encontrar el vector de posición  $\vec{r}_{m_2}$  en función del sistema coordenado fijo  $\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} \end{bmatrix}^T$ , para poder utilizar las ecuaciones de Euler-Lagrange. Los ejes móviles se definen como:

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen} \theta_1 & \cos \theta_1 \\ -\cos \theta_1 & -\text{sen} \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Sustituyendo los valores de  $[e_r \ e_\theta]^T$  de la ecuación (2.17) en la ecuación (2.16) se obtienen los vectores de posición  $\vec{r}_{m_1}$  y  $\vec{r}_{m_2}$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{m_1} \\ \mathbf{r}_{m_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -r_1 \text{sen} \theta_1 & r_1 \cos \theta_1 \\ -l_1 \text{sen} \theta_1 + r_2 \text{sen} \theta_{21} & l_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{bmatrix} \\ \theta_{21} &= \theta_2 - \theta_1 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Para el cálculo de la energía cinética se calcula el vector velocidad de las masas asociadas a los eslabones (2.18):

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_{m_1} \\ \dot{\mathbf{r}}_{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 & -r_1 \dot{\theta}_1 \text{sen} \theta_1 \\ -l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + r_2 \dot{\theta}_{21} \cos \theta_{21} & -l_1 \dot{\theta}_1 \text{sen} \theta_1 + r_2 \dot{\theta}_{21} \text{sen} \theta_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Dado que la energía cinética se calcula como  $T = \frac{1}{2} [\sum_{i=1}^n (m_i v_i^2 + I_i \omega_i^2)]$ , donde  $n$  es el número de eslabones e  $I_i$  las inercias alrededor del centro de masa, se calcula la velocidad al cuadrado de cada una de las masas, así como la velocidad angular de cada uno de los eslabones, obteniendo la energía cinética como

$$T = \frac{1}{2} [m_1 r_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 r_2^2 \dot{\theta}_{21}^2 - 2m_2 l_1 r_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{21} \cos \theta_2 + I_1 \dot{\theta}_1^2 + I_2 \dot{\theta}_{21}^2] \quad (2.20)$$

Posteriormente se calcula la energía potencial del sistema, la cual se calcula como  $V = g \sum m_i h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i \theta_i^2$  donde  $h_i$  se refiere a la componente en la dirección de  $\hat{j}$  de cada una de las masas. La energía potencial del sistema se escribe como:

$$V = g [m_1 r_1 \cos \theta_1 + m_2 l_1 \cos \theta_1 + m_2 r_2 \cos \theta_{21}] + \frac{1}{2} [k_1 \theta_1^2 + k_2 \theta_2^2] \quad (2.21)$$

Ya que se han calculado las energías cinética y potencial (ecuaciones (2.20) y (2.21)), se procede a desarrollar el Lagrangiano, el cual se define como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial.

$$L = T - V \quad (2.22)$$

Finalmente se considera la energía de disipación [38] la cual es calculada como  $D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b_i \dot{\theta}_i^2$ . Se obtiene que:

$$D = \frac{1}{2} [b_1 \dot{\theta}_1^2 + b_2 \dot{\theta}_2^2] \quad (2.23)$$

Utilizando la metodología de Euler-Lagrange se producen las ecuaciones de movimiento del sistema, las



ecuaciones de dicha metodología se definen como:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = \hat{Q}_k \quad (2.24)$$

donde:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix}^T$$

$$\hat{Q}_k = \sum_{j=1}^p \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k}$$

donde  $\vec{q}$  representa el vector de coordenadas generalizadas,  $p$  el número de fuerzas aplicadas al sistema,  $\vec{F}_j$  los vectores de fuerzas externas aplicadas al sistema y  $\vec{r}_j$  los vectores de posición de las fuerzas aplicadas.

Sustituyendo las ecuaciones (2.22) y (2.23) en la ecuación (2.24), y sabiendo que no existen fuerzas externas ( $\hat{Q}_k = 0$ ) se encuentran las ecuaciones gobernantes del segundo orden:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G} = \boldsymbol{\tau} \quad (2.25)$$

donde:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha + 2\beta \cos \theta_2 & -(\gamma + \beta \cos \theta_2) \\ -(\gamma + \beta \cos \theta_2) & \gamma \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2\beta\dot{\theta}_2 \text{sen}\theta_2 & \beta\dot{\theta}_2 \text{sen}\theta_2 \\ \beta\dot{\theta}_1 \text{sen}\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\delta \text{sen}\theta_1 + \epsilon \text{sen}\theta_{21} \\ -\epsilon \text{sen}\theta_{21} \end{bmatrix} g \quad (2.28)$$

$$\boldsymbol{\tau} = - \begin{bmatrix} k_1 \theta_1 + b_1 \dot{\theta}_1 \\ k_2 \theta_2 + b_2 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$\alpha = I_1 + I_2 + m_1 r_1^2 + m_2 (l_1^2 + r_2^2) \quad (2.30)$$

$$\beta = m_2 l_1 r_2 \quad (2.31)$$

$$\gamma = I_2 + m_2 r_2^2 \quad (2.32)$$

$$\delta = m_1 r_1 + m_2 l_1 \quad (2.33)$$

$$\epsilon = m_2 r_2 \quad (2.34)$$

## 2.4. Estimación de parámetros viscoelásticos

El análisis dinámico de la estrategia de cadera se realizó con el fin de estimar los parámetros viscoelásticos  $(k_i, b_i)$ . La ecuación (2.25) puede ser escrita como una función dependiente de estos parámetros como:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_2 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ b_1 \\ k_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k$$

donde:

$$z_k = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{G} \quad (2.36)$$

Antes de realizar experimentación en sujetos de prueba, se busca realizar simulaciones de estimación de parámetros con el fin de obtener los algoritmos de estimación y poder tratar de anticipar los problemas que se puedan presentar durante la fase de experimentación. También se busca, encontrar posibles soluciones.

Se hacen distintas simulaciones: primero suponiendo los parámetros constantes, como un primer acercamiento a la identificación de parámetros, y segundo, pensando en que estos parámetros son variantes en el tiempo, teniendo un comportamiento más cercano al humano [31].

Como punto de partida para la estimación de parámetros, se realizará un estudio de simulación para diferentes casos de estudio:

- Estimación de parámetros constantes. Se consideran los elementos viscoelásticos pasivos, lo que quiere decir, que su valor no cambia.
- Estimación de parámetros variantes. Se consideran los elementos viscoelásticos como una función del tiempo, debido a la actividad muscular durante la tarea de recuperación.

### 2.4.1. Estimación de parámetros constantes

Se generaron datos de simulación para validar los métodos de estimación. Para ello se propuso un sujeto con una masa  $m$  de 85 kg y una altura  $h$  de 1.7 m. Los parámetros inerciales requeridos para resolver las ecuaciones dinámicas del doble péndulo  $(m_1, m_2, r_1, l_1, r_2)$  se calcularon a partir de las tablas antropométricas de Winter [7]. Estos parámetros, así como los parámetros viscoelásticos propuestos se pueden ver en la Tabla 2.1. Cabe mencionar que los parámetros viscoelásticos propuestos han sido seleccionados a partir de valores de la literatura, en la estimación de parámetros propuesta para la estrategia de tobillo [5].

Parámetro	Valor		Parámetro	Valor	
$m$	85	kg	$k_1$	1050	Nm/rad
$h$	1.7	m	$b_1$	30	Nms/rad
$m_1$	$0.322m$	kg	$k_2$	500	Nm/rad
$m_2$	$0.678m$	kg	$b_2$	10	Nms/rad
$l_1$	$0.53h$	m			
$r_1$	$0.29h$	m			
$r_2$	$0.18h$	m			

Tabla 2.1: Parámetros usados para la simulación del modelo de segundo orden.

Para la solución de las ecuaciones de movimiento se partió de condiciones iniciales de posición y velocidad, con el fin de tratar de reproducir el movimiento ideal para el experimento “*Hold & Release*” [35]. Las condiciones iniciales con las cuales se realizó la estimación se presentan en la Tabla 2.2.

Condiciones iniciales		
$\theta_1$	-0.17	rad
$\dot{\theta}_1$	0	rad/s
$\theta_2$	0	rad
$\dot{\theta}_2$	0	rad/s

Tabla 2.2: Condiciones iniciales para estimación de parámetros viscoelásticos usando valores ideales.

Al resolver el sistema de ecuaciones diferenciales, utilizando Runge-Kutta de cuarto orden, se obtiene como resultado el comportamiento de  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Buscando aproximar los resultados de simulación a condiciones experimentales se añadió ruido blanco a los valores de la soluciones para las posiciones angulares del 10 % de la media del vector  $\theta_i$ . Para limpiar esta nueva señal ruidosa, se utilizó un filtro pasa bajas de fase cero [45] (véase Figura 2.3).

Las velocidades y aceleraciones angulares fueron calculadas de manera numérica utilizando diferencias centrales. Esto buscando no tener algún desfaseamiento en el tiempo [48].

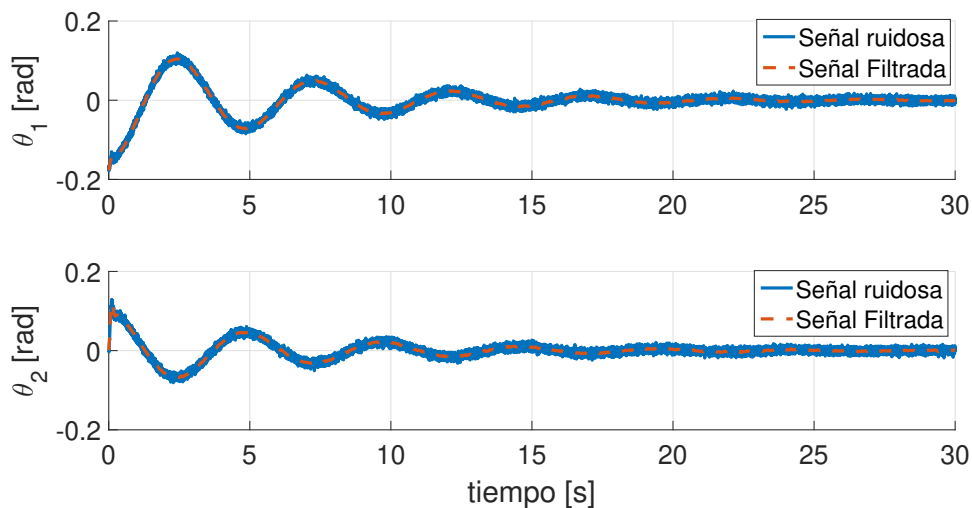


Figura 2.3: Valores angulares obtenidos en simulación para la orientación de cada segmento. La línea azul representa los valores de la posición angular con ruido agregado, mientras que la línea punteada roja representa los valores después del filtrado.

Para realizar la estimación de parámetros se utilizaron dos diferentes metodologías: mínimos cuadrados [40] utilizando la pseudoinversa descrita por Penrose [49]

$$\mathbf{x}_k = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{z}_k \quad (2.37)$$

y filtro de Kalman [41, 42] (ecuaciones (2.6), (2.8) - (2.14)) con el fin de comparar resultados y observar cual de ellas ofrece una mejor estimación. Para esta estimación, la matriz  $\mathbf{A}$  del filtro de Kalman es la identidad, ya que, no se considera que los parámetros evolucionan. La incertidumbre dada para la estimación dentro de la matriz  $\mathbf{Q}$  es cero, ya que, no existe evolución en el tiempo de los parámetros; por otra parte, el valor de la matriz  $\mathbf{R}$  fue obtenido de manera empírica, con el fin de encontrar la mejor estimación de los parámetros. En la Tabla 2.3 se puede observar los resultados obtenidos utilizando las dos metodologías de estimación de parámetros, así como el error promedio y la desviación estándar de  $\rho$  [39].

Parámetro	$\lambda_{ideal}$	$\lambda_{MC}$	$\lambda_{FK}$	
$k_1$	1050.0	1084.1	931.5	Nm/rad
$b_1$	30.0	28.6	39.9	Nms/rad
$k_2$	500.0	506.0	388.1	Nm/rad
$b_2$	10.0	8.3	6.7	Nms/rad
$promedio(\rho)$	-0.72E-6	-1.53E-2	-0.17E-2	Nm
$std(\rho)$	8.9E-9	0.21	0.21	Nm

Tabla 2.3: Comparación de resultados obtenidos con mínimos cuadrados y filtro de Kalman con respecto a los parámetros viscoelásticos propuestos.

### 2.4.2. Parámetros variantes en el tiempo

#### Estimación con mediciones ideales

Se sabe que el valor de los parámetros viscoelásticos no es constante, sino que varían en el tiempo en función de la actividad muscular [31]. Por ello, se implementó un algoritmo con el fin de estimar parámetros variantes en el tiempo. De la misma manera que para la estimación de parámetros constantes, se propuso un individuo de 85 kg de peso total y una altura de 1.7 m para realizar la simulación. Cabe mencionar que se propuso que el parámetro de rigidez para cada segmento del modelo sería una función sigmoide, ya que se busca una función continua. En la Tabla 2.4 se encuentran todos los parámetros propuestos para la simulación.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$m$	85 kg	$k_1(t)$	$1050 \left(1 + 0.1 \frac{1}{1+e^{-2(t-15)}}\right)$ Nm/rad
$h$	1.7 m	$b_1$	30 Nms/rad
$m_1$	$0.322m$ kg	$k_2(t)$	$500 \left(1 + 0.5 \frac{1}{1+e^{-2(t-15)}}\right)$ Nm/rad
$m_2$	$0.678m$ kg	$b_2$	20 Nms/rad
$l_1$	$0.53h$ m		
$r_1$	$0.29h$ m		
$l_2$	$0.18h$ m		

Tabla 2.4: Datos de simulación para estimación de parámetros viscoelásticos.

Resolviendo las ecuaciones de movimiento (2.25) con las condiciones iniciales mostradas en la Tabla 2.2 utilizando Runge-Kutta de cuarto orden, se obtiene el comportamiento de la posición angular mostrado en la Figura 2.4.

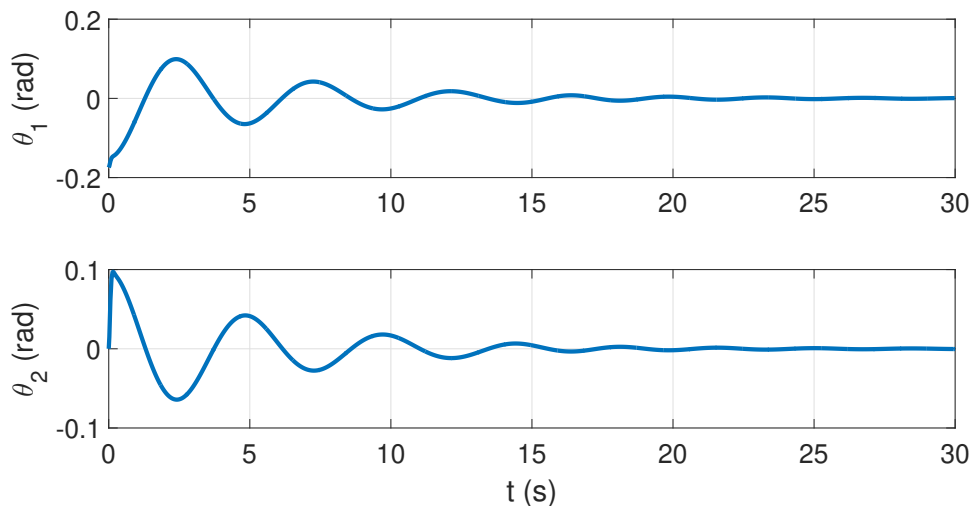


Figura 2.4: Posición angular obtenida solucionando el sistema de ecuaciones diferenciales utilizando Runge-Kutta de cuarto orden.

Se utilizan las ecuaciones del filtro de Kalman (2.8) - (2.14) para realizar la estimación de los parámetros del modelo. Se utilizó una matriz  $\mathbf{A}$  identidad para determinar la evolución de los parámetros, ya que, se en

la fase de experimentación se asume, que no se conocerá la evolución en el tiempo de los parámetros. Por otra parte, se asignaron valores de incertidumbre de evolución en el tiempo de la matriz  $\mathbf{Q}$  y a la matriz de incertidumbre en las mediciones  $\mathbf{R}$ ; siendo los valores de la matriz  $\mathbf{R}$  cercanos a cero, debido a que se estima utilizando las mediciones angulares ideales del sistema, por otro lado los valores asignados a  $\mathbf{Q}$  fueron obtenidos de manera empírica. Los valores estimados se muestran en la Figura 2.5.

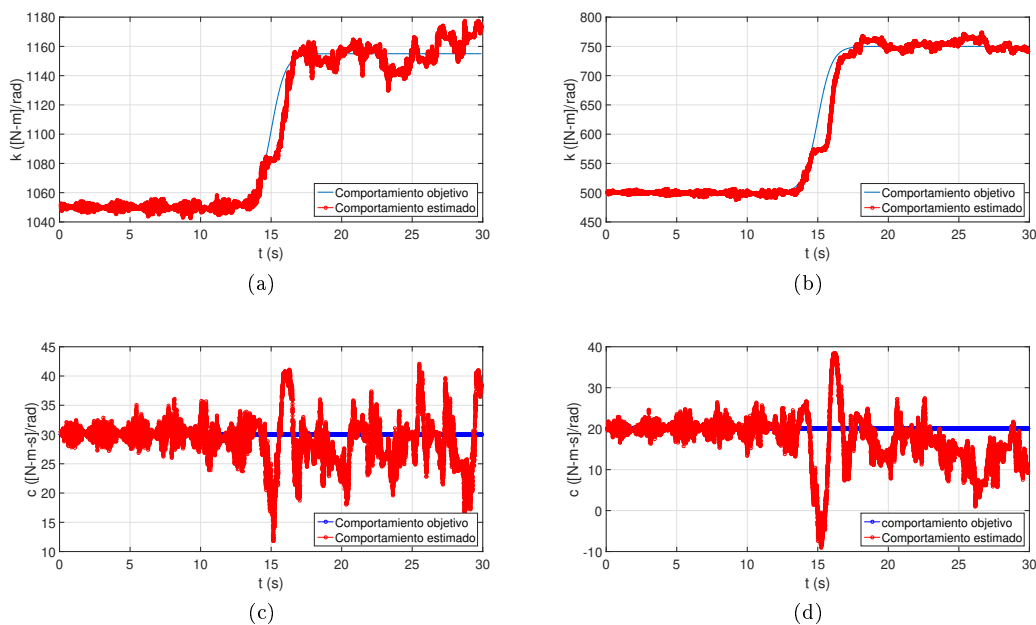


Figura 2.5: Comparación de los parámetros viscoelásticos ideales estimados utilizando filtro de Kalman con respecto a los propuestos. a) Rigidez de tobillo  $k_1(t)$ . b) Rigidez de cadera  $k_2(t)$  c) Amortiguamiento de tobillo  $b_1(t)$ . d) Amortiguamiento de cadera  $b_2(t)$ .

Para cuantificar el error en la estimación de parámetros, se calculó el RMSE y NRMSE [50]. En la Tabla 2.5 se muestran los errores calculados utilizando los valores ideales para la estimación.

Parámetro	RMSE	NRMSE (%)
$k_1$	8.2873	0.7516
$b_1$	3.9838	13.2794
$k_2$	20.1212	3.2194
$b_2$	7.7242	38.6214

Tabla 2.5: Estimación del error utilizando mediciones ideales.

Se observa una evolución bastante buena de los parámetros de rigidez conjunta ( $k_1$  y  $k_2$ ) a pesar de un modelo de evolución erróneo ( $\mathbf{A}$ ). El error de estimación para el coeficiente de amortiguamiento ( $b_1$  y  $b_2$ ) es mayor, lo que posiblemente indica una alta sensibilidad a la estimación de estos parámetros debido a la estimación de covarianza mientras que los valores de rigidez están cambiando.

### Estimación de parámetros con mediciones ruidosas

Para tener un enfoque más acercado al experimento, se agregó un ruido gaussiano del 10% de la diferencia del valor máximo y el mínimo de las posiciones angulares  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Para este caso, un filtro Savitsky-Golay de tercer orden fue utilizado [47], con el objetivo de comparar los resultados con respecto al filtro usado anteriormente (filtro Butterworth). La comparación de ambas señales se muestra en la Figura 2.6.

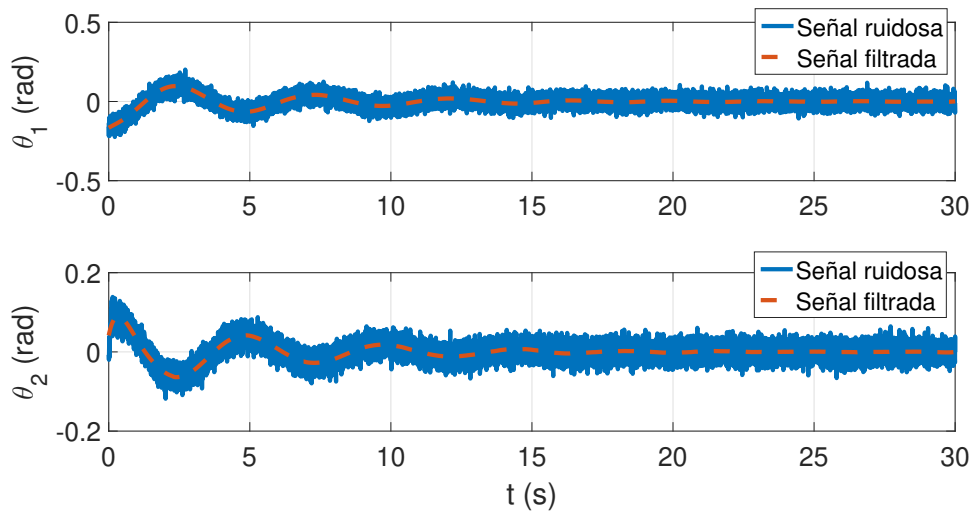


Figura 2.6: Comparación de los valores angulares obtenidos en simulación. La línea azul representa la posición angular añadiendo ruido gaussiano, mientras que la línea punteada roja la posición después de utilizar el filtro Savitsky-Golay.

Utilizando las ecuaciones del filtro de Kalman (2.8) - (2.14) y seleccionando de manera experimental valores diferentes de  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  [42] se realiza la estimación de parámetros. El comportamiento de los parámetros identificados se muestra en la Figura 2.7.

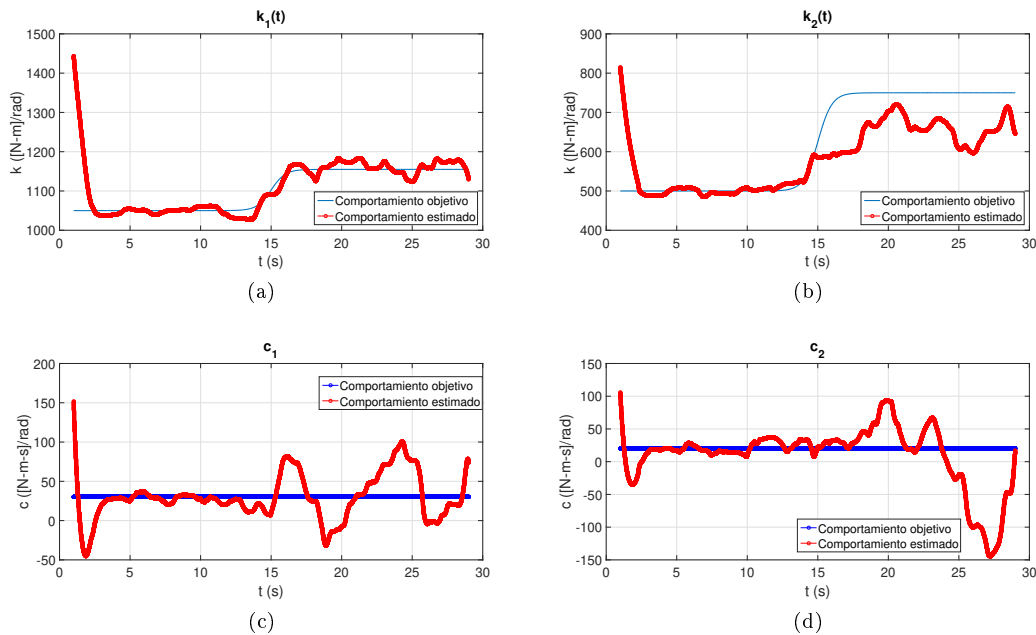


Figura 2.7: Evolución de los parámetros viscoelásticos estimados utilizando mediciones ruidosas. a) Rigidez de tobillo  $k_1(t)$ . b) Rigidez de cadera  $k_2(t)$  c) Amortiguamiento de tobillo  $b_1(t)$ . d) Amortiguamiento de cadera  $b_2(t)$ .

Para cuantificar el error en la estimación de parámetros, se calculó el RMSE y NRMSE [50]. En la Tabla 2.6 se muestran los errores calculados utilizando mediciones ruidosas..

Parámetro	RMSE	NRMSE (%)
$k_1$	47.4235	4.3014
$b_1$	28.7985	95.9952
$k_2$	47.4235	12.8814
$b_2$	48.5774	248.8873

Tabla 2.6: Error en la estimación de parámetros con mediciones con ruido.

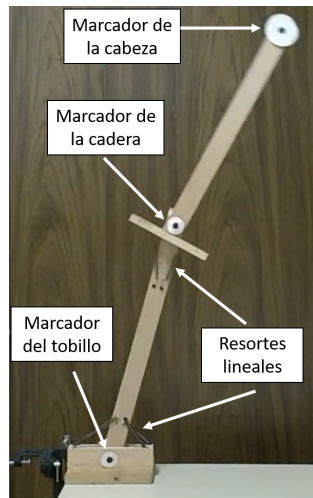
Se observa que la estimación de los parámetros de rigidez  $k_i$  es satisfactoria, a pesar del ruido añadido. Se puede concluir que es posible identificar la evolución de los parámetros viscoelásticos utilizando el filtro de Kalman, a pesar de no conocer la evolución de los parámetros en el tiempo. Por otra parte, los parámetros de amortiguamiento  $b_i$  tienen errores muy grandes. Esto puede ser por la poca dinámica del movimiento y por la sensibilidad de estimación.

## 2.5. Validación de modelo

Para validar las ecuaciones de movimiento del doble péndulo invertido y el procedimiento de estimación de parámetros, una maqueta fue construida (véase Figura 2.8a). La rigidez en las articulaciones se implementó utilizando resortes lineales entre las articulaciones. La maqueta fue construida con madera de pino. Para la



jointa inferior se realizaron dos barrenos uno en la base de la maqueta y otro en el eslabón de las piernas, y para permitir el giro de la jointa se introdujo un perno de madera entre dichos barrenos. El perno se cubrió de teflón con el fin de eliminar la fricción entre las superficies. En la jointa superior se realizó un proceso similar entre el eslabón de las piernas y el tronco. Para ambos eslabones se utilizaron resortes de tensión previamente cargados, con el objetivo, de que sin perturbación alguna la maqueta permaneciera en posición vertical. Los parámetros de masa y de longitud fueron medidos. En la Figura 2.8b se muestran los parámetros inerciales de la maqueta. Aparte de la fricción y la resistencia del aire, no se consideraron elementos de amortiguamiento para la construcción de la maqueta.



(a)

Parámetro	Valor
$m_1$	0.25 kg
$m_2$	0.20 kg
$l_1$	0.53 m
$r_1$	0.27 m
$r_2$	0.23 m

(b)

Figura 2.8: a) Maqueta construida para validar el procedimiento de estimación de parámetros. b) Parámetros medidos de la maqueta de doble péndulo invertido.

Como se ha visto en secciones anteriores, es necesario encontrar las posiciones angulares de los segmentos del péndulo invertido. La orientación de cada segmento se midió mediante el seguimiento de tres marcadores pasivos (correspondientes al tobillo, la cadera y la cabeza) utilizando el software de código abierto KINOVEA. La frecuencia de muestreo fue la de las cámaras de RGB utilizadas y promedió 22.5 fps. La maqueta fue utilizada para realizar dos diferentes experimentos:

- Estimación de los parámetros, asumiendo rigidez rotacional constante.
- Estimación de la rigidez como función de los ángulos  $\theta_i$ .

### 2.5.1. Estimación de los parámetros, asumiendo rigidez rotacional constante

Para la configuración que se muestra en la Figura 2.8a y para pequeños desplazamientos angulares, se espera que la rigidez rotacional sea  $k_r = n \times k_l r^2$ ; donde  $n$  es el número de resortes activos,  $k_r$  es la rigidez rotacional,  $k_l$  es la rigidez lineal del resorte y  $r$  el correspondiente brazo de palanca. Cuatro resortes lineales con una constante de 850 N/m fueron utilizados para la primera articulación (simulando el tobillo), colocados para tener un brazo de palanca de 74.2 mm. De la misma manera dos resortes con una constante de 690 N/m

fueron utilizados en la segunda junta (cadera) y se colocaron para tener un brazo de momento de 37.1 mm. Además, las longitudes de reposo de los resortes son tales que mientras la maqueta está en movimiento dos de los resortes en la articulación del tobillo puede relajarse mientras que ambos resortes en la articulación de la cadera permanecen tensos. Es decir, la rigidez aproximada de las articulaciones se espera que sea de 9.38 Nm/rad y 1.88 Nm/rad para las articulaciones del tobillo y la cadera de la maqueta respectivamente.

Para estimar el valor de los parámetros viscoelásticos de la maqueta, su movimiento se registró para ocho ensayos diferentes. Cada ensayo tuvo una condición inicial distinta, lo que lleva a una evolución diferente de los ángulos medidos entre ellos. Durante el experimento, el péndulo se movió a una posición inicial aleatoria, se mantuvo allí en reposo ( $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$ ) y se liberó repentinamente.

Utilizando la ecuación (2.35) y resolviendo para los parámetros viscoelásticos mediante la pseudoinversa (ecuación (2.37)), se obtienen los valores estimados. En la Tabla 2.7 se muestra la comparación de los valores medidos con respecto a los valores estimados.

Parámetro	$\hat{\lambda}_{medida}$	$\hat{\lambda}_{estimada}$	
$k_1$	9.38	9.84	Nm/rad
$b_1$	Desconocido	0.16	Nms/rad
$k_2$	1.88	1.86	Nm/rad
$b_2$	Desconocido	0.02	Nms/rad

Tabla 2.7: Tabla comparativa entre los valores viscoelásticos medidos y los estimados.

Los errores de estimación con respecto a los valores de rigidez medidos pueden atribuirse a los errores de medición. La Figura 2.9 muestra, en azul, una trayectoria angular medida obtenida con la maqueta para una prueba no utilizada para la estimación de los parámetros. La línea discontinua roja es la trayectoria predicha de la maqueta utilizando los valores estimados de los parámetros y la dinámica modelo presentado. En general, hay una buena coincidencia con respecto a la altura de los picos, pero los datos medidos parecen tener una frecuencia natural más alta.

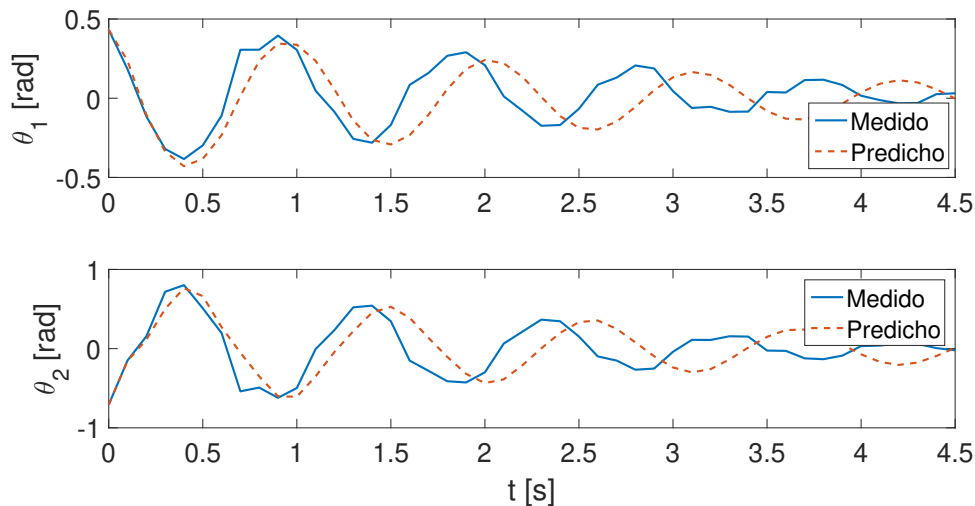


Figura 2.9: Validación de trayectoria angular para la maqueta utilizando los valores estimados para los parámetros viscoelásticos. La línea azul es la trayectoria medida en una prueba no utilizada para la estimación de parámetros, mientras que la línea roja discontinua muestra la trayectoria predicha para la maqueta.

### 2.5.2. Estimación de la rigidez como función de los ángulos de posición

A medida que los segmentos del péndulo se mueven, la longitud del brazo de momento a la articulación cambia en función del ángulo de la articulación ( $\theta_1$  y  $\theta_2$ ) y puesto que la rigidez rotacional equivalente puede ser calculada como  $k_r = n \times k_l r^2$ ; puede denotarse que la rigidez rotacional no es un valor constante.

Para realizar la estimación de los parámetros se tomaron los datos generados del proceso de experimentación anterior.

Se utilizó un filtro de Kalman para obtener una estimación variable en el tiempo de cada uno de los parámetros viscoelásticos ( $k_1$ ,  $k_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ). Con el software KINOVEA se encontró un comportamiento de rigidez en función del brazo correspondiente y finalmente se realizó el mejor ajuste de la curva utilizando una función polinomial de segundo grado. En la figura 2.10 la línea azul muestra el valor de rigidez estimado considerando resortes lineales constantes y un brazo de momento  $r$  cambiante. Los marcadores negros representan el parámetro estimado obtenido usando un Filtro de Kalman. La línea roja discontinua muestra el mejor ajuste considerando una función de segundo grado de los valores estimados de los parámetros en función del ángulo de la articulación.

## 2.6. Validación experimental con sujetos de prueba

Se aplicó el algoritmo de estimación de parámetros a datos experimentales obtenidos de 6 sujetos humanos; los datos de los sujetos se encuentran descritos en la Tabla 2.8, con  $edad = 27 \pm 8$  años,  $peso = 77.3 \pm 8.7$  kg y  $altura = 1.63 \pm 0.14$  m. Todos los sujetos expresaron su consentimiento y participaron libremente en este estudio. El experimento siguió el paradigma “Hold & Release” [35]. A los sujetos se les pidió que mantuvieran sus brazos cruzados sobre su pecho y ambos pies plantados firmemente en el suelo. Se les pidió también

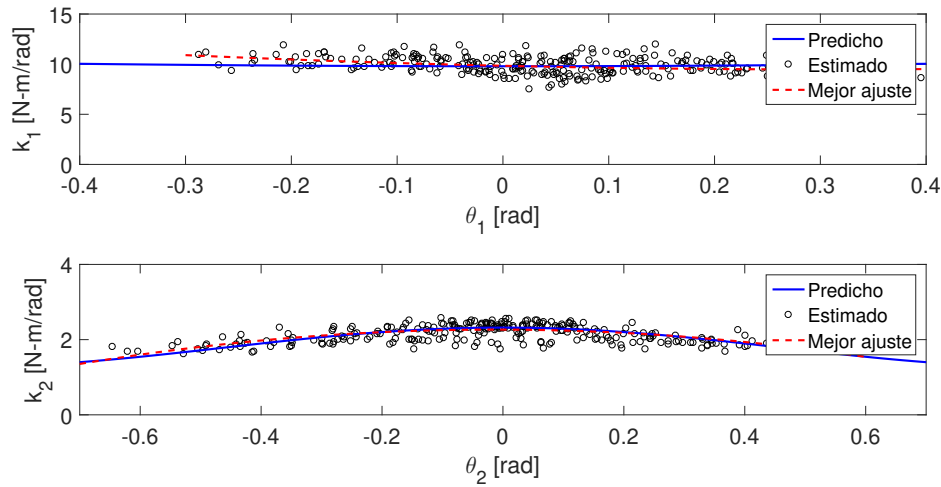


Figura 2.10: Rigidez alrededor del eje de articulaciones del péndulo doble construido.

recuperar la postura vertical usando solo cadera y tobillos. El procedimiento del experimento es mostrado en la Figura 2.12. Los ángulos entre los segmentos del cuerpo se calcularon usando marcadores de posición colocados en las articulaciones del tobillo y la rodilla, así como también el torso del sujeto. La posición de los marcadores se midió usando KINOVEA con una velocidad de captura de 20 fps. En la Figura 2.11 se observa el cálculo de las posiciones angulares  $\theta_i$ , a partir de los puntos obtenidos en KINOVEA.

En la figura 2.13 se muestra el comportamiento de las posiciones angulares  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Para eliminar el ruido de alta frecuencia, las mediciones angulares se filtraron utilizando un filtro Savitzky-Golay de 3er orden [47]. Para la estimación de la velocidad angular y la aceleración, se utilizó la diferenciación numérica a través de diferencias centrales para evitar cualquier cambio de fase en los datos [48].

Sujeto	Peso (kg)	Altura (m)	Edad (años)
1	58	1.72	26
2	82	1.68	25
3	69	1.5	26
4	80	1.6	17
5	70	1.48	44
6	75	1.85	24

Tabla 2.8: Tabla de características de los sujetos de experimentación.

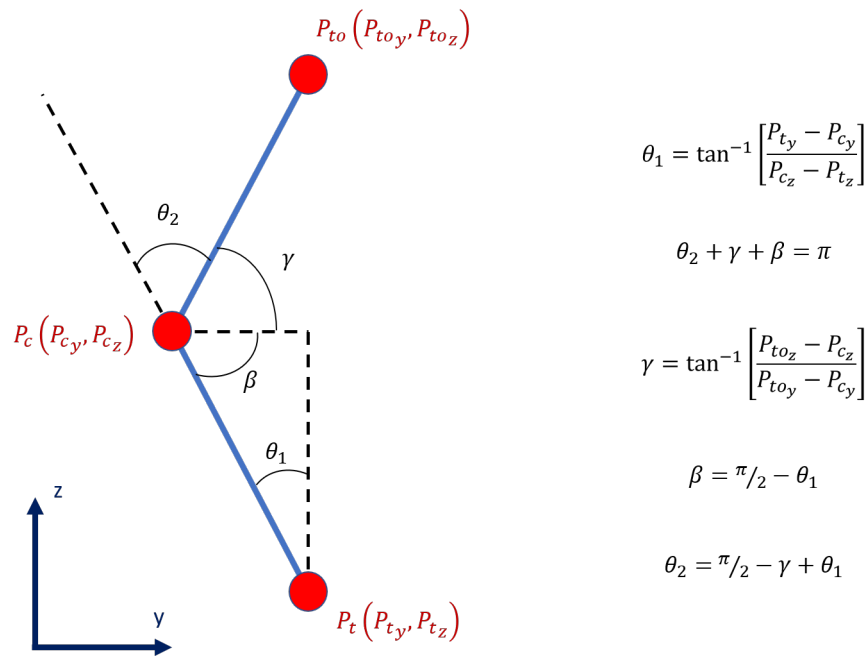
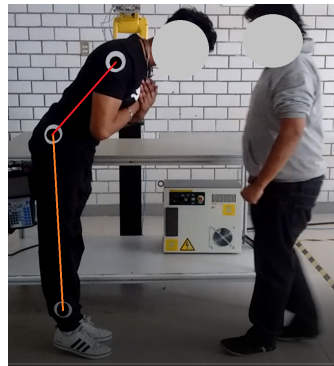


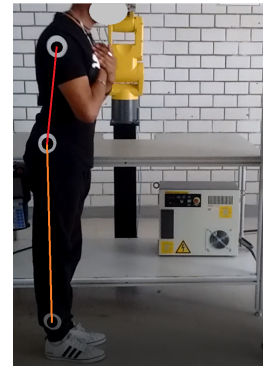
Figura 2.11: Cálculo de las posiciones angulares, utilizando las mediciones de posición obtenidas por el software KINOVEA, donde  $P_t$ ,  $P_c$  y  $P_{to}$  son los puntos del tobillo, cadera y torax respectivamente.



(a) El sujeto se recarga en el examinador



(b) El sujeto fue liberado repentinamente y éste se equilibra hasta lograr una postura estable y erguida.



(c) El sujeto ha recuperado la postura vertical

Figura 2.12: Experimento *Hold & Release* para la estimación de parámetros viscoelásticos.

En la Figura 2.14 se puede observar los valores viscoelásticos estimados de uno de los sujetos con el cual se llevó a cabo el experimento, obtenidos utilizando el algoritmo de filtro de Kalman descrito anteriormente, suponiendo que el comportamiento de rigidez es variante en el tiempo.

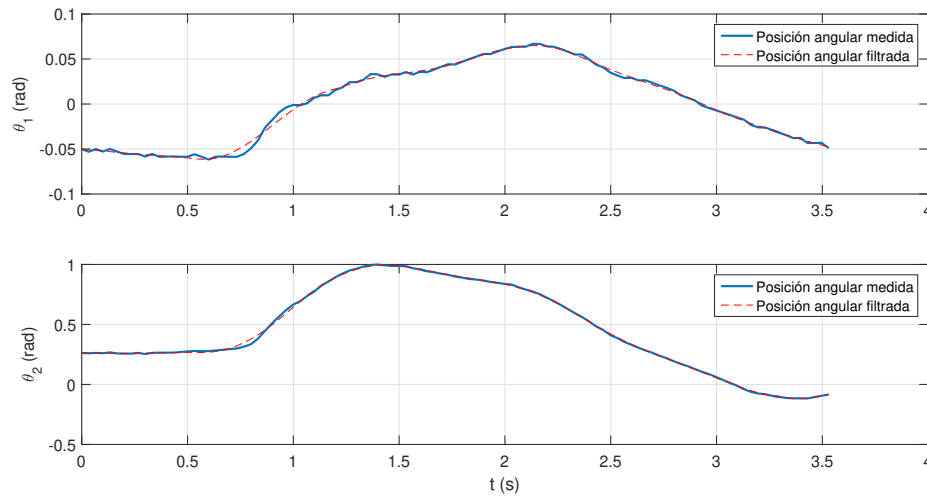


Figura 2.13: Comportamiento de las posiciones angulares medidas con el software KINOVEA durante el experimento Hold & Release.

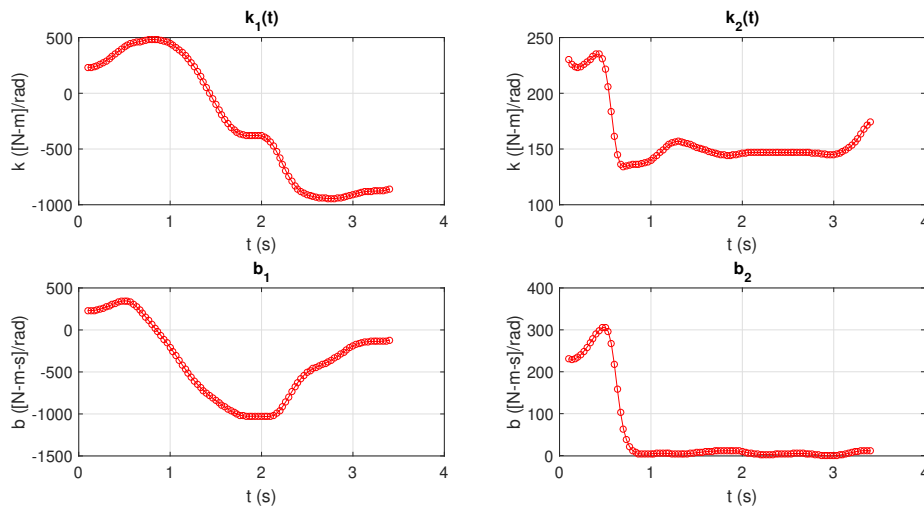


Figura 2.14: Comportamiento estimado de los parámetros viscoelásticos utilizando el experimento *Hold & Release* del sujeto 6.

## 2.7. Resultados

La Figura 2.15 muestra la rigidez de la junta estimada con respecto a los ángulos de la junta. Parece haber un comportamiento similar para todos los sujetos examinados, cada uno representado por una línea de color diferente. La rigidez de la cadera ( $k_2$ ) permanece relativamente constante durante todo el movimiento e incluso en todos los sujetos, ya que no parece cambiar significativamente. Sin embargo, la rigidez del tobillo ( $k_1$ ) disminuye rápidamente, alcanzando un valor negativo a medida que el ángulo de la articulación de la

cadera alcanza su valor máximo. Es decir, los valores negativos de la rigidez aparente del tobillo aparecen cuando el sujeto se acerca a una posición vertical y de repente se dobla en la cadera empujando las piernas hacia atrás.

Se puede observar un comportamiento similar de la rigidez con respecto al ángulo en que se encuentran entre todos los sujetos de prueba. El único sujeto que se encuentra fuera de algún comportamiento “normal” en la rigidez de sus piernas, curiosamente es la persona que cuenta con la edad más avanzada. Por lo cual, se podría llegar a pensar que las personas con una edad mayor, utilizan una diferente estrategia para lograr la postura vertical. Ya sea por el desgaste de su cuerpo o por una tarea de control diferente de su sistema neuromecánico [51].

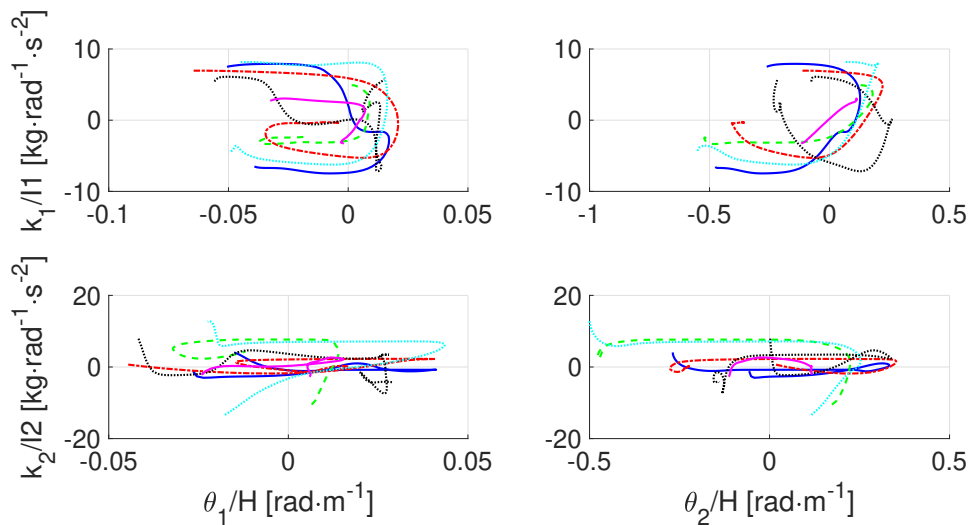


Figura 2.15: Rigidez estimada de la articulación en función del ángulo articular para seis sujetos humanos. Cada sujeto está representado por un diferente línea de color. La rigidez de la articulación se normaliza con respecto al momento de inercia alrededor del segmento corporal correspondiente mientras las medidas angulares se normalizaron a la altura del sujeto.

Se ha supuesto que el coeficiente de proporcionalidad al desplazamiento angular (es decir, la rigidez) varía con el tiempo. Esto permite reducir un sistema mucho más complejo como un sistema de segundo orden variable en el tiempo [52]. La ecuación utilizada para el modelo no es lineal y no se ha linealizado debido a la gran variación de los ángulos en el acto de recuperarse de una caída. En sujetos humanos se observa una sincronización bien definida de la modulación de la rigidez entre la de una articulación (en este caso, el tobillo) y el desplazamiento de la otra articulación (ángulo de la cadera). Cabe resaltar que se ha observado rigidez tanto positiva como negativa. Una rigidez positiva crea un par que se opone al desplazamiento del enlace y tiende a devolver el enlace a la vertical donde la fuerza de la gravedad no tiene brazo de momento. Una rigidez negativa, por otro lado, tiene un efecto desestabilizador sobre las juntas que está actuando al mover el enlace lejos de la vertical (es decir, la posición de equilibrio). Curiosamente, ese efecto desestabilizador de la articulación específica tiende a estabilizar el sistema como un todo. De hecho, se ve que la rigidez en el tobillo disminuye (o se vuelve negativa) cuando el ángulo en la cadera alcanza su máximo. Esto crea un efecto de "látigo" en la estructura. Al invertir la dirección del torque en el tobillo cuando el ángulo de la cadera es máximo, el sistema aprovecha el torque de interacción creado por sus propiedades inerciales. Un cambio

repentino en el ángulo del tobillo alejándolo del equilibrio induce un par de interacción negativo alrededor de la cadera debido a los términos fuera de la diagonal en (2.26) moviendo así el centro de gravedad del tronco a una posición más vertical y estable. Esto está en línea con el tipo de control de "throw-and-catch" observado tanto por Morasso y Sanguineti [53] como por Loram y Lakie [34] donde se postuló que un par en el tobillo ocurriría en ángulos extremos en la dirección opuesta a los movimientos. Esto permitiría que la velocidad angular del tobillo cambie de signo. También se observó que, durante la fase de oscilación, la rigidez del tobillo sería muy baja, permitiendo que el ángulo cambie de un lado al otro de la vertical. Este hallazgo apoya parcialmente esta opinión, pero la adición del segundo eslabón en el modelo de doble péndulo resalta que la explosión de torque en el tobillo en realidad tiene la misma dirección que su velocidad angular pero induce un cambio en la velocidad angular de la cadera y la estabilización de un sistema de dos grados de libertad simplemente controlando un grado de libertad.

## 2.8. Conclusiones del capítulo

En el presente capítulo se obtuvieron las ecuaciones de movimiento que rigen la física de la estrategia de cadera, la cual, fue esquematizada como un doble péndulo invertido, con resortes y amortiguadores rotacionales en cada eslabón, con el fin, de modelar la recuperación de postura vertical, basándose en un modelo de segundo orden.

La simulación de la estimación de los parámetros viscoelásticos que se realizó fue de suma importancia, ya que sirvió como soporte a algunas problemáticas que se pudieran presentar tales como: la implementación del algoritmo de estimación y la eliminación de ruido de las mediciones de las posiciones angulares.

Se realizaron diseños satisfactorios de distintos tipos de filtros ya que, como se menciona en el texto, se añade ruido con el fin de simular la captura de mediciones en la experimentación. Atribuyendo el éxito de los filtros al poder encontrar los parámetros viscoelásticos en las distintas maneras de estimación planteadas en el capítulo.

Fue necesario construir una maqueta de un doble péndulo invertido, ya que, era importante validar las metodologías de estimación utilizadas en la simulación y las ecuaciones de movimiento obtenidas. Dicha validación fue satisfactoria, debido a que, los valores encontrados de rigidez utilizando las metodologías de estimación, fueron muy cercanos a los esperados.

La pequeña diferencia de estimación de rigidez podría ser atribuida a que el valor de la rigidez rotacional no es constante y cambia en función del ángulo al cual esta sometido la maqueta. Esta rigidez variable, pudo ser identificada con las metodologías de estimación recursivas vistas en el capítulo.

En la fase de experimentación, se observa un comportamiento similar en el comportamiento de los parámetros viscoelásticos entre los sujetos de prueba a excepción de uno. La característica más notable de este último sujeto con respecto a los demás es que tiene una edad más avanzada. Por lo tanto, se puede decir que cinco de los seis sujetos utilizan una estrategia similar para recuperar la postura vertical.



## Capítulo 3

# Modelado, estimación y validación experimental de un modelo dinámico de tercer orden

### 3.1. Introducción

En este capítulo se analiza la recuperación del equilibrio por medio de la estrategia de cadera, la cual es una de las estrategias para la recuperación vertical. Se realiza el análisis con un enfoque dinámico, el cual puede ser modelado como un doble péndulo invertido, y sus ecuaciones de movimiento pueden ser obtenidas mediante la metodología de Euler-Lagrange. Se buscan estimar los parámetros viscoelásticos de los eslabones utilizados para la estrategia de cadera, basándose en las ecuaciones de movimiento no lineales descritas a partir de un modelo de tercer orden. Este modelo se realiza con el fin de representar la dinámica del cuerpo humano y el conocimiento de la recuperación de la postura vertical. Se utiliza un modelo con un enfoque más real, tal como el propuesto por Hill [19] y sumando un eslabón más lo presentado en la literatura, en la cual se realiza la estimación utilizando un solo miembro [5, 20].

Se realiza un estudio de simulación, para diferentes casos en la estimación de los parámetros viscoelásticos. Así también, se presentan los resultados obtenidos en la fase de experimentación para determinar si existen características similares entre los sujetos de prueba.

### 3.2. Marco teórico

#### 3.2.1. Modelos viscoelásticos de tercer orden

De acuerdo lo visto en el capítulo anterior, se sabe que los parámetros viscoelásticos tienen una importancia muy grande en el control de la recuperación de postura vertical. Kistemaker et. al. [54] menciona que la viscoelasticidad del conjunto músculo-tendón proviene de la relación fuerza-músculo-tendón del elemento

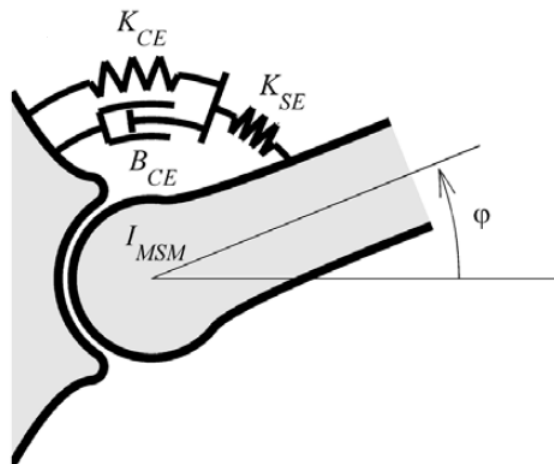


Figura 3.1: Modelo esquemático de un grado de libertad basándose en el modelo de Hill [54].

contráctil (músculo) y la relación fuerza-longitud del tendón. Como se realizó en el capítulo anterior, muchos autores han tratado de estimar los coeficientes dinámicos del movimiento del músculo, realizando modelos resorte-amortiguador-inercia [5, 20].

Se ha estudiado que cuando el músculo se comprime rápidamente, la relación entre la fuerza y la velocidad previene cambios rápidos en el músculo, y que el cambio de longitud del conjunto músculo-tendón es principalmente por el cambio de longitud en el tendón. Por esto, este tipo de comportamiento se puede suponer como el modelo que Hill propuso en 1938 [19], el cual consiste en un eslabón con una sola junta, compuesto por un elemento viscoelástico (músculo) en serie con un elemento elástico (tendón). En la Figura 3.1 se muestra la representación del modelo Hill, en el cual el conjunto de los parámetros  $K_{CE}$  y  $B_{CE}$ , representan el modelo del elemento contráctil, el parámetro  $K_{SE}$  representa el modelo del elemento compresible,  $I_{MSM}$  representa la inercia del eslabón en la dirección perpendicular al movimiento y  $\varphi$  representa la posición angular del eslabón.

Para resolver el modelo propuesto por Hill, Davide et. al. [20] propusieron linealizar su modelo, utilizando los modelos viscoelásticos de Maxwell y Poynting-Thomson, los cuales son extensiones del modelo de Kelvin-Voigt y dan como resultado un modelo de tercer orden. En la Figura 3.2 se muestran los dos modelos de tercer orden, donde a) representa el modelo de Maxwell con un amortiguador  $B^S$  que simula la disipación de energía del músculo, en serie con un resorte  $K_{MX}^S$ , que representa la rigidez del tendón y ambos se encuentran en paralelo con el resorte  $K_{MX}^P$  el cual representa la rigidez del músculo. Por otra parte, b) el modelo de Poynting-Thomson con un resorte  $K_{PT}^S$  representa la rigidez del tendón, el cual se encuentra en serie con el paralelo de la rigidez del músculo  $K_{PT}^P$  y el amortiguador del músculo  $B^P$ .

Un ejemplo del uso de estos modelos viscoelásticos fue desarrollado por Davide et. al. en 2015 [17], en el cual presenta un análisis dinámico del modelo lineal de Poynting-Thomson para el control del músculo, basándose en la estrategia de tobillo, para la recuperación de postura vertical. En su trabajo, realizan la estimación de los parámetros viscoelásticos utilizando el control clásico lineal.

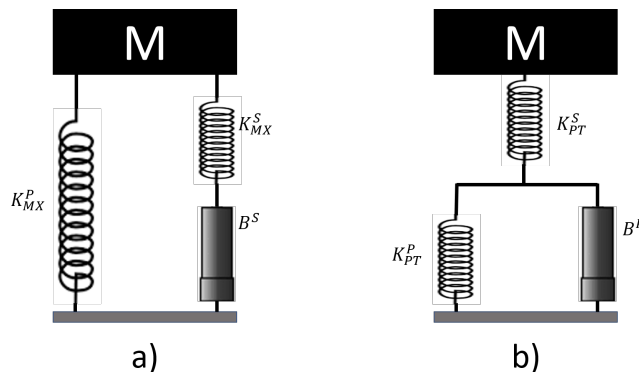


Figura 3.2: Modelo mecánicos de tercer orden, basados en los modelo viscoelásticos de a) Maxwell y b) Poynting-Thomson.

### 3.3. Modelado dinámico basado en la estrategia de cadera

Como se mencionó anteriormente, se busca un modelo que otorgue más información que el modelo de segundo orden. Utilizando el modelo de tercer orden se puede obtener una dinámica más realista, ya que se estiman los parámetros viscoelásticos del conjunto tendón-músculo. Como mencionaron Davide et, al. [20], las fuerzas que se presentan en el tendón para recuperar la postura vertical, se pueden modelar como un resorte  $k_{t_i}$ , a diferencia del músculo, su comportamiento puede modelarse como dos elementos contractiles, un resorte  $k_{m_i}$  y un amortiguador  $b_{m_i}$ .

Se ha mencionado previamente que el objetivo de este capítulo es estimar los parámetros viscoelásticos del cuerpo humano, para la recuperación de postura vertical, basándose en la estrategia de cadera. Por ello, se realiza un modelo esquemático de un doble péndulo, modelando el movimiento de las juntas del tobillo y cadera. Suponiendo la configuración propuesta por Hill para cada uno de los eslabones, se plantea este modelo dinámico, el cual es mostrado en la Figura 3.3.

Debido a que en el capítulo anterior se realizó el análisis del modelo de segundo orden, y dado que los vectores de posición y velocidad son los mismos, en este capítulo se hará uso de algunas ecuaciones para el desarrollo de las ecuaciones de movimiento de este modelo de tercer orden.

Como se vio en el capítulo anterior, se calcula la energía cinética y potencial de todo el sistema, para obtener las ecuaciones de movimiento del sistema. La energía cinética del sistema está dada por la ecuación (2.20). La energía potencial del sistema se puede calcular como  $V = g \sum_{i=1}^n m_i h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p k_i \theta_i$  donde  $g$  representa la aceleración de la gravedad,  $n$  el número de masas en el sistema,  $h_i$  la componente en la dirección de  $\hat{j}$  de las masas respectivamente,  $p$  la cantidad de resortes actuando en el sistema,  $\theta_i$  el ángulo el cual los resortes rotacionales se encuentran almacenando energía. La energía potencial del sistema se obtiene como:

$$\begin{aligned}
 V = & g [m_1 r_1 \cos \theta_1 + m_2 l_1 \cos \theta_1 + m_2 r_2 \cos \theta_{21}] \\
 & + \frac{1}{2} [k_{t_1} \varphi_1^2 + k_{m_1} (\theta_1 - \varphi_1)^2 + k_{t_2} \varphi_2^2 + k_{m_2} (\theta_2 - \varphi_2)^2]
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

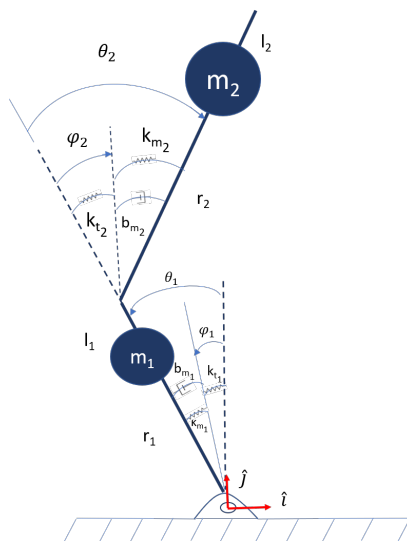


Figura 3.3: Modelo esquemático de doble péndulo invertido basándose en el modelo viscoelástico de Poynting-Thomson, para encontrar la dinámica del movimiento de la estrategia de cadera.

Sustituyendo las ecuaciones (2.20) y (3.1) en la ecuación (2.22) se obtiene el Lagrangiano.

Posteriormente se calcula la energía de disipación, la cual, se define como  $D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q b_i \omega_i$  [38], donde  $q$  es el número de amortiguadores,  $\omega_i$  es la velocidad de disipación del amortiguador; calculando la energía de disipación del sistema se obtiene:

$$D = \frac{1}{2} \left[ b_{m_1} (\dot{\theta}_1 - \dot{\varphi}_1)^2 + b_{m_2} (\dot{\theta}_2 - \dot{\varphi}_2)^2 \right] \quad (3.2)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.20), (3.1) y (3.2) en la ecuación (2.24) y con  $\mathbf{q} = [\theta_1 \ \varphi_1 \ \theta_2 \ \varphi_2]^T$  se obtienen las cuatro ecuaciones de movimiento que gobiernan la física del sistema, las cuales se definen como:

$$\eta_1 = - (\alpha + 2\beta \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + (\gamma + \beta \cos \theta_2) \ddot{\theta}_2 + 2\beta \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{sen} \theta_2 - \beta \dot{\theta}_2^2 \text{sen} \theta_2 + \delta g \text{sen} \theta_1 - \epsilon g \text{sen} \theta_{21} \quad (3.3)$$

$$\eta_1 = k_{t_1} \varphi_1 \quad (3.4)$$

$$\eta_2 = (\gamma + \beta \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 - \gamma \ddot{\theta}_2 - \beta \dot{\theta}_1^2 \text{sen} \theta_2 + \epsilon g \text{sen} \theta_{21} \quad (3.5)$$

$$\eta_2 = k_{t_2} \varphi_2 \quad (3.6)$$

donde:

$$\eta_1 = k_{m_1} (\theta_1 - \varphi_1) + b_{m_1} (\dot{\theta}_1 - \dot{\varphi}_1) \quad (3.7)$$

$$\eta_2 = k_{m_2} (\theta_2 - \varphi_2) + b_{m_2} (\dot{\theta}_2 - \dot{\varphi}_2) \quad (3.8)$$

y las variables  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$  se definen en el capítulo anterior (ecuaciones (2.30) - (2.34)).

Debido a que no es posible medir los ángulos  $\varphi_i$ , ya que estos ángulos son internos en el músculo, es necesario encontrar las ecuaciones de movimiento solamente en función de los ángulos  $\theta_i$ . Para encontrarlas, se procede a realizar algunos cambios de variable a las ecuaciones anteriores como:

$$\kappa_1 = (k_{m_1} + k_{t_1}) \quad (3.9)$$

$$\kappa_2 = (k_{m_2} + k_{t_2}) \quad (3.10)$$

Se despeja  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  de las ecuaciones (3.4) y (3.6) respectivamente, se procede a derivar ambas variables y posteriormente se sustituyen los ángulos  $\varphi_i$  y sus velocidades  $\dot{\varphi}_i$  en las ecuaciones (3.3) y (3.5) para encontrar las dos ecuaciones de movimiento solamente en función de los ángulos  $\theta_i$ . Las ecuaciones de movimiento se pueden definir como:

$$\mathbf{M}\ddot{\Theta} + \mathbf{C}\dot{\Theta} + \mathbf{S}\dot{\Theta} + \mathbf{G} = \tau \quad (3.11)$$

donde:

$$\begin{aligned}
\Theta &= \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} b_{m_1}(\alpha + 2\beta \cos \theta_2) & -b_{m_1}(\gamma + \beta \cos \theta_2) \\ -b_{m_2}(\gamma + \beta \cos \theta_2) & b_{m_2}\gamma \end{bmatrix} \\
\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \\
C_{11} &= \kappa_1(\alpha + 2\beta \cos \theta_2) - 4b_{m_1}\beta\dot{\theta}_2 \text{sen} \theta_2 \\
C_{12} &= -\kappa_1(\gamma + \beta \cos \theta_2) + b_{m_1}\beta(3\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_1) \text{sen}(\theta_2) \\
C_{21} &= -\kappa_2(\gamma + \beta \cos \theta_2) + b_{m_2}\beta(\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_1) \text{sen}(\theta_2) \\
C_{22} &= \kappa_2\gamma \\
\mathbf{S} &= \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \\
S_{11} &= -2\kappa_1\beta\dot{\theta}_2 \text{sen} \theta_2 - b_{m_1}(2\beta\dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + g(\delta \cos \theta_1 + \epsilon \cos \theta_{21})) \\
S_{12} &= \kappa_1\beta\dot{\theta}_2 \text{sen} \theta_2 + b_{m_1}(\beta\dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + \epsilon g \cos \theta_{21}) \\
S_{21} &= \kappa_2\beta\dot{\theta}_1 \text{sen} \theta_2 + b_{m_2}(\beta\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + \epsilon g \cos \theta_{21}) \\
S_{22} &= -b_{m_2}\epsilon g \cos \theta_{21} \\
\mathbf{G} &= \begin{bmatrix} -\kappa_1 g(\delta \text{sen} \theta_1 - \epsilon \text{sen} \theta_{21}) \\ -\kappa_2 \epsilon g \text{sen} \theta_{21} \end{bmatrix} \\
\tau &= - \begin{bmatrix} k_{m_1} k_{t_1} \theta_1 + b_{m_1} k_{t_1} \dot{\theta}_1 \\ k_{m_2} k_{t_2} \theta_2 + b_{m_2} k_{t_2} \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

### 3.4. Estimación de parámetros viscoelásticos

La finalidad de obtener las ecuaciones de movimiento es estimar los parámetros viscoelásticos, los cuales representan el funcionamiento de los músculos, y estos, son los que ayudan a la recuperación de la postura vertical.

Las ecuaciones de movimiento presentadas en la sección anterior pueden ser consideradas como una combinación lineal de los parámetros viscoelásticos como:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\hat{\lambda} \quad (3.12)$$

donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}_k &= \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}^T \\
z_1 &= (\gamma + \beta \cos \theta_2) \ddot{\theta}_2 - (\alpha + 2\beta \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + 4\beta\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \text{sen}\theta_2 - \beta\ddot{\theta}_2 (3\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_1) \text{sen}\theta_2 \\
&\quad + 2\beta\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + \delta g\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \epsilon g\dot{\theta}_1 \cos \theta_{21} - \beta\dot{\theta}_2^3 \cos \theta_2 - \epsilon g\dot{\theta}_2 \cos \theta_{21} \\
z_2 &= (\gamma + \beta \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 - \gamma\ddot{\theta}_2 - \beta\ddot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_1) \text{sen}\theta_2 - \beta\dot{\theta}_1^2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + \epsilon g\dot{\theta}_{21} \cos \theta_{21} \\
\mathbf{H} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \theta_1 & \dot{\theta}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{H}_{24} & \theta_2 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{H}_{11} &= (\alpha + 2\beta \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 - (\gamma + \beta \cos \theta_2) \ddot{\theta}_2 - 2\beta\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \text{sen}\theta_2 + \beta\dot{\theta}_2^2 \text{sen}\theta_2 - \delta g \text{sen}\theta_1 + \epsilon g \text{sen}\theta_{21} \\
\mathbf{H}_{24} &= -(\gamma + \beta \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + \gamma\ddot{\theta}_2 + \beta\dot{\theta}_1^2 \text{sen}\theta_2 - \epsilon g \text{sen}\theta_{21} \\
\hat{\lambda} &= \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 & \hat{\lambda}_2 & \hat{\lambda}_3 & \hat{\lambda}_4 & \hat{\lambda}_5 & \hat{\lambda}_6 \end{bmatrix}^T \\
\hat{\lambda}_1 &= \frac{k_{m_1} + k_{t_1}}{b_{m_1}} \\
\hat{\lambda}_2 &= \frac{k_{m_1}k_{t_1}}{b_{m_1}} \\
\hat{\lambda}_3 &= k_{t_1} \\
\hat{\lambda}_4 &= \frac{k_{m_2} + k_{t_2}}{b_{m_2}} \\
\hat{\lambda}_5 &= \frac{k_{m_2}k_{t_2}}{b_{m_2}} \\
\hat{\lambda}_6 &= k_{t_2}
\end{aligned}$$

sabiendo que los valores del vector  $\hat{\lambda}$  se encuentran en función de los parámetros viscoelásticos, se puede encontrar cada uno de los parámetros como:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} k_{t_1} & k_{m_1} & b_{m_1} & k_{t_2} & k_{m_2} & b_{m_2} \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{aligned}
k_{t_1} &= \hat{\lambda}_3 \\
b_{m_1} &= \frac{k_{t_1}^2}{k_{t_1}\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2} \\
k_{m_1} &= \frac{b_{m_1}\hat{\lambda}_2}{k_{t_1}} \\
k_{t_1} &= \hat{\lambda}_6 \\
k_{m_2} &= \frac{k_{t_2}\hat{\lambda}_5}{k_{t_2}\hat{\lambda}_4 - \hat{\lambda}_5} \\
b_{m_2} &= \frac{k_{m_2}k_{t_2}}{\hat{\lambda}_5}
\end{aligned}$$

Parámetro	Valor		Parámetro	Valor	
$m$	68	kg	$k_{t_1}$	2000	Nm/rad
$h$	1.7	m	$k_{m_1}$	3000	Nm/rad
$m_1$	0.322M	kg	$b_{m_1}$	1200	Nms/rad
$m_2$	0.678M	kg	$k_{t_2}$	1000	Nm/rad
$r_1$	0.29H	m	$k_{m_2}$	1500	Nm/rad
$l_1$	0.53H	m	$b_{m_2}$	600	Nms/rad
$r_2$	0.18H	m			

Tabla 3.1: Parámetros propuestos para la simulación de identificación de parámetros viscoelásticos.

Condiciones iniciales		
$\theta_1$	-0.1745	rad
$\theta_2$	0.3491	rad
$\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$	0	rad/s
$\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$	0	rad/s <sup>2</sup>

Tabla 3.2: Condiciones iniciales para la solución de las ecuaciones de movimiento del modelo de tercer orden.

### 3.4.1. Estimación de parámetros viscoelásticos constantes

En la literatura se han presentado trabajos con el fin de realizar la identificación de los parámetros viscoelásticos basándose en la estrategia de tobillo [5, 20], suponiendo que dichos parámetros permanecen constantes durante el movimiento.

Si dichos parámetros son constantes, se pretende generar datos de simulación con el fin de aplicar las ecuaciones de identificación y estimar los valores de los parámetros. Estos datos son generados proponiendo un sujeto de peso  $m = 68$  kg y una altura de  $h = 1.7$  m. Para calcular los parámetros  $r_i$ ,  $l_i$  y  $m_i$  se utilizaron tablas antropométricas de Winter [7]. Los valores de los parámetros viscoelásticos fueron propuestos. Los datos del sujeto de simulación se muestran en la Tabla 3.1.

Para poder realizar la identificación, es necesario generar datos de simulación. Los datos necesarios son las posiciones angulares  $\theta_i$ , sus velocidades  $\dot{\theta}_i$ , aceleraciones  $\ddot{\theta}_i$  y sobreaceleraciones  $\dddot{\theta}_i$ . Dichos datos son generados resolviendo las ecuaciones diferenciales con los datos propuestos de la Tabla 3.1. La solución de las ecuaciones diferenciales se realiza utilizando el método numérico de Runge-Kutta de 4° orden. En la Tabla 3.2 se presentan los valores iniciales para poder solucionar las ecuaciones. Cabe resaltar que se cuenta con condiciones iniciales en posición, con el fin de representar el movimiento Hold & Release.

Resolviendo las ecuaciones de movimiento, con la condiciones iniciales, utilizando Runge-Kutta de 4° orden, se obtiene el comportamiento de las posiciones angulares. Antes de la estimación de los parámetros, se añadió ruido Gaussiano distribuido normalmente, de manera aleatoria, a las mediciones de ángulos simulados. Esto se hizo para asemejarse a las medidas angulares obtenidas normalmente de los sistemas de seguimiento del movimiento humano basados en marcadores.

Es necesario limpiar la señal a la cual se le ha añadido ruido. Se utilizó un filtro Butterworth pasa bajas [45] de tercer orden con un frecuencia de corte 10 Hz. En la Figura 3.4 se muestra la comparación de las señal con un ruido y la señal filtrada utilizando el filtro Butterworth.

Para realizar la estimación de parámetros, como en el capítulo anterior, se realizó utilizando dos diferentes metodologías, a partir de la pseudoinversa que se muestra en la ecuación (2.37) y usando el Filtro de Kalman



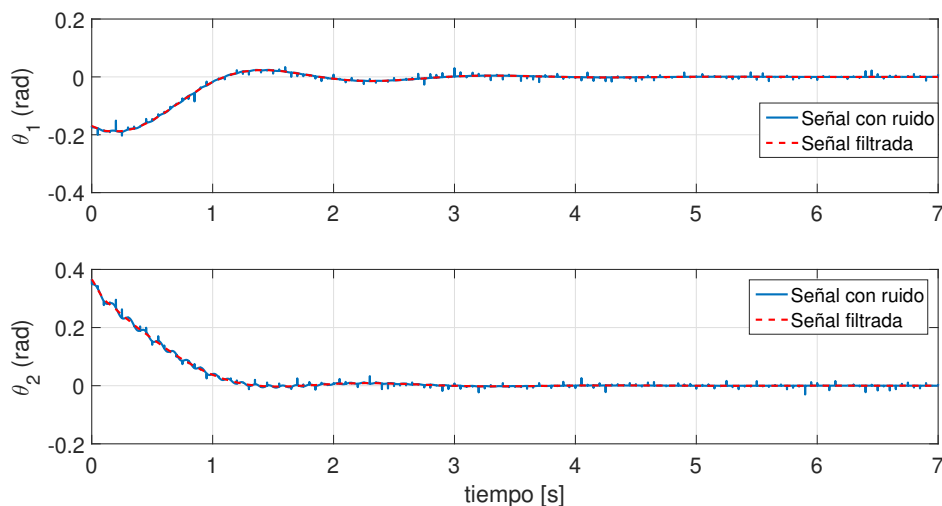


Figura 3.4: Comportamiento de las posiciones angulares de cada uno de los segmentos. La línea azul representa la señal ruidosa, mientras que la línea roja representa la señal filtrada.

Parámetro	$\hat{x}_{ideal}$	$\hat{x}_{MC}$	$\hat{x}_{FK}$	
$k_{t_1}$	2000	2074.8	1924.9	Nm/rad
$k_{m_1}$	3000	3218.7	3076.2	Nm/rad
$b_{m_1}$	1200	1255.6	1343.9	Nms/rad
$k_{t_2}$	1000	975.1	923.0	Nm/rad
$k_{m_2}$	1500	1651.1	1722.6	Nm/rad
$b_{m_2}$	600	673.1	703.7	Nms/rad
$promedio(\rho)$	-0.0329	1.5467	-1.0992	Nm/s
$std(\rho)$	4.3485	10.6763	10.0834	Nm/s

Tabla 3.3: Comparación de resultados estimados utilizando Pseudoinversa y Filtro de Kalman.

(ecuaciones (2.6), (2.8) - (2.14)).

En la figura 3.5 se muestra la comparativa entre las dos metodologías de identificación con respecto al parámetro objetivo propuesto. En la Tabla 3.3 se muestran los valores estimados, así como el promedio y la desviación estándar del residuo calculado con ambas estimaciones. En la Tabla 3.3 se muestran los valores estimados, así como el promedio y la desviación estándar del residuo calculado con ambas estimaciones.

### 3.4.2. Estimación de parámetros viscoelásticos variantes en el tiempo

#### Estimación con mediciones ideales

Se puede suponer que los parámetros de rigidez no permanecen constantes, ya que la rigidez de los músculos se encuentran en función de la actividad muscular [31]. Por lo tanto se decidió realizar un algoritmo que pudiera estimar parámetros variantes en el tiempo.

Como en las sección anterior se generaron datos de simulación utilizando las ecuaciones de movimiento (3.11) considerando a un sujeto de 68 kg de masa y una altura de 1.7 m. Los parámetros inerciales  $r_i$ ,  $l_i$  y  $m_i$

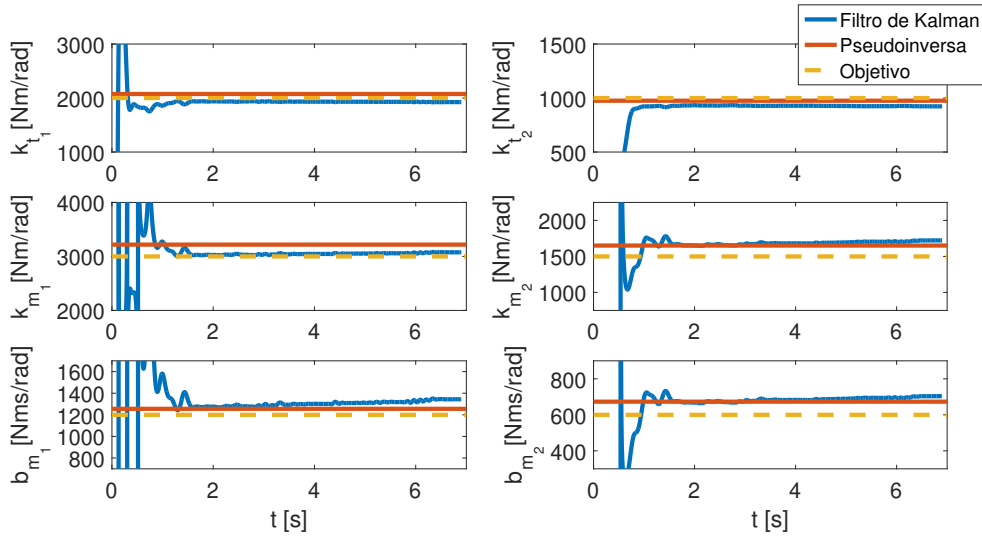


Figura 3.5: Comparación de resultados de identificación con respecto al parámetro objetivo.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor	
$M$	68 kg	$k_{t_1}$	2000	Nm/rad
$H$	1.7 m	$k_{m_1}$	$2000\left(1 + 0.1\frac{1}{1+e^{-2(t-5)}}\right)$	Nm/rad
$m_1$	$0.322M$ kg	$b_{m_1}$	1200	Nms/rad
$m_2$	$0.678M$ kg	$k_{t_2}$	$800\left(1 + 0.1\frac{1}{1+e^{-2(t-5)}}\right)$	Nm/rad
$r_1$	$0.29H$ m	$k_{m_2}$	1500	Nm/rad
$l_1$	$0.53H$ m	$b_{m_2}$	600	Nms/rad
$r_2$	$0.18H$ m			

Tabla 3.4: Parámetros usados para la estimación de parámetros viscoelásticos variantes.

se obtuvieron a partir de las tablas antropométricas de Winter [7]. Los parámetros viscoelásticos fueron propuestos, y se supuso que el parámetro de rigidez  $k_{m_i}$  es variante en el tiempo; para este parámetro se usó una función sigmoide para presentar su varianza en el tiempo. En la Tabla 3.4 se presentan los parámetros propuestos para la simulación.

Los datos de simulación fueron generados resolviendo las ecuaciones de movimiento (3.11) utilizando el método solución para ecuaciones diferenciales Runge-Kutta de 4° orden. Las condicionales iniciales para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales fueron las mismas para la simulación anterior (Tabla 3.1). En la figura 3.6 se observa la señal de comportamiento de las posiciones angulares calculadas.

De la solución de las ecuaciones se obtiene el comportamiento de la posición angular  $\theta_i$  y, utilizando diferencias centrales, se calcula las velocidades  $\dot{\theta}_i$ , las aceleraciones  $\ddot{\theta}_i$  y las sobreaceleraciones  $\dddot{\theta}_i$ . Debido a que, se buscan estimar parámetros variantes en el tiempo, es necesario utilizar un método de estimación recursivo, por lo tanto, se utilizaron las ecuaciones del filtro de Kalman.

En el filtro de Kalman; se utilizó una matriz de evolución de los parámetros  $\mathbf{A}$  identidad, ya que, no se cuenta con la evolución de dichos parámetros. Por lo tanto, para variar dichos parámetros en el tiempo se buscaron valores de incertidumbre en el modelo en la matriz  $\mathbf{Q}$ , dichos valores, fueron propuestos de manera empírica.

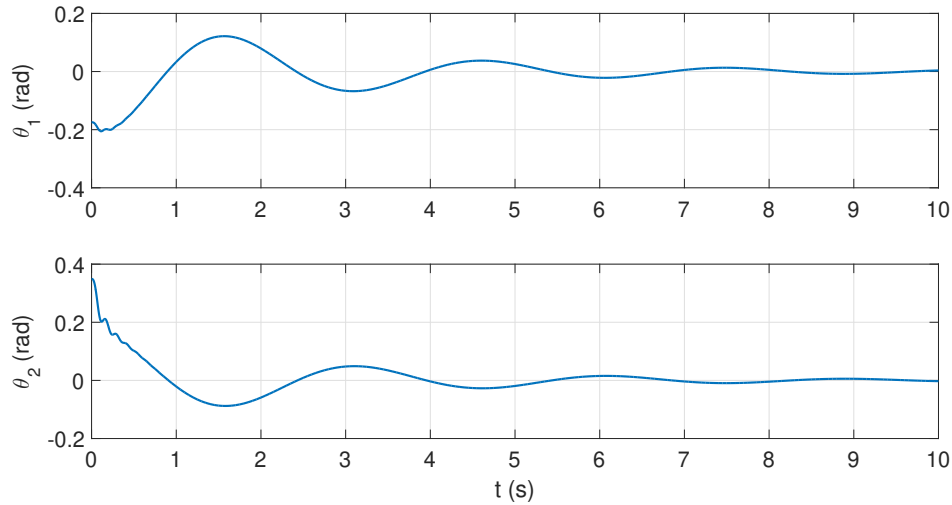


Figura 3.6: Comportamiento de las posiciones angulares calculada mediante un modelo de tercer orden y parámetros viscoelásticos variantes.

Parámetro	RMSE	NRMSE	Parámetro	RMSE	NRMSE		
$k_{t_1}$	143.4074	Nm/rad	5.7362 %	$k_{t_2}$	9.2183	Nm/rad	0.9218 %
$k_{m_1}$	37.4572	Nm/rad	1.7836 %	$k_{m_2}$	13.0118	Nm/rad	4.4592 %
$b_{m_1}$	25.5132	Nms/rad	12.7566 %	$b_{m_2}$	6.4455	Nms/rad	8.0568 %

Tabla 3.5: Errores de estimación RMSE y NRMSE en estimación de parámetros variables.

En la figura 3.7 se observa la comparación entre los valores propuestos con los valores de estimación utilizando un filtro de Kalman.

Se observa que el comportamiento estimado con respecto al propuesto son muy similares. Sin embargo, es necesario cuantificar la diferencia entre ambas señales. Por lo tanto, se calcula el error RMSE y el error normalizado NRMSE [50]. Estos errores se muestran en la Tabla 3.5.

### Estimación con mediciones ruidosas

Como es sabido, en la experimentación con sujetos de prueba, las mediciones obtenidas no serán perfectas y tendrá que aplicarse algún tipo de filtro a las mismas. Por lo tanto, se decidió usar el algoritmo de estimación de parámetros variantes en el tiempo, añadiendo un ruido a las posiciones angulares calculadas, solucionando las ecuaciones de movimiento (3.11). Para esta simulación, se tomarán los parámetros mostrados en la Tabla 3.4, con las mismas condiciones iniciales que se muestran en la Tabla 3.2.

En la Figura 3.8 se muestra la comparación del comportamiento de las posiciones angulares en el cual, la línea azul representa la posición angular en el tiempo calculada añadiendo ruido y la línea punteada roja representa la señal filtrada utilizando un filtro Butterworth pasa bajas de tercer orden con un frecuencia de corte de 10 Hz.

Para estimar los parámetros viscoelásticos, se realiza el mismo procedimiento que en la sección anterior. Se utilizan las ecuaciones del filtro de Kalman y se supone la matriz  $\mathbf{A}$  como identidad, ya que, en la

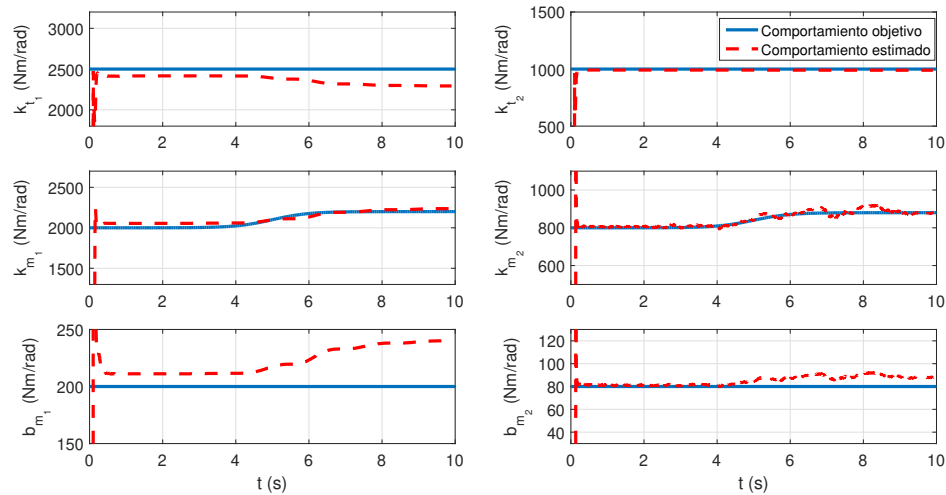


Figura 3.7: Comparación de resultados de estimación utilizando un filtro de Kalman para parámetros viscoelásticos variantes en un modelo de tercer orden.

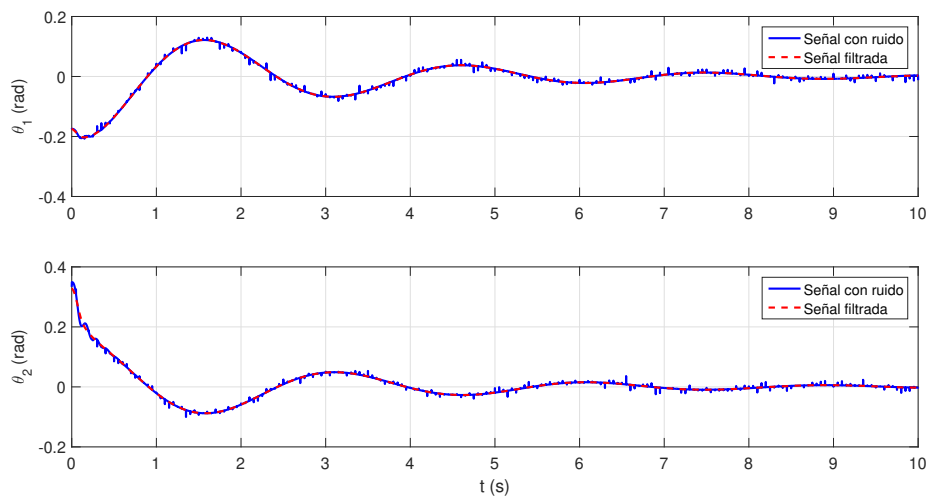


Figura 3.8: Comportamiento de las posiciones angulares. La línea azul representa la señal obtenida por el método de Runge Kutta de 4° orden añadiendo ruido y la línea roja representa la señal filtrada.

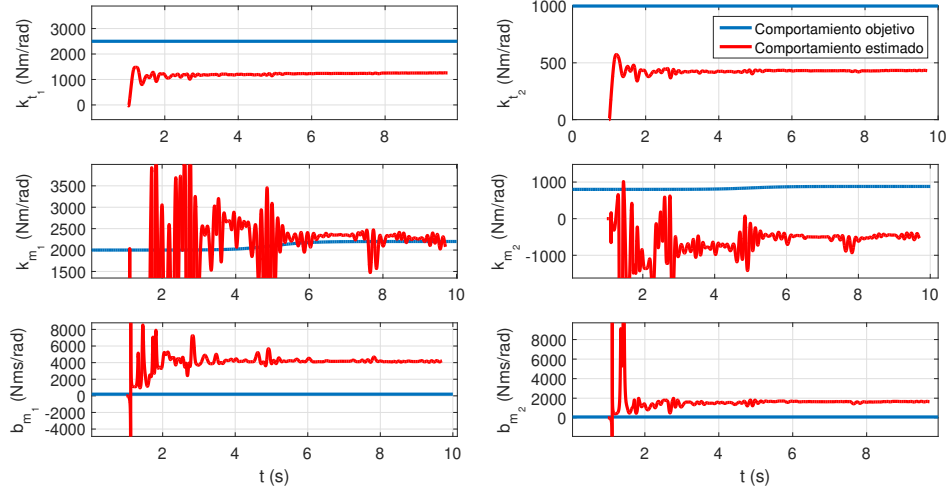


Figura 3.9: Comparación de resultados obtenidos en la estimación de los parámetros viscoelásticos mediante el filtro de Kalman.

Parámetro	RMSE	NRMSE	Parámetro	RMSE	NRMSE
$k_{t1}$	1219.9 Nm/rad	48.796 %	$k_{t2}$	502.26 Nm/rad	50.226 %
$k_{m1}$	502.30 Nm/rad	23.828 %	$k_{m2}$	531.42 Nm/rad	59.570 %
$b_{m1}$	4097.3 Nms/rad	2048.7 %	$b_{m2}$	1561.5 Nms/rad	1951.9 %

Tabla 3.6: Errores de estimación RMSE y NRMSE en estimación de parámetros variables con mediciones ruidosas.

experimentación, no será posible saber la evolución de los parámetros a estimar en el tiempo. Sin embargo, se añade un valor de incertidumbre a la matriz  $\mathbf{Q}$  con el fin de que la estimación de estos parámetros tenga una evolución en el tiempo. Por otra parte, se añaden valores de incertidumbre a las mediciones mediante la matriz  $\mathbf{R}$ , para indicar que no se tienen las mediciones ideales, esto por el uso del filtro, y que en este proceso se puede perder información importante para la estimación. Los parámetros  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  fueron propuestos de manera empírica con el fin de obtener la mejor solución. Aplicando el filtro de Kalman, se realiza la estimación de dichos parámetros. En la Figura 3.9 se observa la comparación de los resultados de la estimación de los parámetros viscoelásticos.

En la comparativa de resultados vistos en la Figura 3.9 se observa que la estimación no ha sido satisfactoria. Para cuantificar los resultados de estimación se procede a calcular los errores RMSE y NRMSE [50]. Los errores de estimación se muestran en la Tabla 3.6.

Se puede observar que los resultados de la estimación no son los deseados, por lo cual se intentó realizar otro tipo de prueba para la estimación de los parámetros. Se añadió solo un valor atípico en la solución de las posiciones angulares  $\theta_i$ . En la Figura 3.10 se muestra el comportamiento de las posiciones angulares, donde la línea azul representa el comportamiento de las posiciones añadiendo un solo valor atípico y la línea roja punteada representa la señal filtrada utilizando un filtro Butterworth pasa bajas con un frecuencia de corte de 2 mHz.

Posteriormente se aplicaron los algoritmos del filtro de Kalman y, como en la prueba anterior, se propusieron

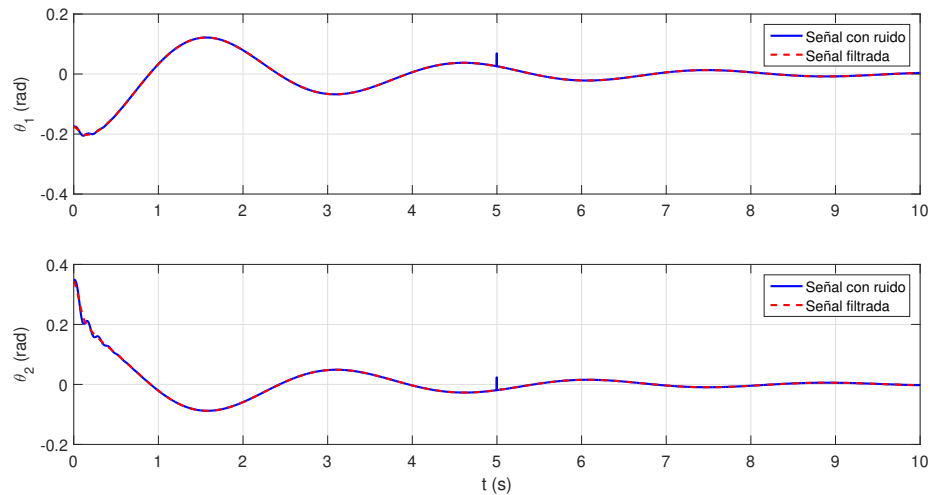


Figura 3.10: Comportamiento de las posiciones angulares. La línea azul representa la señal obtenida por el método de Runge Kutta de 4° orden añadiendo solo un valor con ruido y la línea roja representa la señal filtrada.

Parámetro	RMSE	NRMSE	Parámetro	RMSE	NRMSE
$k_{t_1}$	1255.3 Nm/rad	50.210 %	$k_{t_2}$	516.03 Nm/rad	51.603 %
$k_{m_1}$	1311.7 Nm/rad	62.221 %	$k_{m_2}$	1255.4 Nm/rad	155.55 %
$b_{m_1}$	3867.1 Nms/rad	1933.6 %	$b_{m_2}$	1405.9 Nms/rad	1757.3 %

Tabla 3.7: Errores de estimación RMSE y NRMSE en estimación de parámetros variables con un valor atípico en las mediciones.

valores de manera empírica en las matrices  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  en el diseño del filtro de Kalman. En la Figura 3.11 se observan los resultados en la estimación de los parámetros de Kalman.

De la misma manera, se pretende cuantificar los errores en la estimación de los parámetros. Por ello, se realizó el cálculo de los errores RMSE y NRMSE con respecto a los valores propuestos en la Tabla 3.7.

Como se observa en la Tabla 3.7, los errores de estimación de la mayoría de los parámetros es muy grande e incluso, en algunos casos siendo mayor que el 100 %. Por otra parte se puede observar que los errores de estimación solo utilizando un valor atípico, para la mayor parte de los parámetros, son mayores que añadiendo ruido a toda la señal. Esto debido al uso del filtro ya que, en el caso de un solo valor atípico, al proponer una frecuencia de corte más alta, no suaviza lo suficiente a la señal para filtrar este valor atípico. Sin embargo, al proponer una frecuencia de corte más baja, este valor atípico es filtrado en la señal, pero perdiendo datos obtenidos por la solución de las ecuaciones de movimiento. Por la parte del filtro usado para el ruido añadido a la señal completa, se puede decir que filtra los valores tratando de ignorar a los que no pertenecen a la señal.

Se observa que para ambos estudios de simulación, ya sea, utilizando ruido a la señal o añadiendo solo un valor atípico a la señal, no se obtuvieron buenos resultados. Esto podría atribuirse a la sensibilidad del modelo de tercer orden en el que, el comportamiento de las posiciones angulares calculadas por el método de Runge-Kutta de 4° orden, se puede aproximar a una curva del tipo  $\theta_i = A \sin(\omega t + \phi) e^{-\alpha t}$  y al utilizar

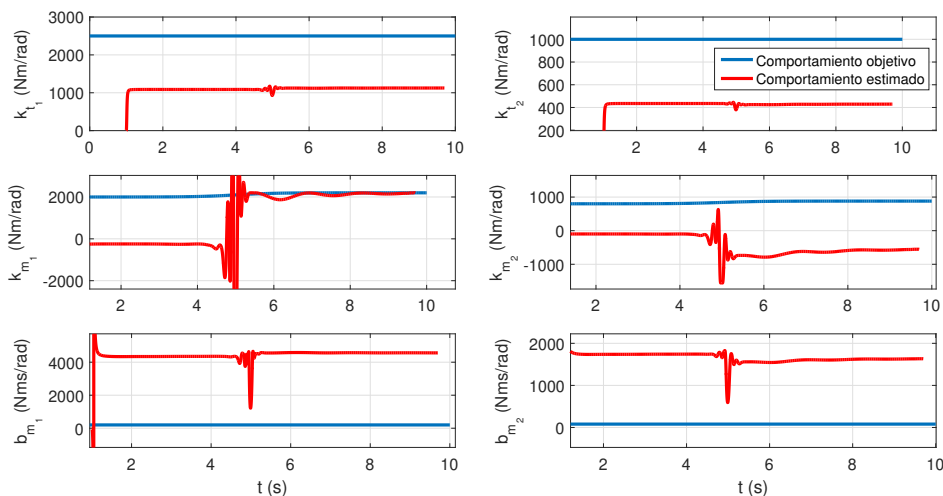


Figura 3.11: Comparación de resultados obtenidos en la estimación de los parámetros viscoelásticos mediante el filtro de Kalman.

los valores  $\ddot{\theta}_i$  en el cálculo de la estimación de los parámetros viscoelásticos, los errores se hacen mucho más grandes y afecta directamente a la estimación.

### 3.5. Experimentación y resultados

El objetivo de realizar las simulaciones fue para validar los algoritmos de estimación de los parámetros viscoelásticos. Esto para aplicar los algoritmos de estimación para pruebas experimentales. Para la experimentación de este modelo se utilizaron los mismos videos tomados para el análisis utilizado para el modelo de segundo orden, visto en el capítulo anterior. Como se mencionó, se utilizaron seis sujetos con  $edad = 27 \pm 8$  años,  $peso = 77.3 \pm 8.7$  kg y  $altura = 1.63 \pm 0.14$  m. La Tabla 2.8 muestra las características de los sujetos de prueba.

Tal como se menciona en el capítulo anterior, la experimentación en los sujetos de prueba consiste en colocar tres marcas visuales sobre él, en tobillo, cadera y torso. Posteriormente, el experimentador aplica el paradigma Hold & Release [35] para que el sujeto recupere la posición vertical. Al sujeto se le pidió que cruzara los brazos sobre su pecho, juntando ambos pies sobre el suelo. Para medir los ángulos  $\theta_i$  de los segmentos del doble péndulo del movimiento del sujeto, se midieron las coordenadas en la cámara de cada uno de los marcadores utilizando el software de código abierto KINOVEA. Se utilizó una cámara con una velocidad de captura de 20 fps. Posteriormente, se realiza el cálculo de las posiciones angulares a partir de las posiciones de los marcadores. El procedimiento de este cálculo se puede observar en el capítulo anterior. En la Figura 3.12 se puede observar con línea azul el comportamiento de las posiciones angulares medidas y con línea punteada roja el comportamiento filtrado utilizando un filtro Savitsky-Golay [47]. Posteriormente, se realizan los cálculos numéricos de las velocidades angulares  $\dot{\theta}_i$ , aceleraciones  $\ddot{\theta}_i$  y sobreaceleraciones  $\dddot{\theta}_i$ , utilizando diferencias centrales. Teniendo estos valores, se aplicó el algoritmo de estimación de parámetros constante ya que, a pesar de que se sabe que la rigidez del músculo no es constante durante el movimiento [31], y que se

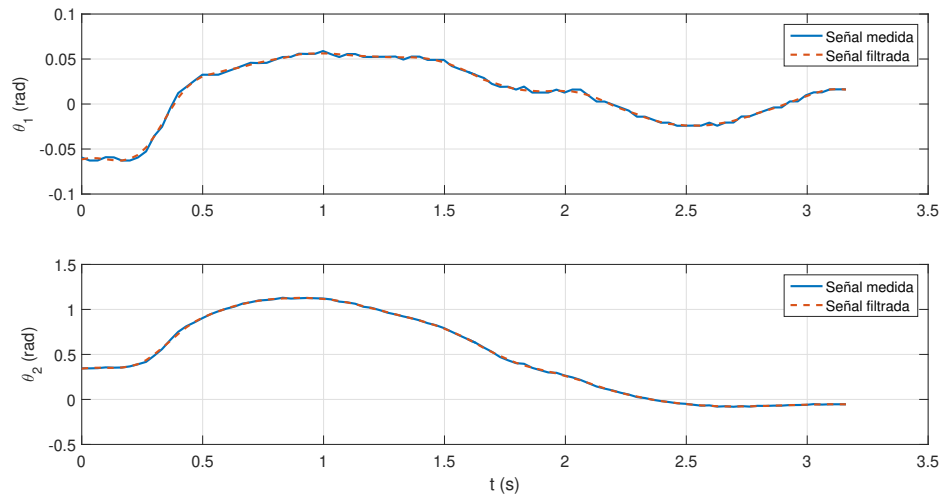


Figura 3.12: Comportamiento de las posiciones angulares del sujeto 1. La línea azul representa las posiciones angulares calculadas por las coordenadas medidas en KINOVEA y la línea punteada roja representada las señales filtradas.

Sujeto	$k_{t_1}$ (Nm/rad)	$k_{m_1}$ (Nm/rad)	$b_{m_1}$ (Nms/rad)	$k_{t_2}$ (Nm/rad)	$k_{m_2}$ (Nm/rad)	$b_{m_2}$ (Nms/rad)
1	-339	287	-200	95	5612	6283
2	1447	-1134	-1255	65	-105	18
3	-280	231	-52	105	-493	307
4	-181	-605	-820	117	66430	55319
5	448	-343	-385	119	553	827
6	-1118	374	-1204	161	1299	1029

Tabla 3.8: Valores estimados de los parámetros viscoelásticos, utilizando el algoritmo de estimación para parámetros constantes.

realizó esta estimación para el modelo de segundo orden, no fue posible validar en simulación la medición de parámetros variantes en el tiempo. En la Tabla 3.8 se observa los valores de los parámetros obtenidos.

De estos resultados se puede observar que existen grandes diferencias entre los sujetos de prueba, sin embargo, se muestra que todos los parámetros  $b_{m_1}$  tienen valores negativos. Se puede presentar el argumento expuesto en el capítulo anterior, los sujetos aportan energía al sistema dinámico para poder recuperar la postura vertical y, al no tener contemplado en el modelo dinámico los pares externos al sistema, estos se presentan con los valores negativos de este valor. Por otra parte, se observa que todos los sujetos presentan resultados muy similares entre sí en el parámetro  $k_{t_2}$ , esto podría indicar que no importa del todo sus masa y su altura para dicho parámetro. En la tabla se muestra que en todos los demás parámetros existe una dispersión de los valores entre los sujetos por lo cual, se llega a pensar que esos aplican estrategias completamente diferentes para la recuperación de postura vertical.

Con el fin de encontrar alguna relación entre los valores obtenidos para cada sujeto, se normalizan estos valores contra diferentes parámetros. En la Tabla 3.9 se presentan los valores normalizados con respecto a la altura de cada sujeto, en la Tabla 3.10 se normalizan con respecto a su masa y en la Tabla 3.11 se normalizan con respecto a la inercia.



Sujeto	$k_{t_1}/H$ (N/rad)	$k_{m_1}/H$ (N/rad)	$b_{m_1}/H$ (Ns/rad)	$k_{t_2}/H$ (N/rad)	$k_{m_2}/H$ (N/rad)	$b_{m_2}/H$ (N/rad)
1	-197	167	-116	55	3263	3653
2	862	-675	-747	39	-63	11
3	-187	154	-34	70	-329	205
4	-113	-378	-513	73	41519	34574
5	303	-232	-260	80	374	559
6	-604	202	-651	87	702	556

Tabla 3.9: Valores normalizados de la estimación de los parámetros viscoelásticos con respecto a la altura del sujeto.

Sujeto	$k_{t_1}/M$ (Nm/kg-rad)	$k_{m_1}/M$ (Nm/kg-rad)	$b_{m_1}/M$ (Nms/kg-rad)
1	-5.8384	4.9530	-3.4510
2	17.6506	-13.8290	-15.3028
3	-4.0602	3.3428	-0.7472
4	-2.2669	-7.5667	-10.2561
5	6.4017	-4.8981	-5.5001
6	-14.9015	4.9823	-16.0501

Sujeto	$k_{t_2}/M$ (Nm/kg-rad)	$k_{m_2}/M$ (Nm/kg-rad)	$b_{m_2}/M$ (Nms/kg-rad)
1	1.6386	96.7636	108.3247
2	0.7935	-1.2841	0.2252
3	1.5168	-7.1518	4.4484
4	1.4654	830.3736	691.4834
5	1.6951	7.8997	11.8213
6	2.1438	17.3160	13.7151

Tabla 3.10: Valores normalizados de la estimación de los parámetros viscoelásticos con respecto a la masa del sujeto.

Sujeto	$k_{t_1}/I_1$ (1/s <sup>2</sup> -rad)	$k_{m_1}/I_1$ (1/s <sup>2</sup> -rad)	$b_{m_1}/I_1$ (1/s-rad)
1	-9.287	7.8786	-5.4894
2	26.112	-20.458	-22.639
3	-7.5347	6.2034	-1.3866
4	-3.6973	-12.341	-16.728
5	12.203	-9.3368	-10.484
6	-18.18	6.0784	-19.581

Sujeto	$k_{t_2}/I_2$ (1/s <sup>2</sup> -rad)	$k_{m_2}/I_2$ (1/s <sup>2</sup> -rad)	$b_{m_2}/I_2$ (1/s-rad)
1	25.214	1489	1666.8
2	12.798	-20.712	3.6318
3	30.689	-144.7	90.001
4	26.057	14766	12296
5	35.228	164.18	245.68
6	28.514	230.32	182.42

Tabla 3.11: Valores normalizados de la estimación de los parámetros viscoelásticos con respecto a la inercia del sujeto.

De estas tablas se observa las mismas similitudes que los resultados sin normalizar de los sujetos de prueba. Por otra parte, se puede observar que en los parámetros  $k_{t_1}$ ,  $k_{m_1}$  y  $k_{m_2}$ , los sujetos que tienen signos iguales mantienen una similitud entre sus parámetros de un orden de magnitud entre sí, a diferencia del sujeto 4 el cual, está dos ordenes de magnitud por encima de los valores más pequeños positivos. Y se observa que el parámetro  $b_{m_2}$  a pesar de que todos son positivos, los valores se encuentran más dispersos que los parámetros restantes.

### 3.6. Conclusiones del capítulo

En el presente capítulo se obtuvieron las ecuaciones de movimiento que rigen la física de la estrategia de cadera la cual, es esquematizada como un doble péndulo invertido. A diferencia del modelo del capítulo anterior, este modelo supone un elemento de resorte para el tendón y un resorte y un amortiguador en paralelo para simular el comportamiento del músculo. Las ecuaciones fueron encontradas utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Se realizó un estudio de simulación con el fin de resolver las problemáticas presentadas en el proceso de experimentación, así como validar los algoritmos de estimación. En este estudio, se realizaron diferentes estimaciones tales como la estimación de los parámetros viscoelásticos constantes y variantes en el tiempo. Para la estimación de los parámetros constantes, se obtuvieron resultados satisfactorios ya que, a pesar de que fue añadido ruido a las posiciones angulares calculadas solucionando las ecuaciones de movimiento, se logró realizar la estimación de los parámetros. Por otra parte, la estimación de los parámetros variantes en el tiempo no tuvo los resultados esperados, esto a pesar de que se lograron estimar los parámetros variantes sin añadir ruido a las posiciones angulares. Cuando se añadió ruido no fue posible estimar estos parámetros, a pesar de realizar esta estimación con un solo valor atípico a las posiciones calculadas. Esto podría ser debido a la sensibilidad del modelo ya que, al necesitar calcular la tercera derivada, los errores con los que aún se cuenta después del filtrado se maximizan. Lo cual, puede provocar que la estimación de los parámetros viscoelásticos variantes en el tiempo sea muy complicada de realizar.

En la experimentación, no se logró encontrar una similitud clara entre todos los sujetos, sin embargo, en algunos parámetros, todos los sujetos se comportaban de una manera similar, tales como  $b_{m_1}$  y  $k_{t_2}$ . Como ya se ha mencionado, se piensa que el signo negativo del parámetro  $b_{m_1}$  se debe al par externo que aplican los sujetos para poder recuperar la postura. Por los resultados expuestos durante la fase de experimentación se observa que no existen sujetos que utilicen la misma estrategia para la recuperación, a pesar de ello, los parámetros similares indican una cierta tendencia para este trabajo.

## Capítulo 4

# Estimación de parámetros inerciales del cuerpo humano en plano sagital

### 4.1. Introducción

En el presente trabajo de tesis se ha realizado el modelado dinámico y el desarrollo de algoritmos con el propósito de obtener los parámetros viscoelásticos de los músculos, mediante el movimiento de la estrategia de cadera para la recuperación de postura vertical. Como se ha observado, la estimación de dichos parámetros se realiza conociendo la posición angular  $\theta_i$ , la velocidad angular  $\dot{\theta}_i$ , la aceleración  $\ddot{\theta}_i$  y la sobreaceleración  $\dddot{\theta}_i$  del tobillo y cadera, así como los parámetros inerciales  $m_i$ ,  $r_i$  y  $l_i$  de cada eslabón. Es por ello que se decidió realizar la estimación de los parámetros inerciales, con el objetivo de no utilizar tablas antropométricas y obtener los parámetros personalizados a cada uno de los sujetos de prueba.

En este capítulo se hablará de los conocimientos previos para llevar a cabo la estimación de estos parámetros. Se hará uso de un sistema de captura de movimiento para estimarlos. Así también, se desarrollarán diferentes algoritmos para desarrollar dicha tarea y se realizará experimentación sobre algunos sujetos con el fin de validar la estimación de dichos parámetros.

### 4.2. Marco teórico

#### 4.2.1. Parámetros inerciales

En la literatura se ha observado que uno de los temas de interés es estimar los valores de los parámetros inerciales base de robots manipuladores o robots bípedos. Por otro lado, existen investigaciones en las cuales se propone utilizar las metodologías aplicadas en el área de la robótica, con el fin de estimar estos parámetros en seres humanos. Se estima que el conocimiento de los parámetros inerciales individuales es de mucha importancia para el desarrollo de técnicas de rehabilitación personalizada [55].

Las mediciones de los momentos de inercia, las masas de los segmentos, y en general algunos datos de tablas antropométricas, se obtienen a partir de cadáveres. Por lo tanto, en la rama de la biomecánica se busca

utilizar personas vivas para predecir estos parámetros de manera personalizada y obtener un historial de cada sujeto.

En trabajos anteriores se observa que la dinámica de un sistema bípedo puede ser expresada en forma lineal con respecto a los parámetros inerciales, la cual se muestra en la ecuación (4.1)

$$\mathbf{W}_b \Phi_b = \mathbf{F} \quad (4.1)$$

donde  $\Phi_b$  es el vector de parámetros inerciales,  $\mathbf{F}$  es el vector de fuerzas y pares asociados a las direcciones del sistema coordenado tridimensional, y  $\mathbf{W}_b$  es la matriz que relaciona a los vectores de los parámetros inerciales  $\Phi_b$  y al vector  $\mathbf{F}$ .

El vector de parámetros inerciales  $\Phi_b$  también puede ser expresado como  $\Phi_b = \left[ M_i \quad \mathbf{MS}_i^T \quad \mathbf{I}_i^T \right]^T$  donde  $M_i$  es la masa,  $\mathbf{MS}_i^T = \left[ MS_{x_i} \quad MS_{y_i} \quad MS_{z_i} \right]$  es el vector tridimensional del primer momento de inercia y  $\mathbf{I}_i^T = \left[ I_{xx_i} \quad I_{yy_i} \quad I_{zz_i} \quad I_{xy_i} \quad I_{xz_i} \quad I_{yz_i} \right]$  es el vector donde se encuentran las componentes de la matriz de inercia de  $3 \times 3$ .

Algunos de los antecedentes de estimación de los parámetros inerciales son descritos por Venture et. al. [55]. En este trabajo se realiza la estimación de los parámetros utilizando un sistema de captura de movimiento y una plataforma de fuerzas. También, se hace la estimación para el cuerpo humano, tomando en cuenta 15 eslabones y 34 grados de libertad y estimar 128 parámetros inerciales. Para realizar el cálculo de los parámetros inerciales se utiliza el método de mínimos cuadrados para resolver la ecuación (4.1). La validación de este trabajo se realizó haciendo la comparación en las mediciones de la plataforma de fuerzas y la multiplicación  $\mathbf{W}_b \Phi_b$  con los parámetros inerciales estimados.

### 4.3. Sistema de captura de movimiento

Como se menciona anteriormente se hará uso de un sistema de captura de movimiento. Este sistema se ubica en el laboratorio de “Proyectos Mecatrónicos” en la facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí (UASLP).

El sistema de captura de movimiento consta de los siguientes elementos:

- Computadora DELL
- 2 cámaras Mako g125b PoE (véase Figura 4.1)
- Plataforma de fuerzas de 6 Grados de Libertad (momentos y fuerzas en los tres ejes) AMTI ACG-O (véase Figura (4.2))

La plataforma cuenta con una capacidad de fuerza de 1334 N en el eje  $z$ ,  $y$  una capacidad en los ejes restantes de 450 N. Una capacidad de Momento en el eje  $z$  de 85 Nm, y en los ejes restantes de 226 Nm. Cuenta con un rango de muestreo de 10 a 1000 datos por segundo.

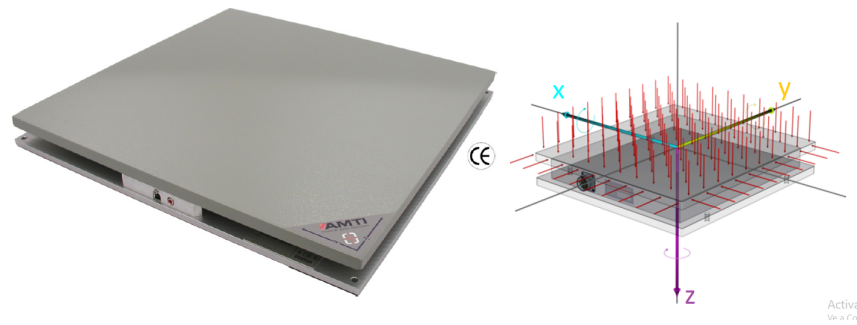


(a)

Interfaz	IEEE 802.3 1000BASE-T, IEEE 802.3af (PoE)
Resolución	1292 (H) × 964 (V)
Sensor	Sony ICX445
Tipo de sensor	CCD Progressive
Tamaño de sensor	Tipo 1/3
Tamaño de pixel	3.75 $\mu m$ × 3.75 $\mu m$
Montura de lente	Montaje-C
Máximos cuadros por segundo a resolución completa	30.3 fps
ADC	14 Bit
Buffer de imagen (RAM)	64 MByte

(b)

Figura 4.1: a) Cámara Mako g125b poe usada en el sistema de captura de movimiento. b) Tabla de especificaciones de cámara Mako g125b PoE.



(a)

Capacidad $F_z$ , lb (N)	300 (1334)
Capacidad $F_x, F_y$ , lb (N)	100 (450)
Capacidad $M_z$ , lb-in (Nm)	750 (85)
Capacidad de momento resultante $\sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ , lb-in (Nm)	2000 (226)
Frecuencia natural $F_z$	150 Hz
Frecuencia natural $F_x, F_y$	140 Hz
Dimensions, in (mm)	1.79 × 19.75 × 19.75 (45.5 × 502 × 502)
Peso, lb (kg)	25 (11.4)
Velocidad de datos digitales	10 - 1000 datos por segundo, seleccionable por el usuario
Interfaz	USB 2.0
Dispositivo de sincronización	Automático
Señal de sincronización externa	Activa = Bajo voltaje, cambiar a tierra Inactiva = Alto voltaje, circuito abierto con resistencia interna Protegido a $\pm 10V$ . $1K\Omega$ de resistencia de entrada
Transmisión digital de datos	Contenido de 6 canales de mediciones
Fuente de alimentación	USB, 308mA
Requerimientos computacionales	Puerto USB 2.0, Windows 7, 1024 Mb RAM, 1.7 GHz
Filtros	Fijo 100 Hz tercer orden análogo
Software de plataforma de fuerza	<i>NetForce<sup>TM</sup> / BioAnalysis<sup>TM</sup></i>

(b)

Figura 4.2: a) Plataforma de fuerzas AMTI ACG-O utilizada en el sistema de captura de movimiento. b) Tabla de especificaciones.

- Algoritmos del sistema de captura.

Los algoritmos del sistema de captura de movimiento fueron programados en Python. Para el desarrollo de este proyecto se realizaron algunas modificaciones a los códigos previamente hechos. Los algoritmos principales del sistema son:

- Algoritmo maestro. Permite que los algoritmos del sistema puedan ser ejecutados. Por lo que, tendrá que ejecutarse durante todo el proceso de experimentación.
- Algoritmo de calibración. Con este algoritmo, se pueden obtener los parámetros de visión de las cámaras utilizadas para el sistema de captura. Por lo que, captura imágenes de la estructura patrón, conoce las coordenadas bidimensionales de los marcadores de calibración y utiliza la metodología de Manipulación en Espacio de Cámara para la estimación de los parámetros de visión.
- Algoritmo de adquisición de datos. Este algoritmo captura los datos de la plataforma de fuerzas y las imágenes tomadas por las cámaras. La velocidad de captura del algoritmo es de 15 datos por segundo aproximadamente.
- Algoritmo de obtención de las coordenadas en la cámara. En este algoritmo, se realiza el tratamiento de imágenes capturadas por el algoritmo anterior. Y se encuentran las coordenadas en la imagen de los marcadores utilizados durante la experimentación.
- Algoritmo de coordenadas tridimensionales. Utilizando los parámetros de visión obtenidos por el algoritmo de calibración y las coordenadas en las imágenes, este algoritmo se encarga de calcular las coordenadas tridimensionales de los marcadores usados en la experimentación.

#### 4.3.1. Desarrollo de calibración y obtención de los parámetros de visión

La calibración de las cámaras se realiza con el fin de obtener las coordenadas tridimensionales de un grupo de marcadores adheridos a los sujetos de prueba durante la fase experimental y de esta manera, poder calcular las posiciones angulares necesarias

Para realizar la calibración de las cámaras y obtener los parámetros de visión se utilizó una estructura metálica que contiene marcas en posiciones conocidas.

Un LED se coloca en cada una de estas referencias para así obtener su posición en las imágenes.

La calibración de las cámaras se realizó utilizando la metodología de Manipulación en Espacio de Cámara CSM.

##### Modelo CSM lineal

Para obtener un modelo lineal utilizando CSM es necesario partir del modelo de cámara de orificio (modelo de perspectiva) mostrado en la fig. 4.4, donde se cuenta con tres marcos de referencia distintos. Estos son el plano de Visión de la imagen  $(x_c, y_c)$ , el sistema coordenado unido a la cámara  $(X, Y, Z)$  y el marco de referencia del mundo "World"  $(x, y, z)$ ; donde la relación del punto tridimensional  $(P)$  con las coordenadas de la cámara esta dada por:



Figura 4.3: Estructura patrón para la calibración de cámaras.

$$x_{c_i} = f \frac{X_i}{Z_i} \tag{4.2}$$

$$y_{c_i} = f \frac{Y_i}{Z_i} \tag{4.3}$$

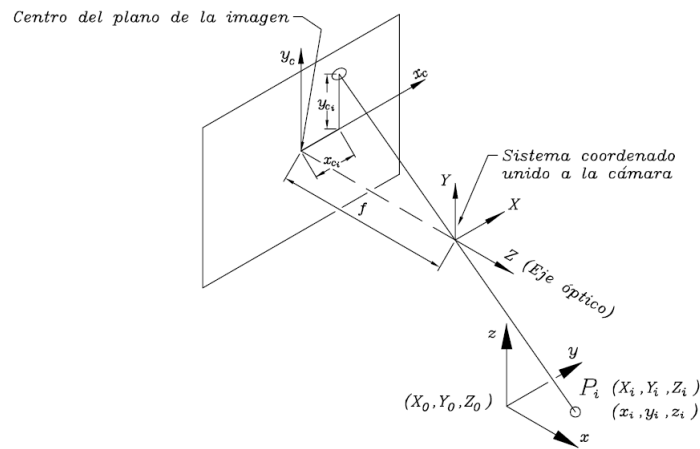


Figura 4.4: Modelo de cámara de orificio [56].

donde  $x_c, y_c$  son las coordenadas en pixeles en la imagen,  $X_0, Y_0, Z_0$  son las coordenadas del origen del marco de referencia del mundo en el sistema coordenado unido a la cámara y  $f$  representa la distancia focal, que es la distancia (pixeles) del plano de referencia de la imagen al marco de referencia de la cámara.

El punto tridimensional ( $P$ ), también puede ser ubicado por el marco de referencia del mundo  $(x, y, z)$ , por



lo cual, es necesario tener una relación entre el marco de referencia de la cámara y el marco de referencia del mundo. Esta relación está dada por:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & X_0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & Y_0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

donde:

$$\begin{aligned} R_{11} &= e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 - e_4^2 \\ R_{12} &= 2(e_2e_3 + e_1e_4) \\ R_{13} &= 2(e_2e_4 - e_1e_3) \\ R_{21} &= 2(e_2e_3 - e_1e_4) \\ R_{22} &= e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 - e_4^2 \\ R_{23} &= 2(e_3e_4 + e_1e_2) \\ R_{31} &= 2(e_2e_4 + e_1e_3) \\ R_{32} &= 2(e_3e_4 - e_1e_2) \\ R_{33} &= e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 + e_4^2 \end{aligned}$$

donde  $e_1, e_2, e_3, e_4$  representan los parámetros de Euler.

Por lo tanto, las ecuaciones (4.2) y (4.3) también pueden escribirse como:

$$x_{c_i} = f \frac{R_{11}x_i + R_{12}y_i + R_{13}z_i + X_0}{R_{31}x_i + R_{32}y_i + R_{33}z_i + Z_0} \quad (4.5)$$

$$y_{c_i} = f \frac{R_{21}x_i + R_{22}y_i + R_{23}z_i + Y_0}{R_{31}x_i + R_{32}y_i + R_{33}z_i + Z_0} \quad (4.6)$$

Dividiendo el numerador y el denominador entre  $Z_0$  en las ecuaciones (4.5) y (4.6), se obtiene:

$$x_{c_i} = \frac{P_{11}x_i + P_{12}y_i + P_{13}z_i + P_{14}}{P_{31}x_i + P_{32}y_i + P_{33}z_i + 1} \quad (4.7)$$

$$y_{c_i} = \frac{P_{21}x_i + P_{22}y_i + P_{23}z_i + P_{24}}{P_{31}x_i + P_{32}y_i + P_{33}z_i + 1} \quad (4.8)$$

donde:

$$\begin{aligned}
P_{11} &= \frac{f}{Z_0} R_{11} \\
P_{12} &= \frac{f}{Z_0} R_{12} \\
P_{13} &= \frac{f}{Z_0} R_{13} \\
P_{14} &= \frac{f}{Z_0} R_{14} \\
P_{21} &= \frac{f}{Z_0} R_{21} \\
P_{22} &= \frac{f}{Z_0} R_{22} \\
P_{23} &= \frac{f}{Z_0} R_{23} \\
P_{24} &= \frac{f}{Z_0} R_{24} \\
P_{31} &= \frac{1}{Z_0} R_{31} \\
P_{32} &= \frac{1}{Z_0} R_{32} \\
P_{33} &= \frac{1}{Z_0} R_{33}
\end{aligned}$$

posteriormente despejando  $x_{c_i}$  y  $y_{c_i}$  de las ecuaciones (4.7) y (4.8) se puede llegar a la siguiente representación:

$$x_{c_i} = P_{11}x_i + P_{12}y_i + P_{13}z_i + P_{14} - P_{31}x_i x_{c_i} - P_{32}y_i x_{c_i} - P_{33}z_i x_{c_i} \quad (4.9)$$

$$y_{c_i} = P_{21}x_i + P_{22}y_i + P_{23}z_i + P_{24} - P_{31}x_i y_{c_i} - P_{32}y_i y_{c_i} - P_{33}z_i y_{c_i} \quad (4.10)$$

Para obtener los 11 parámetros previamente descritos, es necesario encontrarlos mediante una identificación mediante mínimos cuadrados; para esto, se necesita tener  $m$  mediciones (6 mediciones mínimo) para poder realizar la estimación de parámetros. Es necesario agrupar las mediciones en forma  $Y = AX$  donde  $Y$  es el vector de mediciones ( $m \times 1$ ),  $A$  es la matriz de identificación ( $m \times 11$ ) y  $X$  el vector de parámetros a estimar ( $11 \times 1$ ).

$$Y = \begin{bmatrix} x_{c_1} \\ y_{c_1} \\ \vdots \\ x_{c_m} \\ y_{c_m} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1x_{c_1} & -y_1x_{c_1} & -z_1x_{c_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 & -x_1y_{c_1} & -y_1y_{c_1} & -z_1y_{c_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m & y_m & z_m & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_mx_{c_m} & -y_mx_{c_m} & -z_mx_{c_m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_m & y_m & z_m & 1 & -x_my_{c_m} & -y_my_{c_m} & -z_my_{c_m} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$X = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}^T \quad (4.13)$$

Aplicando la metodología de mínimos cuadrados con la ecuación (2.37), se obtienen los once parámetros de visión. Posteriormente, se necesita realizar la estimación de las coordenadas tridimensionales en la estructura metálica con el fin de obtener los errores de medición que se tienen en la aproximación de las coordenadas en el espacio de trabajo.

Para realizar la estimación de las coordenadas tridimensionales se parte de las ecuaciones (4.9) y (4.10), para obtener un arreglo de la forma  $Y = AX$ , donde:

$$Y = \begin{bmatrix} P_{14}^I - x_{c_i}^I \\ P_{24}^I - y_{c_i}^I \\ P_{14}^{II} - x_{c_i}^{II} \\ P_{24}^{II} - y_{c_i}^{II} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} P_{31}^I x_{c_i}^I - P_{11}^I & P_{32}^I x_{c_i}^I - P_{12}^I & P_{33}^I x_{c_i}^I - P_{13}^I \\ P_{31}^I y_{c_i}^I - P_{21}^I & P_{32}^I y_{c_i}^I - P_{22}^I & P_{33}^I y_{c_i}^I - P_{23}^I \\ P_{31}^{II} x_{c_i}^{II} - P_{11}^{II} & P_{32}^{II} x_{c_i}^{II} - P_{12}^{II} & P_{33}^{II} x_{c_i}^{II} - P_{13}^{II} \\ P_{31}^{II} y_{c_i}^{II} - P_{21}^{II} & P_{32}^{II} y_{c_i}^{II} - P_{22}^{II} & P_{33}^{II} y_{c_i}^{II} - P_{23}^{II} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

donde  $i$  se refiere al número de coordenada tridimensional a estimar, los superíndices  $I$  y  $II$  se refieren a la cámara 1 y a la cámara 2 respectivamente.

El vector  $X$  es resuelto utilizando la metodología de mínimos cuadrados y la ecuación (2.37). En este vector se encuentran las coordenadas tridimensionales a estimar utilizando los parámetros de visión previamente estimados y las coordenadas de las imágenes de las cámaras  $x_{c_i}$  y  $y_{c_i}$ .

La calibración de las cámaras dentro del sistema de captura de movimiento se realizó utilizando la meto-

Eje	Error	
$x$	1.9087	mm
$y$	7.1585	mm
$z$	7.5132	mm

Tabla 4.1: Errores de estimación de puntos tridimensionales en el sistema de captura de movimiento.

dología CSM descrita anteriormente. Para la obtención de los parámetros de visión se utilizaron 64 puntos tridimensionales conocidos, por la estructura que se muestra en la Figura 4.3.

Después de realizar la estimación de los parámetros de visión, se realiza la estimación de los puntos tridimensionales conocidos. Esto con el fin, de obtener el error de estimación en cada uno de los ejes. El cálculo del error es el promedio del vector de la diferencia entre el punto conocido y el punto estimado, para cada uno de los ejes. En la Tabla 4.1 se muestran los errores de estimación por cada dirección del sistema coordenado de la estructura.

Se puede considerar que existe un error muy grande de estimación, sin embargo, para el tipo de trabajo que se utilizará este sistema de visión, se podría considerar pequeño, y que no afectará de manera considerable las mediciones de las posiciones angulares.

## 4.4. Estimación de parámetros inerciales

Para realizar la estimación de los parámetros inerciales, se utilizará el sistema de captura de movimiento; con el uso de las cámaras se determinará los ángulos asociados al tobillo y cadera respectivamente y con la plataforma de fuerzas se medirán las reacciones en el suelo.

### 4.4.1. Modelo dinámico de las reacciones

Ya que se cuenta con la plataforma de fuerzas, es necesario encontrar un modelo matemático que pueda asociar las reacciones con los parámetros inerciales a estimar. Debido a esto se realizó un modelo dinámico utilizando el modelo esquemático del doble péndulo invertido, simulando la estrategia de cadera, tomando en cuenta las reacciones en el suelo (véase la Figura 4.5).

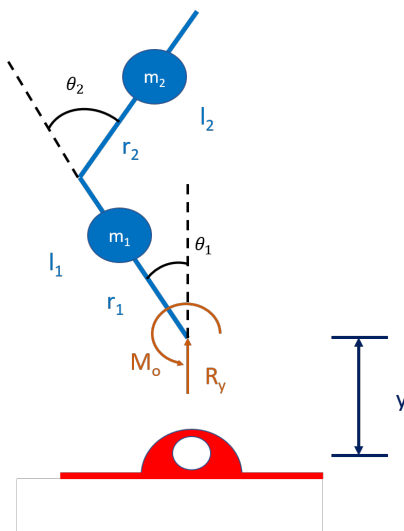


Figura 4.5: Modelo para la obtención de reacciones.

Para encontrar las ecuaciones gobernantes del modelo de la Figura 4.5 se utilizaron las ecuaciones de Euler-Lagrange [37], las cuales se han descrito en detalle en capítulos anteriores. Debido a las características de estas ecuaciones, es necesario encontrar los vectores de posición de cada una de las masas del sistema a analizar y, como se busca encontrar las reacciones en la junta de la tobillo, es necesario mover el origen a una distancia  $-y\hat{j}$  del modelo del doble péndulo visto en capítulos anteriores.

Los vectores de posición de las masas asociadas a los eslabones se determinan como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{m_1} \\ \mathbf{r}_{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_1 \text{sen}\theta_1 & y + r_1 \cos\theta_1 \\ -l_1 \text{sen}\theta_1 + r_2 \text{sen}\theta_{21} & y + l_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\theta_{21} = \theta_2 - \theta_1 \quad (4.15)$$

Posteriormente se derivan los vectores de posición y se encuentran los vectores velocidad de ambas masas como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_{m_1} \\ \dot{\mathbf{r}}_{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 & \dot{y} - r_1 \dot{\theta}_1 \text{sen}\theta_1 \\ -l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + r_2 \dot{\theta}_{21} \cos\theta_{21} & \dot{y} - l_1 \dot{\theta}_1 \text{sen}\theta_1 - r_2 \dot{\theta}_{21} \text{sen}\theta_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Dado que la energía cinética se calcula como  $T = \frac{1}{2} [\sum_{i=1}^n (m_i v_i^2)]$ , donde  $n$  es el número de eslabones, se calcula la velocidad al cuadrado de cada una de las masas, así como la velocidad angular de cada uno de los eslabones, obteniendo la energía cinética como:

$$T = \frac{1}{2} \left[ m_1 \left( \dot{y}^2 - 2r_1 \dot{y} \dot{\theta}_1 \text{sen}\theta_1 + r_1^2 \dot{\theta}_1^2 \right) + m_2 \left( \dot{y}^2 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + r_2^2 \dot{\theta}_{21}^2 - 2l_1 r_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{21} \cos\theta_2 - 2l_1 \dot{y} \dot{\theta}_1 \text{sen}\theta_1 - 2r_2 \dot{y} \dot{\theta}_{21} \text{sen}\theta_{21} \right) \right] \quad (4.17)$$

Posteriormente se calcula la energía potencial del sistema, la cual se calcula como  $V = g \sum_{i=1}^n m_i h_i$  donde  $h_i$  se refiere a la componente en la dirección de  $\hat{j}$  de cada una de las masas. La energía potencial del sistema se escribe como:

$$V = g [m_1 (y + r_1 \cos \theta_1) + m_2 (y + l_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_{21})] \quad (4.18)$$

Una vez obtenidas las energías cinética y potencial, se aplican las ecuaciones de Euler-Lagrange, para conocer las ecuaciones de las reacciones  $R_y$  y  $M_o$ .

Utilizando las ecuaciones de la energía cinética (ecuación (4.17)) y potencial (ecuación (4.18)), y resolviendo con el vector de coordenadas generalizadas  $q = [y \quad \theta_1]^T$  se calculan las ecuaciones de las reacciones como:

$$F = \mathbf{H}\lambda \quad (4.19)$$

donde:

$$\begin{aligned} F &= [R_y \quad M_o]^T \\ \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & g & 0 & 0 & 0 \\ -g \text{sen} \theta_1 & g \text{sen} \theta_{21} & 0 & \ddot{\theta}_1 & -\ddot{\theta}_{21} & \mathbf{H}_{26} \end{bmatrix} \\ \mathbf{H}_{11} &= -(\dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + \ddot{\theta}_1 \text{sen} \theta_1) \\ \mathbf{H}_{12} &= -(\ddot{\theta}_{21} \text{sen} \theta_{21} + \dot{\theta}_{21}^2 \cos \theta_{21}) \\ \mathbf{H}_{26} &= (2\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2 + (\dot{\theta}_2^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \text{sen} \theta_2 \\ \lambda &= [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4 \quad \lambda_5 \quad \lambda_6]^T \\ \lambda_1 &= m_1 r_1 + m_2 l_1 \\ \lambda_2 &= m_2 r_2 \\ \lambda_3 &= m_1 + m_2 \\ \lambda_4 &= m_1 r_1^2 + m_2 l_1^2 \\ \lambda_5 &= m_2 r_2^2 \\ \lambda_6 &= m_2 l_1 r_2 \end{aligned}$$

Lo que se busca con la ecuación (4.19) es encontrar el vector  $\lambda$  y, haciendo combinaciones con los resultados del vector, es posible encontrar los parámetros inerciales. La solución para cada uno de estos parámetros es como sigue:

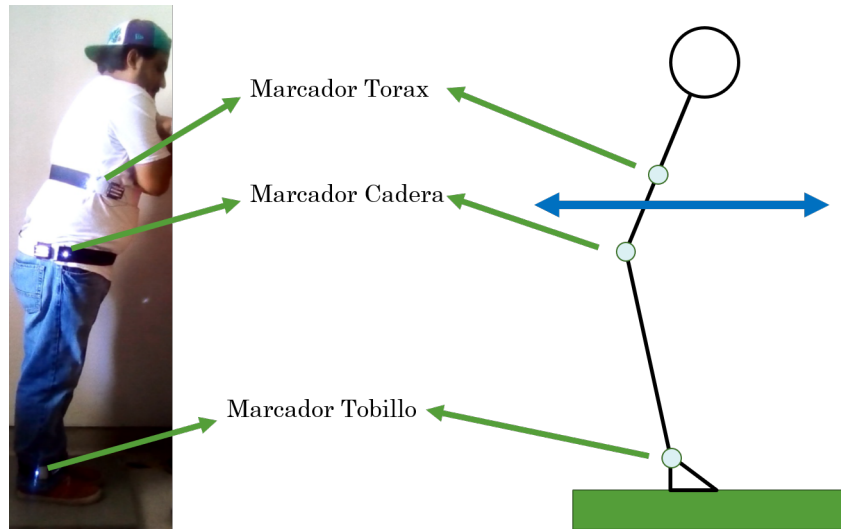


Figura 4.6: Preparación y movimiento del sujeto de prueba.

$$r_2 = \frac{\lambda_5}{\lambda_2} \quad (4.20)$$

$$m_2 = \frac{\lambda_2}{r_2} \quad (4.21)$$

$$= \frac{\lambda_5}{r_2^2} \quad (4.22)$$

$$m_1 = \lambda_3 - m_2 \quad (4.23)$$

$$r_1 = \frac{\lambda_1 - m_2 l_1}{m_1} \quad (4.24)$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda_4 - m_2 l_1^2}{m_1}} \quad (4.25)$$

Como se observa, el parámetro  $l_1$  no se resuelve mediante el uso de las reacciones, sino, que este parámetro se medirá de manera directa utilizando el sistema de visión, calculando la magnitud de la recta entre los marcadores del tobillo y la cadera.

#### 4.4.2. Desarrollo del experimento

El experimento consiste en que el sujeto de prueba se mueva de manera oscilante sobre la plataforma de fuerzas, con el fin de obtener las reacciones creadas por dicho movimiento. Asimismo, mientras el sujeto se mueve, las cámaras obtienen la posición tridimensional de tres marcadores puestos previamente en el sujeto; los marcadores son ubicados en el tobillo, cadera y torax (veáse la Figura 4.6). En la Figura 4.7 se muestra el layout del experimento.

Sin embargo, no es posible aplicar las ecuaciones de las reacciones debido que los ejes de las mediciones de la cámara, la de la plataforma y la posición del sujeto durante el experimento, no coinciden. Por ello, es

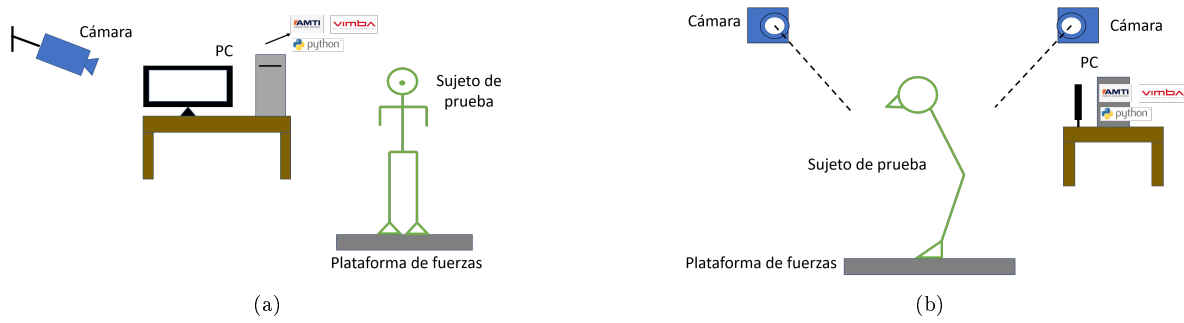


Figura 4.7: Layout del sistema de captura de movimiento. a) Vista Lateral. b) Vista frontal.

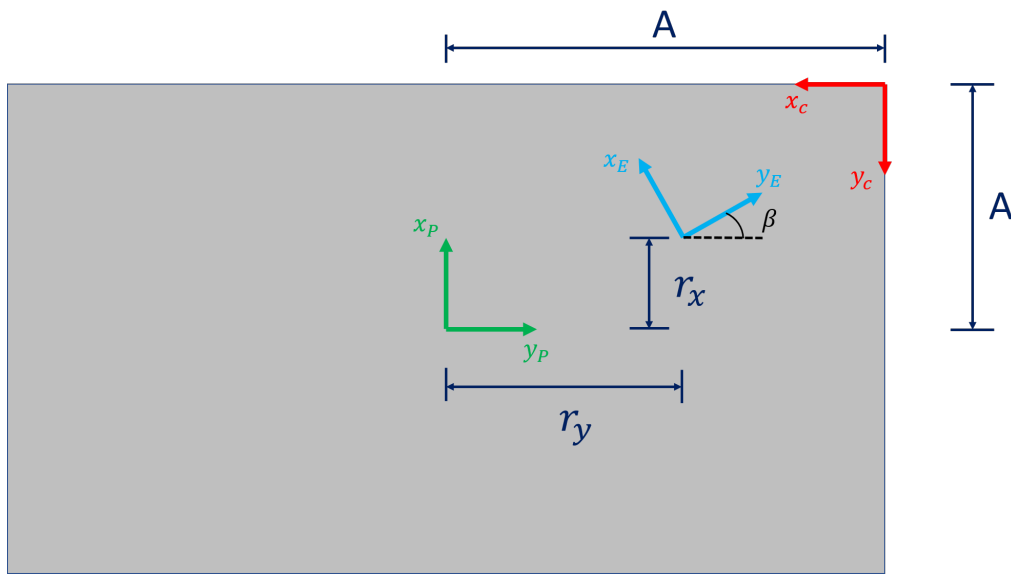


Figura 4.8: Distribución de los ejes en plataforma de fuerzas en vista de alzado.

necesario trasladar todos los ejes involucrados a uno solo. En la figura 4.8 se observa la distribución de los ejes sobre la plataforma biométrica.

El traslado de los ejes se realiza mediante el uso de las matrices homogéneas. Primero se realiza el traslado de los ejes de las mediciones en la cámara de manera que sean coincidentes con los ejes de la plataforma. Con este objetivo se realiza la siguiente transformación como:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}_c = T_{x,A} \times T_{y,A} \times R_{z,-90} \times R_{x,180} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}_p \quad (4.26)$$

Posteriormente, utilizando las mediciones de la plataforma, se calcula el centro de presión en el plano  $x - y$  de



la plataforma de fuerzas esto con el fin de conocer el ángulo  $\beta$  para trasladar las mediciones de las cámaras y la plataforma. Las mediciones del centro de presión (COP) del sujeto se pueden calcular como:

$$COP_y = \frac{M_x}{F_z} \quad (4.27)$$

$$COP_x = -\frac{M_y}{F_z} \quad (4.28)$$

Suponiendo que la distribución del centro de presión es lineal, se encuentra la pendiente que forman dichas coordenadas, y posteriormente se calcula su ángulo. Y de esta manera se puede determinar el valor  $\beta$ .

Dado que el eje del experimento aún no es coincidente con los ejes de medición, se encuentran los valores  $r_x$  y  $r_y$ , realizando un promedio en estas direcciones de la medición del marcador del tobillo.

De esta manera se trasladan los ejes de las mediciones al eje del experimento como:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}_{c,P} = T_{y,r_y} \times T_{x,r_x} \times R_{z,-\beta} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}_E \quad (4.29)$$

Para encontrar el momento de reacción  $M_o$  se hace uso del centro de presión y de la fuerza de reacción en el eje  $z$  de la plataforma. El momento se puede calcular como:

$$M_o = COP_y \times F_z \quad (4.30)$$

Por último, debido a que el movimiento de la estrategia de cadera se considera sobre un plano, solo se toman en cuenta las mediciones de la cámara en los ejes  $y-z$  (plano sagital) de los ejes del experimento para encontrar las posiciones angulares  $\theta_i$ , y utilizando diferencias centrales calcular las velocidades  $\dot{\theta}_i$  y aceleraciones  $\ddot{\theta}_i$  respectivamente.

## 4.5. Validación experimental

El sistema de captura de movimiento fue aplicado para realizar la experimentación en sujetos de prueba, así como, las ecuaciones necesarias para llevar a cabo la estimación para la cual se usa este sistema. Este experimento fue aplicado en seis sujetos de prueba con edad =  $25 \pm 1$  años, peso =  $76 \pm 11$  kg y altura =  $1.68 \pm 0.09$  m. En la Tabla 4.2 se observa las características de los sujetos de prueba.

Como se vio en la sección anterior, se colocan tres marcadores en su cuerpo, en el tobillo, cadera y torax, respectivamente en el sujeto. Posteriormente se inicia el sistema de captura de movimiento. Es importante que el sujeto de prueba no suba a la plataforma de fuerza, hasta que se hayan sincronizados todos los elementos del sistema. Una vez que todos los elementos del sistema se encuentren sincronizados, el sujeto de prueba

Sujeto	Peso (kg)	Altura (m)	Edad (años)
1	95	1.67	25
2	67	1.5	26
3	78	1.73	27
4	63	1.67	25
5	80	1.76	25
6	73	1.75	25

Tabla 4.2: Características de los sujetos de prueba.

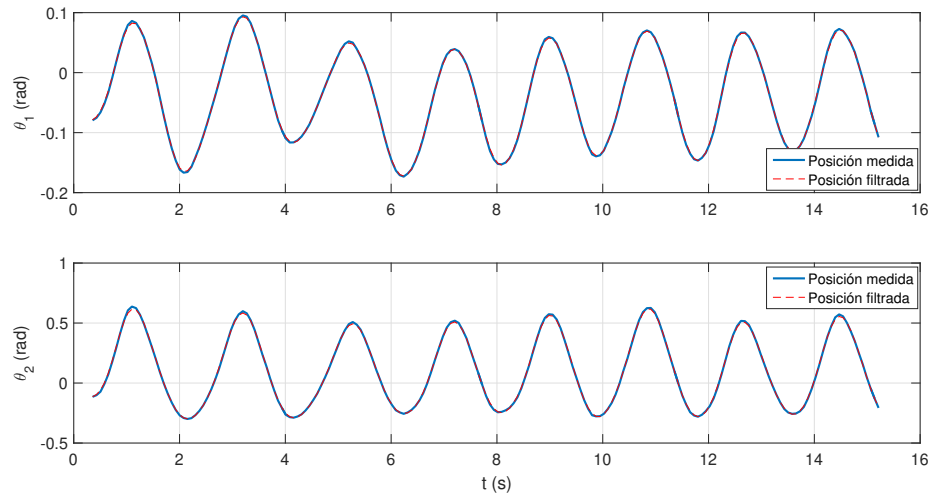


Figura 4.9: Comportamiento de las posiciones angulares medidas durante el experimento.

se posiciona sobre la plataforma de fuerzas y se mueve de manera libre únicamente moviendo las juntas del tobillo y cadera.

Se da fin al sistema de adquisición de datos de la plataforma y las imágenes con esta información. Con otros algoritmos del sistema se encuentran las coordenadas de los marcadores ubicados en el cuerpo del sujeto. Posteriormente se encuentran las coordenadas tridimensionales de los marcadores con la ayuda de las imágenes captadas y con los parámetros de visión previamente estimados.

Utilizando la metodología de traslación y rotación de ejes, vista en la sección anterior, y las coordenadas tridimensionales estimadas, se encuentran las posiciones angulares del tobillo y cadera. Como se ha visto en capítulos anteriores, se filtran las posiciones angulares medidas utilizando un filtro Savitsky-Golay [47]. En la Figura 4.9 se muestra con línea azul continua las posiciones angulares medidas y con línea roja punteada las posiciones filtradas de uno de los sujetos de prueba.

Para la estimación de los parámetros es necesario calcular el momento de reacción  $M_o$  utilizando la metodología vista en la sección anterior. En la Figura 4.10 se muestra el comportamiento de las reacciones requeridas para la estimación.

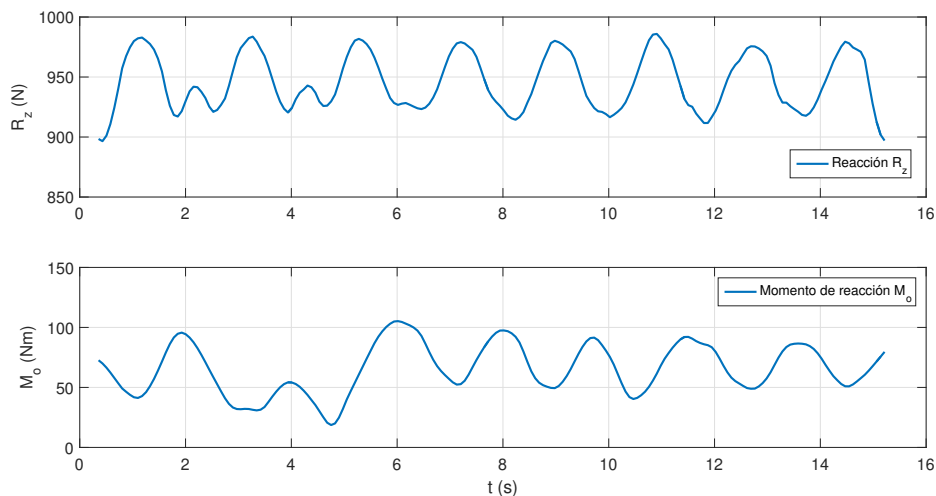


Figura 4.10: Comportamiento de las reacciones en la fase de experimentación.

		Sujeto					
		1	2	3	4	5	6
$m_1$ (kg)	Ideal	30.5900	21.5740	25.7600	20.2860	23.5060	25.7600
	Estimado	195.5714	134.5740	88.5639	69.5566	35.6536	78.2376
$m_2$ (kg)	Ideal	64.4100	45.4260	54.2400	42.7140	49.4940	54.2400
	Estimado	-99.1122	-64.2276	-7.7885	-8.4213	38.2746	2.5330
Parámetro $r_1$ (m)	Ideal	0.4843	0.4350	0.5017	0.4843	0.5075	0.5104
	Estimado	0.7936	0.5466	1.3028	0.6993	0.0743	0.8171
$l_1$ (m)	Ideal	0.8200	0.7365	0.8494	0.8200	0.8593	0.8642
	Medido	0.7752	0.7950	0.8304	0.7908	0.6698	0.7768
$r_2$ (m)	Ideal	0.3006	0.2700	0.3114	0.3006	0.3150	0.3168
	Estimado	-0.2067	-0.1516	-2.7371	-1.6802	0.3921	10.7292

Tabla 4.3: Tabla comparativa de parámetros inerciales estimados utilizando mínimos cuadrados y parámetros ideales de tablas antropométricas.

## 4.6. Resultados

Como se mencionó al inicio del capítulo, se busca encontrar los parámetros inerciales, con la finalidad de utilizarlos en las estimaciones de los parámetros viscoelásticos propuestos en los capítulos anteriores.

La estimación de estos parámetros se realizó utilizando todos los datos vistos en la sección anterior, así como las ecuaciones dinámicas de las reacciones (4.19). Se resuelve la ecuación (4.19) utilizando el método de los mínimos cuadrados. Y aplicando las ecuaciones (4.20) - (4.25) se resuelve para cada uno de los parámetros a estimar. Y finalmente el parámetro  $l_1$  se midió directamente utilizando el sistema de visión. En la Tabla 4.3 se observan las comparaciones de los parámetros obtenidos con respecto a los parámetros ideales, calculados a partir de las tablas antropométricas de Winter [7].

Como se observa, en general no se obtuvieron resultados favorables de estimación. Esto podría ser por que al utilizar el método de los mínimos cuadrados se encuentre la combinación de los parámetros inerciales que pueda satisfacer el comportamiento del centro de masa (COM).

Sujeto	RMSE	RMSE/H	NRMSE	Sujeto	RMSE	RMSE/H	NRMSE
1	7.70 mm	0.0046	10.0451 %	1	108.5 mm	0.0650	11.9741 %
2	19.5 mm	0.0140	32.6906 %	2	477.9 mm	0.2597	55.0902 %
3	23.5 mm	0.0153	23.5604 %	3	693.1 mm	0.4150	76.6477 %
4	9.20 mm	0.0055	10.0605 %	4	2.000 mm	0.0012	0.2197 %
5	24.9 mm	0.0142	17.6772 %	5	355.1 mm	0.2029	38.9718 %
6	32.6 mm	0.0185	25.6217 %	6	32.60 mm	0.1036	25.6217 %

(a)

(b)

Tabla 4.4: Errores RMSE, RMSE/H y NRMSE de la proyección del centro de masa en a) eje z del experimento, b) eje y del experimento.

Por lo tanto, se busca calcular el comportamiento del centro de masa durante el movimiento del experimento, sabiendo que este parámetro puede servir como análisis clínico en el comportamiento del humano [55]. Se sabe que la ubicación del centro de masa para un sistema de partículas se calcula como [57]:

$$\mathbf{r}_{COM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \quad (4.31)$$

donde  $M$  es la suma de las masas del sistema,  $m_i$  las masas del sistema y  $\mathbf{r}_i$  el vector posición asociado a cada una de las masas.

Al desarrollar el vector del centro de masa para el sistema de dos partículas, utilizado para el experimento, y utilizando la ecuación (4.31), se obtiene el vector como

$$\mathbf{r}_{COM} = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{bmatrix} -(m_1 r_1 + m_2 l_1) \text{sen} \theta_1 + m_2 r_2 \text{sen} \theta_{21} & (m_1 r_1 + m_2 l_1) \cos \theta_1 + m_2 r_2 \cos \theta_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

al desarrollar el vector del centro de masa se puede notar que las combinaciones de los parámetros inerciales se pueden estimar directamente utilizando las ecuaciones de estimación y resolverlas utilizando mínimos cuadrados, sustituyendo estos valores de estimación, en la ecuación (4.32) se obtiene

$$\mathbf{r}_{COM} = \frac{1}{\lambda_3} \begin{bmatrix} -\lambda_1 \text{sen} \theta_1 + \lambda_2 \text{sen} \theta_{21} & \lambda_1 \cos \theta_1 + \lambda_2 \cos \theta_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Para obtener una comparación del centro de masa, se realiza el cálculo del centro de masa con la combinación de los parámetros inerciales ideales, y se compara con el comportamiento del COM estimado. En la Figura 4.11 se observa el comportamiento del centro de masa en el plano sagital, así como la evolución en el tiempo de cada una de las componentes del vector  $\vec{r}_{COM}$  del sujeto de prueba número uno.

Para poder cuantificar el error de estimación del centro de masa, se calculó el error RMSE [50] de la estimación comparándolo con el comportamiento ideal del centro de masa. En la Tabla 4.4 se muestran los resultados de los errores obtenidos en cada uno de los ejes del plano sagital.

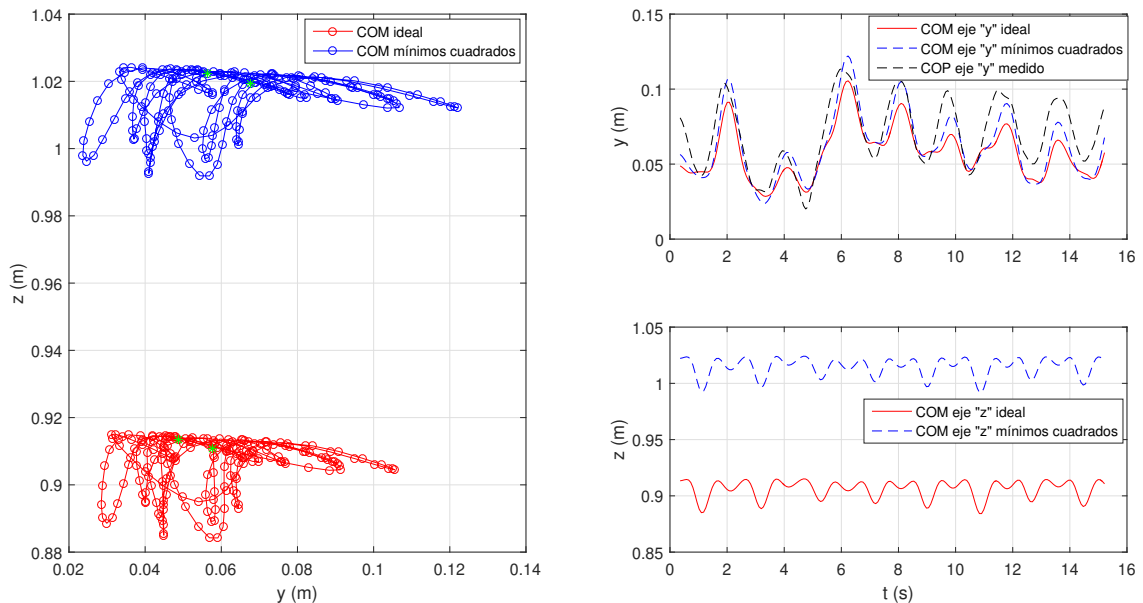


Figura 4.11: Comportamiento del COM del sujeto de prueba uno en el plano sagital  $y-z$  y el comportamiento de cada una de las direcciones con respecto al tiempo.

Se puede observar que los errores de estimación en la dirección del eje  $y$  son menores que los resultados en la dirección del eje  $z$ ; esto podría ser causado por que la solución del vector  $\lambda$  puede tomar soluciones infinitas y tome alguna de esas soluciones. Por ello, el comportamiento en la dirección vertical mantiene el comportamiento cualitativo del comportamiento ideal, sin embargo, cuantitativamente diferente. De este modo, es posible justificar que los valores individuales de los parámetros de masa y longitud no se puedan estimar de una manera correcta.

La combinación de los parámetros pueda asemejarse de manera cualitativa al comportamiento ideal del COM, como se puede observar en la Figura 4.4, existe un desfase en el COM en ambas direcciones. Sin embargo, el cálculo con los parámetros estimados intenta seguir el mismo comportamiento que el COM ideal. Además estos errores son relativos ya que las tablas antropométricas mantienen errores de medición con respecto a los sujetos de prueba; por este motivo, podría decirse que la estimación de dicho parámetro, sobre la dirección del eje  $y$  es una buena aproximación de su comportamiento.

En algunos sujetos se observa que los errores son relativamente grandes, como en los sujetos dos, tres y seis, en comparación a los restantes; esto podría explicarse por errores en la medición dentro del sistema de captura de movimiento, o por que el comportamiento real del COM dista del comportamiento ideal obtenido con los parámetros obtenidos indicados en tablas antropométricas.

Por otra parte, se trató de normalizar los errores RMSE con respecto a la altura de cada sujeto, por ello, el cálculo del error se dividió entre la altura total de cada sujeto. Se puede observar que, en la normalización realizada en la dirección del eje  $y$ , cuatro de los seis sujetos tienen una similitud en este comportamiento. Sin embargo, los dos sujetos restantes tienen un valor menor en la normalización de los errores, ya que, son aquellos que obtuvieron los errores relativamente más pequeños con respecto al comportamiento ideal.

## 4.7. Conclusiones del capítulo

En el presente capítulo se hizo uso de un sistema de captura de movimiento, con el fin de obtener parámetros en el plano sagital del cuerpo humano. El sistema de captura de movimiento se encuentra en el laboratorio de “Proyectos mecatrónicos” ubicado en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Dentro de los algoritmos de este sistema, se realizaron algunas modificaciones con el fin de realizar las tareas necesarias para el tipo de trabajo. Por ejemplo la obtención del tiempo de cada adquisición en milisegundos, puesto que se adquiría en función de horas/minutos/segundos, modificar los algoritmos de las imágenes, para detectar tres puntos.

Como se menciona en el capítulo, se encontraron errores de medición relativamente altos en la estimación de los puntos tridimensionales, utilizando los parámetros de visión estimados mediante la calibración de las cámaras. Sin embargo, se puede considerar que dichos errores son bajos dado que el espacio de trabajo es bastante grande, y la variación de estas mediciones no tienen una gran variación en el cálculo de los ángulos de los dos eslabones involucrados en el movimiento.

Se puede observar que la estimación de los parámetros inerciales de manera individual, no fue la esperada. Sin embargo, se puede observar que la estimación del COM del cuerpo puede ser estimada aunque, debido a las longitudes de los eslabones estimados, la estimación del COM en la dirección del eje  $z$  tiene un desfase con respecto al comportamiento del mismo utilizando los parámetros ideales. Por otro lado, se puede observar que el comportamiento del COM en el eje  $y$  tiene una mayor similitud con respecto al comportamiento ideal.

# Conclusiones

Se desarrollaron los modelos dinámicos no lineales del modelo esquemático del doble péndulo invertido, el cual se encuentra basado en el movimiento de las juntas del tobillo y la cadera. Se lograron obtener las ecuaciones de movimiento para un modelo de segundo orden, el cual se fundamentó en los modelos viscoelásticos de Kelvin-Voigt y las ecuaciones de movimiento para un modelo de tercer orden basado en el modelo de Poynting-Thomson. Además, se obtuvieron los valores de las reacciones aplicadas en el suelo, las cuales no se consideran constantes, ya que estas se encuentran en función de las velocidades angulares  $\dot{\theta}_i$  y las aceleraciones  $\ddot{\theta}_i$ .

Una de las problemáticas durante el desarrollo de este trabajo fue realizar el diseño de los filtros utilizados. Los parámetros de diseño de los filtros de Butterworth y Savitsky-Golay fueron seleccionados de manera empírica, en función de la pérdida de información que se pudiera obtener por un mal diseño. Un mal diseño del filtro, conlleva que la estimación de los parámetros no pueda darse de manera satisfactoria.

Es importante realizar un estudio de simulación con el cual se puedan validar los algoritmos de estimación de parámetros, así como simular problemáticas que se pueden presentar durante la fase de experimentación. De esta manera, se pudieron aplicar estos algoritmos para estimar los parámetros constantes y, sobre todo, se pudieron estimar valores variantes en el tiempo para el modelo de segundo orden. El modelo de tercer orden presentó dificultades en la estimación de los parámetros variantes en el tiempo con mediciones ruidosas. Esto, como se explicó, puede deberse a la sensibilidad del modelo por encontrar la tercera derivada de la posición y dado que las posiciones angulares pudieran asemejarse a la función de un seno amortiguado, la frecuencia natural de la función seno hace que los errores sean mucho mayores.

Durante el trabajo de tesis se lograron validar las ecuaciones de movimiento para el modelo de segundo orden, utilizando una maqueta construida de madera con resortes. Utilizando el movimiento del péndulo, grabando su movimiento y capturando las posiciones angulares  $\theta_i$ , se lograron estimar los parámetros viscoelásticos  $k_i$  de manera satisfactoria.

En la fase de experimentación para el modelo de segundo orden se realizó la estimación de los parámetros de rigidez variantes en el tiempo. Como se menciona en el texto, la rigidez se encuentra en función de la actividad muscular, por lo cual se utilizó un algoritmo estimación recursivo, tal como el filtro de Kalman. Los resultados obtenidos para este modelo resultaron satisfactorios, para el caso de, cinco de los seis sujetos quienes presentan un comportamiento similar entre sí. Cabe mencionar que en la estimación de los parámetros, la rigidez del tobillo tomaba signo negativo, lo cual indica que el parámetro de control  $k_1$  no almacena la energía sino que la aporta. Esto quiere decir que los sujetos podrían aplicar un torque externo para poder recuperar la postura vertical.

A diferencia de la experimentación del modelo de segundo orden, en el modelo de tercer orden no se lograron estimar parámetros variantes en el tiempo en simulación. Por ello, a los sujetos de prueba se aplicó únicamente el algoritmo para estimación de parámetros constantes. Los resultados entre los sujetos no presentan una similitud entre sí, sin embargo, se observa que los parámetros  $b_{m_1}$  y  $k_{t_2}$  de todos los sujetos tienen valores similares. Para el parámetro  $b_{m_1}$  todos los valores son negativos; este valor podría explicar la conclusión vista en el párrafo anterior, la cual es que los sujetos necesitan aplicar un torque adicional para lograr la recuperación de la postura.

Se hizo uso del sistema de captura de movimiento ubicado en el laboratorio de Proyectos mecatrónicos de la Facultad de Ingeniería de la UASLP, esto con el fin de estimar los parámetros inerciales base. Sin embargo, durante la fase de experimentación, no fue posible estimar por separado los valores de masa y de longitud involucrados en el movimiento. Por lo tanto, se realizó la estimación de la proyección del centro de masa en el plano sagital de los sujetos de prueba, en el cual se obtuvieron buenos resultados. En la dirección horizontal del movimiento, se logró estimar con cierta precisión esta proyección, la cual fue comparada con el centro de masa ideal. Por otra parte, la proyección en la dirección vertical del movimiento no tuvo buenos resultados de manera cuantitativa, sin embargo, se observó que el comportamiento cualitativo en la dirección vertical cumple con la proyección ideal.

Durante el trabajo de tesis, se realizaron artículos, los artículos en los que se trabajaron como primer autor son:

- “ A model for the estimation of ankle and hip joints visco-elastic parameters during balancing” para el Congreso Nacional de Control Automático (CNCA) 2018 [58].
- “Estimation of hip and ankle visco-elastic parameters during quiet standing” para el congreso “International Mechanical Engineering Congress and Exposition (IMECE) 2018 [59].

Por otro lado, se participó en el desarrollo de un artículo de revista “Journal of Computational and Nonlinear Dynamics”, llamado “A Third Order Model of Hip and Ankle Joints during Balance Recovery: Modeling and Parameter Estimation” [60].

## Trabajo a futuro

- Realizar un mayor número de experimentos con poblaciones de diferentes características, con el fin de realizar un estudio de antropometría en los parámetros viscoelásticos.
- Realizar algoritmos para la estimación de parámetros viscoelásticos variantes en el tiempo en el modelo de tercer orden.
- Realizar algoritmos para la obtención de los parámetros inerciales individuales.
- Continuar con el estudio de rigidez tomando en cuenta las señales electromiográficas en músculos.
- Analizar la dinámica de la estrategia de paso, así como, sus parámetros de control.
- Realizar un modelado dinámico diferente, intentando modelar el comportamiento del músculo como un actuador lineal, y no con elementos de vibración como los vistos en este trabajo.



# Bibliografía

- [1] H. B. Menz, M. E. Morris, y S. R. Lord, “Foot and ankle characteristics associated with impaired balance and functional ability in older people,” *The Journals of Gerontology Series A: Biological Sciences and Medical Sciences*, vol. 60, no. 12, pp. 1546–1552, 2005.
- [2] G. Venture, K. Yamane, y Y. Nakamura, “Identification of human musculo-tendon subject specific dynamics using musculo-skeletal computations and non linear least square,” en *The First IEEE/RAS-EMBS International Conference on Biomedical Robotics and Biomechanics, 2006. BioRob 2006*. IEEE, 2006, pp. 211–216.
- [3] G. Venture, Y. Nakamura, K. Yamane, y M. Hirashima, “A painless and constraint-free method to estimate viscoelastic passive dynamics of limbs’ joints to support diagnosis of neuromuscular diseases,” en *Engineering in Medicine and Biology Society, 2007. EMBS 2007. 29th Annual International Conference of the IEEE*. IEEE, 2007, pp. 5362–5365.
- [4] A. Azaman y S.-I. Yamamoto, “Estimation of stiffening strategy of ankle and hip based on joint sway,” en *2013 6th International IEEE/EMBS Conference on Neural Engineering (NER)*. IEEE, 2013, pp. 1554–1557.
- [5] L. E. Coronado, R. Chavez-Romero, M. Maya, A. Cardenas, y D. Piovesan, “Combining genetic algorithms and extended kalman filter to estimate ankle’s muscle-tendon parameters,” en *ASME 2015 Dynamic Systems and Control Conference*. American Society of Mechanical Engineers, 2015, pp. V001T15A002–V001T15A002.
- [6] R. Johansson, M. Magnusson, y M. Akesson, “Identification of human postural dynamics,” *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 35, no. 10, pp. 858–869, 1988.
- [7] D. A. Winter, *Biomechanics and motor control of human movement*. John Wiley & Sons, 2009.
- [8] D. Knudson, *Fundamentals of biomechanics*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [9] M. H. I. design engineering. (2018, 10) Raps v6 plastic clap skate. [Online]. Available: <https://www.mauritshoman.nl/products/raps-v6-plastic-clap-skate/>
- [10] Wikipedia. (2018, 10) Clap skate. [Online]. Available: [https://en.wikipedia.org/wiki/Clap\\_skate](https://en.wikipedia.org/wiki/Clap_skate)
- [11] S. N. Robinovitch, E. T. Hsiao, R. Sandler, J. Cortez, Q. Liu, y G. D. Paiement, “Prevention of falls and fall-related fractures through biomechanics.” *Exercise and sport sciences reviews*, vol. 28, no. 2, pp. 74–79, 2000.

- 
- [12] A.-K. Stensdotter, E. Tengman, L. B. Olofsson, y C. Häger, “Deficits in single-limb stance more than 20 years after acl injury,” *The European Journal of Physiotherapy*, vol. 15, no. 2, pp. 78–85, 2013.
- [13] A. Z. Suarez, A. Osorio, R. Lopez, S. Salazar, y R. Lozano, “Mathematical model and simulation of finger movement with electromyographic signals,” en *2016 20th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*. IEEE, 2016, pp. 771–775.
- [14] V. salud Neurofisiología. (2018, 10) Interpretación del Electromiografía (EMG). [Online]. Available: <http://neurofisiologiagranada.com/emg/emg-interpretacion.htm>
- [15] A. Kot y A. Nawrocka, “Double inverted pendulum for human hip strategy of balance modelling,” en *2016 17th International Carpathian Control Conference (ICCC)*. IEEE, 2016, pp. 368–371.
- [16] L. M. Nashner, “Practical biomechanics and physiology of balance,” *Balance Function Assessment and Management*, vol. 431, 2014.
- [17] D. Piovesan, C. Kennett, R. Chavez-Romero, M. J. Panza, y A. Càrdenas, “Stiffness boundary conditions for critical damping in balance recovery,” en *ASME 2015 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. American Society of Mechanical Engineers, 2015, pp. V003T03A066–V003T03A066.
- [18] D. Piovesan, A. Pierobon, P. DiZio, y J. R. Lackner, “Measuring multi-joint stiffness during single movements: numerical validation of a novel time-frequency approach,” *PloS one*, vol. 7, no. 3, p. e33086, 2012.
- [19] A. V. Hill, “The heat of shortening and the dynamic constants of muscle,” *Proc. R. Soc. Lond. B*, vol. 126, no. 843, pp. 136–195, 1938.
- [20] D. Piovesan, A. Pierobon, y F. A. M. Ivaldi, “Critical damping conditions for third order muscle models: implications for force control,” *Journal of biomechanical engineering*, vol. 135, no. 10, p. 101010, 2013.
- [21] N. K. Peyada, A. Sen, y A. K. Ghosh, “Aerodynamic characterization of hansa-3 aircraft using equation error, maximum likelihood and filter error methods,” en *Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists*, vol. 2. Citeseer, 2008.
- [22] L. A. Zadeh, “From circuit theory to system theory,” *Proceedings of the IRE*, vol. 50, no. 5, pp. 856–865, 1962.
- [23] P. G. Hamel y R. V. Jategaonkar, “Evolution of flight vehicle system identification,” *Journal of aircraft*, vol. 33, no. 1, pp. 9–28, 1996.
- [24] J. R. Vasquez, R. R. Perez, J. S. Moriano, y J. P. Gonzalez, “System identification of steam pressure in a fire-tube boiler,” *Computers & Chemical Engineering*, vol. 32, no. 12, pp. 2839–2848, 2008.
- [25] R. E. Maine y K. W. Iliff, “Formulation and implementation of a practical algorithm for parameter estimation with process and measurement noise,” *SIAM journal on applied mathematics*, vol. 41, no. 3, pp. 558–579, 1981.
- [26] R. V. Jategaonkar, *Flight vehicle system identification: a time-domain methodology*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2015.

- 
- [27] A. Balakrishnan, "Stochastic system identification techniques," *Stochastic Optimization and Control*, edited by HF Karreman, John Wiley and sons, London, 1968.
- [28] D. A. Winter, A. E. Patla, S. Rietdyk, y M. G. Ishac, "Ankle muscle stiffness in the control of balance during quiet standing," *Journal of neurophysiology*, vol. 85, no. 6, pp. 2630–2633, 2001.
- [29] D. P. Ferris, M. Louie, y C. T. Farley, "Running in the real world: adjusting leg stiffness for different surfaces," *Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences*, vol. 265, no. 1400, pp. 989–994, 1998.
- [30] W. Hahn, *Stability of motion*. Springer, 1967, vol. 138.
- [31] G. Venture, K. Yamane, y Y. Nakamura, "Identifying musculo-tendon parameters of human body based on the musculo-skeletal dynamics computation and hill-stroeve muscle model," en *2005 5th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*. IEEE, 2005, pp. 351–356.
- [32] M. T. Khan, K. Teramoto, K. Shunji, y K. Tomoaki, "Emg signals in muscular co-activations for dynamic analysis of knee joint," en *International Conference on Informatics, Electronics & Vision (ICIEV), 2014*. IEEE, 2014, pp. 1–5.
- [33] Z. Abu-Faraj, T. Hamdan, M. Wehbi, G. Khalil, y H. Hamdan, "Design and development of an earthquake-simulated environment for the study of postural stability," en *International Conference on Biomedical and Pharmaceutical Engineering, 2006. ICBPE 2006*. IEEE, 2006, pp. 188–193.
- [34] I. D. Loram y M. Lakie, "Direct measurement of human ankle stiffness during quiet standing: the intrinsic mechanical stiffness is insufficient for stability," *The journal of physiology*, vol. 545, no. 3, pp. 1041–1053, 2002.
- [35] S. B. Bortolami, P. DiZio, E. Rabin, y J. Lackner, "Analysis of human postural responses to recoverable falls," *Experimental brain research*, vol. 151, no. 3, pp. 387–404, 2003.
- [36] T. J. Roberts y E. Azizi, "Flexible mechanisms: the diverse roles of biological springs in vertebrate movement," *Journal of Experimental Biology*, vol. 214, no. 3, pp. 353–361, 2011.
- [37] L. Meirovitch, *Methods of analytical dynamics*. Courier Corporation, 2010.
- [38] H. Goldstein, *Classical mechanics*. Pearson Education India, 2011.
- [39] H. W. Sorenson, "Least-squares estimation: from gauss to kalman," *IEEE spectrum*, vol. 7, no. 7, pp. 63–68, 1970.
- [40] B. W. Mooring, Z. S. Roth, y M. R. Driels, *Fundamentals of manipulator calibration*. Wiley New York, 1991.
- [41] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Journal of basic Engineering*, vol. 82, no. 1, pp. 35–45, 1960.
- [42] D. Simon, *Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches*. John Wiley & Sons, 2006.

- 
- [43] C. Montella, "The kalman filter and related algorithms: A literature review," 05 2011.
- [44] D. Stranneby, *Digital signal processing and applications*. Elsevier, 2004.
- [45] S. Butterworth, "On the theory of filter amplifiers," *Wireless Engineer*, vol. 7, no. 6, pp. 536–541, 1930.
- [46] A. Luke, S. Shaji, y K. U. Menon, "Motion artifact removal and feature extraction from ppg signals using efficient signal processing algorithms," en *2018 International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI)*. IEEE, 2018, pp. 624–630.
- [47] A. Savitzky y M. J. Golay, "Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures." *Analytical chemistry*, vol. 36, no. 8, pp. 1627–1639, 1964.
- [48] W. Khalil y E. Dombre, *Modeling, identification and control of robots*. Butterworth-Heinemann, 2004.
- [49] R. Penrose, "A generalized inverse for matrices," en *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*, vol. 51, no. 3. Cambridge University Press, 1955, pp. 406–413.
- [50] T. Chai y R. R. Draxler, "Root mean square error (rmse) or mean absolute error (mae)?—arguments against avoiding rmse in the literature," *Geoscientific model development*, vol. 7, no. 3, pp. 1247–1250, 2014.
- [51] L. H. Ting y J. L. McKay, "Neuromechanics of muscle synergies for posture and movement," *Current opinion in neurobiology*, vol. 17, no. 6, pp. 622–628, 2007.
- [52] M. Tomás-Rodríguez y S. P. Banks, *Linear, time-varying approximations to nonlinear dynamical systems: with applications in control and optimization*. Springer Science & Business Media, 2010, vol. 400.
- [53] P. G. Morasso y V. Sanguineti, "Ankle muscle stiffness alone cannot stabilize balance during quiet standing," *Journal of Neurophysiology*, vol. 88, no. 4, pp. 2157–2162, 2002.
- [54] D. A. Kistemaker y L. A. Rozendaal, "In vivo dynamics of the musculoskeletal system cannot be adequately described using a stiffness-damping-inertia model," *PloS one*, vol. 6, no. 5, p. e19568, 2011.
- [55] G. Venture, K. Ayusawa, y Y. Nakamura, "Motion capture based identification of the human body inertial parameters," en *Engineering in Medicine and Biology Society, 2008. EMBS 2008. 30th Annual International Conference of the IEEE*. IEEE, 2008, pp. 4575–4578.
- [56] E. J. González-Galván, "Notas sobre teoría de estimación aplicada a la robótica," 2017, universidad Autónoma de San Luis Potosí, Notas de curso.
- [57] E. R. Johnston, F. Beer, y E. Eisenberg, *Vector Mechanics for Engineers: Statics and Dynamics*. McGraw-Hill, 2009.
- [58] A. Cerda-Lugo, A. González, A. Cárdenas, y D. Piovesan, "A model for the estimation of ankle and hip joints visco-elastic parameters during balancing," en *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático (AMCA2018)*, 10 2018, pp. 189–194.

- 
- [59] —, “Estimation of hip and ankle visco-elastic parameters during quiet standing,” en *ASME 2018 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. American Society of Mechanical Engineers, 2018, pp. V003T04A075–V003T04A075.
- [60] A. González, A. Cerda-Lugo, A. Cárdenas, M. Maya, y D. Piovesan, “A third order model of hip and ankle joints during balance recovery: Modeling and parameter estimation,” *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*.