

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ
FACULTAD DE INGENIERÍA**



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN
Y ESTUDIOS DE POSGRADO**



**"OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA DE ESTRUCTURAS DE
ESPESOR VARIABLE UTILIZANDO EL MÉTODO DE LOS
AUTÓMATAS CELULARES HÍBRIDOS CONSIDERANDO
RESTRICCIONES DE ESFUERZO"**

**TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRO EN INGENIERIA MECÁNICA**

**PRESENTA
ING. ARES ERNESTO MARTÍNEZ HERRERA**

**ASESOR:
DR. GILBERTO MEJÍA RODRÍGUEZ**

SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P., MÉXICO, FEBRERO 2013

Contenido

	Pág.
Contenido	i
Lista de Figuras	iv
Lista de Tablas	viii
Resumen.....	1
Introducción.....	2
Justificación.....	2
Objetivos.....	4
Estructura de la Tesis.....	5
Capítulo 1. Fundamentos y consideraciones del modelo del material	7
1.1. Introducción.....	7
1.2. Microestructura-propiedades.....	7
1.3. Acero inoxidable.....	8
1.3.1. Proceso de Producción.....	9
1.3.2. Composición química y parámetros de producción del Acero Inoxidable ferrítico 430 y AISI austenítico 301.....	10
1.3.3. Características de los Aceros Inoxidables.....	14
Capítulo 2. Modelo matemático de optimización estructural	19
2.1. Introducción.....	19
2.2. Formulación estándar del problema de optimización.....	19
2.2.1. Mínimo global y mínimo local.....	21
2.3. Función Lagrangiana.....	22
2.3.1. Condiciones de optimalidad Karush-Kuhn-Tucker.....	23
2.4. Condiciones de regularidad de las restricciones.....	24
2.4.1. Condiciones de regularidad de independencia lineal (LICQ).....	25
2.4.2. Condiciones de regularidad Mangasarian – Fromovitz (MFCQ).....	25
2.4.3. Condiciones de regularidad de Abadie (ACQ).....	25
2.5. Optimización Estructural.....	26
2.6. Tipos de problema de Optimización Estructural.....	27
2.6.1. Optimización de Forma.....	27
2.6.2. Optimización de Tamaño.....	29
2.6.3. Optimización de Material.....	32
2.6.4. Optimización Topológica.....	33
2.7. Técnicas y enfoques utilizados en Optimización Topológica.....	34
2.7.1. Homogenización.....	34
2.7.2. Ley de Potencias.....	38
2.7.3. Optimización de Evolución Estructural (ESO).....	40
2.7.4. Método de Level set.....	41
2.7.4.1. Componentes del Método de Level set.....	42
2.7.4.2. Parametrización.....	42

2.7.4.3. Discretización.....	44
2.7.4.4. Actualización de la Función Level set.....	45
2.7.5. Método de HCA (Autómatas Celulares Híbridos).....	46
2.8. Inestabilidades en Algoritmos de Optimización.....	50
2.8.1. Efecto Checkerboard.....	50
2.8.2. Dependencia de malla.....	51
2.9. Problema de Optimización Topológica.....	52
2.9.1. Introducción.....	52
2.9.2. Definición del Problema de Optimización Topológica.....	52
2.10. Formulación del problema.....	54
2.11. Condiciones de optimalidad.....	56
2.12. Condiciones de Regularidad de las Restricciones del Problema de Optimización.....	65
Capítulo 3. Implementación del Algoritmo de los Autómatas Celulares Híbridos.....	69
3.1. Algoritmo de Optimización de los Autómatas Celulares Híbridos.....	69
3.2. Técnicas de control.....	71
3.2.1. Control dos posiciones.....	72
3.2.2. Control proporcional.....	73
3.2.3. Control integral.....	73
3.2.4. Control derivativo.....	73
3.3. Implementación en Matlab®	74
Capítulo 4. Consideraciones del Método de Elemento Finito y Técnicas de Control de los Autómatas Celulares Híbridos.....	75
4.1. Introducción.....	75
4.2. Comportamiento de los sólidos.....	75
4.3. Esfuerzo-Deformación.....	75
4.4. Definición del Problema Estructural.....	79
4.5. Variables de control.....	82
4.6. Consideraciones del Método de Elemento Finito.....	87
4.6.1. Mallado del espacio de diseño.....	87
Capítulo 5. Casos de Estudio.....	91
5.1. Introducción.....	91
5.2. Estructuras de Michell.....	91
5.3. Viga simplemente apoyada con una carga puntual.....	92
5.4. Esfuerzos elementales.....	103
5.5. Curva de Pareto.....	109
5.6. Procedimiento de Optimización.....	120
Capítulo 6. Resultados.....	122
6.1. Introducción.....	122
6.2. Selección de parámetros de optimización.....	122

Conclusiones..... 130
Contribuciones..... 131
Trabajo Futuro..... 131

Referencias..... 133

Anexos..... 140
Anexo A1..... 140
Anexo A2..... 144

Lista de figuras

	Pág.
Fig. 1.1. Relación micro-estructura –desempeño estructural.....	7
Fig. 1.2. Propuesta que genera el modelo por medio de un ajuste de superficie a los datos.....	12
Fig. 1.3. Microestructuras de las muestras de la Tabla 1.7 del acero inoxidable 430.....	13
Fig. 1.4. Proceso de recocido laser puede producir diferentes microestructuras en diferentes zonas del material [6].....	14
Fig. 1.5. Rangos de resistencia a la tensión y dureza variando Johannsen, A. Kyrolainen [6].....	16
Fig. 1.6. Tamaño de grano del acero austenítico AISI 301 recocido. Johannsen, A. Kyrolainen [6].....	17
Fig. 2.1. Los múltiples puntos mínimos son comunes en funciones no convexas.....	21
Fig. 2.2. Problema de optimización en un espacio clásico en un espacio bidimensional.....	22
Fig. 2.3. Condiciones de optimalidad.....	23
Fig. 2.4. La optimización de forma [1] no crea nuevas fronteras dentro del dominio de diseño.....	28
Fig. 2.5. La utilización de funciones para representar el borde de las fronteras de material dentro del dominio de diseño.....	29
Fig. 2.6. Optimización de forma de una viga continua sujeta a sus modos de vibración natural Inzarulfaisham [20].....	29
Fig. 2.7. Potenciales miembros conectados de la estructura a optimizar “Groundstructure” [21].....	30
Fig. 2.8. Optimización de tamaño de una estructura “shell” [23].....	31
Fig. 2.9. Optimización de estructura “Groundstructure” por medio de variables de diseño continuas.....	32
Fig. 2.10. Optimización de material [1], donde del lado derecho se muestra la solución óptima y de lado izquierdo el problema de optimización [1].....	32
Fig. 2.11. Optimización topológica, el lado derecho se muestra la solución óptima y de lado izquierdo el problema de optimización topológica [1].....	34
Fig. 2.12. Función implícita de level set y las fronteras en el espacio de diseño Zhu, Zhang [56].....	43
Fig. 2.13. Función de level set, el lado derecho el contorno de nivel cero de la función en el dominio de diseño, Van Dijk y G.H. Yoon [57].....	43
Fig. 2.14. La actualización del elemento depende de los elementos que considera el vecindario.....	48
Fig. 2.15. Condiciones de borde del método de los HCA, a) Fijo, b) Adiabático, c) Reflectivo y d) Periódico [14].....	48

Fig. 2.16.	Diagrama de flujo del algoritmo de optimización de los HCA.....	49
Fig. 2.17.	Efecto Checkerbord obtenido del código de 99 líneas [28] (top(100,30,0.5,3,0.5)).....	50
Fig. 2.18.	Dependendencia de malla comun en problema de optimizacion.....	51
Fig. 2.19.	Las propiedades mecánicas de cada punto dentro de Ω está definido por su espesor.....	53
Fig. 2.20.	Espacio de diseño discretizado en “N” elementos.....	55
Fig. 3.1.	Proceso de adaptación trabecular ósea.....	69
Fig. 3.2.	Tipos de vecindades elementales.....	70
Fig. 3.3.	Diagrama de flujo del algoritmo de optimización.....	71
Fig. 3.4.	Diagrama de implementación del algoritmo de optimización.....	74
Fig. 4.1.	Componentes del tensor de esfuerzos en un punto dado, causadas por la aplicación de cargas en el sólido.....	76
Fig. 4.2.	Problema bidimensional mostrando una viga simplemente apoyada tipo Michell.....	80
Fig. 4.3.	Espacio de diseño discretizado.....	80
Fig. 4.4.	Sistema de coordenadas para el análisis del comportamiento mecánico de la lámina y plano medio [71].....	81
Fig. 4.5.	Fuerzas, deformaciones y desplazamientos presentes en un problema de esfuerzo plano [71].....	82
Fig. 4.6.	Vecindario de 4 elementos para CAs interiores y vecindad de 8 elementos en la frontera del dominio de diseño.....	83
Fig. 4.7.	Frontera de Pareto, limitada en los extremos por los puntos ancla.....	84
Fig. 4.8.	El espacio de diseño discretizado muestra dos tipos de vecindarios.....	86
Fig. 4.9.	Fragmento de las posibles combinaciones de variables a considerar durante el proceso de optimización.....	86
Fig. 4.10.	Mallado con elementos cuadrados en el que cada CA corresponde a un elemento cuadrado.....	88
Fig. 4.11.	Mallado triangular del dominio de diseño, en el que cada CA se conforma por la unión de dos elementos.....	88
Fig. 4.12.	CA utilizado para discretizar el espacio de diseño.....	89
Fig. 4.13.	a) Espacio de diseño Ω , b) espacio de diseño discretizado en “N” elementos, c) elemento cuadrado lineal de 4 nodos [73].....	89
Fig. 5.1.	Soluciones propuestas por Michell (a) viga simplemente apoyada y una carga puntual, (b) viga en voladizo y una carga puntual en el extremo.....	92
Fig. 5.2.	Prototipo considerando control derivativo con 4 elementos internos y 8 vecinos en el perímetro.....	95

Fig. 5.3.	Histograma de la energía de deformación elemental del prototipo mostrado en la Fig. 5.2.....	96
Fig. 5.4.	Histograma de los esfuerzos elementales del prototipo mostrado en la Fig. 5.2....	96
Fig. 5.5.	Prototipo considerando control dos posiciones con 4 elementos internos y 8 vecinos en el perímetro.....	97
Fig. 5.6.	Histograma de energía de deformación del prototipo mostrado en la Fig. 5.5.....	97
Fig. 5.7.	Histograma de esfuerzos elementales del prototipo mostrado en la Fig. 5.5.....	98
Fig. 5.8.	Prototipo considerando control dos posiciones con 8 elementos internos y 12 vecinos en el perímetro.....	98
Fig. 5.9.	Histograma de energía de deformación elemental del prototipo mostrado en la Fig. 5.8.....	99
Fig. 5.10.	Histograma de los esfuerzos elementales del prototipo mostrado en la Fig. 5.8....	99
Fig. 5.11.	Prototipo considerando control integral con 8 elementos internos y 12 vecinos en el perímetro.....	100
Fig. 5.12.	Histograma de frecuencia de la energía de deformación elemental del prototipo mostrado en la Fig. 5.11.....	100
Fig. 5.13	El Histograma de frecuencia de los esfuerzos elementales del prototipo mostrado en la Fig. 5.11.....	101
Fig. 5.14.	Ampliación del histograma de energía de deformación elemental de la Fig. 5.13..	101
Fig. 5.15.	Ampliación del histograma de energía de deformación elemental de la Fig. 5.9....	102
Fig. 5.16.	Diferencias de los prototipos generados con las técnicas de control integral (superior) y control dos posiciones (inferior).....	102
Fig. 5.17.	Esfuerzos elementales presentes en el prototipo mostrado en la Fig.5.11.....	103
Fig. 5.18.	Ampliación de los elementos que superan el esfuerzo permitido.....	104
Fig. 5.19.	Distribución de esfuerzos elementales presentes en el prototipo mostrado en la Fig.5.11.....	104
Fig. 5.20.	Elementos que presentan estado de esfuerzos mayor al permitido.....	105
Fig. 5.21.	Esfuerzos del prototipo mostrado en la Fig. 5.11 después de incrementar el espesor 0.01 cm.....	106
Fig. 5.22.	Esfuerzos del prototipo mostrado en la Fig. 5.11 después de incrementar el espesor 0.035 cm.....	107
Fig. 5.23.	Histograma de la energía de deformación elemental del prototipo mostrado en la Fig. 5.11.....	107
Fig. 5.24.	Esfuerzos del prototipo mostrado en la Fig. 5.11 después de incrementar el espesor (+0.01cm).....	108
Fig. 5.25.	Esfuerzos del prototipo mostrado en la Fig. 5.11 después de incrementar el espesor (+0.035cm).....	109
Fig. 5.26.	Frontera de Pareto generada considerando una constante de control $Cd=0.1618033$	110
Fig. 5.27.	Prototipos y su masa obtenidos variando la variable de control Cd	111
Fig. 5.28.	Prototipos y su energía de deformación obtenidos variando la variable de control Cd	112

Fig. 5.29.	Relación entre energía de deformación y masa variando la constante de control Cd.....	113
Fig. 5.30.	Prototipo obtenido utilizando la constante de control Cd=0.325.....	114
Fig. 5.31.	Convergencia de la masa del prototipo considerando Cd=0.325 y w=0.30.....	114
Fig. 5.32.	Convergencia de la energía de deformación total del prototipo generado bajo las condiciones de Cd=0.325.....	115
Fig. 5.33.	Convergencia del peso total del prototipo generado considerando Cd=0.275 y w=0.30.....	116
Fig. 5.34.	Convergencia de la energía de deformación total del prototipo considerando un Cd=0.275 y w=0.30.....	116
Fig. 5.35.	Prototipo obtenido utilizando la constante de control Cd=0.275 y w=0.30.....	117
Fig. 5.36.	Variación de la masa de los prototipos obtenidos considerando w=0.3.....	118
Fig. 5.37.	Variación de la energía de deformación de los prototipos considerando w=0.3.....	118
Fig. 5.38.	Histograma de la energía de deformación considerando Cd=0.1.....	119
Fig. 5.39.	Histograma de la energía de deformación considerando Cd=0.225.....	119
Fig. 5.40.	Histograma de la energía de deformación considerando Cd=0.275.....	120
Fig. 6.1.	Espacio de diseño disponible para la optimización.....	123
Fig. 6.2.	Diferentes prototipos que reducen la masa y/o la energía de deformación del problema.....	124
Fig. 6.3.	Prototipo que reduce la masa y la energía de deformación.....	125
Fig. 6.4.	Histograma de la energía de deformación del prototipo mostrado en la Fig.6.3.....	126
Fig. 6.5.	Acercamiento del histograma de la energía de deformación elemental.....	126
Fig. 6.6.	Esfuerzos elementales presentes en el prototipo mostrado en la Fig. 6.3.....	127
Fig. 6.7.	Histograma de esfuerzos elementales del prototipo mostrado en la Fig. 6.3.....	128
Fig. 6.8.	Distribución de los esfuerzos elementales presentes en el modelo mostrado de la Fig. 6.3.....	128

Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 1.1. Propiedades mecánicas de los distintos aceros inoxidable.....	9
Tabla 1.2. Composición química del acero ferrítico 430 laminado en frío.....	10
Tabla 1.3. Composición química del acero austenítico AISI 301 austenítico [1].....	10
Tabla 1.4. Variables de entrada en el proceso de laminado en frío del acero ferrítico 430.....	11
Tabla 1.5. Variables de salida en el proceso de laminado del acero inoxidable ferrítico 430.....	12
Tabla 1.6. Propiedades mecánicas del acero inoxidable 430.....	13
Tabla 1.7. Resistencia a la fluencia, tamaño de grano y fases presentes en los materiales Okitsu y Takata [7].....	17
Tabla 4.1. Vecindarios considerados en el método de los HCA.....	83
Tabla 4.2. Factores de peso utilizados en el proceso de optimización.....	85
Tabla 4.3. Factores involucrados en el proceso de diseño.....	87
Tabla 5.1. Constantes del material y características geométricas iniciales del problema de optimización.....	92
Tabla 5.2. Distribución estadística de la energía de deformación.....	93
Tabla 5.3. Medidas de dispersión de la energía de deformación con respecto a la energía de deformación óptima definida para la viga simplemente apoyada con una carga puntual.....	94
Tabla 5.4. Energía de deformación, esfuerzos y espesores de los elementos que sobre pasan el límite de esfuerzos.....	105
Tabla 5.5. Se puede apreciar claramente que la variación del factor de peso que caracteriza cada punto tiene una fuerte influencia en el peso y energía de deformación de la estructura.....	110
Tabla 5.6. Energía de deformación y peso de los prototipos generados considerando diferentes constante de control para la técnica de control dos posiciones y $w=0.3$	113
Tabla 5.7. Valores del peso y energía de deformación total de los prototipos obtenidos considerando un factor de peso $w=0.30$	117
Tabla 5.8. Medidas de dispersión de la energía de deformación elemental.....	119
Tabla 6.1. Constantes del material y características geométricas iniciales del problema de optimización.....	123
Tabla 6.2. Factores considerados durante el proceso de optimización.....	124
Tabla 6.3. Energía de deformación y masa de los diferentes prototipos obtenidos.....	125

Resumen

Tradicionalmente el proceso de diseño estructural es realizado por un conjunto de especialistas. Este equipo está formado por un diseñador, quien determina las cargas estáticas, dinámicas y térmicas a las que estará sujeto el prototipo; un experto en materiales el cual determina la relación entre la microestructura y las propiedades del material, que son cruciales para modelar de manera realista la fractura y el progreso del daño en el material; y un analista de elemento finito quien se encarga de realizar la simulación de elemento finito del prototipo y determina las posibles zonas que pudieran presentar fractura. En la pasada década esta metodología ofreció buenos resultados, sin embargo es necesario el desarrollo de una herramienta que logre una sinergia de la información obtenida de los especialistas hacia un diseño óptimo. Dicha herramienta ayudaría a satisfacer las exigencias de la industria, pues aunque la experiencia de los especialistas pueda determinar una solución que cubra las necesidades, rara vez el diseño óptimo es alcanzado.

En este trabajo se formuló la hipótesis para generar un modelo que relacione el proceso de manufactura con las microestructuras generadas y las propiedades que puede presentar un material que fue tratado térmicamente (recocido). Este modelo presenta las características necesarias para ser incorporado en el problema de optimización de estructuras de espesor variable, el cual considera por medio de este modelo que diferentes zonas de la estructura pueden presentar diferentes límites de cedencia. La teoría detrás de esta suposición considera que diferentes cantidades de calor son suministradas en las diferentes zonas que conforman la estructura, obteniendo diferentes características microestructuras en las diferentes zonas de la estructura.

La solución al problema de estructuras de espesor variable, se obtuvo por medio de la función Lagrangiana y de las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker, y por medio de las condiciones de regularidad de Abadie-modificadas para las restricciones, con las cuales se pudo establecer que la solución propuesta corresponde a un punto mínimo local.

La implementación de la solución en el algoritmo de optimización de los autómatas celulares híbridos (HCA) proporcionó prototipos con una masa y energía de deformación menor al prototipo inicial. Las variables de diseño consideradas fueron los diferentes espesores que conforman el prototipo; y la energía de deformación de cada autómata celular (CA) fue utilizada como variable de estado.

Introducción

La creciente exigencia en la industria de generar diseños más ligeros y con mayores propiedades estructurales sin dejar de lado el costo, calidad y tiempo de producción, han originado la necesidad de desarrollar nuevas herramientas que ayuden a los ingenieros a tomar decisiones que agilicen el proceso de diseño. Estas herramientas son conocidas como técnicas de diseño óptimo estructural, y su objetivo es el de determinar diseños que minimicen o maximicen una medida de desempeño de la estructura, mientras se satisfagan restricciones establecidas por el diseñador (volumen máximo, masa, esfuerzos máximos, etc.). Estas herramientas permiten reducir el tiempo del proceso de diseño y contribuyen a generar diseños superiores a los logrados con los métodos tradicionales. Sin embargo la incorporación de restricciones de diseño más complejas como las originadas por limitantes en procesos de fabricación, junto con la incapacidad de considerar parámetros de proceso los cuales pueden maximizar las propiedades del material, limita el uso de estas técnicas.

En un material las diferentes propiedades que este puede presentar están relacionadas con su volumen elemental representativo (RVE), el cual es consecuencia del proceso de manufactura y/o tratamiento térmico al que es sometido. Para poder incorporar los parámetros de proceso a las técnicas de optimización estructural es necesario poder establecer una relación entre las variaciones de las propiedades del material a diferentes parámetros del proceso, y la incorporación de estos parámetros permitiría obtener resultados más confiables y al mismo tiempo reduciría el post-procesamiento de los resultados.

Este trabajo propone una metodología para generar el modelo proceso de manufactura-microestructura-propiedades, el cual puede ser incorporado a la técnica de optimización estructural. La incorporación de este modelo a la técnica de optimización estructural de los autómatas celulares híbridos permitirá determinar la distribución óptima del material, y el modelo microestructura-propiedades definirá las características mecánicas del material.

Justificación

Tradicionalmente el proceso de diseño y el proceso de mejora de un diseño se centran en el diseñador, el cual determina el material, evalúa el volumen del diseño, entiende las cargas estáticas, dinámicas y térmicas que actúan en el elemento. Posteriormente este es auxiliado por un experto en materiales y un experto en método del elemento finito, los

cuales recopilan la información necesaria la cual posteriormente converge hacia el diseñador de manera sintetizada, y basándose en esta información el diseñador define el prototipo del diseño. Este proceso de diseño puede llegar a ser bastante complejo debido a que muchas suposiciones deben ser hechas para desarrollar modelos que puedan ser sujetos a análisis bajo diversos métodos (teorías simplificadas de resistencia de materiales, métodos numéricos como método del elemento finito (MEF), etc.) [1]. Muchas posibilidades, consideraciones y factores (concentraciones de esfuerzos, consideraciones de desgaste, temperatura, fricción, etc.), deben ser tomados en cuenta durante la fase de formulación del problema. Actualmente las consideraciones económicas y las técnicas de fabricación son algunos de los principales retos que los ingenieros deben enfrentar, pues un diseño eficiente de bajo peso y costo que no comprometa la calidad del elemento estructural es siempre buscado por los diseñadores. Sin embargo, satisfacer estos requerimientos es una tarea complicada y aunque la experiencia de los ingenieros pueda encontrar soluciones, rara vez la solución óptima podrá ser alcanzada. Con el fin de optimizar el diseño y cumplir con los requisitos anteriormente mencionados, los ingenieros han desarrollado métodos de optimización estructural, los cuales permiten desarrollar prototipos estructurales que presenten una distribución de material óptima capaz de transmitir la o las cargas de la mejor manera a los soportes de la estructura y que al mismo tiempo cumpla con los requisitos especificados por el diseñador.

En los últimos años la optimización estructural ha empezado a ser una herramienta muy aceptada en aplicaciones industriales, tales como la manufactura de aviones y automóviles [2]. Lo anterior se debe a que esta permite reducir el peso y optimizar el desempeño de las estructuras considerando solamente las cargas aplicadas, las condiciones de soporte de la estructura y las restricciones propias del diseño, tales como restricción en volumen de la estructura, o restricción de áreas sólidas o agujeros prescritos dentro de la estructura.

Actualmente se han desarrollado una gran cantidad de trabajos y herramientas computacionales relacionados con la optimización estructural, las cuales ayudan al diseñador a tomar decisiones en el proceso de diseño haciéndolo más eficiente. Estas herramientas están conformadas en su mayoría por un módulo de optimización y un módulo de análisis, en donde el módulo de análisis determina la respuesta estructural a pequeños cambios en el diseño y el módulo de optimización calcula el cambio en el diseño estructural que mejore la respuesta estructural. Sin embargo gran cantidad de los resultados obtenidos por estas herramientas deben de ser post-procesados debido a que muchas de las restricciones reales no han sido consideradas en la optimización estructural, limitando de esta manera los resultados obtenidos.

La incorporación de los parámetros del proceso de manufactura al problema de optimización permitiría obtener resultados más confiables, y al mismo tiempo reduciría el tiempo de análisis del post-procesamiento de los resultados. Teniendo en cuenta que el comportamiento de un material depende fuertemente del tamaño, forma y distribución espacial de sus constituyentes micro-estructurales, y que estos a su vez son producto de los parámetros del proceso, es necesario desarrollar una función que dependa de los parámetros del proceso de manufactura. La función a desarrollarse debe permitir determinar las propiedades mecánicas del material una vez que este ha sido procesado, con la cual se podrá crear una relación entre las características micro-estructurales que presenta el material y las propiedades mecánicas.

Esta función podría ser utilizada posteriormente en el proceso de optimización de la estructura, de esta manera se podría generar una relación indirecta entre las características micro-estructurales y el diseño optimizado, obteniendo un diseño que esté optimizado bajo el criterio de un modelo proceso de manufactura-microestructura-propiedades. Sin embargo la incorporación de estos parámetros al problema de optimización por medio de restricciones es compleja debido a la no linealidad de los parámetros de cada proceso de manufactura y al comportamiento complejo de las características microestructurales bajo los diferentes procesos de manufactura.

Este trabajo propone una metodología de optimización del diseño estructural basado en la mejor distribución de material y en la integración de las características microestructurales y su efecto en las propiedades del material. La optimización topológica permitirá encontrar la distribución óptima del material considerando a un modelo proceso de manufactura-microestructura-propiedades como variable implícita en el diseño. La aplicación de esta metodología tiene como objetivo la obtención de un prototipo estructural el cual presente un mínimo peso y una máxima rigidez para un estado de cargas dado.

Objetivos

El objetivo general de este trabajo es el desarrollo de una herramienta computacional que permita a los diseñadores obtener un prototipo el cual esté optimizado bajo los criterios de sus características microestructurales. Este trabajo se puede dividir en dos partes.

La primera parte consiste en la generación de un modelo que basándose en variables de proceso pueda predecir propiedades mecánicas. Los objetivos dentro de esta sección son:

- Identificación de los parámetros de manufactura que afectan el desempeño del material.
- Identificación de las diferentes microestructuras que puede presentar el material y su influencia en las propiedades del mismo.
- Generación del modelo procesos de manufactura-microestructuras-propiedades.

La segunda parte de este trabajo tiene como objetivo minimizar el peso y maximizar la rigidez de estructuras, considerando que la estructura no alcance el máximo esfuerzo permisible del material. Los objetivos particulares de esta sección son:

- Selección del algoritmo de optimización el cual permita implementar el modelo generado.
- Formulación del modelo matemático de optimización de estructuras de espesor variable.
- Establecer las condiciones de optimalidad de los diferentes casos estudiados.
- Implementación de las condiciones de optimalidad al código de optimización seleccionado.
- Generación de prototipos que reduzcan la masa y la energía de deformación para un estado de cargas dado.
- Análisis de los prototipos generados.

Estructura de la tesis

Este trabajo de tesis está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 1 se desarrolla la metodología necesaria para generar el modelo proceso de manufactura-microestructura-propiedades (PM-M-P), para los aceros inoxidables ferríticos 430 y AISI 301. En el capítulo 2 se presenta una breve revisión de los métodos de optimización

disponibles. Se muestra la formulación matemática del problema de optimización de estructuras de espesor variable y la manera como podría ser incorporado el modelo PM-M-P. Se establecen las condiciones de optimalidad necesarias para minimizar la energía de deformación y la masa del problema estructural formulado. Se determinan las condiciones de regularidad de las restricciones del problema de optimización necesarias para respaldar la solución como un punto mínimo local. En el capítulo 3 se presenta el algoritmo de optimización de los autómatas celulares híbridos (HCA), así como la forma de incorporar las condiciones de optimalidad a esta metodología de optimización. En el capítulo 4 se establecen las características involucradas en el algoritmo de los HCA que afectan el proceso de optimización y se determinan los objetivos que tienen que cumplir los prototipos generados. En el capítulo 5 se establecen los tipos de problemas analizados en este trabajo. Se evalúan las diferentes técnicas de control y vecindarios elementales involucrados en el proceso de optimización. Se definen los parámetros de evaluación a ser usados en los prototipos generados. La parte final del capítulo detalla la metodología utilizada para determinar los mejores factores involucrados en el proceso de optimización que minimice la energía de deformación y/o la masa de una estructura. El capítulo 6 utiliza la metodología descrita en el capítulo 5 para generar y evaluar un prototipo el cual considera un espacio de diseño con regiones libre de material. Finalmente se presentan las conclusiones obtenidas del desarrollo del presente trabajo de maestría, así como propuestas de trabajo futuro.

Capítulo 1

Fundamentos y consideraciones del modelo del material

1.1 Introducción

Matemáticamente el propósito de las ecuaciones constitutivas es establecer conexiones entre las variables primarias (p. ej. deformaciones, temperatura) y secundarias (p. ej. esfuerzos, calor) de los campos cinemático, térmico y mecánico de un cuerpo. Sin embargo, desde el punto de vista del proceso de diseño estas ecuaciones cubren la necesidad de cálculo para demostrar que la pieza o elemento mecánico existente es capaz de soportar las fuerzas y/o momentos externos a los cuales va estar sometida. Las ecuaciones constitutivas son modelos matemáticos del comportamiento de un material, el cual es validado por medio de los resultados experimentales.

1.2 Microestructura-propiedades

La relación esfuerzo- deformación de un sólido a un nivel macro es representada por las ecuaciones constitutivas, donde las discontinuidades y heterogeneidades microestructurales que el sólido pudiera presentar, son consideradas dentro de la rigidez efectiva del material como un promedio homogenizado de las propiedades presentes en el sólido. Actualmente es bien sabido que el tipo, distribución, cantidad, tamaño, orientación y forma de las diferentes fases y defectos presentes en la micro-estructura de un material determina su comportamiento, el cual por consiguiente afecta directamente el desempeño del diseño (ver Fig. 1.1).

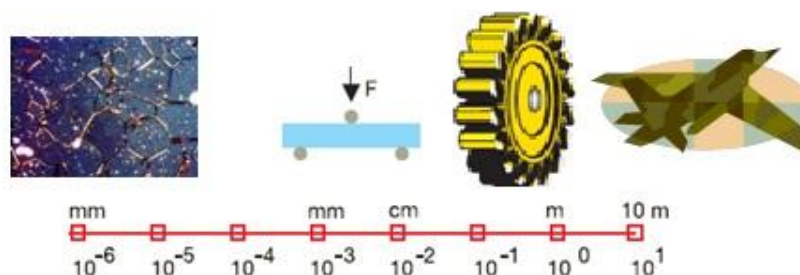


Fig. 1.1. Relación micro-estructura –desempeño estructural.

La microestructura, características físicas, prototipo y diseño final son las diferentes etapas jerárquicas para desarrollar aplicaciones innovadoras en el diseño estructural. Sin embargo, la relación existente entre las propiedades físicas y la microestructura son el primer eslabón esencial en la obtención de un diseño innovador. Un análisis de la microestructura (ME) así como la respuesta que el material experimente bajo los diferentes RVE (elementos de volumen representativos) que pudieran presentar el material consecuencia del proceso de manufactura y/o tratamiento térmico son fundamentales para lograr un óptimo comportamiento del material, pues incrementar el ahorro de masa manteniendo los requerimientos de seguridad es una demanda que á cobrado especial relevancia en los últimos años [3]. Debido a esto numerosos investigadores han variado la microestructura de los materiales y sus aleaciones, como la del aluminio [4], [5] y acero inoxidable [6], [7] por mencionar algunos. Por medio de la variación de los tratamientos de calor y condiciones termo-mecánicas se ha tratado de correlacionar la microestructura con las propiedades mecánicas. Existen registros donde la comparación de la microestructura contra propiedades, han arrojado algunas relaciones, por ejemplo conforme el espesor de las fases alfa se incrementa el límite de cedencia también lo hace para el caso de algunas aleaciones de titanio [8]. Sin embargo las relaciones entre la microestructura y las propiedades no pueden ser generalizadas por medio de simples tendencias adquiridas al comparar las diferentes microestructuras [9].

Pese a que los procesos de manufactura modifican la micro-estructura del material durante el proceso de la obtención de la pieza o elemento mecánico, este trabajo se enfoca en los efectos que tienen los procesos térmicos en las propiedades mecánicas del material. Esto se debe principalmente a que las variables de control (temperatura, tiempo de exposición) en los procesos térmicos son más fáciles de manipular que los parámetros utilizados en los procesos de manufactura convencional. Este trabajo considera acero inoxidable laminado en frío, y el objetivo de la siguiente sección es desarrollar una metodología que permita establecer las diferentes propiedades mecánicas del material bajo diferentes variaciones de las variables de proceso.

1.3 Acero Inoxidable

El acero inoxidable es definido como una aleación que contiene un mínimo de 10.5% de Cr con o sin otros elementos, y con el cual se pueden producir aceros inoxidables austeníticos, ferríticos, dúplex (ferríticos- austeníticos), martensíticos y endurecidos por precipitación, los cuales se pueden apreciar en la Tabla 1.1. En este proyecto de tesis se

consideraron los aceros inoxidable ferríticos 430 y AISI 301 austenítico, debido a la gran cantidad de información que existe acerca de estos materiales.

Tabla 1.1. Propiedades mecánicas de los distintos aceros inoxidables.

TIPOS DE ACERO INOXIDABLE		
Tipo	Propiedades mecánicas	
	R. a la fluencia (MPa)	R. última (MPa)
Austenítico	200-380	500-800
Ferrítico	275-600	450-700
Duplex	315-565	590-740
Martensítico	275-1900	530-2000
Endurecido por precipitación	1200-1800	1380-1900

1.3.1 Proceso de Producción

El proceso de fabricación de láminas de acero inoxidable se puede dividir en tres etapas. La primera etapa se lleva a cabo debido a que los lingotes a ser procesados tienen un tamaño de grano de forma alargada producto del anterior proceso de formado, por lo que el material presenta un estado frágil para poder procesarlo, debido a esto el material es calentado en un rango de temperatura de entre 705°C -790°C en un horno continuo, para evitar una transformación de fase. Debido a que la fase hierro alfa (ferrita) presente en el acero inoxidable ferrítico tiene mejores propiedades mecánicas comparadas con otros tipos de fases presentes en este material, el rango de temperaturas usadas evitará la formación de cualquier otra fase. Una vez obtenida la re-cristalización del material en los hornos de campana, se asegura un 100% de granos equiaxiados (mismo tamaño en todas las direcciones) con lo cual finaliza la primera etapa.

En la segunda etapa, el material primeramente se somete a un proceso de laminación en frío, en el cual pasa por una serie de rodillos laminadores con los cuales se va reduciendo gradualmente el espesor del material hasta alcanzar el deseado. La reducción en el espesor de los lingotes procesados (6, 4, 3mm) va desde un 50% hasta un máximo de 90%. Una vez alcanzado el valor del espesor deseado en la lámina, se procede a la tercera etapa donde nuevamente el material es calentado a una temperatura de entre 705°C-790°C. En la práctica debido a que el horno se utiliza para diferentes materiales que necesitan

diferentes rangos de temperatura se establece una temperatura de 970°C constantes y se varía el tiempo de exposición, dependiendo del material y del espesor que presente. Finalmente, de igual manera que en la primera etapa, el material se somete a un proceso de recocido para obtener re-cristalización del 100% en el material, con lo que se asegura recuperar las buenas propiedades mecánicas del mismo.

1.3.2 Composición química y parámetros de producción del Acero Inoxidable ferrítico 430 y AISI austenítico 301.

El acero inoxidable ferrítico 430 contiene un máximo de 0.12%C, 1.00%Mn, 1.00%Si, 16.0-18.0%Cr y 0.04%P, sin embargo estos valores son considerados ideales. La composición química del acero inoxidable ferrítico 430 presente en las muestras que se utilizaron así como las variaciones más notables que presentan se pueden observar en la Tabla 1.2. En esta Tabla los dos primeros casos muestran una variación de la resistencia a la tensión notable, lo cual puede ser atribuida a las diferencias existentes entre los valores de los componentes químicos, los casos tres y cuatro muestran una resistencia a la fluencia similar, a lo que se puede apreciar que los componentes químicos de estos son muy parecidos.

Tabla 1.2. Composición química del acero ferrítico 430 laminado en frío.

Espesor	Tensión	Vel.	S	C	Cu	Cr	P	Mn	Mo	Ni	N	Si
mm	MPa	m/min										
1.20	462	44.6	0.001	0.041	0.250	16.160	0.035	0.260	0.025	0.210	0.036	0.220
1.20	544		0.001	0.053	0.280	16.290	0.030	0.260	0.025	0.210	0.043	0.430
1.20	487		0.001	0.048	0.400	16.010	0.026	0.250	0.025	0.330	0.042	0.220
1.20	468		0.001	0.043	0.250	16.170	0.027	0.280	0.020	0.200	0.043	0.220

La composición química del acero inoxidable AISI 301 se aprecia en la Tabla 1.3. El material fue producido por medio de fundición continua y sujeta a un rolado en caliente, posteriormente recibió un tratamiento térmico, para después ser laminado en frío [6].

Tabla 1.3. Composición química del acero austenítico AISI 301 austenítico [1].

C	Cr	Ni	N	Mn	Si	Mo
0.096	16.7	6.6	0.0635	1.23	1.18	0.72
P	Cu	Co	S	D	Y	Fe
0.26	0.17	0.11	0.001	0.0031	0.005	Balanceado

La información anteriormente mencionada junto con las diferentes variables que afectan el proceso desde la etapa dos, pueden ser utilizadas para generar un modelo microestructura-propiedades. Dado que en la etapa uno el material siempre es tratado térmicamente hasta que alcanza el 100% de re-cristalización en la microestructura. Las variables que se consideraron son: composición química del material (10 componentes), porcentaje de reducción del espesor (intensidad del trabajo en frío), velocidad del material en el horno (temperaturas y tiempo de exposición) y espesor final del material. Para efectos prácticos, las variables anteriormente mencionadas serán consideradas como variables de entrada (ver Tabla 1.4).

Tabla 1.4. Variables de entrada en el proceso de laminado en frío del acero ferrítico 430

ESP. mm	Red. %	COMPOSICIÓN QUÍMICA								
		S	C	Cr	P	Mn	Mo	Ni	N	Si
0.40	90	0.001	0.050	16.17	0.035	0.25	0.025	0.24	0.040	0.31
0.60	90	0.001	0.040	16.10	0.030	0.32	0.050	0.39	0.043	0.24
0.60	90	0.001	0.038	16.09	0.029	0.32	0.025	0.20	0.045	0.28
0.96	87.5	0.001	0.041	16.08	0.030	0.27	0.035	0.23	0.045	0.27
0.96	87.5	0.001	0.042	16.25	0.032	0.38	0.025	0.18	0.041	0.24
0.96	87.5	0.001	0.043	16.20	0.019	0.32	0.030	0.40	0.044	0.28
0.96	80	0.001	0.040	16.13	0.027	0.27	0.020	0.17	0.043	0.22
0.96	80	0.001	0.038	16.09	0.026	0.31	0.021	0.16	0.048	0.23
1.00	80	0.001	0.046	16.16	0.029	0.30	0.045	0.30	0.042	0.33
1.00	83.75	0.001	0.040	16.07	0.027	0.24	0.050	0.19	0.044	0.29

El análisis de la información también deberá contemplar las propiedades mecánicas obtenidas al final del proceso, como son la resistencia máxima a la tensión, límite elástico y porcentaje de alargamiento, las cuales serán consideradas como datos de salida (ver Tabla 1.5).

La metodología propuesta para modelar las propiedades mecánicas del material es generar el modelo a partir de curvas experimentales las cuales consideren las propiedades mecánicas del material para diferentes espesores y tratamientos térmicos (ver Fig. 1.2).

Tabla 1.5. Variables de salida en el proceso de laminado del acero inoxidable ferrítico 430.

	Propiedades mecánicas			
Muestra	DUREZA	TENSIÓN	FLUENCIA	ALARG.
#	HRB	MPa	MPa	%
1	73	516	356	32
2	76	536	338	27
3	78	513	340	28
4	77	503	319	30
5	76	513	340	28
6	80	545	362	29
7	77	525	329	27
8	75	538	333	28
9	79	534	365	30
10	76	510	348	28

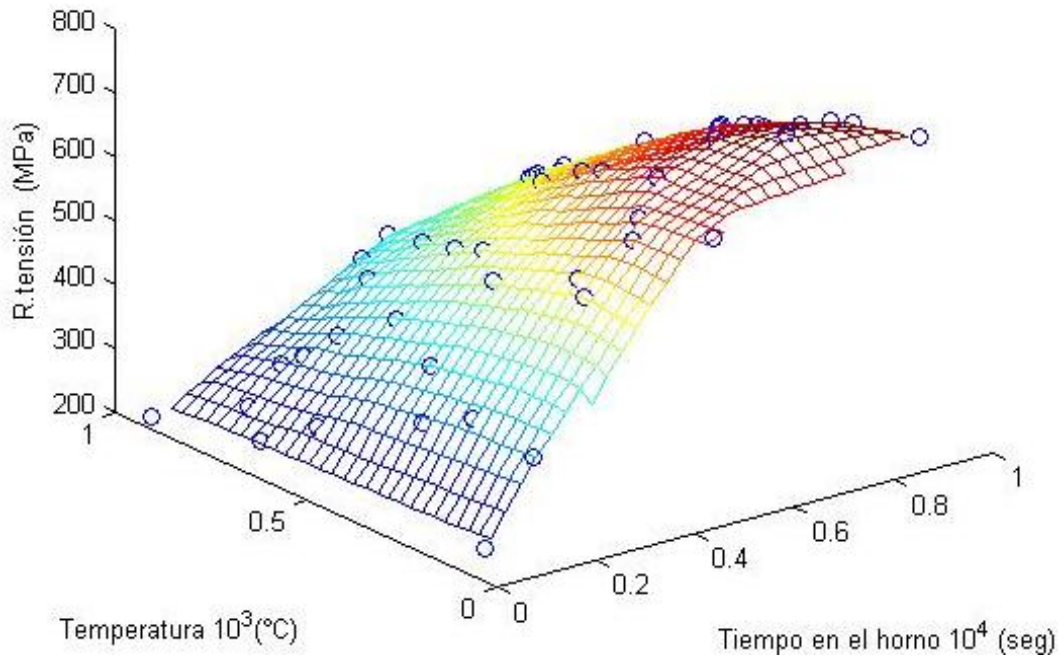


Fig. 1.2. Propuesta que genera el modelo por medio de un ajuste de superficie a los datos.

La recristalización del grano y la disolución o formación de las diferentes fases e inclusiones que puede presentar el material consecuencia del proceso térmico al cual será sometido el material. La Tabla 1.6 muestra las diferentes propiedades mecánicas que puede presentar el acero inoxidable 430, y en la Fig. 1.3 se muestran las diferentes microestructuras que se pueden presentar según la variación del proceso térmico.

Tabla 1.6. Propiedades mecánicas del acero inoxidable 430

No. de muestra	R. Tensión	R. Fluencia
#	MPa	MPa
A_430	520	344
B_430	522	342
C_430	684	569
D_430	678	532
E_430	500	342

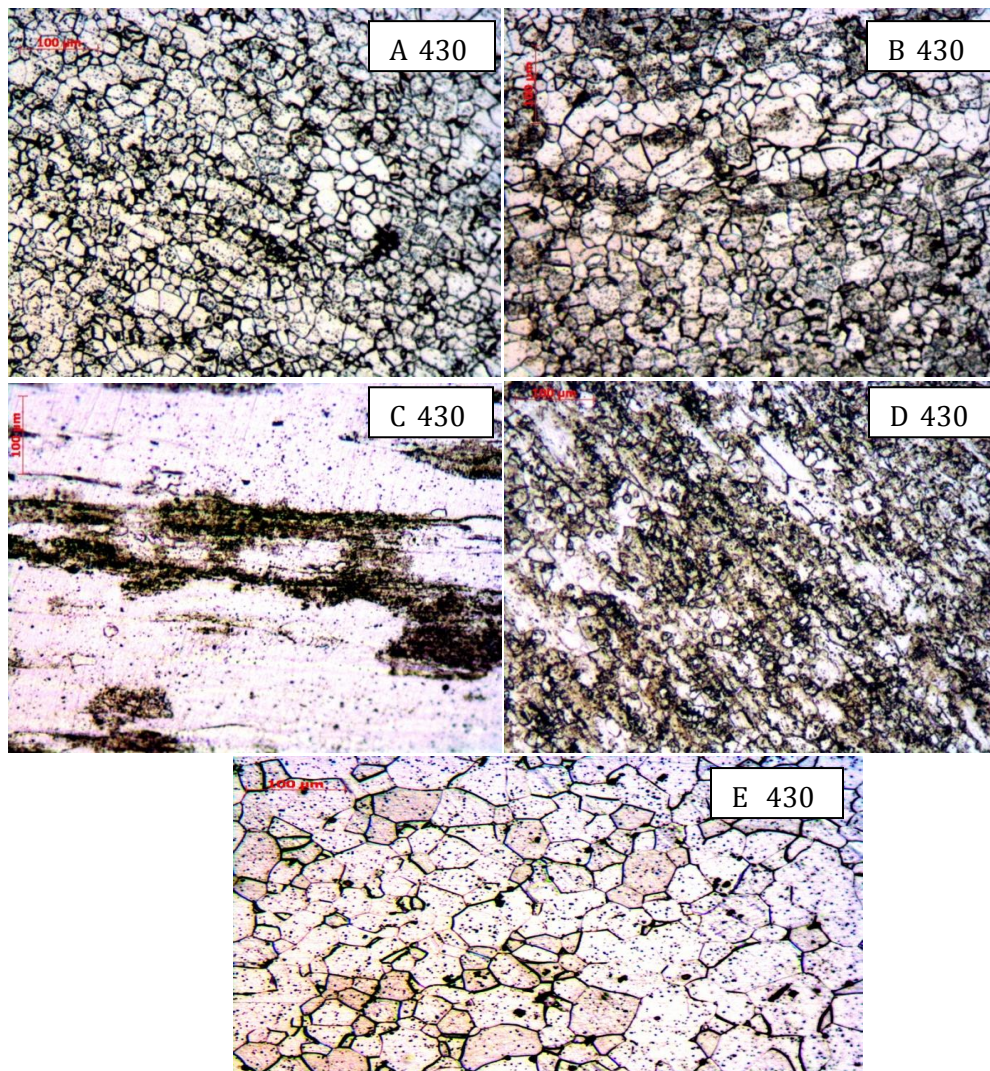


Fig. 1.3. Microestructuras de las muestras de la Tabla 1.7 del acero inoxidable 430.

La diferentes pruebas de recocido se pueden lograr ya sea por medio de métodos tradicionales, o por métodos más novedosos como los utilizados por Johannsen, A.

Kyrolainen [6], donde la obtención de las diferentes microestructuras se lleva a cabo por medio de un proceso de recocido laser, esta metodología pueden lograr la obtención de diferentes microestructuras en diferentes las regiones del material (ver Fig. 1.4).

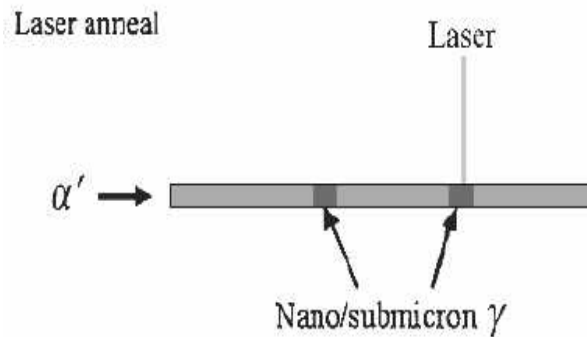


Fig. 1.4 Proceso de recocido laser puede producir diferentes microestructuras en diferentes zonas del material [6].

De esta manera se puede obtener una función de aproximación que se ajuste a los datos. La función de aproximación obtenida puede fácilmente adaptarse al código de optimización desarrollado. En la siguiente sección se explicará más a fondo como se implementaría este modelo al código de optimización.

1.3.3 Características de los Aceros Inoxidables

Tanto los aceros inoxidables ferríticos, así como los aceros inoxidables austeníticos son frecuentemente utilizados en aplicaciones cuando se necesita una buena resistencia a la corrosión y las consideraciones estéticas son importantes, esto incluye aplicaciones sofisticadas como en vehículos espaciales y materiales de construcción [3],[10]. Los aceros inoxidables austeníticos que presentan la sola fase austenita pueden ser endurecido por medio de la deformación en frío, trasformando la fase en ferrita más carburos. Sin embargo debido a este cambio de fase el material presenta un excesivo endurecimiento. En comparación con los aceros inoxidables ferríticos, estos presentan una menor capacidad de endurecerse por deformación lo cual hace que este material logre el mismo grado de deformación que el austenítico pero sin presentar el mismo grado de esfuerzos [7], lo cual hace al acero ferríticos adecuado para ser utilizado en proceso de deformación en frío. Sin embargo cuando los acero inoxidables son deformados en frío (embutido profundo, estampado, etc.) estos presentan una gran variación en el límite de cedencia y la dureza. La principal causa de esta variación está relacionada con la deformación en frío a la que es sujeta el material, pues durante este proceso las regiones que experimentan la

deformación inducen una transformación de fase. En el caso del acero inoxidable austenítico la fase austenita (γ) se transforma a fase martensita (α), la cual es mucho más resistente en comparación con la austenita. Una solución factible para resolver la variación de la resistencia a la fluencia asociada al proceso de deformación en frío en estos materiales no ha sido lograda satisfactoriamente, principalmente porque en el caso de los aceros inoxidables austeníticos la formación y deformación de la martensita se produce en zonas donde la alta resistencia no es requerida. Por otro lado en regiones donde la alta resistencia es requerida, las zonas no están sujetas a deformación, permaneciendo la austenita blanda en estas regiones. En estas zonas blandas de austenita el material puede ser fácilmente rallado, aboyado o deformado en servicio, además de que sus propiedades contra la corrosión se ven seriamente deterioradas [6].

Una posible solución a las limitaciones mencionadas es la utilizada por D.L. Johannsen, A. Kyrolainen [6], la cual es desarrollar láminas de acero austenítico rolado en frío las cuales contengan regiones con grano austenítico con un tamaño nano o micro, por lo que el material presentara una alta resistencia y una alta formabilidad, mientras que la lámina a un nivel microestructural presentará una fase martensita fuera de estas regiones. Utilizando este concepto, una lámina de acero austenítico puede ser producida de tal manera que las regiones sin deformación mantengan la resistencia y dureza de la martensita, mientras que las regiones deformadas presenten una mayor resistencia y dureza debido al refinamiento del grano austenítico producido en estas regiones [6]. En particular la idea consiste en un rolado en frío de una lámina de acero austenítico AISI 301 con una reducción del 90 % de su espesor para inducir la formación de martensita. A esto le sigue un tratamiento local de recocido en un rango de temperaturas de 600°C a 900°C para lograr la nucleación y la formación de la fase austenita en las zonas específicas. Antes de someter el material a la deformación en frío, el tamaño de grano obtenido por este método es menor a 1 micra por lo que es posible controlar de manera local el tamaño nano/submicro del grano y por consecuencia la resistencia del material antes del formado.

Las propiedades mecánicas del acero austenítico presentado por Johannsen y Kyrolainen [6] son mostradas en la Fig. 1.5. Esta gráfica considera un rango de temperaturas de 600°C a 900°C, un tiempo de exposición de 30 min para un material rolado en frío con una reducción de 90%. En la Fig. 1.6 se puede apreciar que el tamaño de grano cumple con el comportamiento habitual, de modo que a mayor tamaño de grano según norma ASTM, se tiene mayor límite elástico y resistencia a la tracción, y menor alargamiento [11] (ver Fig. 2.6). Yoshitaka Okitsu y Naoki Takata [7] utilizan un principio similar para lograr propiedades mecánicas superiores en el acero inoxidable que contengan las fases ferrítico-martensíticos.

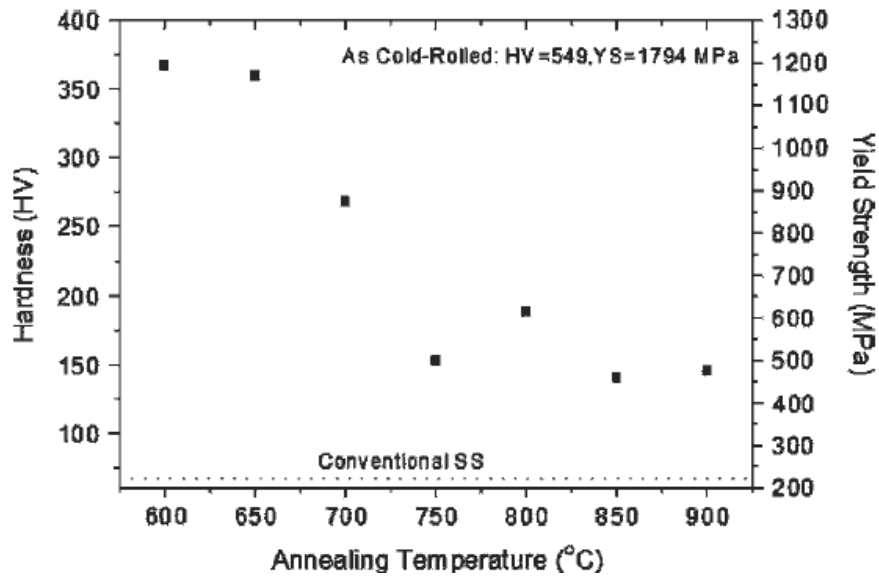


Fig. 1.5. Rangos de resistencia a la tensión y dureza variando Johanssen, A. Kyrolainen [6].

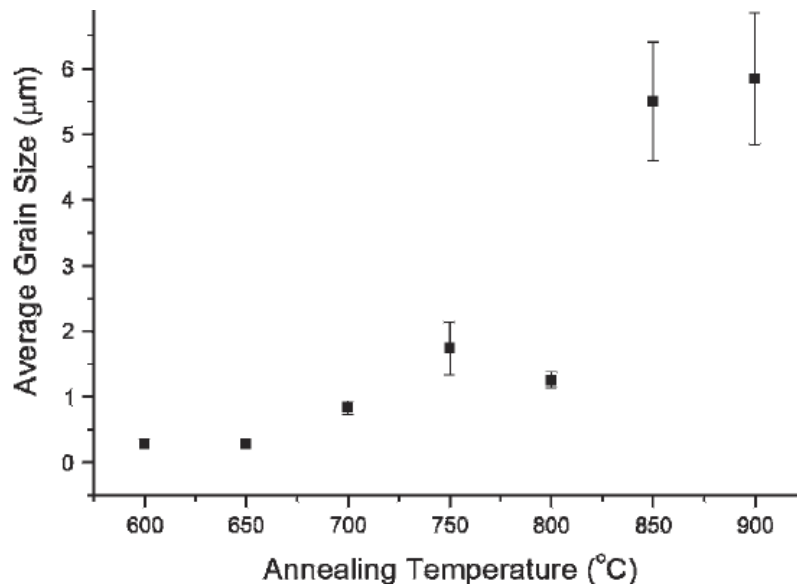


Fig. 1.6. Tamaño de grano del acero austenítico AISI 301 recocido. Johanssen, A. Kyrolainen [6].

En su trabajo Okitsu y Takata mejoran las propiedades mecánicas por medio de un grano ultra fino ferrítico, el cual es generado por medio de la deformación en frío y tratamientos térmicos de recocido con temperaturas de entre 620-700°C. Los resultados presentados por Okitsu y Takata muestran que cuando el tamaño de grano de la ferrita se incrementa

con el aumento de la temperatura de recocido, cuando la temperatura alcanza los 700°C una compleja microestructura compuesta de una fina matriz de ferrita, cementita y martensita es formada. Las propiedades mecánicas logradas por estas microestructuras se presentan en la Tabla 1.7.

Tabla 1.7. Resistencia a la fluencia, tamaño de grano y fases presentes en los materiales Okitsu y Takata [7].

Propiedades mecánicas			
Temperatura de recocido	Microestructura	Tamaño de grano promedio	Resistencia fluencia
°C		µm	MPa
620	Ferrita-cementita	0.49	966
635	Ferrita-cementita	0.63	820
655	Ferrita-cementita	0.85	672
700	Ferrita-cementita-martensita	1	753

La idea que nos presentó Johannsen y Kyrolainen [6], y Okitsu y Takata [7] puede ser aplicada a la optimización de estructuras de espesor variable, por medio de la implementación de un modelo o relación que permita establecer el límite de cadencia del material con el espesor y la temperatura de recocido a la cual se obtiene la formación de austenita en el caso de acero inoxidable AISI 301, o la formación de ferrita-cementita para los aceros inoxidables ferríticos 430. Dentro del diseño de estructuras de espesor variable se puede implementar un control de la resistencia a la fluencia en las regiones donde se necesite dicha variación. Esto involucra que las estructuras presentarán un conjunto de espesores los cuales presentarán límites de cedencia específicos para cada zona de la estructura, controlando de esta forma en las distintas zonas los espesores mínimos que cubran con los requerimientos de diseño. Lo anterior permitirá un ahorro de masa en las regiones que no necesiten presentar una resistencia preferente, en comparación con algunas otras zonas de la estructura de espesor variable.

Como conclusión se puede establecer que el problema de optimización debe de ser formulado considerando que las restricciones de esfuerzo cambian con respecto al espesor que la estructura presente en sus diferentes regiones. En el siguiente capítulo se desarrollará más esta idea y se propondrá una metodología para que la formulación del problema de optimización de estructuras de espesor variable pueda acoplar de manera eficiente las variaciones de las restricciones de esfuerzo una vez que se hayan

determinado eficientemente las variaciones del punto de cedencia de los aceros austeníticos AISI 301 y ferríticos 430.

Capítulo 2

Modelo matemático de optimización estructural

2.1 Introducción

En este capítulo se introducirán los conceptos más básicos relacionados con la optimización, así como también una breve revisión de los métodos de optimización disponibles. Usualmente los problemas de optimización están caracterizados por una función objetivo y varias restricciones. En muchos casos incluso la formulación de estos simples requerimientos requiere de un conocimiento profundo de las estrategias utilizadas en el campo de la optimización. Sin embargo en el presente capítulo solo se discutirán los conceptos fundamentales para el entendimiento de la teoría desarrollada durante el proceso de obtención del modelo de optimización de estructuras de espesor variable. Otro punto crucial dentro de la optimización son las variables de diseño, pues la estrategia de optimización matemática a utilizar es determinada no solo por el tipo de variable, sino también por el número de variables de diseño implicadas en la formulación del problema y por la diferenciabilidad de la respuesta de las funciones implicadas en la formulación del problema.

2.2 Formulación estándar del problema de optimización

Un problema de optimización estructural estándar presenta las siguientes funciones y variables, por medio de las cuales el problema de optimización puede ser formulado de manera general.

- Función objetivo (f): Es una función usada para juzgar el desempeño del diseño actual. Para cada posible diseño, la función objetivo puede estar formada por varias sub funciones las cuales originan un problema de optimización multiobjetivo. En cualquiera que sea el caso, f tomará un valor numérico que definirá el comportamiento mecánico y/o el desempeño del diseño (rigidez y/o peso, etc.).
- Variables de diseño (x): Este tipo de variables caracterizan las propiedades básicas del problema de optimización estructural, las cuales pueden ser parámetros del material, secciones transversales, parámetros geométricos etc., y son

normalmente representadas por un vector, el cual permite definir el diseño por medio de valores que estas variables tomen.

- Variables de estado (y): Estas variables incorporan una referencia del comportamiento estructural del diseño, por medio de una función o vector que representa una respuesta estructural como desplazamientos, esfuerzo, deformación, etc., con lo que se cuantifica el estado o respuesta estructural en un diseño, necesario para cualquier proceso de optimización estructural.
- Restricciones (g_i, h_j): Existen dos tipos de restricciones dentro de los problemas de optimización, restricciones de igualdad (h_j) y restricciones de desigualdad (g_i), las cuales delimitan el espacio de diseño factible. Las restricciones de desigualdad durante el proceso de optimización pueden estar activas (restricción activa es aquella que evaluada en un punto tiene el valor de cero), inactivas (las restricciones que son evaluadas en un punto y no tienen un valor de cero) o redundante (restricciones que no aportan nuevos límites a las variables de diseño), y las restricciones de igualdad solo pueden estar en un estado activas o redundantes. Una de las características que el problema de optimización debe tener para poder ser resuelto satisfactoriamente es que el número de restricciones activas debe de ser más pequeño o igual al número de variables de diseño.

La formulación del problema de optimización estándar está determinada matemáticamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 & \min_{x,u} f(x, u) && x \in R^n \\
 & s. a . && (2.1) \\
 & g_i(x, u) \leq 0 && i = \{1, \dots, n\} \\
 & h_j(x, u) = 0 && j = \{1, \dots, m\} \\
 & x_{inf} \leq x \leq x_{sup}
 \end{aligned}$$

Donde el conjunto de las variables de diseño está representado por el vector " x ", las variables de estado por el vector " u ", la función objetivo por " f ", la restricción de desigualdad por g_i y la de igualdad por h_j , y los límites inferior y superior que pueden tomar las variables de diseño están determinadas por " x_{inf} " y " x_{sup} " respectivamente.

El problema de optimización es llamado programación lineal si todas las ecuaciones que definen el problema 2.1 son lineales en "x", mientras que si la función objetivo y/o las restricciones contiene partes no lineales se le conoce como programación no lineal.

2.2.1 Mínimo global y mínimo local

El dominio factible que pueden considerar las variables de diseño durante el proceso de optimización difiere de manera notable en un problema de optimización con restricciones y sin restricciones. En muchos casos el problema de optimización mostrado en Ec. (2.1) puede presentar múltiples mínimos locales (ver Fig. 2.1), y donde la existencia de un único mínimo local puede ser asegurado bajo condiciones especiales. Comúnmente el mínimo local y global suele encontrarse en las fronteras de las restricciones activas (ver Fig. 2.2). El mínimo local o mínimo global esta matemáticamente determinado por las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

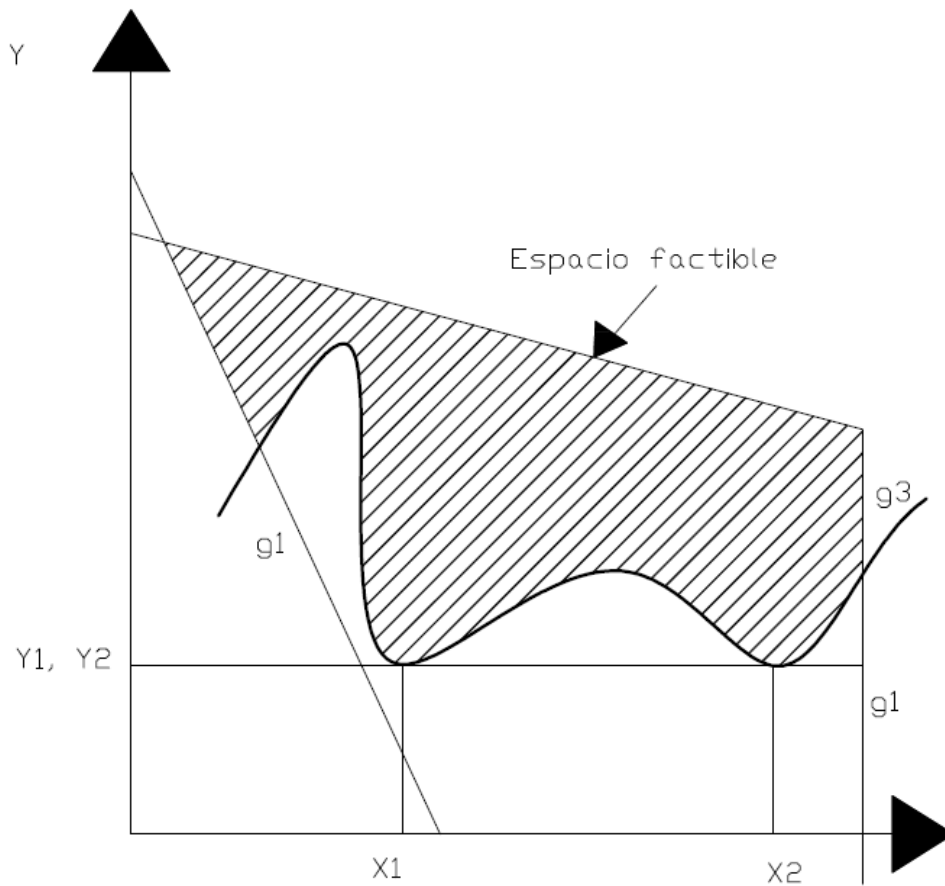


Fig. 2.1. Los múltiples puntos mínimos son comunes en funciones no convexas.

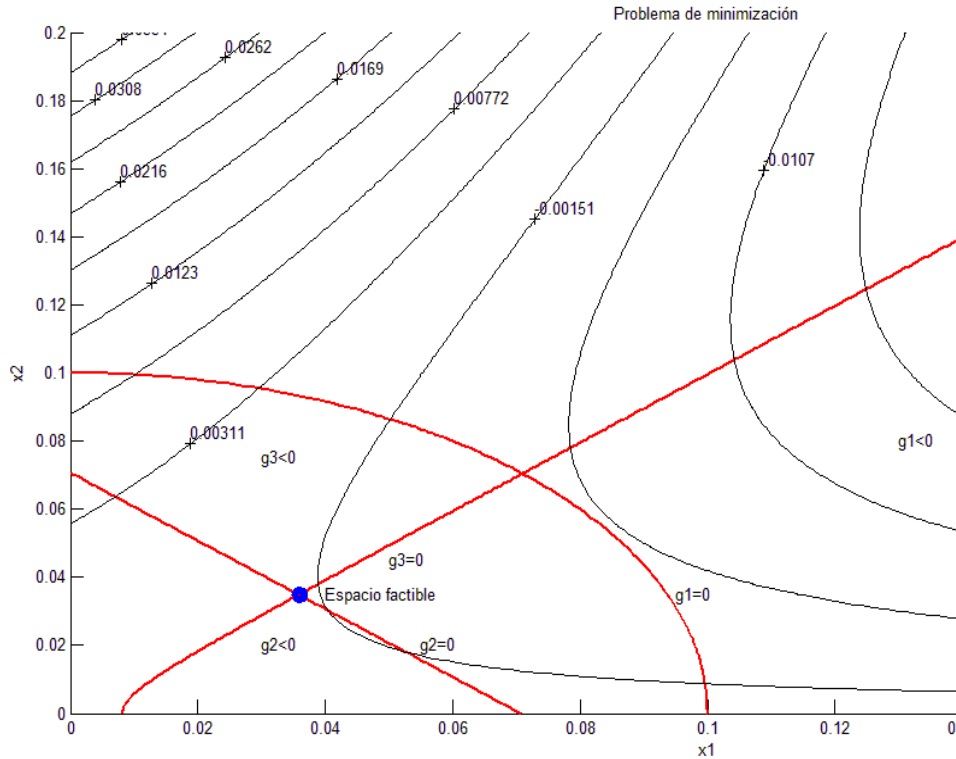


Fig. 2.2 Problema de optimización en un espacio clásico en un espacio bidimensional.

La Fig. 2.2 muestra un problema típico de optimización considerando restricciones de desigualdad " g_2, g_2, g_3 " en la figura se puede apreciar que las curvas de color negro son los valores que puede tomar la función objetivo, se puede apreciar que el valor óptimo es el marcado por el punto azul, en este punto las restricciones g_2, g_3 , están activas.

2.3. Función Lagrangiana

Una manera para reformular el problema mostrado en Ec. (2.1) es por medio de una función Lagrangiana la cual es una función formulada en variables primarias " x " y variables dual, también conocidas como multiplicadores de Lagrange μ, λ [12]. Las condiciones necesarias para que un diseño minimice la función objetivo y al mismo tiempo cumpla con las restricciones del problema de optimización se obtienen por medio de aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange. La formulación general de la función Lagrangiana es la siguiente:

$$L(x, u, \lambda, \mu) = f(x, u) + \sum_{i=1}^g \lambda_i g_i(x, u) + \sum_{j=1}^h \mu_j h_j(x, u) \quad (2.2)$$

$$\lambda_i > 0, \mu_j \neq 0$$

Las derivadas parciales de la función Lagrangiana dada en Ec. (2.2) con respecto a las variables dual y primaria son utilizadas para determinar los máximos y mínimos de la función objetivo. Sin embargo, la aplicación de este método está limitado a puntos regulares del espacio factible (ver Fig. 2.3). Un punto factible es el que satisface todas las restricciones del problema, mientras que un punto es llamado regular o también regular Lagrangiano cuando un punto factible es evaluado en el gradiente de todas las restricciones activas (una restricción es activa en un punto "x" cuando esta tiene un valor de cero), y estas son linealmente independientes. Esta condición es referida como restricción de cualificación linealmente independiente.

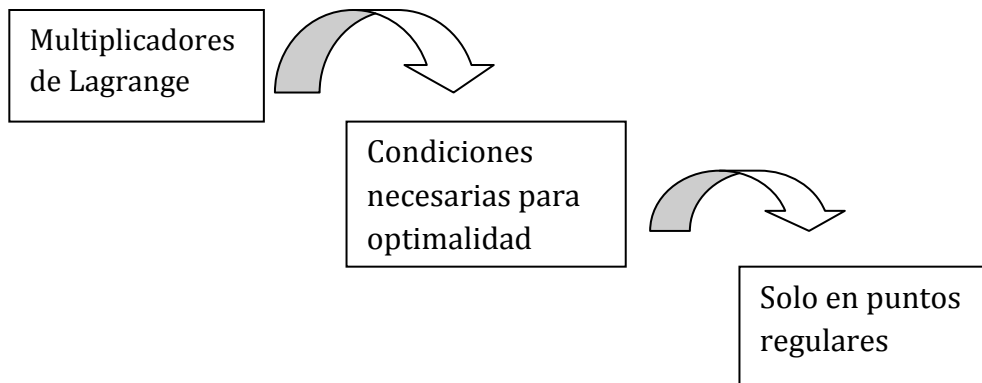


Fig.2.3. Condiciones de optimalidad.

2.3.1 Condiciones de optimalidad Karush-Kuhn-Tucker

Las condiciones de optimalidad KKT definen un punto estacionario para la función Lagrangiana Ec. (2.2) dentro del espacio de diseño factible. Estas condiciones están definidas a partir del gradiente de la función Lagrangiana con respecto a las variables primarias y a los multiplicadores de Lagrange.

$$\nabla_x f(x, u) + \sum_{i=1}^g \lambda_i \nabla_x g_i(x, u) + \sum_{j=1}^h \mu_j \nabla_x h_j(x, u) = 0 \quad (2.3)$$

$$\lambda_i g_i(x, u) = 0 \quad (2.4)$$

$$g_i(x, u) \leq 0 \quad (2.5)$$

$$h_j(x, u) = 0 \quad (2.6)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad (2.7)$$

Las Ecs. (2.4), (2.6) y (2.7) causan que las restricciones estén activas en el punto óptimo, y las restricciones de desigualdad activas están caracterizadas por:

$$\lambda_i \geq 0 \xrightarrow{\text{por lo que}} g_i(x, u) = 0 \quad (2.8)$$

Se debe de tener en cuenta que solo las restricciones activas son consideradas en la función Lagrangiana. El conjunto de restricciones de desigualdad activas junto con las restricciones de igualdad activas no redundantes son necesarias para determinar un punto factible mínimo para la función Lagrangiana. Este conjunto de restricciones son clasificadas como restricciones activas del problema.

2.4 Condiciones de regularidad de las restricciones

Las condiciones KKT son condiciones que garantizan un mínimo local al problema si ciertas condiciones especiales son también satisfechas. Estas condiciones son llamadas condiciones de regularidad de las restricciones, las cuales son una propiedad de los puntos factibles, e impone restricciones adicionales al problema que considere cualquier función no lineal dentro de su formulación [12]. Estas restricciones auxiliares impuestas a la solución del problema cubren la posibilidad de fallo de las condiciones KKT debido a irregularidades en las fronteras del dominio de diseño factible. A continuación se describen brevemente las condiciones de regularidad de las restricciones estándar para el problema de optimización formulado en Ec. (2.1), el cual contiene solamente funciones diferenciables continuas, y en el cual las variables de estado "u" son función de las variables primarias "x", de esta forma se simplifica el problema de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min_x f(x), & \quad x \in R^n \\ \text{s. a.} & \\ g_i(x) \leq 0 & \quad i = \{1, \dots, N\} \\ h_j(x) = 0 & \quad j = \{1, \dots, M\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

En donde las funciones son continuas y diferenciables con respecto a la variable primaria.

$$f(x), g_i, h_i: R^n \rightarrow R \quad (2.10)$$

Donde:

$$\bar{x} := \{x \in R^n | g_i(x) \leq 0 \ (i = 1, \dots, n), h_i(x) = 0 \ (i = 1, \dots, m)\} \quad (2.11)$$

Si se define x^* como el punto óptimo de Ec. (2.9) y suponiendo que se cumplen con las condiciones de regularidad de las restricciones (definidas posteriormente). Es posible demostrar que existen multiplicadores de Lagrange $\lambda_i \in R$ y $\mu_i \in R$ tal que la primera condición de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) se expresa según las Ec. (2.3) a (2.7). Sin embargo esta condición debe además ciertos criterios, los cuales garanticen que las condiciones KKT sean satisfechas en el punto mínimo local x^* . A continuación se muestra una pequeña lista de estos criterios conocidos como condiciones de regularidad estándar de las restricciones.

2.4.1 Condiciones de regularidad de independencia lineal (LICQ)

Estas condiciones de regularidad es la más usada, y se basa en la independencia lineal del gradiente de las restricciones activas dado un punto factible x^* que minimice a la función objetivo definido en Ec. (2.9). La definición matemática de LICQ se puede expresar de la siguiente manera:

Sea x^* un punto factible dentro del espacio de diseño admisible tal que:

$$\{\nabla_x g_i(x)\} \cup \{\nabla_x h_j(x)\} \quad (2.12)$$

sean linealmente independientes.

2.4.2 Condiciones de regularidad Mangasarian - Fromovitz (MFCQ)

Se dice que MFCQ es satisfecha en un punto mínimo local x^* cuando el gradiente de las restricciones de igualdad del problema definido en Ec. (2.9) son independientes, y existe un vector $d \in R^n$ tal que:

$$\nabla_x g_i(x^*)^T d < 0 \ (i: g_i(x^*) = 0), \quad \nabla_x h_j(x^*)^T d = 0 \ (j = 1, \dots, m) \quad (2.13)$$

2.4.3 Condiciones de regularidad de Abadie (ACQ)

Este tipo de condiciones de regularidad de restricción define a un punto factible que minimiza la función objetivo de Ec. (2.9) sí:

$$\tau(x^*) = L(x^*) \quad (2.14)$$

Donde τ es el cono tangente estándar de Ec. (3.9) en x^* :

$$\tau(x^*) := \left\{ d \in R^n \mid \exists \{x\} \subseteq X, \exists \{t\} \downarrow 0: x \rightarrow x^*, \frac{x-x^*}{t} \rightarrow d \right\} \quad (2.15)$$

En la ecuación anterior $L(x^*)$ denota el correspondiente cono linealizado de Ec. (2.9) en x^* [13].

Estas condiciones de regularidad de las restricciones son las más comúnmente utilizadas para la implementación de la solución en problemas de optimización, sin embargo los problemas de optimización estructural consideran muchas veces en su formulación restricciones conocidas como restricciones que se desvanecen [12],[13]. Este tipo de condiciones son comunes cuando se incorporan restricciones de esfuerzos en los problemas de optimización que consideran estructuras continuas y ninguna forma inicial predefinida (optimización topológica) [12]. Estas restricciones de esfuerzo en el contexto de optimización estructural ocasionan singularidades en el problema, pues los esfuerzos o cualquier otra respuesta mecánica no pueden definirse en los puntos donde no existe material, este fenómeno está relacionado con el así llamado optimizadores singulares [12],[13]. La formulación del problema de optimización que considera este trabajo considera restricciones que se desvanecen. En la siguiente sección se presentará la formulación del problema, y se explicarán más a detalle las restricciones que se desvanecen, las cuales están relacionadas con los límites de esfuerzo admisible.

2.5. Optimización Estructural

Las dos vertientes principales dentro de los métodos de optimización estructural son los métodos directos o de búsqueda y los criterios de optimalidad, dentro de los métodos directos se encuentran una gran variedad de algoritmos que tienen la finalidad de encontrar un mínimo global para una determinada función objetivo bajo ciertas restricciones establecidas ya sea por medios determinísticos o estocásticos [14]. Sin embargo la solución determinística del diseño óptimo de una estructura no puede ser obtenida solamente en virtud del carácter heurístico de la misma [15], por lo que técnicas numéricas como el método del elemento finito o teorías simplificadas de resistencia de materiales no podrían definir por si solos un diseño óptimo estructural. Por otro lado las metodologías que utilizan técnicas estocásticas consumen demasiado tiempo y recursos computacionales debido a que están basados en estrategias evolutivas en donde el concepto es remover material de manera gradual hasta alcanzar un diseño óptimo,

basándose en consecuencias locales pero no globales [16]. Los métodos de criterio de optimalidad están basados en técnicas matemáticas las cuales tratan de minimizar el valor de una función por medio de la determinación de un conjunto factible de soluciones al problema de optimización, en donde los parámetros a ser modificados durante el proceso de optimización y que definen el diseño son llamadas variable de diseño, cualquier parámetro que afecte las características del sistema a ser optimizado puede ser seleccionado como variable de diseño. El tipo de algoritmo de optimización matemática utilizada es determinada no por el tipo de las variables de diseño a utilizar si no por el número de las variables de diseño y por la diferenciabilidad que presente la función a optimizar [17]. Las estrategias basadas en los criterios de optimalidad usualmente convergen a una solución más rápida y robusta que los métodos basados en el gradiente u otros métodos matemáticos. Estos métodos de optimización estructural basados en criterios de optimalidad típicamente consisten en un módulo de análisis y un modulo de optimización, el modulo de análisis se encarga de calcular la respuesta estructural de interés para el diseñador del elemento estructural [1], con base en la respuesta obtenida se puede generar un análisis de sensibilidad el cual es utilizado para calcular el cambio en la respuesta estructural frente a pequeños cambios en el diseño, basándose en esta sensibilidad el módulo de optimización calcula el cambio en el diseño que mejorará la respuesta. Este proceso se repite hasta que una prueba de convergencia, junto con la respuesta estructural y el análisis de sensibilidad indiquen que el diseño ya no puede ser mejorado.

2.6 Tipos de problema de optimización estructural

La optimización estructural puede dividirse en cuatro principales categorías, estas dependen de las variables de diseño que se consideren para cada caso [1], la optimización de forma, optimización de tamaño, optimización de material y la optimización topológica, son los cuatro enfoques principales en el campo de la optimización estructural.

2.6.1 Optimización de Forma

En este caso los contornos del elemento o alguna de sus fronteras es la variable de diseño, bajo esta idea la optimización consiste en determinar una función de contorno que minimice o maximice una función objetivo (peso o la rigidez de la estructura) y que al mismo tiempo cumplan con los requerimientos estructurales, como son el esfuerzo permisible máximo del material, el volumen máximo, etc. Este enfoque de optimización no cambia la conectividad de la estructura por lo que no se crean nuevas fronteras,

simplemente se modifican las existentes (ver Fig. 2.4 y 2.5). Existen dos principales enfoques para llevar a cabo la optimización de forma:

- **Optimización de forma basada en elemento finito.**

En esta técnica la nueva forma del elemento es generada por los cambios en la geometría del elemento finito, y las coordenadas de los nodos en la superficie son consideradas como variables de diseño, lo que podría ocasionar demasiadas dificultades matemáticas debido al gran número de variables que son modificadas durante el proceso de optimización. Sin embargo códigos como SOL 200 de MSC/NASTRAN utilizan relaciones de los desplazamientos nodales para definir vectores base, con los que se determina una dirección de movimiento permisible para definir un nuevo mallado en el modelo, con estos vectores se pueden realizar cambios complejos en la geometría utilizando pocas variables de diseño [18],[19].

- **Optimización de forma basada en modelos geométricos.**

En este método los parámetros de la geometría del modelo son considerados como las variables de diseño, por lo que el modelo debe de ser completamente paramétrico, debido a esto el modelo de elemento finito (FE) debe de ser actualizado para considerar la condición del contorno en cada nueva modificación al modelo geométrico. Esto involucra una desventaja debido a que las modificaciones a la geometría son determinadas por el diseñador creando una dependencia entre la experiencia y creatividad de este con los resultados obtenidos.

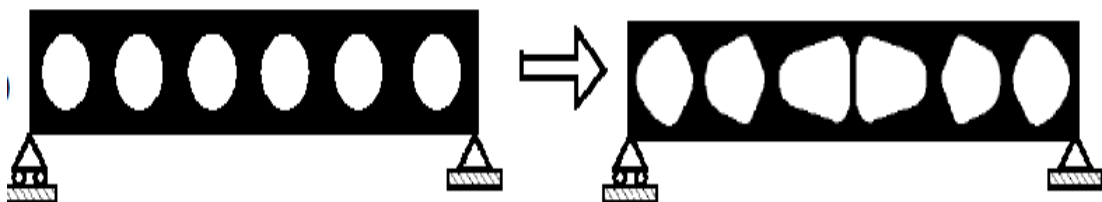


Fig. 2.4. La optimización de forma [1] no crea nuevas fronteras dentro del dominio de diseño.

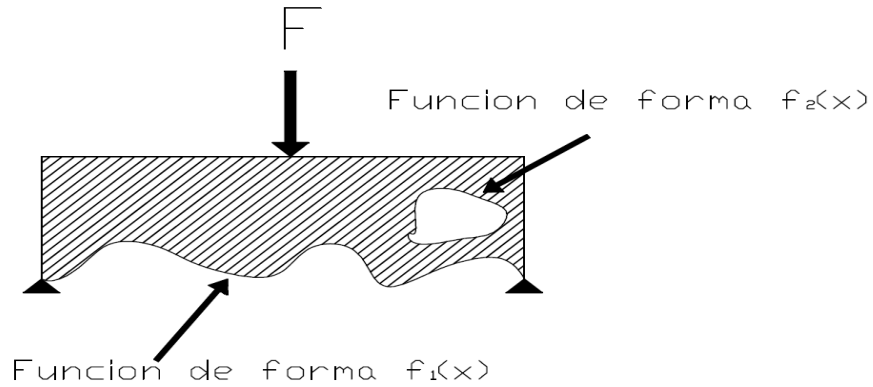


Fig. 2.5. La utilización de funciones para representar el borde de las fronteras de material dentro del dominio de diseño.

La principal dificultad de la optimización de forma recae en mantener el mallado original del elemento durante el proceso de optimización, debido a la dificultad de transferir los cambios del modelo a un correcto mallado de elemento finito (ver Fig. 2.6), pues el esfuerzo computacional que ocasiona un nuevo mallado aumenta considerablemente con modelos de gran tamaño.

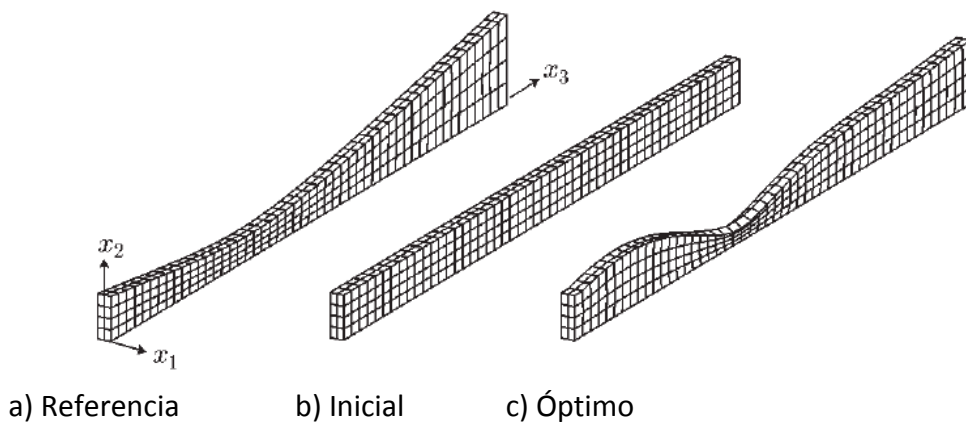


Fig. 2.6. Optimización de forma de una viga continua sujeta a sus modos de vibración natural Inzarulfaisham [20].

2.6.2 Optimización de Tamaño

La optimización de tamaño se deriva del enfoque "groundstructure" propuesto por Dorn [21] y de su definición de la unión de todos los potenciales miembros conectados entre puntos nodales de la estructura, bajo este enfoque la optimización consistía en la

eliminación sistemática de elementos inútiles en la estructura. Esta perspectiva permitió considerar a la optimización de estructuras como un problema de optimización de tamaño [22]. Un problema típico de este tipo de optimización es mostrado en la Fig. 2.7, en este tipo de optimización las variables de diseño son el conjunto de los diámetros, o tamaño de los elementos que conforman la estructura.

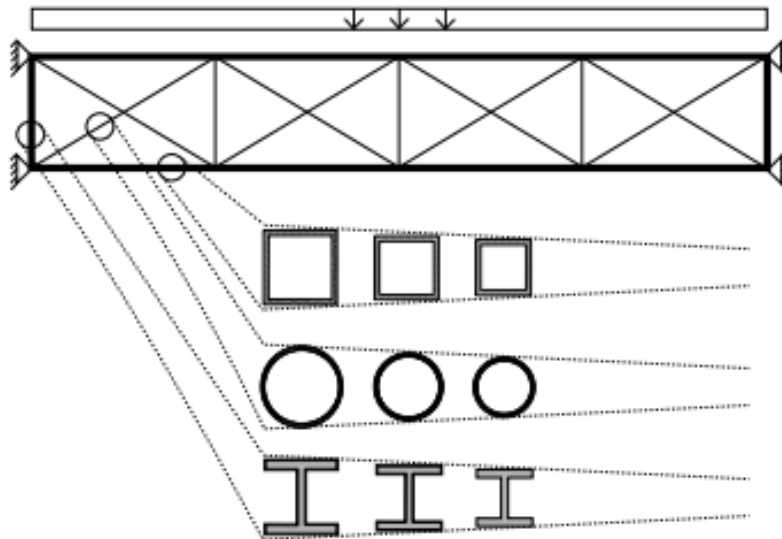


Fig. 2.7. Potenciales miembros conectados de la estructura a optimizar “Groundstructure” [21],

El método de la optimización de tamaño considera que la geometría y la topología de la estructura son fijas [1], por lo que las variables de diseño sólo determinan la forma y tamaño de los elementos que mejoren la masa o rigidez de la estructura dado un conjunto de cargas y restricciones dadas.

Las variables de diseño se pueden clasificar en dos grupos: variables de diseño discretas y variables de diseño continuas. La optimización de tamaño puede considerar los dos tipos de variables de diseño, lo cual es una de las principales características de la optimización de tamaño. Un ejemplo típico que considera variables discretas es el diseño de armaduras (ver Fig. 2.7) En este tipo de problema las variables de diseño solo pueden considerar un conjunto de valores predefinidos, y estos valores pueden ser dimensiones de la sección transversal o geometría de la sección transversal de los elementos [17] La optimización de tamaño con variables discretas evita un post análisis de los resultados en busca de seleccionar los valores de las variables viables (diámetros de tubos, espesores de lámina comerciales, etc.) que se aproximen a la solución más óptima [19], lo cual es común si el problema considera variables continuas. Si las variables de diseño consideradas en el problema de optimización no están limitadas a un conjunto de valores determinados, se

habla de un problema de optimización que considera variables de diseño continuas (ver Fig. 2.8 y 2.9).

En la optimización de tamaño el análisis de elemento finito es afectado directamente por el cambio de valores en las variables de diseño, un claro ejemplo de esto es la optimización de estructuras tipo Shell donde las variables de diseño son el espesor de los elementos finitos, la variación de las propiedades físicas del material en el proceso de optimización de tamaño también se ve directamente afectado [18][19][23], sin embargo la definición de estas propiedades frente a la variación de las variables de diseño son responsabilidad del diseñador. Programas de optimización de tamaño que consideran la modificación de las propiedades de los elementos finitos durante el análisis FEM han sido implementados en códigos comerciales como COSMOS, MSC/NASTRAN y PERMAS [18] (ver Fig. 2.8).

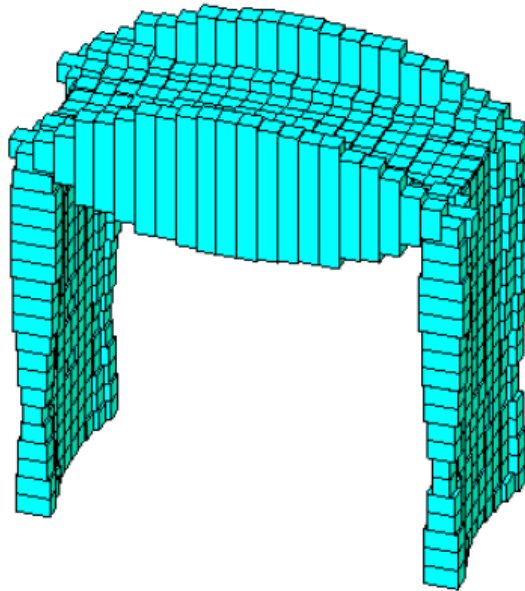


Fig. 2.8. Optimización de tamaño de una estructura “shell” [23].

Comúnmente en este tipo de optimización todos los elementos del diseño inicial están presentes en la solución óptima, esto debido a la imposición de restricciones de tamaño mínimo o máximo en las variables de diseño, estas restricciones evitan las singularidades que se podrían presentar si las variables de diseño exhiben un valor demasiado pequeño, grande o negativo. Actualmente se siguen publicando un gran número de trabajos que abordan el problema de optimización de tamaño, en estos trabajos la optimización de tamaño es considerada para resolver problemas de cargas dinámicas a estructuras “Shell” [2], optimización de tamaño de estructuras de materiales compuestos [24], desarrollo de métodos de optimización de estructuras “truss” [25], etc. Este tipo de enfoque de

optimización puede ser considerado aun como el estado del arte de la optimización de estructuras.

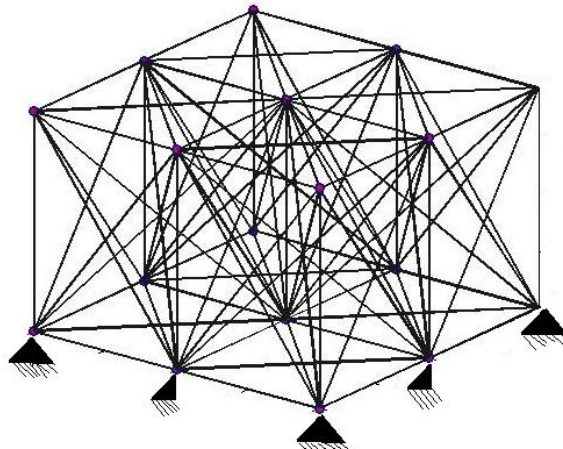


Fig. 2.9. Optimización de estructura "Groundstructure" por medio de variables de diseño continuas.

2.6.3 Optimización de Material

Esta metodología de optimización utiliza parámetros del material como variables de diseño para optimizar la rigidez de estructuras elásticas. Los diferentes parámetros que puede considerar la optimización de material como variables de diseño pueden formular el problema de optimización como un problema de programación de enteros [26] ó un problema de optimización discreta de material [27][28], las variables que pueden formular el problema de estas maneras son la orientación de las fibras del material, espesores de capas de diferentes materiales y la determinación de la secuencia de las capas de materiales utilizados en la estructura (ver Fig. 2.10). Debido al incremento de la utilización de materiales compuestos en forma de capas en las aplicaciones estructurales estos métodos de optimización han cobrado relevancia en los últimos años [27]. Este enfoque de optimización de material mantiene constantes la geometría y la topología de la estructura [1] durante el proceso de optimización.

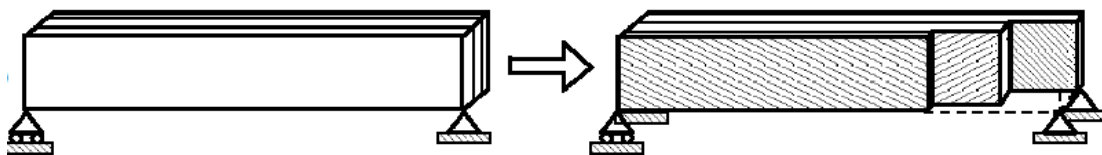


Fig. 2.10. Optimización de material [1], donde del lado derecho se muestra la solución óptima y de lado izquierdo el problema de optimización [1].

Por otro lado la consideración de la variación libre del material y de su distribución como variables de diseño para la determinar una estructura óptima es conocida como optimización de material libre, la cual fue introducida por primera vez por Bendsoe [29], esta metodología supone como variable de diseño al tensor de rigidez del material, el cual es función de la variable espacial x (ver [29]). Este tipo de perspectiva es considerado por algunos autores (M. Kocvara [30]) como la mejor generalización del problema de optimización estructural.

2.6.4 Optimización Topológica

La optimización topológica estructural ha sido rápidamente desarrollada en las pasadas dos décadas y un gran número de métodos han sido propuestos [31]. La Principal ventaja de utilizar estas herramientas es la obtención de un diseño conceptual en un tiempo relativamente corto. Comparado con la optimización de tamaño y la optimización de forma que necesitan definir un primer diseño para llevar a cabo la optimización estructural, la optimización topológica no considera una geometría o topología de la estructura fija (ver Fig. 2.11). Las características de la optimización topológica le permite ser empleada en etapas más tempranas del proceso de diseño que buscan satisfacer respuestas globales de la estructura (restricciones de desplazamientos, rigidez eigen valores etc.). La optimización topológica puede definir la forma óptima de la distribución del material para definir una estructura [32], considerando solamente las condiciones de frontera del problema (restricciones nodales, cargas nodales aplicadas y el espacio disponible para que habite la estructura) y las propiedades del material a utilizar. Debido a lo anterior es recomendable utilizar la optimización topológica para la generación de diseños con énfasis en respuestas globales y posteriormente optimización de forma y o de tamaño para cumplir con restricciones locales.

La optimización topológica se puede dividir en dos clases: enfoque micro (material) y enfoque macro (geométrico) [33], y aunque la optimización topológica fue originalmente desarrollada para el diseño de estructuras donde la configuración topológica óptima se busca a un nivel macro, la aplicación de la optimización topológica al diseño de nuevos materiales representa una importante alternativa a las metodologías de diseño y es muy prometedora en el desarrollo de materiales multifuncionales de alto desempeño [34].

El enfoque micro o de material utiliza un mallado de elemento finito fijo para describir la geometría y la respuesta mecánica en todo el espacio de diseño, las propiedades de los constituyentes de los elementos finitos son modelados basados en microestructuras porosas, mientras que el enfoque macro asume que todo el espacio de diseño es un

material sólido isotrópico o anisótropico y la topología del sólido puede ser cambiada por medio del crecimiento o degradación del material [31]. El método de optimización topológica con enfoque macro más famoso es el método SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) el cual establece de manera heurística una relación entre las propiedades del material y la densidad del mismo [35], el método SIMP discretiza el espacio de diseño (espacio destinado para que la estructura habite) en “N” elementos, asumiendo constantes las propiedades dentro de cada elemento y considerando las densidades de los “N” elementos como variables de diseño, de esta manera cada elemento es especificado como una variable de optimización independiente [17]. La variedad de técnicas y enfoques que se han desarrollado en las pasadas décadas para el método de optimización topológica se enfocan en determinar la variación de la topología de la estructura por medio de la inserción de agujeros en el cuerpo sólido (los cuales pueden cambiar de tamaño o incluso unirse con otros agujeros [36]), cambiando la densidad del material en diferentes regiones del espacio de diseño para determinar una estructura.

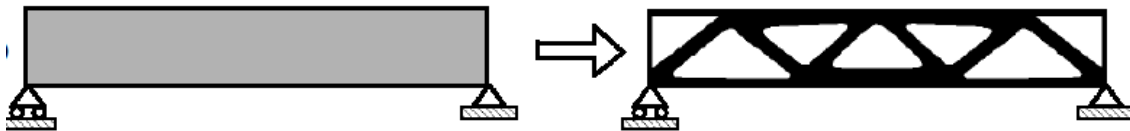


Fig. 2.11. Optimización topológica, el lado derecho se muestra la solución óptima y de lado izquierdo el problema de optimización topológica [1].

2.7 Técnicas y enfoques utilizados en Optimización Topológica

2.7.1 Homogenización

Los materiales compuestos pueden ser definidos como materiales hechos por el hombre que presentan diferentes constituyentes. Las propiedades de los materiales compuestos dependen de la micro-estructura que presente el material, la cual es representada por medio de una célula que contiene los parámetros representativos de esta (distribución de las fases presentes de los constituyentes en el material, tamaño y forma de los constituyentes etc.), esta célula recibe el nombre de volumen representativo elemental (RVE). La optimización topológica con enfoque de homogenización considera materiales compuestos que presentan suficientes heterogeneidades regulares para asumir una micro-estructura periódica [37].

La teoría matemática de la homogenización fue desarrollada en las décadas de los 50's y 70's principalmente y fue implementada por primera vez en problemas de optimización estructural a finales de los 80's, debido a la incapacidad del método de optimización de forma para generar diseños óptimos sin considerar un modelo inicial [38], y también como una alternativa para determinar propiedades mecánicas efectivas de materiales compuestos pues según Kaminski (2000) [39]. El método de homogenización es una manera muy eficiente para modelar computacionalmente materiales compuestos, donde usualmente se asume que existe alguna relación de escala entre los diferentes elementos que conforman el material.

Se conocen como métodos directos de homogenización a aquellos que permite aproximar las propiedades mecánicas de un material celular periódico considerando la distribución del material y la composición de un solo RVE. El método más simple que conduce a la homogeneidad en un material compuesto heterogéneo es la regla de las mezclas, la cual se utiliza para aproximar las propiedades del material compuesto por medio del promedio de las propiedades de los constituyentes, ponderando sus fracciones de volumen. Métodos más sofisticados fueron desarrollados posteriormente (Eshelby (1957), Budiansky (1965), Mori y Tanaka (1973)) para determinar las propiedades equivalentes de un material que presente inclusiones de otro material. Estos métodos se basan en el problema de valor de frontera, en donde una inclusión esférica o elipsoide de un material está presente en una matriz de otro material. Una extensión de esta metodología que proporciona resultados razonables para partículas geoméricamente regulares pero que falla al considerar un clúster de inclusiones es el enfoque auto-consistente (self-consistent) [40]. A principio de los 80's Hashin (1983) y Willis (1981) lograron una estimación más aproximada en las propiedades de los materiales compuestos basándose en el principio de mínima energía y en límites para las propiedades globales del material compuesto [40].

Actualmente una de las maneras más comunes de aproximar las propiedades de un material compuesto es por medio de la Ec. (2.16), la cual aproxima el tensor elástico del material de la siguiente forma:

$$C_{ijkl}^H(\rho) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} C_{ijlm}(\rho) \left[\varepsilon_{mn}^{0(kl)} - \varepsilon_{mn}^{*(kl)} \right] d\Omega \quad (2.16)$$

La Ec. (2.16) permite aproximar las propiedades mecánicas de un material celular por medio de la consideración de un solo RVE, el RVE es representado por Ω que define el área del domino de diseño o área del RVE [37].

Donde:

- $|\Omega|$ es el área que ocupa el dominio de diseño.
- C_{ijklm} es el tensor elástico del material base.
- ρ Representa la fracción de volumen de la fase sólida dentro de un elemento finito.
- $\epsilon_{mn}^{0(kl)}$ Son pruebas de deformaciones aplicadas a una celda unitaria para determinar los campos de deformaciones características.
- $\epsilon_{mn}^{*(kl)}$ Son campos de deformación características.

Los campos de deformaciones características son obtenidos de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega} C_{ijmn} \epsilon_{ij}(v) \epsilon_{mn}^{*(kl)} d\Omega = \int_{\Omega} C_{ijmn} \epsilon_{ij}(v) \epsilon_{mn}^{0(kl)} d\Omega \quad (2.17)$$

En donde la Ec. (2.17) permite determinar los campos de deformaciones características, donde “v” es el campo de desplazamiento virtual [37,39].

Las dos ecuaciones anteriores son utilizadas comúnmente en métodos de homogenización directa tradicional, donde se asume que la longitud de la escala de la micro-estructura es infinitamente pequeña comparada con la estructura macro [37]. Zhang y Sum [42] demostraron que la longitud de la escala de la micro-estructura tiene un gran impacto en la rigidez final del diseño, exponiendo de esta manera una clara limitación de los métodos de homogenización directos.

Durante las pasadas dos décadas se ha estado desarrollando una alternativa para los métodos de homogenización directa tradicional, la homogenización computacional a multi-escala o análisis local-global. Este método también conocido como método de homogenización de segundo orden; permite considerar los efectos de la longitud de escala, permitiendo establecer relaciones esfuerzo deformación en cualquier punto de interés por medio del modelado detallado de la microestructura atribuida a ese punto. Técnicas de este tipo no requieren ninguna suposición constitutiva a nivel macro, permite la incorporación de grandes deformaciones en niveles micro y macro, son adecuados para un comportamiento del material físicamente no lineal, proporciona la posibilidad de introducir información detallada de la micro-estructura, incluyendo la evolución física y geométrica de la micro-estructura en el análisis macro y permite el uso de cualquier técnica de modelado a micro nivel, (FEM, plasticidad de estructuras cristalinas (crystal plasticity), etc.) [40]. Sin embargo la incorporación de estos métodos en algoritmos de optimización estructural no ha sido llevado a cabo [38], por lo que podría llegar a ser un

adelanto significativo en el diseño de materiales y estructuras celulares cuando se logre la implementación conjunta de estas dos metodologías.

Bendsøe y Kikushi [38] consideraron el problema de elasticidad para el caso de un material poroso el cual está formado por micro-estructuras celulares periódicas (cuerpo celular que comprende espacios sólidos y vacíos), y desarrollaron un método de optimización el cual usa la formulación de homogenización en el modelo estructural. El método determina las constantes elásticas homogenizadas que permiten determinar las ecuaciones de equilibrio en un sistema de coordenadas macroscópicas [37]. La formulación considera a la densidad celular elemental como variable de diseño permitiendo establecer una relación entre las variables de diseño y las propiedades locales del material dentro de la estructura.

El método de la homogenización inversa se refiere al procedimiento de optimización topológica el cual tiene como objetivo determinar las configuraciones micro-estructurales apropiadas dado un estado de cargas, determinando de esta manera las propiedades efectivas del material más adecuadas para el estado de cargas dado. Este método fue originalmente introducido por Sigmund [43] el cual formuló el problema de diseño como un problema de reducir al mínimo las diferencias entre las propiedades del material homogenizado y las propiedades buscadas dentro del RVE. Los métodos más comunes para definir la función objetivo en la homogenización inversa basada en elementos finitos son minimizar o maximizar los componentes críticos del tensor de rigidez homogenizado del RVE, o utilizar la formulación de mínimos cuadrados para minimizar la diferencia entre el tensor de rigidez homogenizado y el tensor de rigidez objetivo.

$$\min_{\rho} f(\rho) = \left(\frac{1}{9} \sum_{i,j=1}^3 C_{iijj}^H(\rho) \right)^{-1} \quad (2.18)$$

La Ec. (2.18) presenta la formulación para maximizar el modulo de compresión de un material en 3D, donde C_{ijkl}^H es el tensor de rigidez homogenizado del material [39].

$$\min_{\rho} f(\rho) = \sum_{i,j,k,l=1}^3 r_{ijkl} (C_{IJKL}^* - C_{IJKL}^H)^2 \quad (2.19)$$

La Ec. (2.19) presenta la formulación de mínimos cuadrados usada en homogenización inversa, donde r_{ijkl} define el factor de peso que pondera los diferentes componentes del tensor de rigidez, C_{ijkl}^* es el tensor de rigidez objetivo, C_{ijkl}^H es el tensor de rigidez homogenizado del material [41].

Las dos formulaciones anteriores o cualquier otra formulación utilizada en el proceso de homogenización inversa deben de poder establecer una relación de búsqueda eficiente en el algoritmo de optimización, por lo que la sensibilidad topológica debe estar definida como la derivada de la función con respecto a las variables de diseño. Los algoritmos de optimización comúnmente utilizados en este tipo de enfoque son los algoritmos basados en densidades de los elementos finitos y que son usados para discretizar el espacio de diseño.

Como se definió anteriormente la idea principal en la utilización de homogenización es calcular una distribución óptima del material sobre un dominio de diseño dado, el cual se encuentra sujeto a la acción de cargas y condiciones de frontera. La distribución del material es construido por microestructuras periódicas, como puede ser una microestructura [44] constituida por celdas unitaria cuadradas con un agujero rectangular en el centro, en donde los lados del rectángulo así como la orientación de la celda son tratadas como las variables de diseño y un criterio de optimización determina si un elemento es sólido o es un elemento vacío.

La principal desventaja de este método es la imposibilidad del análisis de la sensibilidad de los elementos compuestos homogenizados con respecto a las relaciones geométricas. De acuerdo con Sigmund [45] este método tiene la desventaja de que la determinación y evaluación de una micro-estructura óptima, así como su orientación es muy complicado de resolver. Por otra parte también se tiene que muchas de las estructuras resultantes no pueden ser construidas, ya que no se tiene una longitud definida de escala asociada con las microestructuras.

2.7.2 Ley de las potencias

Resolver problemas de optimización con variables de diseño discretas es considerado más difícil que resolver el problema por medio de variables de diseño continuas [Sigmund and Pettersson 1998]. Un método típicamente utilizado para resolver este tipo de problemas consiste en relajar la distribución de las variables de diseño por medio de la introducción de estados intermedios entre las variables de diseño discretas. Este tipo de enfoque fue aplicado por Bendsøe [35], Rozvany y Zhou [16] para formular el problema de optimización estructural que considera a las densidades elementales como variables de diseño, sin embargo la consideración de un diseño estructural que presente una distribución de densidades continuas no puede ser manufacturado, por lo que las densidades intermedias deben de ser penalizadas utilizando una ley de potencias, con lo cual se asegura que la rigidez de los elementos que presenten densidades intermedias converjan a una solución elemental discreta. Reitz [46] ha demostrado que existe una solución discreta para el problema formulado por Bendsøe si se considera una

penalización lo suficientemente alta, sin embargo la utilización de altas penalizaciones pueden resultar en una solución mínima local ya que el problema de diseño penalizado no es un problema convexo [47]. La formulación del problema de diseño utilizando la ley de las potencias o SIMP (Solid Isotropic Material With Penalization) puede ser interpretado como un problema de optimización de tamaño el cual modifica la matriz de rigidez por medio de una función continua, la cual es interpretada como la densidad del material, sin embargo como se menciona anteriormente los resultados no deben de presentar valores intermedios. Bendsoe y Sigmund [32] recomiendan utilizar una penalización lo suficientemente grande ($P \geq 3$) para obtener diseños con valores discretos “0-1” cuando restricciones de volumen están activas.

Considerando el espacio de diseño discretizado por “n” elementos el enfoque SIMP para minimizar la energía de deformación es formulado matemáticamente por la Ec. (2.20) de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \min_x C(x) &= U^T K U = \sum_{e=1}^n (x_e)^p u_e^T K_0 u_e \\ \text{s. t. } Vol(x) &\leq V_c \\ K U &= F \\ 0 < x_{min} &\leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Los “n” elementos son utilizados para representar la estructura sobre el dominio de diseño, las variables de diseño ($x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$) representan la presencia de material (sólido o vacío) dentro del dominio de diseño por medio de valores discretos (0-1), la penalización de estos valores ($(x_e)^p$) relaja la distribución de las variables dando origen a la función de las densidades artificiales elementales, la rigidez elemental es calculada considerando la rigidez del material base y la función de densidades artificiales ($K_e = (x_e)^p K_0$), la energía de deformación es calculada considerando la rigidez elemental y el vector de desplazamientos nodales elemental ($x_e^p u_e^T K_0 u_e$), la consideración de una estructura con restricciones de equilibrio estático se lleva a cabo por medio de $K U = F$, donde “K” es la rigidez global de la estructura, “F” el vector de cargas aplicadas y “U” el vector de desplazamientos nodales. Para evitar singularidades en el análisis FEM durante el proceso de optimización se determina un vector de densidades mínimas (x_{min}), junto con la restricción de volumen ($Vol(x) \leq V_c$). El problema anterior se define como el enfoque SIMP para diseños con mínima energía de deformación.

Las limitaciones que pueden presentar los resultados utilizando el método SIMP se deben a la inestabilidad numérica que resulta en el efecto “checkerboard” y a la dependencia de malla que pueden presentar los diseños.

2.7.3 Optimización de evolución estructural (ESO)

El método ESO fue propuesto por Xie y Steven a principios de los 90's [48], desde entonces el método ha sido continuamente desarrollado para resolver un amplio rango de problemas de optimización (Xie, Steven 1997). La metodología ESO se basa en la idea simple y empírica de que la estructura evoluciona hasta alcanzar un óptimo por la medio de la eliminación de los elementos (hard-killing) que presentan bajos niveles de esfuerzo. A través de este proceso evolutivo basado en consecuencias locales el método busca lograr la optimización de forma y la optimización topológica de la estructura. Sin embargo Huang y Xie [49] aseguran que este proceso evolutivo no siempre puede asegurar la mejor solución.

Uno de los objetivos de la optimización estructural es la de generar diseños que presenten un mismo valor de esfuerzo (o deformación) en toda la estructura [49], y que a su vez este valor sea menor y cercano al máximo admisible. Este concepto es conocido como nivel de esfuerzo local, este concepto permitió establecer el criterio evolutivo de esfuerzos en el método ESO, el cual junto con un análisis de elemento finito determinan los elementos que deben de ser removidos de la estructura, el nivel de esfuerzo en cada elemento es determinado por la razón del esfuerzo elemental entre el esfuerzo máximo que presente la estructura, y de acuerdo a la condición expresada en la Ec. 2.21 los elementos que la satisfacen son eliminados del dominio de diseño.

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_{max}} < RR_i \quad (2.21)$$

La condición del análisis de nivel de esfuerzo elemental es mostrada en la Ec. (2.21) donde " σ_e " es el esfuerzo elemental, " σ_{max} " es el esfuerzo máximo de la estructura, RR_i es la relación de rechazo actual, este valor permanece hasta que el estado estable es alcanzado (ya no hay elementos que puedan ser eliminados con la relación de rechazo actual).

La relación de rechazo determina los elementos a ser eliminados del modelo FEM, una vez que ningún elemento cumple con la condición del análisis de esfuerzo elemental, la relación de rechazo se aumenta para que las iteraciones tomen lugar nuevamente hasta que un nuevo estado estable sea alcanzado, este proceso se repite hasta lograr un diseño óptimo el cual presente un nivel de esfuerzo aceptable para el diseñador.

Otro de los factores que más influencia tienen en el desarrollo de diseños óptimos es el nivel aceptable de rigidez que tiene que presentar la estructura, este factor se puede definir como la energía de deformación total que una estructura presenta debido a las cargas aplicadas. Para obtener diseños óptimos que presenten una rigidez máxima, se necesita implementar el criterio de la energía de deformación (SE) en técnicas de

optimización, Chu fue el primero en reemplazar el criterio de nivel de esfuerzos por el criterio SE en el método ESO.

El método ESO que utiliza el criterio SE busca la optimización estructural por medio de la eliminación del modelo FEM a los elementos que presenten valores de energía de deformación U_e (2.22) bajos en el dominio de diseño. Los elementos a ser eliminados del modelo son determinados por la relación de eliminación elemental (ERR), la cual es definida como la relación del número de elementos retirados en cada iteración respecto al total de elementos en el modelo FEA inicial.

$$U_e = \frac{1}{2} u_e^T K_e u_e \quad (2.22)$$

La Ec. (2.22) expresa el valor medio de la energía de deformación elemental. Tanskanen (2002) demostró que eliminar los elementos con baja energía de deformación lograba una estructura con una rigidez máxima y un volumen mínimo así como también una energía de deformación uniforme [50].

Una de las principales desventajas del método ESO es que el método no se detiene una vez que la función objetivo ha alcanzado su mínimo valor, el método continua eliminando elementos hasta que el análisis FEM falle, debido a las singularidades que se presentan en la matriz de rigidez o se eliminen todos los elementos del espacio de diseño [49],[50], esto se puede traducir en que el método ESO nunca logra la convergencia de la solución óptima, debido a esto la mejor solución debe de ser seleccionada de todas las soluciones generadas durante el proceso de optimización [50]. Sigmund y Petersson revelaron también que el método ESO no puede ser fácilmente extendido a un problema de optimización con restricciones diferentes a los propuestos originalmente, como restricciones de desplazamientos. Una de las principales diferencias entre el método ESO y el método SIMP es la formulación de la restricción de volumen, ESO reduce el volumen hasta encontrar la solución topológica óptima, por otro lado el método SIMP encuentra la solución topológica óptima para un volumen especificado [50].

2.7.4 Método de Level set

El método de level set para mover problemas de interface fue primeramente desarrollado por Osher y Sethian [51] (1988), el método actualmente se encuentra bien desarrollado y es usado en una amplia variedad de áreas de investigación (Sethian [52] (1999); Osher y Fedkiw [53](2002)), sin embargo el método de level set fue aplicado en la optimización topológica recientemente (Osher y Santosa[54](2001)) y de acuerdo con Challis [55](2009) grupos de investigación alrededor del planeta han utilizado este método exitosamente

como una alternativa de aproximación para la distribución del material en la optimización topológica. Actualmente se han tenido algunos éxitos utilizando el método level set como base para la optimización topológica como son por mencionar algunos Optimización topológica robusta (de Gournay et al 2008), diseño de materiales multifuncionales (Challis et al 2008) y optimización topológica de mecanismos [56].

El método de level set puede ser utilizado con un enfoque de optimización topológica por medio de la utilización de una descripción implícita flexible del dominio de material en el espacio de diseño. El dominio estructural en el espacio de diseño es representado por un conjunto de funciones de nivel, las cuales definen las fronteras de la estructura por medio de funciones dimensionales de alto orden. Durante el proceso de optimización el conjunto de funciones que representan el contorno de la estructura son conocidas como conjunto de funciones de nivel cero, estas funciones desplazan en direcciones favorables las fronteras de la estructura, por medio de un análisis de sensibilidad basado en los cambios de forma de la misma, la descripción implícita de las interfaces permite cambios topológicos en el contorno de nivel cero, esto permite una optimización topológica nítida en las fronteras del diseño estructural, donde las densidades intermedias son restringidas a una pequeña banda alrededor de la frontera de la estructura.

2.7.4.1 Componentes del método de Level set

La estructura general del método de level set puede dividirse en tres componentes principales: parametrización de las funciones de level set, actualización de las funciones de level set y discretización de las ecuaciones que gobiernan la física del problema [57], [56]. El enfoque de cada componente puede ser decidido de maneta independiente dependiendo del problema de optimización formulado.

2.7.4.2 Parametrización

La parametrización del método de level set define el espacio de diseño en el cual la configuración óptima es buscada, en este espacio de diseño la forma del dominio del material es definida por medio de una función dimensional de alto orden, esta función tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
 \emptyset(x) &\geq 0 \text{ para } x \in \Omega \\
 \emptyset(x) &< 0 \text{ para } x \in \frac{D}{\Omega} \\
 \emptyset(x) &= 0 \text{ para } x \in \Gamma
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

Donde D es el dominio del diseño que contiene completamente la estructura Ω , Un ejemplo de una función de level set y su correspondiente dominio del material es mostrado en las Figs. 2.12 y 2.13. Una función level set puede ser parametrizada en términos de cualquier tipo de función base, generalmente en términos de las coordenadas espaciales " x " y en términos del parámetro de diseño temporal " t ", la función de level set $\phi(x, t)$ puede ser representada por la Ec. (2.24):

$$\phi(x, t) = \sum_i \beta_i(t) \theta_i(x) \quad (2.24)$$

Donde los términos β son los parámetros y los términos θ son las funciones bases. Este tipo de funciones bases lineales son comúnmente usadas en la discretización del método del elemento finito y pueden ser usadas para conducir al así llamado método de level-set discretizado, sin embargo cualquier otro tipo de base puede ser utilizada como funciones base de alto orden o funciones base radial.

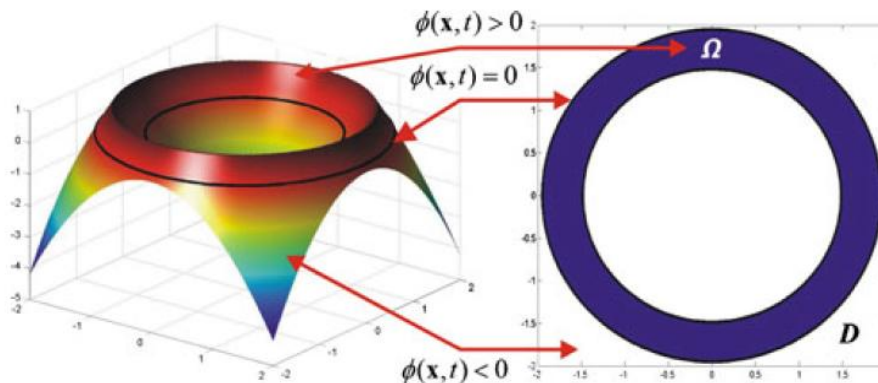


Fig. 2.12. Función implícita de level set y las fronteras en el espacio de diseño Zhu, Zhang [56].

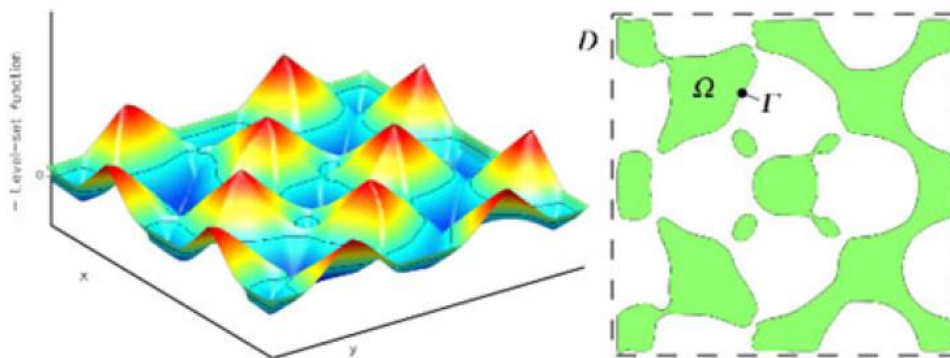


Fig. 2.13. Función de level set, el lado derecho el contorno de nivel cero de la función en el dominio de diseño, Van Dijk y G.H. Yoon [57].

2.7.4.3 Discretización

Para llevar a cabo la optimización estructural, las respuestas del diseño y la sensibilidad en los cambios del diseño necesitan ser calculados usando FEM. En el caso donde se utiliza un mallado conformado con fronteras elementales que coinciden con las fronteras del dominio del material, FEM ofrece una solución exacta al problema estructural. Este mallado es conocido como mallado conforme y tiene que ser reconstruido para cada uno de los cambios efectuados en el diseño durante el curso de la optimización.

Por otro lado uno también puede optar por un mallado fijo o no conforme, en lugar de construir un mallado conforme para cada cambio en el diseño, la función de level set es trasladada a un mallado no conforme usando el operador Heaviside en la función level set. Los costos computacionales pueden ser evitados utilizando este método, sin embargo los resultados de este tipo de análisis FEM es menos aproximado que la respuesta utilizado mallado conforme.

Las sensibilidades de forma indican los cambios de los objetivos y restricciones a través de cambios de forma infinitesimal sin embargo las sensibilidades pueden no predecir los cambios de las respuestas de manera exacta cuando los cambios topológicos ocurran [56], [57]. Las sensibilidades de forma no predicen por sí solas las posibles conexiones favorables o desfavorables entre las regiones del material. Esto es problemático cuando el problema estructural es resuelto en un mallado conforme y regiones vacías no son desertizadas.

Con el fin de llevar a cabo un análisis de elemento finito utilizando un mallado no conforme, la función de level set necesita ser mapeada al campo de las densidades elementales ρ_e (ver Ec. 2.25), Estas densidades elementales son usualmente los valores promedios de la función Heaviside aplicada a la función level set por elemento.

$$\rho_e = \frac{\int_{\Omega_e} H(\phi) d\Omega}{\int_{\Omega_e} d\Omega} \quad (2.25)$$

Donde Ω_e es el dominio de material del elemento “e”, si se desea una aproximación de las densidades elementales por medio de la función Heaviside se necesita que la función level set tenga las propiedades “signed-distance” la cual en un espacio métrico determina la distancia de un punto x a la frontera del conjunto de la función analizada. La aproximación seleccionada para la función Heaviside determinará la frontera inferior de la densidad elemental, y la tolerancia será representada como un ancho de banda para la aproximación de la función Heaviside, muchos autores utilizan funciones de aproximación

de la función Heaviside para que las densidades intermedias sean restringidas a un ancho de banda (tolerancia) alrededor del nivel cero, esto permite relajar las topologías obtenidas por medio de formas intermedias entre las conexiones de y desconexiones de las características en el diseño.

Las densidades elementales indican cuales elementos finitos pertenecen al dominio del material y cuáles no pertenecen, estas densidades pueden ser utilizadas directamente para escalar la rigidez del material con el enfoque conocido como material de Ersatz. La contribución de un solo elemento a las ecuaciones globales de equilibrio para elasticidad plana usando el enfoque del material de Ersatz está dada por la Ec. (2.26):

$$\rho_e K_e U = F \quad (2.26)$$

Donde K_e es la matriz de rigidez original elemental, U son los grados de libertad elemental y F es el vector de fuerzas asociado al elemento e .

2.7.4.4 Actualización de la Función Level set

La función de level set es actualizada usando un campo de velocidades de diseño límite obtenido a partir de un análisis de sensibilidad de forma. Esta velocidad de diseño límite es derivada de la formulación de las ecuaciones que gobiernan el continuo. Los ingredientes necesarios son los desplazamientos estructurales, la adjunta de los desplazamientos que son aplicados a las ecuaciones de equilibrio y en el caso de problemas de optimización con restricciones posiblemente multiplicadores de Lagrange.

Las sensibilidades de forma están basadas en los desplazamientos infinitesimales de las fronteras. Un desplazamiento de frontera infinitesimal en la dirección tangente no cambia la forma del diseño por lo tanto un cambio infinitesimal en la forma solo depende de los desplazamientos en dirección normal [56], [57]. El nivel cero de la función de level set $\phi(x, t) = 0$ es una función de coordenadas espaciales " x " y de un tiempo de diseño " t " que efectúan un seguimiento de los cambios en el diseño, el movimiento de las interfaces existentes es determinado por el campo de velocidades V_n el cual es derivado del análisis de sensibilidad de forma [56] y de la ecuación de evolución de la función level set dada por:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + V_n |\nabla \phi| = 0 \quad (2.27)$$

La Ec. (2.27) es conocida como ecuación de level set [56]. En muchos casos uno puede evaluar el desempeño del método de level set por medio de extender el campo de velocidades alrededor de la frontera o incluso en algunos casos en todo el dominio.

El método de level set es considerado por algunos autores (Wang,(2003), Challis (2010)) y van Dijk (2010)) como la metodología más adecuada para resolver problemas de optimización topológica, un gran número de investigadores han optado por utilizar y desarrollar nuevas mejoras para el método de level-set, sin embargo algunos autores han reportado que la optimización basada en métodos de level set puede generar optimización de forma en lugar de optimización topológica [58], esto debido a que durante el proceso de optimización las regiones pequeñas y vacías dentro del dominio del material no pueden realizar un cambio dentro de la estructura de un estado de vacío a un estado existente de material, este proceso es conocido como nucleación de regiones, y está relacionado con la propiedad de la ecuación de level-set la cual lleva a cabo la propagación de las fronteras libres de la estructura en el proceso de optimización [58].

2.7.5 Método de HCA (Autómatas Celulares Híbridos)

La técnica de los Autómatas Celulares Híbridos (HCA) fue originalmente desarrollada para simular el proceso de adaptación funcional de la estructura trabecular ósea (hueso esponjoso) [59], este modelo asume que la estructura trabecular ósea permanece localmente isotrópica y los cambios estructurales son derivados del estímulo mecánico aplicado. Esta técnica utiliza análisis de elemento finito junto con técnicas de evolución sobre autómatas celulares. En este método el dominio de diseño se discretiza en CA (autómatas celulares) donde estos son considerados como una idealización del sistema físico en el que el tiempo y el espacio son discretos. La premisa en el moldeamiento con CA es que un problema complejo puede discretizarse en una serie de reglas simples. Estas reglas operan sobre un gran número de autómatas que solo conocen condiciones locales de evolución (Tovar [59] (2005)). Algunas aplicaciones de este método a técnicas de optimización han demostrado ser una herramienta efectiva, sin embargo la aplicación de CA ha sido utilizada por más de 60 años para simular procesos biológicos [60]. Algoritmos de optimización topológica basados en CA han sido desarrollados en la actualidad, Pydimarry y Mozumder [61] desarrollaron un algoritmo basado en los CA el cual optimiza estructuras bajo cargas dinámicas, Kita y Toyoda [62] utilizaron los CA para diseño estructural donde la regla de evolución local se deriva de las condiciones de optimalidad de una función multiobjetivo que minimiza el peso de la estructura. Tovar [59] desarrollo un algoritmo el cual utiliza técnicas de elemento finito con lo que se determinan el estado global de los autómatas celulares, este algoritmo de optimización estructural alcanza una convergencia más rápida, y evita inestabilidades numéricas.

El concepto de autómatas celulares fueron presentados primeramente por Von Neumann en 1940 y su propósito era proporcionar información sobre los requisitos lógicos para la máquina de auto-replicación. Pero no fue hasta 1970 cuando la comunidad científica puso toda su atención en los CA pues son la esencia del famoso juego de la vida de John Conway (Gardner 1970). Gracias a que los CA son un discreto idealizado de sistemas complejos pueden ser utilizados como una herramienta que por medio de cantidades numéricas modelan de manera aproximada sistemas físicos complejos, La idea fundamental de los CA es que un comportamiento global puede ser determinado de reglas locales que actúan sobre un autómatas que pose solo información local, un CA puede ser considerado como una región cerrada finita que pose variables discretas, las cuales son actualizadas por medio de un conjunto de reglas locales que consideran las cantidades de las variables de las celdas vecinas, las reglas locales son definidas de acuerdo a la física que gobierna en el sistema que se desea aproximar. Los CA son idealizaciones de un sistema físico en el cual el espacio y el tiempo son discretos y presentan 5 características fundamentales:

- Posición discreta dentro del dominio.
- Evolución de sus variables de estado en pasos de tiempo discretos.
- Cada CA puede tener un valor de un conjunto finito.
- El valor de todos los CA evoluciona de acuerdo a la misma regla de evolución.
- Las reglas de evolución dependen solamente del vecindario local.

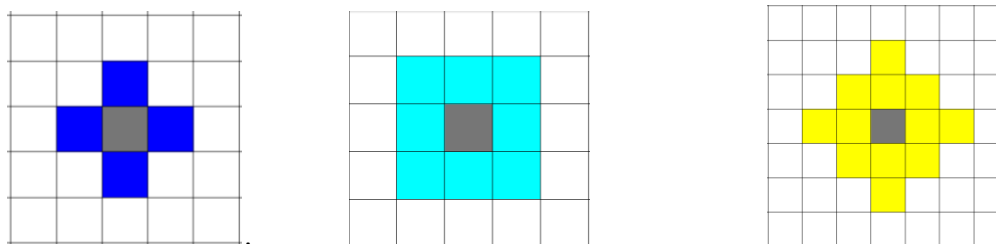
La principal ventaja de utilizar CA es que se pueden modelar de manera efectiva fenómenos físicos de los cuales se desconozcan las ecuaciones que los gobiernan, pues debido a que las reglas locales que actúan solo en las regiones pequeñas conocidas como vecindarios celulares son suficientes para aproximar el sistema sin recurrir a las ecuaciones que gobiernan el sistema a nivel global. Los algoritmos convencionales de CA no realizan un análisis global de la variable de estado, pues la actualización de los autómatas celulares que discretizan todo el dominio de diseño dependen solamente de su estado anterior y el de sus vecinos CA [14].

El método de los autómatas celulares híbridos (HCA) es una técnica que combina las relaciones locales utilizadas por los CA y la información global obtenida de un análisis de elemento finito, la incorporación de la información global incrementa la eficiencia del algoritmo de los CA [62], las condiciones de optimalidad pueden ser derivadas del algoritmo HCA, sin embargo se sabe que es posible obtener diferentes soluciones convergentes para un mismo problema por lo que es necesario determinar las condiciones bajo las cuales el algoritmo converge al punto donde las condiciones de optimalidad Karush-Kuhn-Tucker (KKT) sean válidas [1].

El método de los HCA utiliza comúnmente un mallado rectangular espaciado uniformemente para discretizar el dominio de diseño, sin embargo el mallado no está limitado a utilizar elementos rectangulares o elementos uniformemente espaciado, sin embargo mallados uniformes son muy adecuados para llevar a cabo el cálculo paralelo durante el proceso de optimización[58], la ventaja de utilizar un mallado rectangular en el método de los HCA recae también en que se pueden utilizar las células como elementos rectangulares en el método de elemento finito con lo que se logra un enfoque consistente entre la asociación de la topología con las variables elementales.

Se llama vecindario estructural al conjunto de elementos que influye directamente en la actualización de los estados de los HCA, estos vecindarios dependen en gran medida de la naturaleza del fenómeno físico que se está modelado [58], los vecindarios más comunes utilizados por Tovar [59] son mostrados en la Fig. 2.14.

El tamaño del vecindario generalmente se limita a elementos adyacentes sin embargo las diferentes maneras en que se extienden pueden afectar en gran medida el estado del elemento analizado. Los vecindarios más comúnmente utilizados son los de Von Neumann (Fig. 2.14 (a)) y los de Moore (Fig. 2.14 (b)).



a) Von Neuman, 4 vecinos b) Moore, 8 vecinos, c) Extendido, 12 vecinos

Fig. 2.14. La actualización del elemento depende de los elementos que considera el vecindario.

Las fronteras del espacio de diseño discretizado con HCA necesitan una condición especial para definir su comportamiento, los vecindarios empleados en este caso son conocidos como condiciones de borde los cuales son mostrados en la Fig. 2.15.

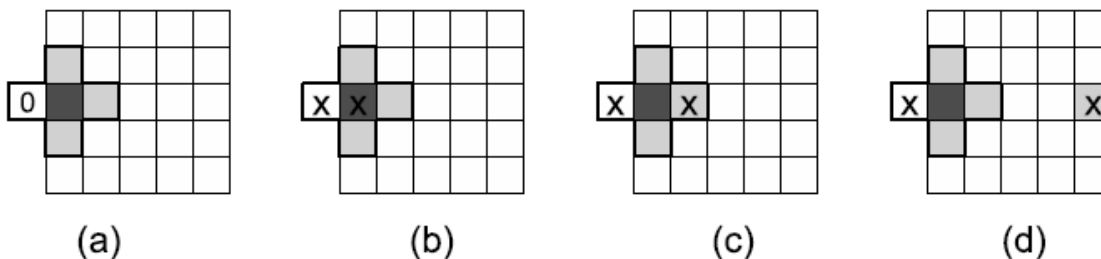


Fig. 2.15. Condiciones de borde del método de los HCA, a) Fijo, b) Adiabático, c) Reflectivo y d) Periódico [14].

Dado que el método de los HCA considera el mismo vecindario para cada célula las localizadas en el límite del dominio físico pueden considerarse en su vecindario complementado con células fuera del dominio de diseño que presentan valores fijos, adiabáticos, refractivos o periódicos, cada una de estas son utilizadas dependiendo del tipo de problema [59].

El algoritmo que hace uso de los HCA utiliza a los CA como herramienta para discretizar el espacio de diseño (Fig. 2.16), los cuales son al mismo tiempo elementos del método del elemento finito que en conjunto con técnicas de control logran la evolución de las variables de estado de cada CA, esta evolución está enfocada a alcanzar el valor óptimo que minimice una función objetivo para cada autómata celular.

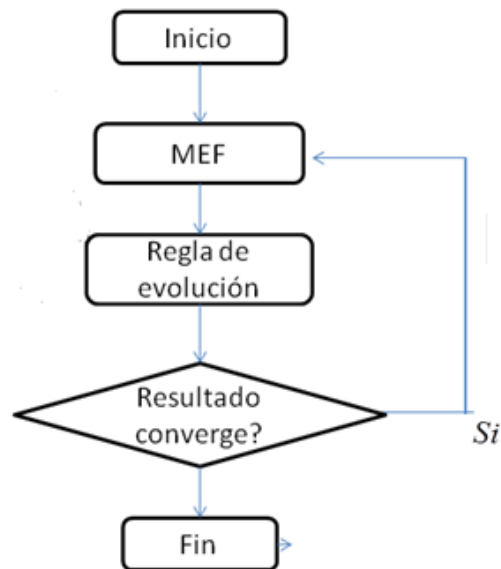


Fig. 2.16. Diagrama de flujo del algoritmo de optimización de los HCA.

Debido a lo anterior se puede determinar que el método de los HCA comparte muchas características con las diferentes técnicas de optimización topológica, aunque no sea un método de optimización formal.

Debido a que este método considera a las variables de estado como parte fundamental de la evolución de las variables de diseño, la implementación del modelo microestructura propiedades puede llevarse a cabo considerando al espesor de la estructura como variable de diseño y la energía de deformación y/o el esfuerzo como variables de estado. Este enfoque permitiría establecer diferentes zonas dentro del material con diferentes propiedades. En la parte final del capítulo 3 se describirá los fundamentos matemáticos utilizados para determinar las condiciones de optimalidad o KKT del problema estructural formulado en este trabajo considerando al espesor como variable de diseño.

2.8. Inestabilidades en Algoritmos de Optimización

2.8.1 Efecto Checkerboard

La mayoría de los métodos de optimización basados en funciones de densidades artificiales pueden alcanzar la inestabilidad numérica, que puede resultar en soluciones indeseables donde la distribución del material presenten patrones “*checkerboard*”. Un patrón checkerboard es definido como un patrón periódico de grandes y bajos valores de densidades, configurados de manera similar al de un tablero de ajedrez [64] (ver Fig. 2.17), este tipo de configuración nunca representa una distribución óptima de material. Díaz y Sigmund [64] demostraron que las aproximaciones numéricas introducidas por FEM en los desplazamientos de los nodos pueden causar una configuración del material con patrones checkerboard, debido a que la configuración es modelada numéricamente de forma errónea sobreestimando localmente la rigidez en comparación con la de zonas donde se tiene material uniformemente distribuido.

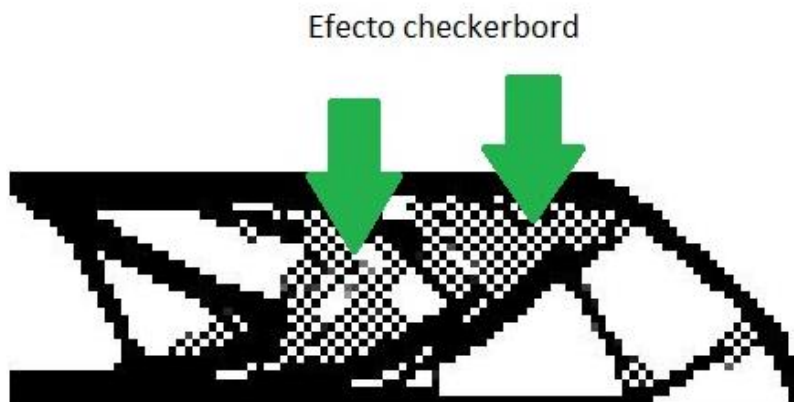


Fig. 2.17. Efecto Checkerbord obtenido del código de 99 líneas [28] (`top(100,30,0.5,3,0.5)`).

Bendsøe y Sigmund [32] recomiendan el uso de elementos de orden superior durante el análisis FEM para disminuir las posibilidades de que se presenten el efecto checkerbord en la solución. Otra alternativa para tratar de resolver este problema es el uso de filtros, en donde la idea principal es asegurar la mínima cantidad de material que se encuentra alrededor de un elemento sólido. Para el enfoque SIMP el efecto checkerboard es prevenido solo si se utilizan elementos con 8 ó 9 nodos cuando la potencia de penalización es lo suficientemente pequeña ($P < 2.29$) [50].

2.8.2 Dependencia de malla

En el método SIMP el problema que origina la dependencia de malla está relacionado con la carencia de solución única al problema de optimización topológica, pues resolver el mismo problema incrementando el número de elementos para discretizar el espacio de diseño no resulta en un mejor modelo FEM ni en una estructura más detallada con descripciones de fronteras más definidas, si no en una estructura cualitativamente diferente [47], (ver Fig. 2.18).

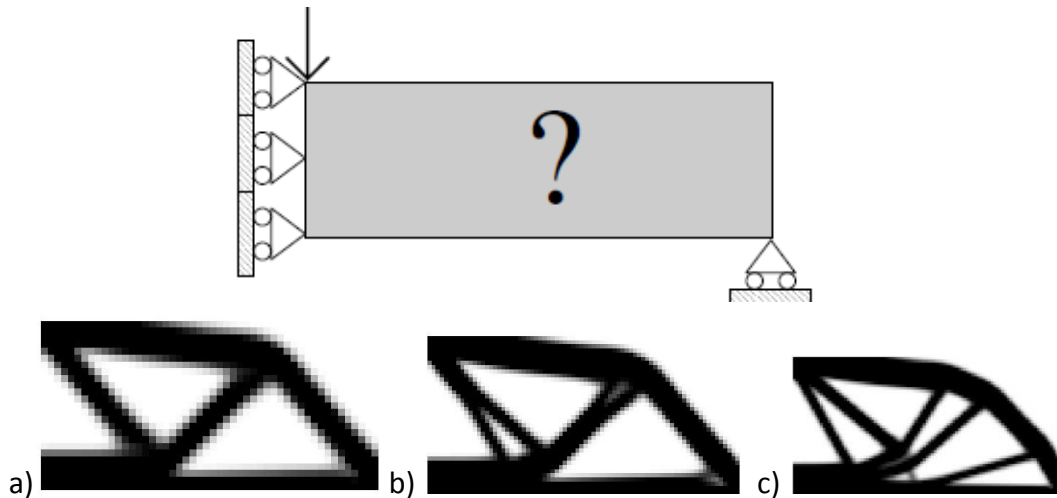


Fig. 2.18. Dependencia de malla comun en problema de optimizacion.

Los problemas de dependencia de malla mostrados en la Fig. 2.18, fueron obtenidos utilizando el programa propuesto por O. Sigmund [45]. Los diferentes casos mostrados en la Fig. 3.18 son obtenidos con los siguientes parametros a) $\text{top}(50,25,0.5,3,2)$, b) $\text{top}(76,38,.5,3,2)$, c) $\text{top}(100,50,.5,3,2)$.

El enfoque para obtener independencia de malla en el método SIMP y en otros métodos que resuelven el problema de optimización con variables discretas (0-1), es reducir el espacio de diseño admisible por medio de restricciones globales o locales que limitan la variación de la densidad, por medio de restricciones directas al problema de optimización o la implementación de filtros en el proceso de optimización. Para la mayoría de estos métodos la existencia de solución y la convergencia de las aproximaciones FEM puede ser lograda.

Debido a lo extenso de estos temas se recomienda revisar Bendsoe, M.P., Sigmund [32], O. Sigmund, J. Petersson [47] y A. Díaz, O. Sigmund [64], si se desea profundizar en estos temas.

No obstante a que las dos inestabilidades numéricas mencionadas anteriormente pueden presentarse en los resultados obtenidos por medio del método SIMP, y que de acuerdo con Sigmund (2001) [45] este método puede ser criticado desde el punto de vista que no existe ningún material físico el cual se comporte con las propiedades descritas por la interpolación de la ley de las potencias, a excepción de que la ley de las potencias cumpla con la condición en la potencia $p \geq 3$ para lograr una relación de Poisson igual a $1/3$ (Bendsøe y Sigmund (1999) [65]) y que el método debe de ser combinado con limitaciones de perímetro y con técnicas de filtrado, el método SIMP sigue siendo el método de optimización topológica más famoso

2.9 Problema de Optimización Topológica

2.9.1 Introducción

El problema de optimización topológica formulado en este trabajo busca minimizar el peso y la energía de deformación causada por la aplicación de fuerzas estáticas a una estructura dada, considerando que las variables del proceso (laminación en frío) juegan un papel importante en las propiedades finales del material, principalmente en el límite de cadencia utilizado para determinar el máximo esfuerzo permisible. La formulación del problema propuesto considerará la minimización de las funciones de peso y energía de deformación de la estructura.

2.9.2 Definición del Problema de Optimización Topológica

La consideración de las 3 principales variables de control del proceso de laminación en frío (temperatura del horno, espesor del material y velocidad o tiempo en el horno) son factores importantes durante la obtención de las propiedades finales del material. Sin embargo, con el objetivo de simplificar el problema, solamente se considerará la variación del espesor en el problema de optimización, en el cual se busca minimizar el peso y maximizar la rigidez de la estructura sujeta a cargas estáticas.

Lo que se pretende con la forma en que se formula el problema de optimización es que al tener un espacio de diseño bidimensional Ω , sobre este se determinarán valores de espesor de la estructura, los cuales permitirán obtener las propiedades mecánicas del material (límite elástico y dureza) y la mejor microestructura dependiendo de las condiciones de esfuerzo locales. Esto permitirá asignar diferentes microestructuras en las diferentes zonas dentro del espacio Ω . Al final la rigidez global de la estructura será

controlada por medio del espesor de la misma, y considerará lo siguiente: las propiedades mecánicas dentro de Ω son linealmente elásticas e isotrópicas, las fuerzas de cuerpo son despreciadas, y las fronteras del dominio pueden estar sujetas a tracción o desplazamientos prescritos (ver Fig. 2.19).

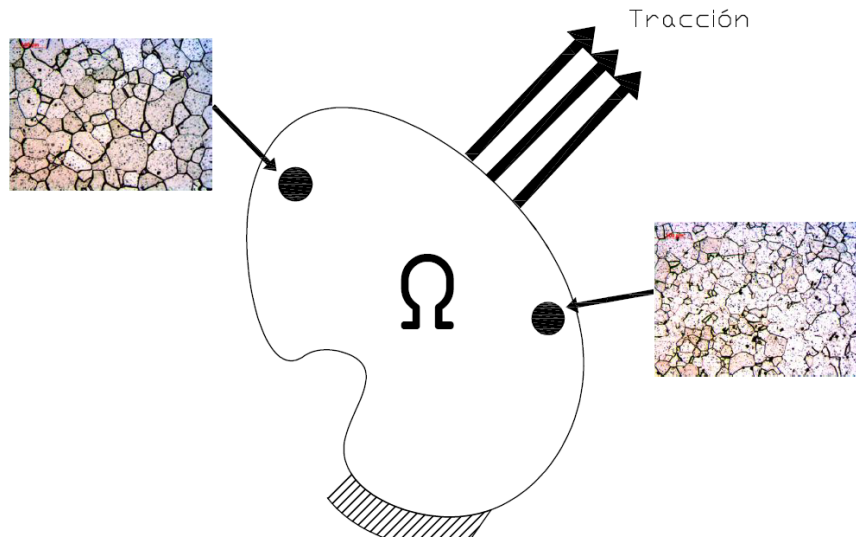


Fig. 2.19. Las propiedades mecánicas de cada punto dentro de Ω está definido por su espesor.

La variación de las microestructuras se implementará al modelo de optimización por medio de la variación de calor, el cual ocasiona la evolución microestructural (crecimiento de grano, recristalización y transformación de fases) del material [66]. Si el calor suministrado en cada sección dentro del espacio de diseño varía como consecuencia de los diferentes espesores que el espacio de diseño presente, diferentes propiedades mecánicas serán obtenidas en diferentes zonas, por ende a diferentes espesores la generación de diferentes microestructuras serán obtenidas. Por lo que las gráficas experimentales explicadas en el capítulo 2, serán aproximadas por medio de una función de aproximación, la cual será incorporada al problema de optimización, con lo que los efectos de manufactura y propiedades microestructurales serán considerados en el proceso de optimización.

Una vez definidas las características microestructurales del espacio Ω en cada uno de sus puntos, se puede considerar al problema de optimización como un problema de encontrar las mejores propiedades estructurales que minimicen el peso de la estructura y maximicen la rigidez de la misma, dentro del dominio Ω para un estado de cargas dado.

2.10 Formulación del problema

A pesar de que en la sección anterior se definió que la función que determinará las propiedades mecánicas de la estructura dentro del espacio de diseño dependerá del espesor y del tiempo de exposición en el horno, la formulación del problema que se describe a continuación considera solamente al espesor como variable de diseño. Lo anterior se debe a que actualmente no se cuenta con la función de aproximación la cual se discutió en la sección anterior, sin embargo la formulación y solución del problema considerando tiempo de exposición a una temperatura constante y espesor es muy similar a la mostrada a continuación.

El objetivo del problema de optimización consiste en minimizar dos funciones, la del peso de la estructura y la de la energía de deformación. Además, el problema debe considerar restricción de equilibrio estático, restricción de esfuerzo máximo permisible y restricción de espesor positivo. El problema de optimización en forma estándar puede ser definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min_h (f_1(U) + f_2(M)) \\ \text{s. a.} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\int_{\Omega} h(x, y) E_{ijkl}^0 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} d\Omega = \int_{\Omega} \rho_0 b_i u_i d\Omega + \int_{\Omega} t_i u_i dS$$

$$(\sigma_{vm} - \sigma_{max}) \leq 0$$

$$h_{min} \leq h(x, y) \leq h_{max}$$

Donde:

- Función de la energía de deformación: $f_1(U)$
- Función del peso de la estructura: $f_2(M)$
- Tensor elástico base de cuarto orden: E_{ijkl}^0
- Deformación unitaria: ε_{ij}
- Espesor en el punto "i" dentro del espacio de diseño: $h_i(x, y)$
- Esfuerzo de Von Mises en el punto "i": $\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_{ii}^2 + \sigma_{jj}^2 + \sigma_{ii} \sigma_{jj} + 3\sigma_{ij}^2}$
- Esfuerzo máximo admisible : σ_{max}

Discretizando el problema de diseño, y en específico el espacio de diseño Ω en "N" elementos (ver Fig. 2.20), la Ec. (2.28) se puede expresar de la siguiente manera:

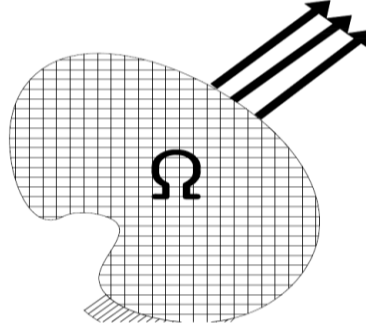


Fig. 2.20. Espacio de diseño discretizado en “N” elementos.

$$\begin{aligned}
 & \min_h (f_1(U_e) + f_2(M_e)) \\
 & \text{s. a.} \\
 & h_e k^0 u_e = f_e \\
 & h_{\min} \leq h_e \leq h_{\max} \\
 & \sigma_{vm}^e - \sigma_{\max} \leq 0
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Donde k^0 es la matriz de rigidez base y la energía de deformación elemental se define como:

$$U_e = \frac{1}{2} u_e^T K_e u_e \tag{2.30}$$

Los desplazamientos elementales están definidos por u_e , los cuales dependen de los desplazamientos nodales de cada elemento u_n y las funciones de interpolación N.

$$u_e = N u_n \tag{2.31}$$

El peso de cada elemento en el espacio de diseño se define por m_e de la siguiente manera:

$$m_e = h_e m_0 \tag{2.32}$$

Donde h_e es el espesor elemental y considerando un área elemental de 1 cm^2 y m_0 como la densidad en Kg/cm^3 . La relación entre el esfuerzo elemental y la deformación elemental está definido por:

$$\sigma_e = D B u_e \tag{2.33}$$

Donde D es la matriz de elasticidad del material y B se define como $B = AN$. En donde A y N se definen a continuación, y el tamaño de N depende de los desplazamientos nodales considerados en el elemento y ϑ_n son las funciones de forma.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$N = \begin{bmatrix} \vartheta_1 & 0 & \vartheta_2 & 0 & \dots & \vartheta_n & 0 \\ 0 & \vartheta_1 & 0 & \vartheta_2 & \dots & 0 & \vartheta_n \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Una vez formulado el problema de optimización por medio de variables y funciones continuas, este puede ser resuelto utilizando los métodos mostrados en secciones anteriores.

2.11 Condiciones de optimalidad

La principal dificultad en la solución del problema de optimización surge en la definición de las restricciones de falla estructural, pues la incorporación de la restricción de esfuerzos al problema origina una singularidad, esto debido a que el esfuerzo no está definido en el espacio de diseño cuando no hay material presente. Una opción para resolver este problema es formularlo como un problema con restricciones que se desvanecen [67], tal como se muestra a continuación. Este tipo de problemas asume que tanto la función a minimizar como las restricciones son continuas en el dominio de los números reales.

$$\min \left(w \sum_{e=1}^N \frac{U_e}{U_0} + (1 - w) \sum_{e=1}^N \frac{h_e m_0}{M_0} \right) \quad (2.36)$$

$$g_1(h_e) = h_e - h_{max} \leq 0 \quad (2.37)$$

$$h_1(h_e) = h_e k^0 u_e - f_e = 0 \quad (2.38)$$

$$H_1(h_e) = h_e \geq 0 \quad (2.39)$$

$$G_1(h_e)H_1(h_e) = h_e(\sigma_{vm}^e - \sigma_{max}) \leq 0 \quad (2.40)$$

La restricción $G_1 \leq 0$ presente en la Ec. (2.40), representa la restricción del esfuerzo elemental permisible, y es utilizada junto con la Ec. (2.39) para definir que las restricciones de esfuerzo estén definidas solamente en el espacio de diseño factible.

El Lagrangiano del problema Ec. (2.36) está dado por:

$$L(h_e) = f_1(U) + f_2(M) + \lambda_2(h_e - h_{max}) + \mu(h_e k^0 u_e - f_e) - \eta^H(h_e) + \eta^G h_e (DBu_e - \sigma_{max}) \quad (2.41)$$

Donde λ_1 es el multiplicador de Lagrange asociado con la restricción Ec. (3.37), μ es el multiplicador asociado a la restricción de equilibrio Ec. (2.38), η^H es el multiplicador de Lagrange asociado a la condición de espesor mayor o igual a cero Ec. (2.39) y η^G es el multiplicador asociado a la restricción de esfuerzo que se desvanece cuando el espesor elemental es cero.

Las condiciones necesarias de optimalidad (KKT) surgen de la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial L(h_e)}{\partial h_e} = \frac{\partial f_1(U_e)}{\partial U_e} \frac{\partial U_e}{\partial h_e} + \frac{\partial f_2(M_e)}{\partial M_e} \frac{\partial M_e}{\partial h_e} + \lambda_1 + \mu \left(h_e k^0 \frac{\partial u_e}{\partial h_e} + k^0 u_e \right) - \eta^H + \eta^G \left(DBu_e + h_e DB \frac{\partial u_e}{\partial h_e} - \sigma_{max} \right) \quad (2.42)$$

Donde las derivadas parciales se muestran a continuación.

$$\frac{\partial f_1(U_e)}{\partial U_e} = \frac{w}{U_0} \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial f_2(M_e)}{\partial M_e} = \frac{1-w}{M_0} \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial M_e}{\partial h_e} = m_0 \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial U_e}{\partial h_e} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_e}{\partial h_e} K_e u_e + u_e^T \frac{\partial K_e}{\partial h_e} u_e + u_e^T K_e \frac{\partial u_e}{\partial h_e} \right) \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial h_e} = ? \quad (2.47)$$

Para resolver la Ec. (2.47) partimos de Ec. (2.46), la cual podemos escribir de la siguiente forma

$$\frac{\partial U_e}{\partial h_e} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_e^T}{\partial h_e} K_e u_e + u_e^T \frac{\partial (K_e u_e)}{\partial h_e} \right) \quad (2.48)$$

Recordando que $K_e u_e = f_e$ es el equilibrio estático elemental, y tomando en cuenta que las fuerzas externas no dependen del espesor elemental se tiene que:

$$\frac{\partial (K_e u_e)}{\partial h_e} = 0 \quad (2.49)$$

Sustituyendo la Ec. (2.49) en Ec. (2.48), ahora se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial U_e}{\partial h_e} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_e^T}{\partial h_e} K_e u_e \right) \quad (2.50)$$

Recordando que K_e es simétrica (material linealmente elástico e isotrópico), la siguiente igualdad es válida.

$$(K_e u_e)^T = u_e^T K_e \quad (2.51)$$

Usando la ecuación anterior en Ec. (2.49) se determina lo siguiente:

$$\frac{\partial (K_e u_e)^T}{\partial h_e} = \frac{\partial (u_e^T K_e)}{\partial h_e} = \frac{\partial u_e^T}{\partial h_e} K_e + u_e^T \frac{\partial K_e}{\partial h_e} = 0 \quad (2.52)$$

Despejando nuestra incógnita de interés se tiene que:

$$\frac{\partial u_e^T}{\partial h_e} = -u_e^T \frac{\partial K_e}{\partial h_e} K_e^{-1} \quad (2.53)$$

Recordando que:

$$K_e = h_e k^0 \quad (2.54)$$

Se tiene lo siguiente:

$$K_e^{-1} = \frac{1}{h_e} (k^0)^{-1} \quad (2.55)$$

Sustituyendo lo anterior en Ec. (2.53) se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial u_e^T}{\partial h_e} = -u_e^T h_e^{-1} (k^0) (k^0)^{-1} \quad (2.56)$$

Con lo que finalmente obtenemos:

$$\frac{\partial u_e^T}{\partial h_e} = -u_e^T h_e^{-1} \quad (2.57)$$

El resultado obtenido en (2.57) puede ahora ser sustituido en Ec. (2.46), con lo que se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial u_e^T}{\partial h_e} = -\frac{U_e}{h_e} \quad (2.58)$$

Ahora al sustituir las Ec. (2.50) y (2.54) en Ec. (2.42) se obtienen las condiciones de optimalidad:

$$-\frac{U_e w}{U_0 h_e} + (1 - w) \frac{m_0}{M_0} + \lambda - \eta^H - \eta^G(\sigma_{max}) = 0 \quad (2.59)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (2.60)$$

$$(h_e - h_{max}) \leq 0 \quad (2.61)$$

$$\lambda(h_e - h_{max}) = 0 \quad (2.62)$$

$$-h_e \leq 0 \quad (2.63)$$

$$\eta^H(-h_e) = 0 \quad (2.64)$$

$$(\sigma_{vm}^e - \sigma_{max}) \leq 0 \quad (2.65)$$

$$\eta^G(\sigma_{vm}^e - \sigma_{max}) = 0 \quad (2.66)$$

$$h_e k^0 u_e - f^{ext} = 0 \quad (2.67)$$

De las condiciones de optimalidad, para un punto se tiene que:

Sí: $h_e > 0$ se puede deducir que los multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda = 0, \quad \eta^H = 0 \quad \text{Ec. (2.68)}$$

Por lo que la Ec. (2.58) se puede reducir de la siguiente manera:

$$-\frac{U_e w}{U_0 h_e} + (1 - w) \frac{m_0}{M_0} - \eta^G (\sigma_{max}) = 0 \quad (2.69)$$

Despejando ahora de la ecuación anterior η^G se obtiene:

$$\eta^G = -\frac{U_e w}{U_0 h_e \sigma_{max}} + (1 - w) \frac{m_0}{M_0} \frac{1}{\sigma_{max}} \quad (2.70)$$

Pero recordando que $\eta^G \geq 0$, y sustituyendo la Ec. (2.70) en la Ec. (2.66) se obtiene lo siguiente:

$$-\frac{U_e w}{U_0} \left(1 - \frac{\sigma_{vm}^e}{\sigma_{max}}\right) + (1 - w) \frac{m_0}{M_0} h_e \left(1 - \frac{\sigma_{vm}^e}{\sigma_{max}}\right) = 0 \quad (2.71)$$

Agrupando y reduciendo términos, de la anterior ecuación se obtiene que:

$$\frac{U_e}{h_e} = U_0 \frac{m_0 (1-w)}{M_0 w} \quad (2.72)$$

La anterior ecuación representa la condición de optimalidad para un punto de diseño con espesor mayor a cero, y esta expresa que la energía de deformación volumétrica elemental depende de la masa elemental, la masa estructural inicial, de la energía de deformación inicial y del factor w el cual pesa la importancia de cada una de las dos funciones a minimizar dentro del problema.

De igual manera, ahora si para un punto se tiene que:

Sí: $h_e \rightarrow 0$

$$\lambda = 0$$

$$-\frac{U_e w}{U_0 h_e} + (1 - w) \frac{m_0}{M_0} - \eta^H - \eta^G (\sigma_{max}) = 0 \quad (2.73)$$

$$\eta^H = \frac{(1-w)}{M_0} m_0 - \eta^G \sigma_{max} - \frac{U_e w}{U_0 h_e} \geq 0 \quad (2.74)$$

De igual manera que en la sección anterior recordando que $\eta^H(-h_e) = 0$, y sustituyendo la ecuación anterior en la restricción Ec. (2.64) se tiene lo siguiente:

$$-\frac{(1-w)}{M_0} m_0 h_e + \eta^G \sigma_{max} h_e + \frac{U_e}{U_0} w = 0 \quad (2.75)$$

Despejando de la ecuación anterior η^G se obtiene:

$$\eta^G = \frac{(1-w)}{M_0} \frac{m_0}{\sigma_{max}} - \frac{U_e}{U_0} \frac{w}{h_e \sigma_{max}} \geq 0 \quad (2.76)$$

De la Ec. (2.76) se puede determinar qué:

$$-\frac{U_e}{U_0} \frac{w}{h_e \sigma_{max}} \geq -\frac{(1-w)}{M_0} \frac{m_0}{\sigma_{max}} \quad (2.77)$$

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por (-1), y despejando la energía de deformación volumétrica se obtiene:

$$\frac{U_e}{h_e} \leq \frac{(1-w)}{M_0} \frac{m_0}{w} U_0 \quad (2.78)$$

La ecuación anterior determina que para que un elemento presente un espesor el cual tienda a cero deberá de cumplir con la Ec. (2.78). Con los resultados obtenidos en la Ec. (2.72) y (2.78), se pueda afirmar que la condición de optimalidad es la misma para cualquier valor mayor o igual a cero que las variables de diseño puedan tomar.

De manera similar a como se determinaron las condiciones de optimalidad para los casos en que el espesor h es mayor o igual a cero, ahora se resolverá el mismo problema de optimización, con la diferencia en que ahora la Ec. (2.79) considerará un límite inferior diferente de cero, y la función que permite considerar la evolución microestructural será considerada de manera general en la restricción Ec. (2.80). El problema de optimización queda definido de la siguiente manera

$$\min \left(w \sum_{e=1}^N \frac{U_e}{U_0} + (1-w) \sum_{e=1}^N \frac{h_e m_0}{M_0} \right)$$

s. a.

$$g_1(h_e) = h_e - h_{max} \leq 0$$

$$g_2(h_e) = h_{lim} - h_e \leq 0 \quad \text{Ec. (2.79)}$$

$$g_3(h_e) = h_e \sigma_e - f(h_e) \sigma_{max} \leq 0 \quad \text{Ec. (2.80)}$$

$$h_1(h_e) = h_e k^0 u_e - f_e^{ext} = 0$$

En la formulación de este nuevo problema se puede apreciar que las restricciones adicionales corresponden a las Ec. (2.79) y (2.80), las cuales sustituyeron a las Ec. (2.38) y (2.39) respectivamente. En la Ec. (2.80) se puede apreciar que el esfuerzo máximo admisible depende de una función del espesor elemental h_e , lo cual incorpora la variación del límite de cedencia dentro de la formulación del problema. A manera de simplificación, en la Ec. (2.80) se considera una relación lineal entre el esfuerzo elemental y el espesor elemental, sin embargo esta relación puede ser mucho más compleja y no afectaría notablemente la metodología de solución del problema. Siguiendo el mismo procedimiento que en la formulación original del problema, se puede definir que el gradiente de la función Lagrangiana esta expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L(h_e) = & f_1(U_e) + f_2(M_e) + \lambda_1(h_e - h_{max}) + \lambda_2(h_{lim} - h_e) \\ & + \lambda_3(h_e \sigma_e - f(h_e) \sigma_{max}) + \dots \\ & \dots + \mu_1(h_e k^0 u_e - f_e^{ext}) \end{aligned} \quad (2.81)$$

Realizando las derivadas parciales de igual manera que en los casos anteriores, las condiciones necesarias de optimalidad (KKT) surgen de la siguiente ecuación:

$$-\frac{U_e}{U_0} \frac{w}{h_e} + \frac{(1-w)m_0}{M_0} + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \left(\frac{df(h_e)}{dh_e} \sigma_{max} \right) = 0 \quad (2.82)$$

Donde:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda \geq 0 \quad (2.83)$$

$$g_1(h_e), g_2(h_e), g_3(h_e) \leq 0 \quad (2.84)$$

$$g_1(h_e)\lambda_1 = 0, g_2(h_e)\lambda_2 = 0, g_3(h_e)\lambda_3 = 0 \quad (2.85)$$

$$h_1(h_e) = 0 \quad (2.86)$$

De igual manera que en el problema anterior, determinando los multiplicadores de Lagrange por medio de los diferentes valores que puede tomar la variable de diseño h_e se obtiene que:

Sí $h_e = h_{min}$ y $h_e \sigma_e = f(h_e) \sigma_{max}$ se puede obtener lo siguiente:

$$\lambda_1 = 0 \quad (2.87)$$

Por lo que:

$$-\frac{U_e w}{U_0 h_e} + \frac{(1-w)m_0}{M_0} - \lambda_2 = \lambda_3 \left(\frac{df(h_e)}{dh_e} \sigma_{max} \right) \quad (2.88)$$

Despejando y sustituyendo la ecuación anterior en $g_3(h_e)\lambda_3 = 0$, se obtiene lo siguiente:

$$\left(-\frac{U_e w}{U_0 h_e} \frac{1}{f'(h_e) \sigma_{max}} + \frac{(1-w)m_0}{M_0} \frac{1}{f'(h_e) \sigma_{max}} - \lambda_2 \right) (h_e \sigma_e - f(h_e) \sigma_{max}) \quad (2.89)$$

Reduciendo (2.89) se obtiene:

$$\lambda_2 (h_e \sigma_e - f(h_e) \sigma_{max}) = \left(-\frac{U_e w}{U_0 f'(h_e) \sigma_{max}} \frac{\sigma_e}{h_e} + \frac{(1-w)m_0}{M_0} \frac{h_e}{f'(h_e) \sigma_{max}} \frac{\sigma_e}{h_e} + \frac{U_e w}{U_0 h_e f'(h_e)} - \frac{(1-w)m_0}{M_0} \frac{f(h_e)}{f'(h_e)} \right) \quad (2.90)$$

Agrupando términos semejantes en la ecuación anterior se obtiene lo siguiente:

$$\lambda_2 (h_e \sigma_e - f(h_e) \sigma_{max}) = -\frac{U_e w}{U_0 f'(h_e)} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_{max}} - \frac{f(h_e)}{h_e} \right) + \frac{(1-w)m_0}{M_0} \frac{1}{f'(h_e)} \left(h_e \frac{\sigma_e}{\sigma_{max}} - f(h_e) \right) \quad (2.91)$$

$$\lambda_2 (h_e \sigma_e - f(h_e) \sigma_{max}) = -\frac{U_e w}{U_0 f'(h_e)} \left(-\frac{f(h_e) \sigma_m - \sigma_e h_e}{h_e \sigma_{max}} \right) + \frac{(1-w)m_0}{M_0} \frac{1}{f'(h_e)} \left(\frac{\sigma_e h_e - f(h_e) \sigma_{max}}{\sigma_{max}} \right) \quad (2.92)$$

Despejando τ_2 de la Ec. (2.92) se tiene que:

$$\lambda_2 = -\frac{U_e}{U_0} \frac{w}{f'(h_e)} \left(\frac{1}{h_e \sigma_{max}} \right) + \frac{(1-w)m_0}{M_0} \frac{1}{f'(h_e)} \left(\frac{1}{\sigma_{max}} \right) \quad (2.93)$$

Y recordando que $\lambda_2 \geq 0$

$$\frac{U_e}{U_0} w \left(\frac{1}{h_e} \right) \leq \frac{(1-w)m_0}{M_0} \quad (2.94)$$

De igual manera que en los problemas resueltos con anterioridad, despejando la energía de deformación volumétrica elemental se obtiene:

$$\frac{U_e}{h_e} \leq \frac{(1-w)m_0}{M_0} \frac{U_0}{w} \quad (2.95)$$

La Ec. (2.94) indica que el espesor mínimo óptimo dentro del espacio de diseño deberá de cumplir con esta desigualdad y con la restricción $h_e \sigma_e = f(h_e) \sigma_{max}$. Este resultado asemeja al obtenido en la Ec. (2.78), sin embargo la forma de la restricción del esfuerzo máximo admisible modifica la interpretación de este resultado.

Si el valor óptimo dentro del espacio de diseño es el valor $h_e = h_{max}$ y considerando $h_e \sigma_e < f(h_e) \sigma_{max}$, la Ec. (2.85) toma la siguiente forma:

$$-\frac{U_e}{U_0} \frac{w}{h_e} + \frac{(1-w)m_0}{M_0} + \lambda_1 \left(\frac{df(h_e)}{dh_e} \sigma_{max} \right) = 0 \quad (2.96)$$

Y los multiplicadores de Lagrange los siguientes valores:

$$\lambda_2 = 0 \quad (2.97)$$

$$\lambda_3 = 0 \quad (2.98)$$

Despejando λ_1 de Ec. (2.96) se obtiene:

$$\lambda_1 = \frac{U_e}{U_0} \frac{w}{h_e} \frac{1}{f'(h_e) \sigma_{max}} - \frac{(1-w)m_0}{M_0} \frac{1}{f'(h_e) \sigma_{max}} \quad (2.99)$$

Sustituyendo λ_1 en $g_1(h_e) \lambda_1 = 0$, se obtiene:

$$(h_e - h_{max}) \left(\frac{U_e}{U_0} \frac{w}{h_e} \frac{1}{f'(h_e) \sigma_{max}} - \frac{(1-w)m_0}{M_0} \frac{1}{f'(h_e) \sigma_{max}} \right) = 0 \quad (2.100)$$

Expandiendo la Ec. (2.100):

$$\left(\frac{U_e}{U_0} \frac{w}{f'(h_e)\sigma_{max}} - \frac{(1-w)m_0}{M_0} \frac{h_e}{f'(h_e)\sigma_{max}} - \frac{U_e h_{max}}{U_0 h_e} \frac{w}{f'(h_e)\sigma_{max}} + \frac{1-wm_0M_0h_{max}f'h_e\sigma_{max}}{1-wm_0M_0h_{max}f'h_e\sigma_{max}} \right) = 0 \quad (2.101)$$

Reduciendo términos semejantes se obtiene:

$$\left(\frac{U_e}{U_0} \frac{w}{f'(h_e)\sigma_{max}} \left(1 - \frac{h_{max}}{h_e} \right) - \frac{(1-w)m_0}{M_0} \frac{1}{f'(h_e)\sigma_{max}} (h_e - h_{max}) \right) = 0 \quad (2.102)$$

$$\frac{U_e}{U_0} w \left(1 - \frac{h_{max}}{h_e} \right) = \frac{(1-w)m_0}{M_0} (h_e - h_{max}) \quad (2.103)$$

$$\frac{U_e}{h_e} = \frac{(1-w)}{w} \frac{m_0}{M_0} U_0 \quad (2.104)$$

El resultado obtenido en la Ec. (2.104) determina que el valor óptimo de la energía de deformación volumétrica para el problema que considerará un límite inferior diferente de cero y la función que permite la evolución microestructural, es igual a la determinada en la sección anterior. Sin embargo de igual manera que en Ec. (2.95), las consideraciones de $h_e \sigma_e < f(h_e)\sigma_{max}$ diferencian la solución definida por Ec. (2.104) y la encontrada en Ec. (2.72).

2.12 Condiciones de Regularidad de las Restricciones del Problema de Optimización

Tal como se mencionó en la sección anterior de condiciones de regularidad de las restricciones, estas con frecuencia son violadas en los problemas con restricciones que se desvanecen (VC), y el problema definido por Ec. (2.36) a (2.40) no es la excepción.

Debido a que el problema de Ec. (2.36) originalmente se definió como un problema de restricciones que se desvanecen (VC), las calificaciones estándar de restricciones comunes rara vez sostienen la solución [13], pues las condiciones de regularidad de restricciones utilizadas normalmente para sostener la solución del problema (Ec. 2.36) utilizan las condiciones de regularidad de las restricciones linealmente independientes (LICQ) aplicadas a las restricciones activas del problema, sin embargo estas no son cumplidas (ver

Ec. 3.105) por lo cual es necesario un criterio especial para poder validar la solución expresada en Ec. (2.72).

$$LICQ = \begin{bmatrix} \nabla g_1(h_e) & \nabla h_1(h_e) & \nabla H_1(h_e) & \nabla \theta_1(h_e) \\ 1 & 0 & -1 & -\sigma_{max} \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

Donde:

$$\theta_1(h_e) = G_1(h_e)H_1(h_e) \quad (2.106)$$

$$\nabla \theta_1(h_e) = G_1(h_e)\nabla H_1(h_e) + \nabla G_1(h_e)H_1(h_e) \quad (2.107)$$

Achtzinger [1] define que el punto mínimo local de un problema con restricciones que se desvanecen debe de satisfacer las restricciones de Abadie modificada (VC-ACQ) [13],[62]. Si el punto mínimo cumple con estas restricciones, entonces existen multiplicadores de Lagrange tales que:

$$f_1(h_e) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(h_e) + \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla h_i(h_e) - \sum_{i=1}^l \eta_i^H \nabla H_i(h_e) + \sum_{i=1}^l \eta_i^G \nabla G_i(h_e) = 0 \quad (2.108)$$

$$h_1(h_e) = 0, \forall i \in I_h$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad g_i(h_e) \leq 0, \quad \lambda_i g_i(h_e) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (2.109)$$

$$\eta_i^H = 0 \quad (i \in I_+) \quad (2.110)$$

$$\eta_i^H \geq 0 \quad (i \in I_{00} \cup I_{0-}) \quad (2.111)$$

$$\eta_i^H \text{ libre} \quad (i \in I_{0+}) \quad (2.112)$$

$$\eta_i^G = 0 \quad (i \in I_{0+} \cup I_{0-} \cup I_{++}) \quad (2.113)$$

$$\eta_i^G \geq 0 \quad (i \in I_{00} \cup I_{+0}) \quad (2.114)$$

Donde se definen los siguientes subíndices de la siguiente manera:

$$I_g = [i|g_i(h_e) = 0] \quad (2.115)$$

$$I_h = [1, \dots, p] \quad (2.116)$$

$$I_+ = [i|H_i(h_e) > 0] \quad (2.117)$$

$$I_0 = [i|H_i(h_e) = 0] \quad (2.118)$$

$$I_{+-} = [i|H_i(h_e) > 0, G_i(h_e) < 0] \quad (2.119)$$

$$I_{0+} = [i|H_i(h_e) = 0, G_i(h_e) > 0] \quad (2.120)$$

$$I_{00} = [i|H_i(h_e) = 0, G_i(h_e) = 0] \quad (2.121)$$

$$I_{0-} = [i|H_i(h_e) = 0, G_i(h_e) < 0] \quad (2.122)$$

Considerando que en nuestro problema definido en Ec. (2.36) a Ec. (2.40) solo se pueden tener los siguientes subíndices:

$$I_{0-} = [H_i(h_e) = 0, G_i(h_e) = -\sigma_{max}] \quad \text{Ec. (2.123)}$$

$$I_{+0} = [H_i(h_e) > 0, G_i(h_e) = 0] \quad \text{Ec. (2.124)}$$

$$I_{+-} = [H_i(h_e) > 0, G_i(h_e) = -\sigma_{max}] \quad \text{Ec. (2.125)}$$

$$I_{++} = [H_i(h_e) > 0, G_i(h_e) > 0] \quad \text{Ec. (2.126)}$$

Las anteriores ecuaciones consideran solamente las 4 posibilidades en las restricciones, sin embargo Achtzinger y otros autores [13],[62]. no consideran la posibilidad I_{++} la cual pertenece al caso cuando se tiene un espesor mayor a cero y la restricción de esfuerzo no se cumple.

Siguiendo el criterio VC-ACQ [1], se puede encontrar el punto mínimo local al problema de Ec. (2.36). Cuando se presenta el caso I_{0-} , se obtiene que por medio del criterio establecido por las Ec. (2.109) a (2.114) la solución es igual a la definida por la Ec. (2.72), por lo tanto:

$$\eta_i^H \geq 0 \quad (2.127)$$

$$\eta_i^G = 0 \quad (2.128)$$

Y resolviendo la Ec. (2.108) se determina que la solución es:

$$\frac{U_e}{h_e} = U_0 \frac{m_0 (1 - w)}{M_0 w}$$

De manera similar considerando los otros dos subíndices se llega a la misma solución. De esta manera se tiene que CV-ACQ sostiene que la solución encontrada en Ec. (2.72) es un mínimo local al problema definido por las Ec. (2.36) a (2.40).

Capítulo 3

Implementación del Algoritmo de los Autómatas Celulares Híbridos

3.1 Algoritmo de optimización de los autómatas celulares híbridos

La técnica de los autómatas celulares híbridos (HCA) originalmente desarrollada por Tovar [59] fue utilizada para simular el proceso de adaptación funcional de la estructura ósea (ver Fig. 3.1). Los HCA ofrecen una fácil integración de análisis de elemento finito y reglas de evolución, debido a que el algoritmo de optimización topológica selectivamente modifica la variable de diseño de cada elemento buscando que cada autómata celular (CA) alcance su valor objetivo u óptimo establecido sobre las variables de estado.

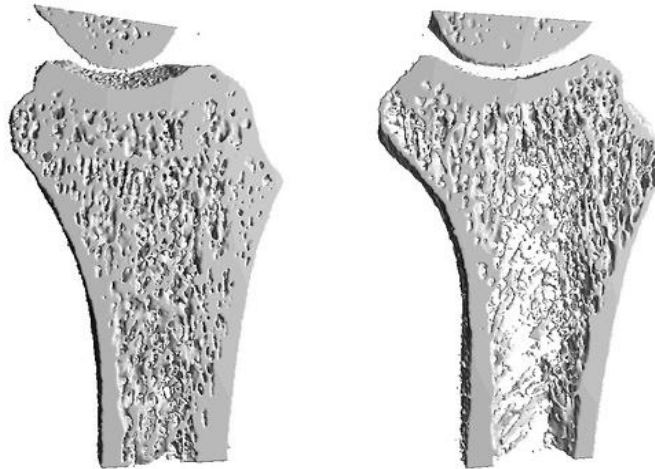


Fig. 3.1 Proceso de adaptación trabecular ósea.

Una de las cualidades del método HCA es que este reduce las inestabilidades numéricas usando los principios de los autómatas celulares (CAs), los cuales asemejan a los sistemas dinámicos discretos, pues cada autómata celular corresponde a un espacio de una malla regular en el espacio, y cada CA tendrá asociado un estado entre un número finito de estados posibles. El estado de un CA en un instante dado, dependerá de su estado anterior y del de sus CAs vecinos. En el algoritmo, la actualización de los estados de toda la red de CAs se actualiza de forma sincronizada, por lo cual el tiempo en un sistema de CAs es también una variable discreta.

En la Fig. 3.2 se pueden apreciar diferentes tipos de vecindades (CAs azules) elementales para 4 distintos CAs (grises), por vecindad entiéndase al conjunto de elementos que rodean a un CA en cuestión. La importancia del tipo de vecindario radica en que este tiene una gran influencia en la determinación del estado de cada CA, y dependiendo de este estado se modificará cada variable de diseño (densidad de cada elemento o CA) para lograr el estado objetivo determinado por Ec. (2.72), la cual es expresada en energía de deformación de cada elemento.

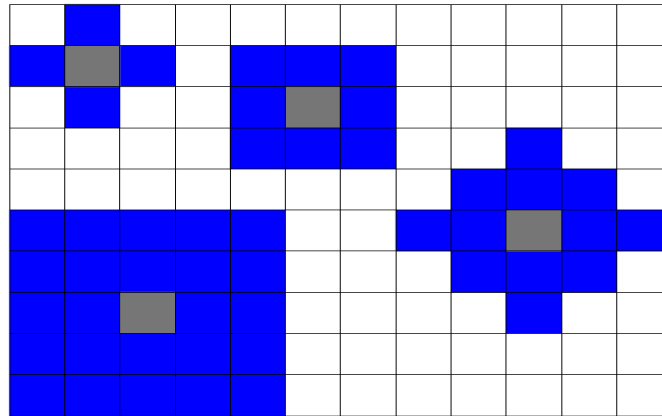


Fig. 3.2 Tipos de vecindades elementales.

El algoritmo de optimización utilizado hace uso de autómatas celulares (CAs), así como también de un análisis de elemento finito que en conjunto con técnicas de control logran la evolución de las variables de estado (espesor elemental) de cada CA. Esta evolución está enfocada en alcanzar el valor establecido por la Ec. (2.72) la cual determina la energía de deformación objetivo u óptima para cada autómata celular. El proceso de optimización comienza evaluando por medio de FEM la estructura inicial con el correspondiente espesor (variables de diseño) inicial, con lo cual se obtendrán las variables de estado (energía de deformación volumétrica) para cada elemento dentro del dominio de diseño. Posteriormente se comparan los valores de las variables de estado y del objetivo definido por la Ec. (2.72), esto se hace tomando en cuenta el valor efectivo de cada vecindario dentro del dominio de diseño. La diferencia existente entre el objetivo y el valor actual de las variables de estado determinarán la forma de actuar de la regla de evolución, la cual actualizará las variables de diseño elementales (espesores). Finalmente con las variables de diseño actualizadas se obtienen los correspondientes valores de la energía de deformación elemental. El resultado obtenido es comparado con el estado anterior de las variables de estado. Si el valor actual es igual o menor al valor mínimo de tolerancia considerado en algoritmo, este se detiene, de otra manera se vuelve a realizar un análisis MEF para determinar el nuevo estado de las variables de estado y se repite el método hasta lograr la convergencia (ver Fig. 3.3).

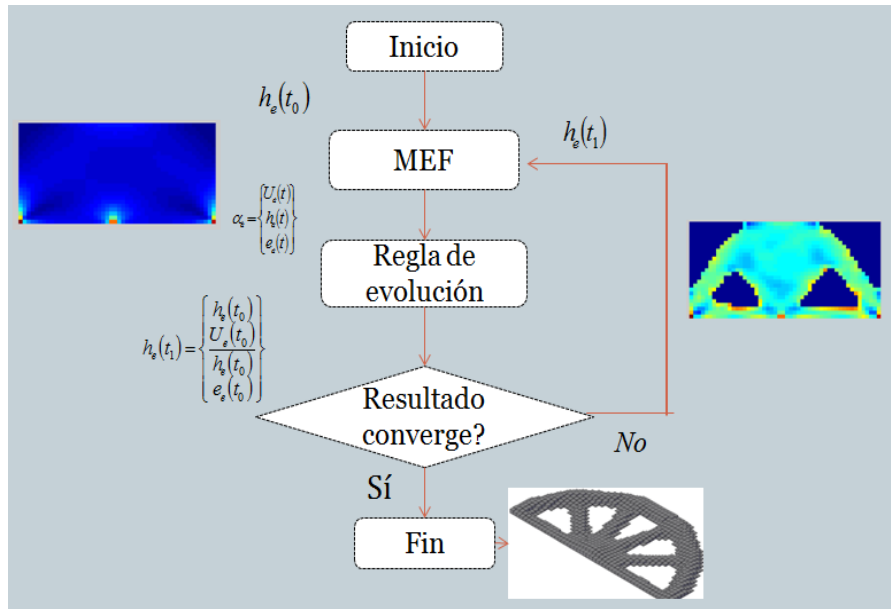


Fig. 3.3. Diagrama de flujo del algoritmo de optimización.

Debido a que el método HCA ofrece una fácil integración de análisis de elemento finito con reglas de evolución, esto lo hace una buena herramienta para resolver problemas de optimización estructural, pues el algoritmo de optimización topológica selectivamente modifica la variable de diseño de cada elemento tratando de que cada autómatas celular alcance su valor objetivo u óptimo establecido en función de variables de estado. Los autómatas celulares son idealizaciones de un sistema físico en el cual el espacio y el tiempo son discretos, y 5 características fundamentales son:

- Posición discreta dentro del dominio.
- Evolución de sus variables de estado en pasos de tiempo discretos.
- Cada CA puede tener un valor de un conjunto finito.
- El valor de todos los CA evoluciona de acuerdo a la misma regla de evolución.
- Las reglas de evolución dependen solamente del vecindario local.

3.2 Técnicas de control

Considerando que la Ec. (2.72) determina el valor óptimo u objetivo de la energía de deformación volumétrica elemental dentro del espacio de diseño, lo que resta son establecer reglas control de cada elemento (CA) para lograr un error de cero entre la energía de deformación de cada elemento y la energía de deformación objetivo. El error

efectivo de un elemento se determina utilizando la señal de error del CA en cuestión y la señal de error del vecindario, tal como se muestra a continuación.

$$\bar{e}_e(t) = \left[\frac{e_e(t) + \sum_{k=1}^N e_k(t)}{N+1} \right] \quad (3.1)$$

Donde el error se define como la diferencia entre la diferencia de la energía de deformación volumétrica y la energía de deformación objetivo.

$$e_e(t) = \frac{U_e(t)}{h_e(t)} - \frac{U_e^*}{h_e^*} \quad (3.2)$$

Donde U_e^*/h_e^* es el valor optimo determinado por Ec. (2.72).

Por lo anterior el cambio en el espesor elemental puede ser expresado como una función del error efectivo:

$$h_e(t+1) = h_e(t) + \Delta h_e(t) \quad (3.3)$$

$$\Delta h_e(t) = f(\bar{e}_e(t)) \quad (3.4)$$

Donde la condición de equilibrio se define como:

$$\bar{e}_e(t) = 0 \quad (3.5)$$

Una vez definido el error efectivo como una función del espesor elemental se pueden utilizar las siguientes técnicas de control [68].

- Control dos Posiciones
- Control proporcional
- Control integral
- Control derivativo
- Control por relación

3.2.1 Control dos posiciones

Con este tipo de control el cambio local en la variable de diseño es constante (C_{DP}) y solo depende del signo del error efectivo.

$$f(\bar{e}_e(t)) = \begin{cases} C_{DP} & \text{si } \bar{e}_e(t) > 0 \\ 0 & \text{si } \bar{e}_e(t) = 0 \\ C_{DP} & \text{si } \bar{e}_e(t) < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

3.2.2 Control proporcional

Esta función de control es directamente proporcional al error efectivo de cada elemento.

$$f(\bar{e}_e(t)) = \begin{cases} C_P \cdot \bar{e}_e(t) & \text{si } \bar{e}_e(t) > 0 \\ 0 & \text{si } \bar{e}_e(t) = 0 \\ C_P \cdot \bar{e}_e(t) & \text{si } \bar{e}_e(t) < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

3.2.3 Control integral

En este caso la función de control afecta el cambio de espesor respecto al cambio unitario en el tiempo, considerando un estado previo de la energía de deformación efectiva.

$$f(\bar{e}_e(t)) = \begin{cases} \sum_{\lambda=0}^{\bar{t}} C_1(t-\lambda) \cdot \bar{e}_e(t-\lambda) & \text{si } \bar{e}_e(t) > 0 \\ 0 & \text{si } \bar{e}_e(t) = 0 \\ \sum_{\lambda=0}^{\bar{t}} C_1(t-\lambda) \cdot \bar{e}_e(t-\lambda) & \text{si } \bar{e}_e(t) < 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

3.2.4 Control derivativo

Con este tipo de control, el cambio en el espesor elemental es proporcional a la derivada del error efectivo con respecto al cambio unitario del tiempo.

$$f(\bar{e}_e(t)) = \begin{cases} C_D(\bar{e}_e(t) - \bar{e}_e(t-1)) & \text{si } \bar{e}_e(t) > 0 \\ 0 & \text{si } \bar{e}_e(t) = 0 \\ C_D(\bar{e}_e(t) - \bar{e}_e(t-1)) & \text{si } \bar{e}_e(t) < 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Finalmente cabe mencionar que la selección de las constantes involucradas en los diferentes métodos de control son de vital importancia para garantizar la convergencia y estabilidad del método de los HCA.

3.3 Implementación en Matlab®

La implementación del método HCA en Matlab está conformada por una sección de definición del problema (carga estática) y propiedades mecánicas del material, una sección de análisis de elemento finito (FEM) con la cual se determina la energía de deformación elemental y el esfuerzo de Von Mises elemental, una sección de condiciones de optimalidad en la cual se seleccionan los elementos que cumplan con la restricción de esfuerzo, una sección de reglas de evolución con las cuales se determinan los nuevos espesores y una sección de convergencia en la cual se define la estructura final (ver Fig. 3.4).

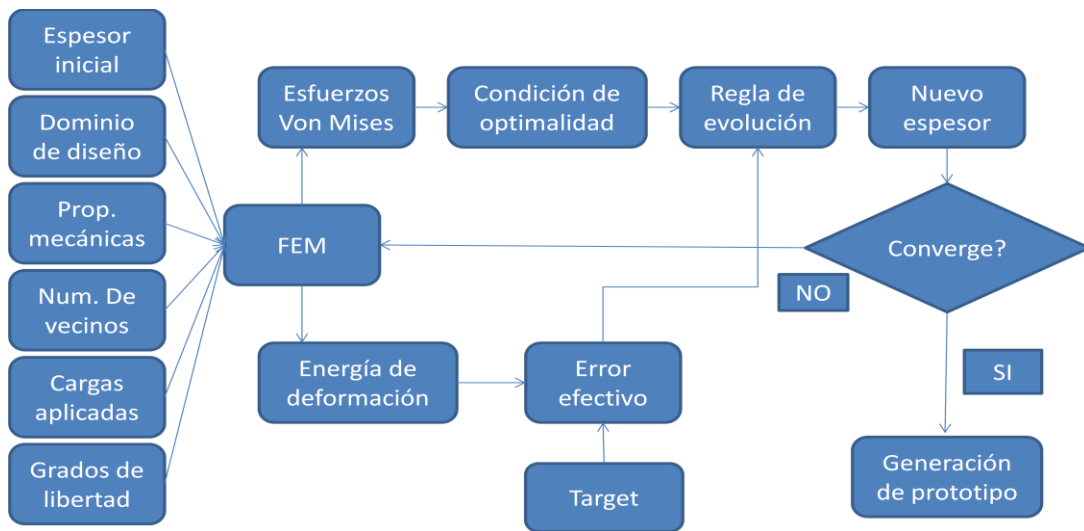


Fig. 3.4. Diagrama de implementación del algoritmo de optimización.

Capítulo 4

Consideraciones del método de elemento finito y técnicas de control de los autómatas celulares híbridos.

4.1. Introducción

En este capítulo se determina el tipo de problema estructural analizado durante las diferentes iteraciones que realiza el método de optimización de los HCA. Además de esto se establece el tipo de elementos utilizados por el método del elemento finito durante el proceso de optimización, y también se definen los tipos de vecindarios utilizados por los CAs y la variación de estos en las fronteras del dominio de diseño. Otro punto que se trata es el establecer un criterio para la búsqueda del mejor diseño “óptimo” por medio de curvas de Pareto. Finalmente se establece el criterio a ser usado para determinar los objetivos que tienen que cumplir los diseños óptimos obtenidos utilizando el método de los HCA.

4.2 Comportamiento de los sólidos

Robert Hooke descubrió en 1660 que dentro de cierto rango los desplazamientos de ciertos materiales eran proporcionales a la fuerza aplicada, estableciendo así la noción de elasticidad. Por su parte en 1678 Jacob Bernoulli publicó que el cambio de longitud era proporcional a la fuerza aplicada por unidad de área, introduciendo así el concepto de tensión como una función del alargamiento por unidad de longitud. Hoy en día se conoce como material elástico aquel que cuando bajo condiciones isotérmicas el sólido recupera su forma original después de remover las fuerzas y/o momentos causantes de la deformación.

4.3 Esfuerzo-Deformación

Cualquier sólido sujeto a una o varias cargas origina como consecuencia una intensidad de fuerzas distribuidas a través de una sección dada del sólido. Esta cantidad vectorial se conoce como esfuerzo (σ), y puede actuar en cualquier dirección dentro del sólido dependiendo del tipo de cargas aplicadas. La abstracción más utilizada para representar los esfuerzos a los que está sujeto un sólido es el uso de un pequeño cubo (ver Fig. 4.1), el

cual se imagina como una pequeña parte del sólido, y este está sujeto al conjunto de esfuerzos que actúan en cada una de sus seis caras. Una consecuencia de los esfuerzos es que producen deformaciones en el sólido. Esta dependencia entre los esfuerzos y las deformaciones sufridas por el sólido forman la base para establecer los modelos constitutivos de los materiales. A continuación se discute brevemente la ecuación constitutiva lineal que considera deformaciones infinitesimales en un sólido conocida como ley generalizada de Hooke.

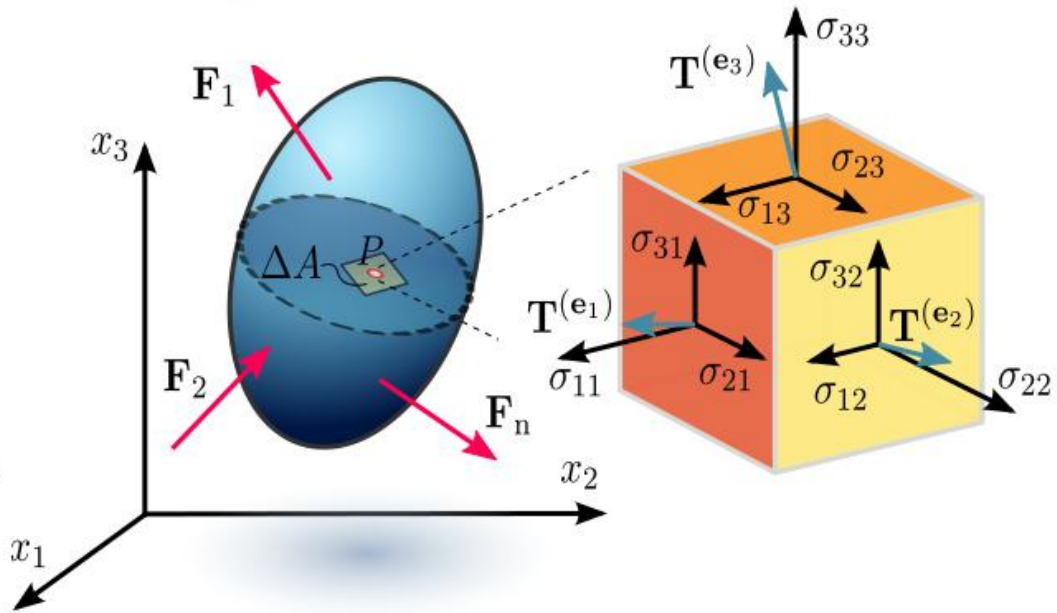


Fig. 4.1. Componentes del tensor de esfuerzos en un punto dado, causadas por la aplicación de cargas en el sólido.

La relación esfuerzo-deformación para un sólido elástico lineal, puede definirse por medio de la ecuación cuadrática de la función de la densidad de la energía de deformación, Ec. 4.2 [69], y considerando que el material se comporta como un sólido elástico de Green, el cual establece que:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (4.1)$$

Donde U_0 representa la forma cuadrática de la función de densidad de energía de deformación para un sólido elástico, donde C_0 , C_{ij} y \check{C}_{ijkl} son las constantes de rigidez del material.

$$U_0 = C_0 + C_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2!}\check{C}_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \quad (4.2)$$

A través de estas dos ecuaciones anteriores se puede obtener la relación esfuerzo-deformación de la siguiente manera:

$$\sigma_{mn} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{mn}} = C_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon_{mn}} + \frac{1}{2!} \check{C}_{ijkl} \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon_{mn}} \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \varepsilon_{mn}} \right) \quad (4.3)$$

$$= C_{ij} \delta_{mi} \delta_{nj} + \frac{1}{2} \check{C}_{ijkl} (\varepsilon_{kl} \delta_{im} \delta_{jn} + \varepsilon_{ij} \delta_{km} \delta_{ln}) \quad (4.4)$$

$$= C_{mn} + \frac{1}{2} \check{C}_{mnkl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} \check{C}_{ijmn} \varepsilon_{ij} \quad (4.5)$$

$$= C_{mn} + \frac{1}{2} (\check{C}_{mnij} + \check{C}_{ijmn}) \varepsilon_{ij} \quad (4.6)$$

$$= C_{mn} + C_{mnij} \varepsilon_{ij} \quad (4.7)$$

Donde C_{mn} representa el esfuerzo residual de los componentes del sólido, sin embargo este trabajo considera que el cuerpo es libre de esfuerzo antes de que se apliquen las cargas, por lo que se puede representar el esfuerzo en el sólido como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.8)$$

El la ecuación anterior C_{ijkl} representa el tensor de coeficientes de rigidez elástica, el cual contiene en su forma más general 81 componentes escalares, sin embargo las componentes de este tensor de cuarto orden satisfacen las condiciones de simetría de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{klij} \\ C_{ijkl} &= C_{jikl} \\ C_{ijkl} &= C_{jilk} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Debido a que el tensor de cuarto orden es simétrico bajo las condiciones anteriores el número de componentes escalares independientes se reduce a 21 [69]. La representación

más general de un material elástico por consecuencia puede ser representado por medio de notación matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. (4.10)}$$

La ecuación anterior establece la relación entre el esfuerzo y la deformación elástica que sufre un sólido bajo un estado de cargas dadas. Las componentes escalares independientes de la rigidez de un material pueden reducirse aún más, lo cual depende de la llamada dependencia simétrica del material. Esta característica se presenta en ciertos materiales como una propiedad direccional elástica.

Cuando un material presenta tres planos de simetría mutuamente ortogonales se dice que es un material ortotrópico, debido a estos planos de simetría existentes en el material los coeficientes elásticos presentes en la matriz de rigidez se reduce a 9. Utilizando matrices de transformación asociadas a los planos de simetría se obtiene la relación esfuerzo-deformación para un material orthotropic, el cual se define de la siguiente manera.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

Los coeficientes elásticos de material involucrados en la ecuación anterior son el modulo de Young (E), la razón de Poisson (ν) y el modulo de corte (G), los cuales son determinados por medio de pruebas de laboratorio. Estas constantes de material son obtenidas por medio de pruebas simples de tensión uniaxial o pruebas de cortante. Los 9 coeficientes independiente elásticos que presenta un material ortotrópico son los módulos de Young (E_1, E_2, E_3), razones de Poisson (ν_1, ν_2, ν_3) y los módulos de corte (G_{23}, G_{13}, G_{12}). El primer subíndice presente en cada propiedad elástica indica la dirección bajo la que se aplico la carga y el segundo subíndice refiere a la dirección de la deformación sufrida por el material. De igual manera un material que presente características elásticas independientes de la dirección recibe el nombre de material isotrópico, a diferencia del material orthotropic sus constantes elásticas no presentan

planos de simetría de material, pues este presenta las mismas propiedades en todas sus direcciones. Dicho lo anterior, el conjunto de propiedades ortotrópicas se puede reducir como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} (E_1 = E_2 = E_3 = E) \\ (v_{12} = v_{23} = v_{13} = v) \\ (G_{12} = G_{13} = G_{23} = G) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Bajo esta reducción de constantes elásticas del material, la relación esfuerzo-deformación para un material isotrópico puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{Bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

Utilizando la notación ingenieril esta relación puede ser expresada de una forma más compacta:

$$\sigma = D\varepsilon \quad (4.14)$$

Donde (D) es la matriz de constantes constitutivas, la cual contiene los coeficientes elásticos del material, estos a su vez dependen del comportamiento que el material presente durante las diferentes pruebas de laboratorio.

4.4. Definición del Problema Estructural

El problema de optimización estructural consiste en determinar una estructura de espesor variable, la cual minimice el peso y la energía de deformación, considerando un dominio de diseño bidimensional (25X50cm) tipo Michell [70] (ver Fig. 4.2). El dominio de diseño es discretizado en 1250 elementos, y las variables de diseño consideradas son los espesores elementales (ver Fig. 4.3).

Cuando una lámina es rolada en frío en sola dirección, la textura y el esfuerzo generados propicia que el material desarrolle propiedades elásticas de anisotropía a lo largo de la

dirección de laminado, la dirección transversal y la dirección normal presentan diferentes propiedades elásticas una de otra. Sin embargo considerando que el material después de ser procesado presenta las características de un material isotrópico debido al proceso de recocido al que fue sujeto, se puede establecer que el problema estructural debido a sus características geométricas, las cuales consideran a las dimensiones en el plano (x,y) mucho más grandes que las dimensiones utilizadas en la dirección (Z) como espesor, el problema puede ser considerado como un problema de esfuerzo plano.

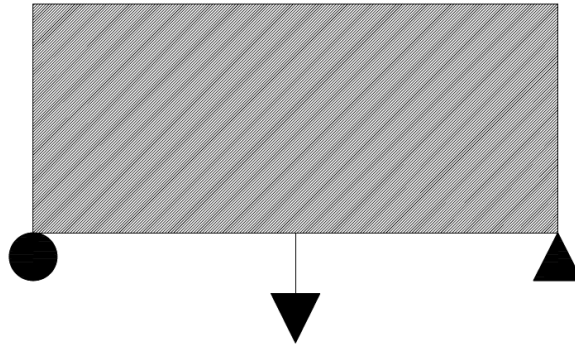


Fig. 4.2. Problema bidimensional mostrando una viga simplemente apoyada tipo Michell.

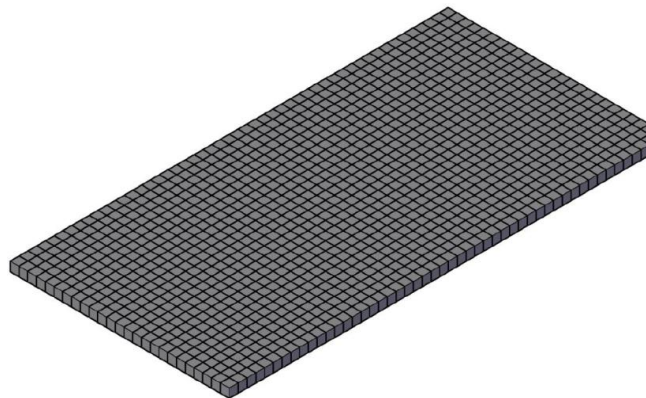


Fig. 4.3. Espacio de diseño discretizado.

En mecánica estructural, al plano localizado entre las dos caras de una estructura de lámina se le denomina plano medio, este plano considera su dirección normal en dirección transversal a la lámina, y las direcciones paralelas al plano medio son llamadas direcciones de plano. Orientando el eje global Z a lo largo de la dirección transversal y los ejes X e Y, se puede formar un sistema de plano cartesiano de mano derecha (ver Fig. 4.4).

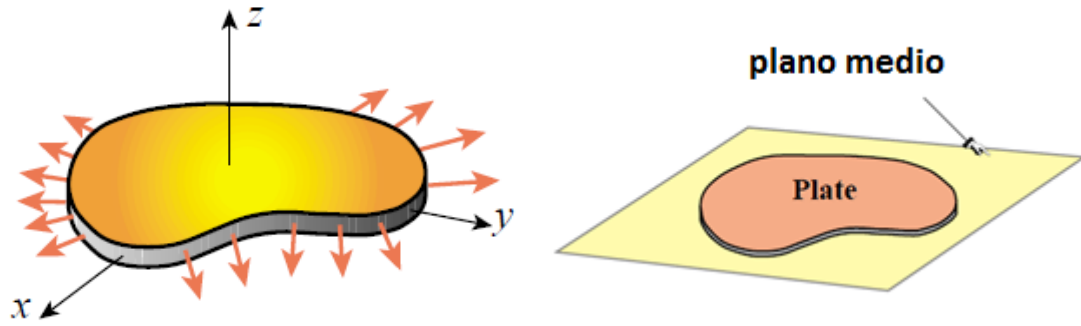


Fig. 4.4. Sistema de coordenadas para el análisis del comportamiento mecánico de la lámina y plano medio [71].

Una estructura que presente un espesor pequeño comparado con las dimensiones en el plano perpendicular a la dirección del espesor, puede ser considerado un problema de esfuerzo plano, si las siguientes suposiciones son cumplidas:

- Todas las cargas aplicadas en la lámina actúan en la dirección del plano medio, y son simétricas con respecto al plano medio.
- Las condiciones de soporte son simétricas con respecto al plano medio.
- Los desplazamientos, las deformaciones y esfuerzos pueden ser consideradas como uniformes a través del espesor de la lámina.
- Los componentes de esfuerzo normal y cortante en la dirección z son cero o insignificantes: $\sigma_{xz} = 0$, $\sigma_{yz} = 0$, $\sigma_{zz} = 0$
- La lámina está fabricada del mismo material a lo largo del espesor, tales láminas son llamadas transversalmente homogéneas.

Al formular el problema estructural considerando las suposiciones anteriormente mencionadas, se puede simplificar el problema de elasticidad de tres dimensiones (Ec. (4.13)) a un problema elástico bidimensional, donde la relación esfuerzo-deformación para un estado de esfuerzos está definido por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Dado que el proceso de optimización considera como variables de diseño a los diferentes espesores que conforman el espacio de diseño, para mantener un estado de esfuerzos plano (ver Fig. 4.5) los espesores elementales deberán de variar gradualmente dentro del

espacio de diseño [71]. El proceso de optimización descrito en el capítulo anterior utiliza la variación de los espesores elementales para determinar estructuras de espesor variable, por lo que la variación gradual de los espesores en el espacio de diseño es una restricción que debe de ser cumplida para el correcto análisis del modelo elástico bidimensional generado en cada iteración.

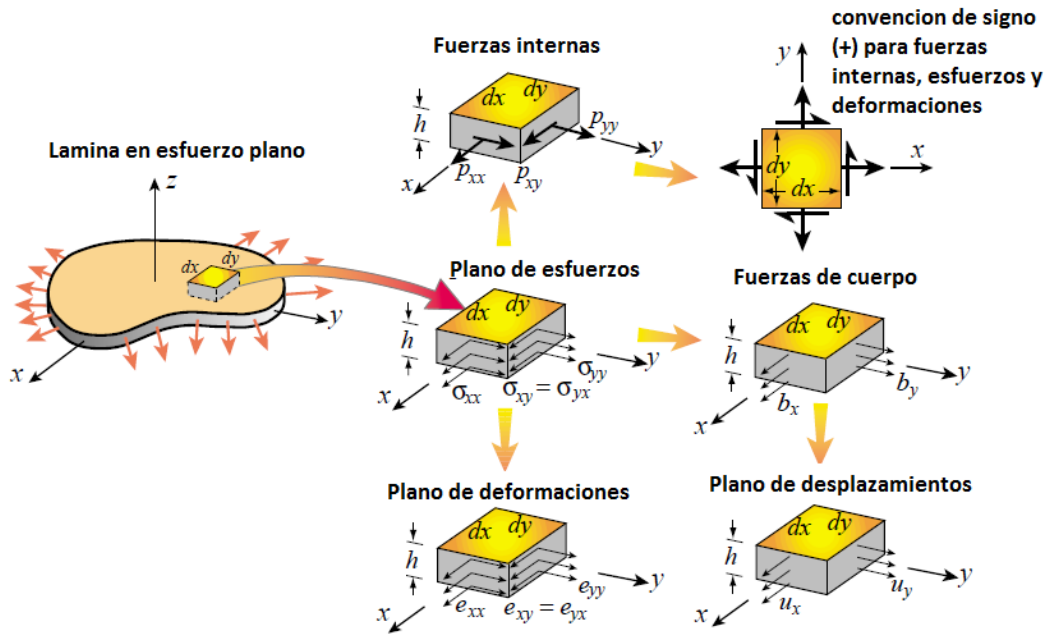


Fig. 4.5. Fuerzas, deformaciones y desplazamientos presentes en un problema de esfuerzo plano [71].

4.5. Variables de control

El procedimiento de optimización de los HCA tiene como objetivo principal alcanzar un estado de equilibrio (Ec. (3.5)), sin embargo para cada uno de los diferentes elementos que conforman todo el espacio de diseño, las cantidades efectivas utilizadas para evolucionar el estado de los HCA (Ec. (3.6) a Ec. (3.9)) involucran a los vecinos del CA analizado y constantes de control. El vecindario involucrado en el cálculo de las variables de estado efectivas no es el mismo para todos los elementos dentro del espacio de diseño. Los CAs que se encuentran en el perímetro del espacio de diseño consideran un vecindario menor que los elementos que se encuentran dentro del espacio de diseño (Ver Fig.4.5), debido a esto las vecindades utilizadas para los elementos que conforman el perímetro son modificadas o extendidas. En la Tabla 4.1 se aprecia el número de vecinos considerados para las vecindades extendidas de los elementos que se encuentran sobre el perímetro del espacio de diseño (ver Fig. 4.6), con esta modificación se pretendió

estabilizar las variaciones en las cantidades efectivas que presentaban los elementos interiores y los elementos en el perímetro del dominio de diseño.

Tabla 4.1. Vecindarios considerados en el método de los HCA.

Vecindario de CAs internos	Vecindario de CAs en perímetro
0	4
4	8
8	12
12	24
24	24

La Tabla 4.1 muestra los valores implementados en el algoritmo de optimización de los HCA, sin embargo cualquier combinación de vecindades puede ser considerada, sin embargo los mostrados en la Tabla 4.1 mostraron mejores resultados que cualquier otro tipo de vecindarios.

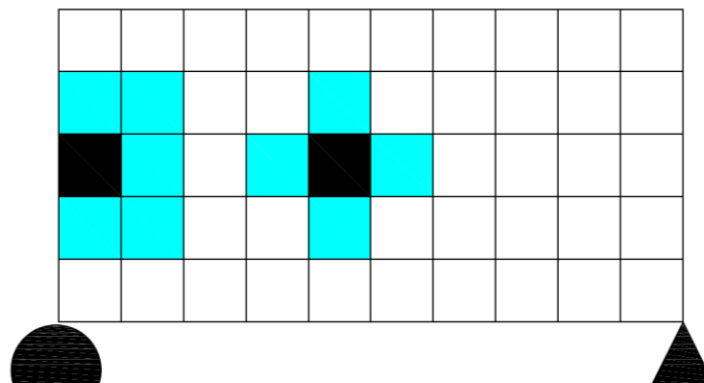


Fig. 4.6. Vecindario de 4 elementos para CAs interiores y vecindad de 8 elementos en la frontera del dominio de diseño.

En el capítulo anterior el problema de optimización se describió como un problema multiobjetivo (ver Ec. (2.72)), por lo que el problema puede tener un número infinito de soluciones “óptimas” [72]. De esta forma la determinación de la mejor solución dependerá de las preferencias del diseñador respecto al factor de peso que se decida asignar a cada función objetivo, esto puede traducirse en que el diseño preferido por el diseñador dentro de todo el conjunto de diseños posibles será el preferido por el diseñador y no el óptimo [72].

Las metodologías que permiten al diseñador la posibilidad de seleccionar la mejor solución en un problema multiobjetivo, los cuales típicamente tienen un finito número de soluciones óptimas, son llamadas optimizaciones multiobjetivo [72]. Estas metodologías

buscan la mejor solución dentro del todo el espacio de diseño, y comúnmente la optimización multiobjetivo es asociada con la construcción de la frontera de Pareto, en el que cada punto de esta frontera representa una solución en el espacio factible de la función objetivo del problema multiobjetivo. De esta forma considerando un par de soluciones de la función objetivo que conformen la frontera de Pareto, se puede demostrar que la mejora de alguno de sus componentes implica una degeneración en los otros [70], esto provoca que las decisiones de los diseñadores por seleccionar la mejor solución del conjunto de soluciones que conforman la frontera de Pareto, sea basado en las preferencias y exigencias que necesite cubrir el diseñador.

La metodología utilizada para determinar la mejor solución dentro de los puntos “óptimos” que conforman las frontera de Pareto, utiliza dos puntos ancla los cuales corresponden a los extremos de la frontera de Pareto (ver Fig. 4.7), estos puntos ancla corresponden al valor mínimo permisible para cada función objetivo, los cuales son obtenidos ponderando con el máximo valor posible a las funciones objetivo. La Tabla 4.2 muestra los factores de peso utilizados durante el proceso de optimización utilizados por los HCA para generar el conjunto de diseños que conforman la frontera de Pareto, los cuales presentan diferentes pesos y energías de deformación, una vez determinada la frontera de Pareto la selección del diseño dependerá de las exigencias requeridas.

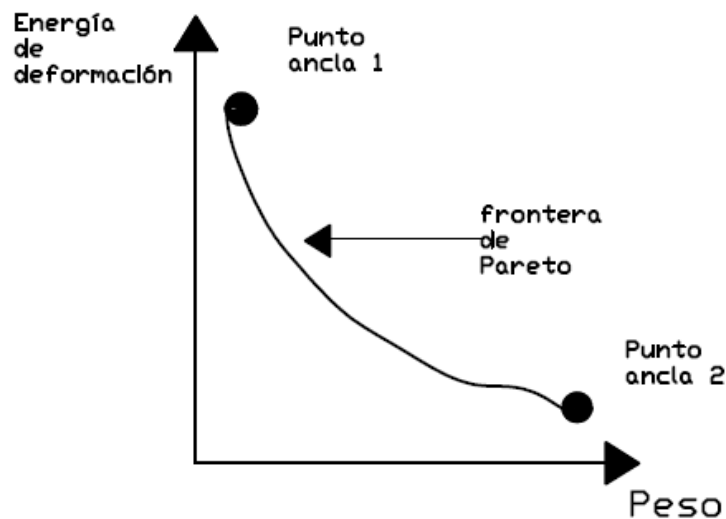


Fig. 4.7. Frontera de Pareto, limitada en los extremos por los puntos ancla.

Con el objetivo de establecer una serie de pruebas consecutivas variando los factores de peso de las funciones objetivo de la Ec. (3.36) y el tipo de vecindario utilizado durante el proceso de optimización, estas variaciones se enlistan en las Tablas 4.1 y 4.2.

Tabla 4.2. Factores de peso utilizados en el proceso de optimización.

Factores de peso	
Masa	Energía de deformación
0.05	0.95
0.1	0.9
0.15	0.85
0.2	0.8
0.25	0.75
0.3	0.7
0.35	0.65
0.4	0.6
0.45	0.55
0.5	0.5
0.55	0.45
0.6	0.4
0.65	0.35
0.7	0.3
0.75	0.25
0.8	0.2
0.85	0.15
0.9	0.1
0.95	0.05

Las extensiones en las fronteras del dominio de diseño son también puntos clave dentro del proceso de optimización, pues como se mencionó en el capítulo anterior las cantidades efectivas son calculadas de diferente manera dependiendo la vecindad que considera cada elemento dentro del espacio de diseño. Un ejemplo de lo anterior se muestra en la Fig. 4.8, en la cual se muestra como las cantidades efectivas utilizadas para calcular el error, consideran más elementos en las fronteras del espacio de diseño que los elementos que se encuentran fuera del perímetro del dominio.

Los factores utilizados por las técnicas de control introducidas en el capítulo anterior son también de vital importancia durante el proceso de optimización por lo que durante el proceso de optimización se experimentó con diferentes factores y técnicas de control. En la Tabla 4.3 se muestran algunos de los factores utilizados por las técnicas de control. Debido al gran número de combinaciones posible que existen al realizar el proceso de optimización utilizando los HCA (ver Fig. 4.9), sólo se realizaron 150 corridas. Las corridas mencionadas consideraron las vecindades mostradas en la Tabla 4.1, los factores de peso de la Tabla 4.2 y los factores de control contenidos en la Tabla 4.3, así como las diferentes

técnicas de control. De todo el conjunto de los resultados obtenidos se seleccionó solo aquellos que no mostraban inestabilidad numérica. Las diferentes combinaciones de los factores involucrados en el proceso de optimización utilizados en este trabajo son presentados en el anexo.

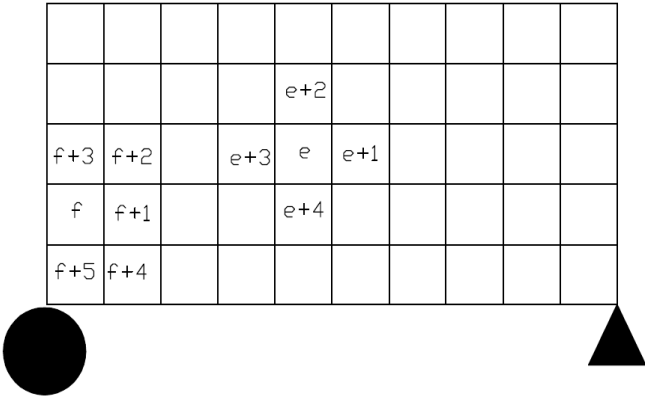


Fig. 4.8. El espacio de diseño discretizado muestra dos tipos de vecindarios.

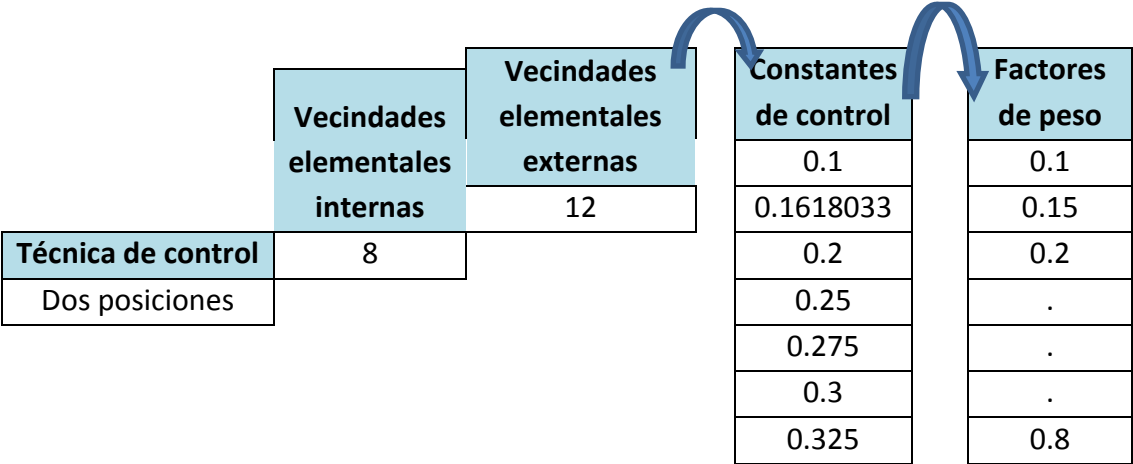


Fig. 4.9. Fragmento de las posibles combinaciones de variables a considerar durante el proceso de optimización.

Sin embargo dentro de todo el conjunto de corridas realizadas, las que consideraban la técnica de control dos posiciones presentaron una mejor estabilidad numérica, así como también que los HCA presentaban un error efectivo menor que en los casos que consideraban otras técnicas de control. Los resultados obtenidos más representativos de esta técnica así como los mejores resultados obtenidos por otras técnicas de control son presentados en el siguiente capítulo junto con graficas y datos estadísticos de los valores finales de los HCA con respecto al valor óptimo establecido por la Ec. (2.72).

Tabla 4.3. Factores involucrados en el proceso de diseño.

Casos	Regla de control	
	C	w
1	0.1	0.1
2	0.1618033	0.15
3	0.2	0.2
4	0.25	0.25
5	0.275	0.3
6	0.3	0.35
7	0.325	0.4
8	0.35	0.45
9	0.375	0.5
10	0.4	0.55
11	0.425	0.6
12	0.45	0.625
13	0.475	0.65
14	0.5	0.7
15	0.525	0.75
16	0.55	0.8

4.6. Consideraciones del Método de Elemento Finito

Otro factor importante en el proceso de optimización es el elemento utilizado en el método del elemento finito, pues este nos proporciona la cantidad de energía de deformación de los CA y por consecuencia de todo el diseño durante el proceso iterativo. Este trabajo considera solamente dos tipos de elementos, elementos triangulares de 3 nodos lineales y elementos cuadrangulares de cuatro nodos lineales.

4.6.1 Mallado del espacio de diseño

Los elementos finitos utilizados para discretizar el espacio de diseño son usados para formar los CAs correspondientes. En el caso de los elementos cuadrados cada elemento finito toma el papel de un CA (ver Fig. 4.10) en el algoritmo de optimización, por otro lado dos elementos triangulares forman un CA en el espacio de diseño (ver Fig. 4.11).

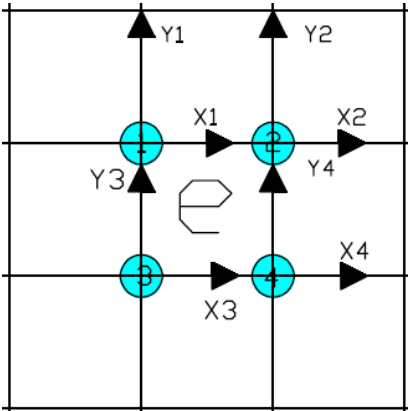


Fig. 4.10. Mallado con elementos cuadrados en el que cada CA corresponde a un elemento cuadrado.

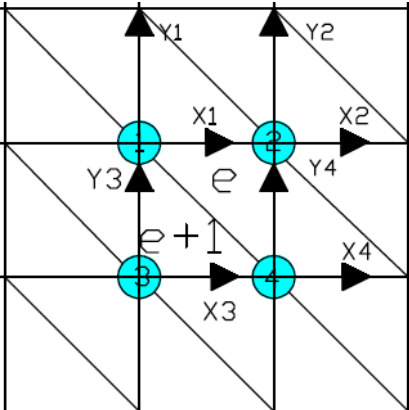


Fig. 4.11. Mallado triangular del dominio de diseño, en el que cada CA se conforma por la unión de dos elementos.

En el caso del mallado que utiliza elementos cuadrados, la energía de deformación y el peso de cada CA se calculan utilizando las ecuaciones (4.17) y (4.17) respectivamente.:

$$U_e = \frac{1}{2} h_e u_e^T k^0 u_e \tag{4.17}$$

$$m_e = h_e m_0 \tag{4.18}$$

La ecuación anterior define que la energía de deformación para un CA depende de su espesor elemental h_e y de los valores de desplazamiento nodales del elemento cuadrado (ver Fig. 4.10), donde el termino k^0 define la matriz de rigidez elemental unitaria de un elemento, de forma similar en la Ec. (4.17) la densidad está representada por m_0 , la cual tiene las unidades de Kg/cm^3 , y h_e define el espesor elemental en cm , para ser congruentes con las unidades, todo los elementos que conforman el espacio de diseño discretizado tienen un area elemental de $1 cm^2$, (ver Fig.4.12).

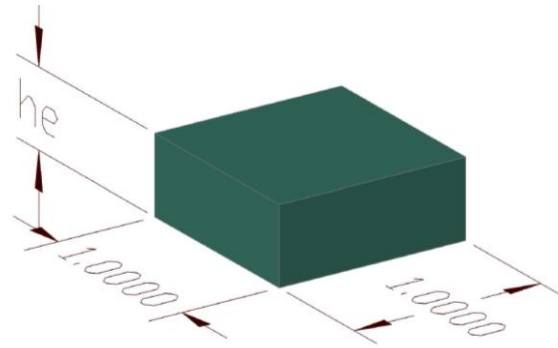


Fig. 4.12. CA utilizado para discretizar el espacio de diseño.

La energía interna elástica total de la estructura del espacio de diseño Ω (ver Fig. 4.13) puede definirse de la siguiente manera:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} h \sigma^T \varepsilon d\Omega \quad (4.19)$$

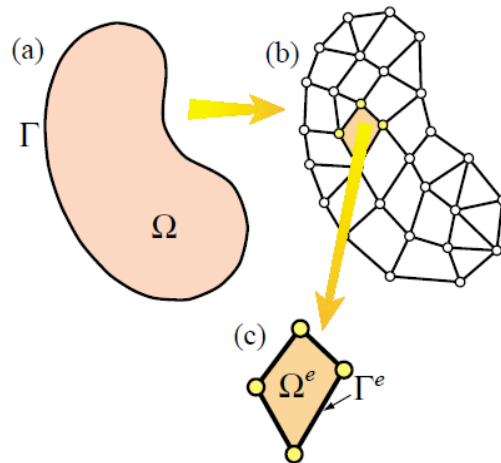


Fig.4.13. a) Espacio de diseño Ω , b) espacio de diseño discretizado en “N” elementos, c) elemento cuadrado lineal de 4 nodos [73].

Cuando el algoritmo de optimización utiliza elementos triangulares en la formulación MEF, los HCA están conformados por la unión de dos elementos triangulares por lo que su la energía de deformación de un CA está definida por la Ec. (4.20).

$$\bar{U}_e = \frac{1}{2} (U_1 + U_2) \quad (4.20)$$

Donde U_1 y U_2 son las energías de deformación de los elementos triangulares que conforman cada CA.

De manera similar el peso de cada CA formado por elementos triangulares es definido por la Ec. (4.22), donde el peso de cada elemento triangular está determinado por la Ec. (4.21).

$$M_e = \frac{1}{2} h_e m_0 \quad (4.21)$$

$$M_e = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) \quad \text{Ec. (4.22)}$$

De la Ec. (4.7) M_1 y M_2 definen el peso de los elementos triangulares que conforman el CA.

Capítulo 5

Casos de estudio

5.1. Introducción

En este capítulo se determinan los tipos de problemas analizados en este trabajo, los cuales son estructuras tipo Michell con una carga puntual. La primera parte de este capítulo consiste en la determinación de las mejores técnicas de control y vecindarios elementales para determinar la estructura que minimice el peso y la energía de deformación de una estructura simplemente apoyada, la cual no presente restricciones de zonas sin material. El uso de medidas de dispersión, así como de histogramas son utilizados para determinar la eficiencia de cada técnica de control, además de analizarse los esfuerzos elementales del prototipo generado. La segunda parte del capítulo se enfoca en la obtención curvas de Pareto a partir de la variación del factor de peso que pondera la función de la energía de deformación y la función de masa de la estructura, esto con el objetivo de establecer que a diferentes factores de peso se generan diferentes estructuras óptimas, además aquí se consideran estructuras que con restricciones de agujeros. La parte final del capítulo detalla la metodología utilizada para determinar una estructura óptima que minimice la anergia de deformación y/o la masa de la estructura dependiendo de las necesidades establecidas por el diseñador, también se presentaran los prototipos generados para los distintos casos tratados en este capítulo considerando esta metodología.

5.2. Estructuras de Michell

La optimización estructural tiene sus inicios a principios del siglo XX con Michell [16], en su trabajo de 1904 estableció las condiciones para optimizar estructuras simplemente cargadas, siendo así el pionero de la optimización estructural. Michell estableció un criterio matemático con el cual buscaba determinar el peso mínimo necesario en el diseño de estructuras, consiguiendo así las primeras soluciones al problema de optimización estructural. Algunas de los resultados obtenidos por Michell se muestran en la Fig. 5.1, de los cuales su metodología de optimización se basaba en un criterio de deformaciones prescritas para una estructura con un mínimo volumen con lo cual se lograba un sistema equilibrado de fuerzas. Sin embargo la limitación de esta teoría matemática consistía en

que era sólo aplicable para condiciones de carga muy simples pues el método falla para un caso con múltiples cargas y cargas dinámicas.

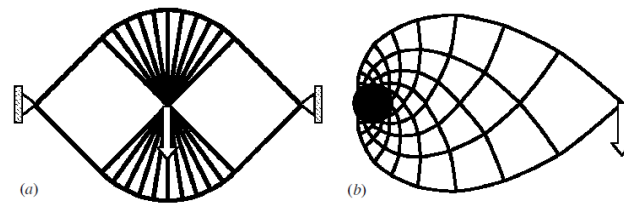


Fig. 5.1. Soluciones propuestas por Michell (a) viga simplemente apoyada y una carga puntual, (b) viga en voladizo y una carga puntual en el extremo.

Las estructuras y problemas de optimización tratados por Michel hace más de 100 años consideraban vigas simplemente apoyadas con una carga puntual y vigas en voladizo. En el campo de la optimización estructural este tipo de problemas son conocidos como estructuras tipo Michell.

En la siguiente sección se presentan el grupo de factores que mejores resultados arrojaron durante el proceso de optimización de estructuras tipo Michell.

5.3. Viga simplemente apoyada con una carga puntual

El primer caso analizado es el de una viga simplemente apoyada con una carga puntual en el centro de la viga. Las propiedades del material, las dimensiones de la estructura inicial, así como la fuerza aplicada son mostradas en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1. Constantes del material y características geométricas iniciales del problema de optimización.

Características del problema	Cantidad
Módulo de Young (N/cm ²)	2.00E+07
Relación de Poisson	0.3
Esfuerzo máximo permisible (N/cm ²)	2.50E+04
Ancho de la viga (cm)	25
largo de la viga (cm)	50
Espesor inicial (cm)	1
Masa inicial elemental (Kg)	0.0078
Fuerza aplicada (N)	1.00E+05

Una vez definidas las características del problema de optimización, se obtiene la energía de deformación inicial de la estructura y se sustituye junto con los valores de la Tabla 5.1 en la Ec. (2.72) obteniendo de esta manera la energía de deformación elemental óptima de 5.424 N-cm/cm^3 . A continuación se mostrará solo un fragmento de los resultados obtenidos. De un total de 150 experimentos realizados, los prototipos de estructuras de espesor variable que presentaban una distribución más homogénea de energía de deformación, fueron los que consideraban la técnica de control dos posiciones, y control integral. En la Tabla 5.2 se pueden apreciar las distribuciones estadísticas con respecto a la energía de deformación de algunos experimentos que consideraban las 2 diferentes técnicas de control mencionadas, y diferentes tipos de vecindades.

La Tabla 5.2 muestra las mejores distribuciones de la energía de deformación de los mejores prototipos obtenidos, en esta tabla se puede observar que esta variable de estado (energía de deformación) de los CAs presenta una distribución Exponencial o Logística según sea el caso.

Tabla 5.2. Distribución estadística de la energía de deformación

Técnica de control	Vecindades		Distribución			
			Logística		Exponencial	
	Internas	Perímetro	Media N cm/cm ³	Varianza (N cm/cm ³) ²	Media N cm/cm ³	Varianza (N cm/cm ³) ²
Dos posiciones	4	8	2.6949	3.69445		
Control derivativo	4	8			1.2456	1.55151
Control proporcional	4	8	Inestable			
Dos posiciones	8	12	4.12987	7.40146		
Control derivativo	8	12			1.9142	3.66418
Control Integral	8	12	4.19439	7.5929		
Control proporcional	8	12	Inestable			

Dado que los diferentes CAs que conforman un prototipo presentan diferentes energías de deformación, es necesario establecer una medida de dispersión o centralización de la energía de deformación que presentan los CAs en los diferentes prototipos generados. La varianza puede ser utilizada para definir la dispersión de los datos de la energía de deformación con respecto a la media del conjunto de datos, pues los prototipos buscados con el método HCA se busca presenten una varianza de cero. Debido a que los esfuerzos

elementales están relacionados con la energía de deformación elemental, la dispersión que presente la energía de deformación será similar a la que presente los esfuerzos elementales.

La Tabla 5.2 muestra que la técnica de control derivativa presenta la menor varianza de las técnicas de control mostradas, lo cual indica que los CAs tienden a presentar una energía de deformación muy similar entre ellos. Sin embargo los valores de energía de deformación elementales que presentan los CAs que conforman los diferentes prototipos deben de ser comparados con la energía de deformación objetivo, la cual es establecida por la Ec. (2.72) y como se mencionó anteriormente tiene un valor de 5.424 N-cm/cm^3 . Estableciendo una medida de las desviaciones de los datos respecto al valor objetivo, se calcula la dispersión de los datos con respecto al objetivo de la energía de deformación tal como se muestra en la Ec. (5.1). Los resultados son mostrados en la Tabla 5.3, y estos resultados demuestran que la técnica de control integral proporciona mayor cantidad de elementos que presentan la energía de deformación óptima.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{e=1}^N (U_e - U_0)^2 \quad \text{Ec. (5.1)}$$

La Ec. (5.1) debido a su semejanza con la varianza y para fines prácticos será definida en lo que resta del capítulo como la varianza respecto al valor óptimo y no respecto al valor medio del conjunto de datos. Donde N es el número de CAs que conforman el prototipo, U_e es la energía de deformación elemental y U_0 es la energía de deformación óptima establecida por la Ec. (2.72).

Tabla 5.3. Medidas de dispersión de la energía de deformación con respecto a la energía de deformación óptima definida para la viga simplemente apoyada con una carga puntual.

Técnica de control	Vecindades		Medida de dispersión		
	Internas	Perímetro	Desv. Std. N cm/cm ³	Varianza (N cm/cm ³) ²	Valor objetivo N cm/cm ³
Dos posiciones	4	8	3.223485	10.39086	5.424
Control derivativo	4	8	4.51595	20.3939	5.424
Control proporcional	4	8	Inestable		5.424
Dos posiciones	8	12	2.99146653	8.948872	5.424
Control derivativo	8	12	9.467234	89.6285	5.424
Control Integral	8	12	2.8510439	8.12845	5.424
Control proporcional	8	12	Inestable		5.424

Las medidas de dispersión mostradas en Tabla 5.3 fueron obtenidas utilizando la energía de deformación de todos los CAs que conforman los diferentes prototipos obtenidos utilizando las diferentes técnicas de control. En la tabla se puede apreciar que la técnica de control integral proporciona una varianza de $8.12845 \left(N - \frac{cm}{cm^3} \right)^2$, y esta nos indica la variabilidad que presentan los CAs dentro del prototipo con respecto al valor objetivo de la energía de deformación. Además recuérdese que a menor varianza con respecto a la energía de deformación óptima mayor el número de CAs que presentan el valor óptimo establecido. Las diferentes varianzas que se presentan en las Tablas 5.2 y 5.3 son consecuencia de que en la Tabla 5.2 se muestra la varianza con respecto al valor medio de la energía de deformación de los CAs que conforman el prototipo, mientras que en la Tabla 5.3 muestra la dispersión de la energía de deformación con respecto al valor óptimo establecido.

Como se mencionó al inicio de este capítulo la obtención de prototipos que presenten uniformidad en la energía de deformación elemental por medio de la variación de espesores y que al mismo tiempo cumplan con la restricción de esfuerzo límite, depende de la efectividad de la regla de evolución involucrada en las técnicas de control para alcanzar el objetivo establecido. Las medidas de dispersión proporcionan una cantidad numérica la cual nos indica la variabilidad de la energía de deformación que presenta el prototipo. Una manera gráfica de evaluar la eficacia de cada técnica de control es por medio de un histograma de frecuencias, con el cual se obtiene la cantidad de elementos del prototipo con el valor de la energía de deformación determinada por la Ec. (2.72), la cual es el objetivo a alcanzar por todos los CAs que conforman el espacio de diseño.

A continuación se muestran los prototipos obtenidos con las técnicas de control y parámetros establecidos en la Tabla 5.2 y Tabla 5.3.

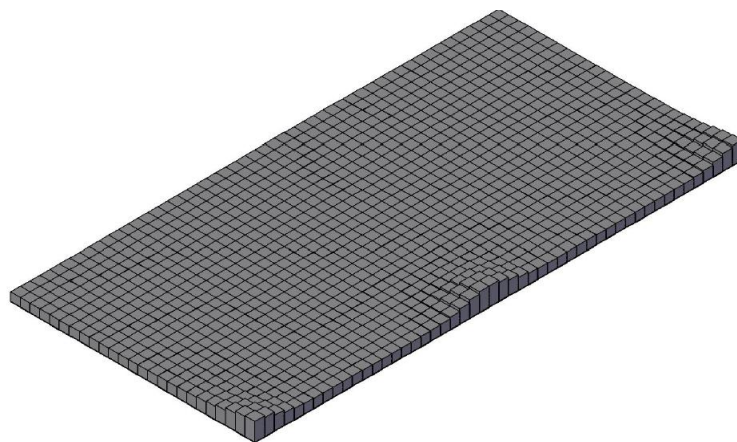


Fig. 5.2. Prototipo considerando control derivativo con 4 elementos internos y 8 vecinos en el perímetro.

Los prototipos obtenidos carecen de relevancia hasta no conocerse el comportamiento estadístico de la variable de estado y el esfuerzo de todos los CAs que conforman al prototipo. Dicho lo anterior, el prototipo mostrado en la Fig. 5.2 aunque no presenta cambios bruscos en los espesores elementales, la varianza que presentan los CAs con respecto a la energía de deformación óptima es una de las más altas mostradas en la Tabla 5.3. Los histogramas de la energía de deformación y del esfuerzo elemental muestran que el valor medio del conjunto de CAs está demasiado alejados del valor objetivo y que algunos esfuerzos elementales sobrepasan el límite (ver Fig. 5.3 y Fig. 5.4), con lo cual se corrobora gráficamente lo establecido por la varianza.

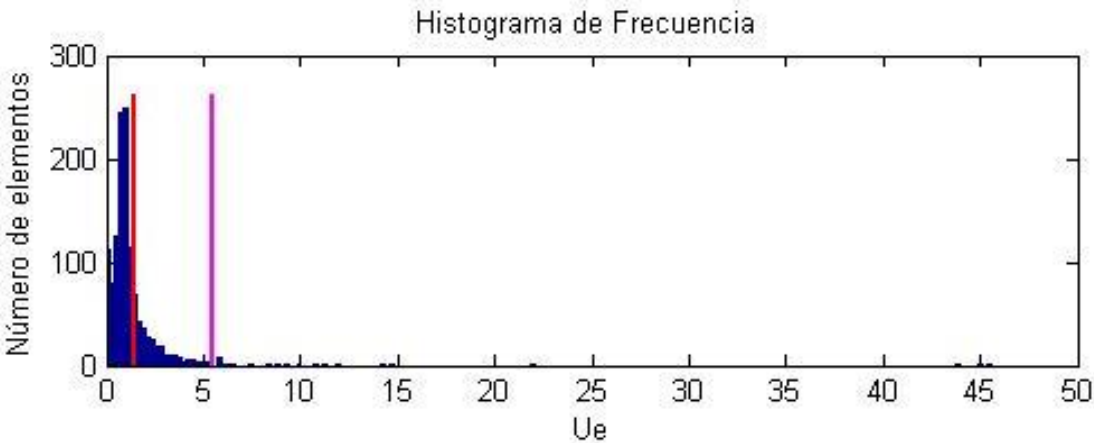


Fig. 5.3. Histograma de la energía de deformación elemental del prototipo mostrado en la Fig. 5.2.

El valor objetivo determinado por la Ec. (2.72) está representado por la línea rosa, mientras que el valor medio que del conjunto de CAs esta denotado por la línea rojo en la Fig. 5.3.

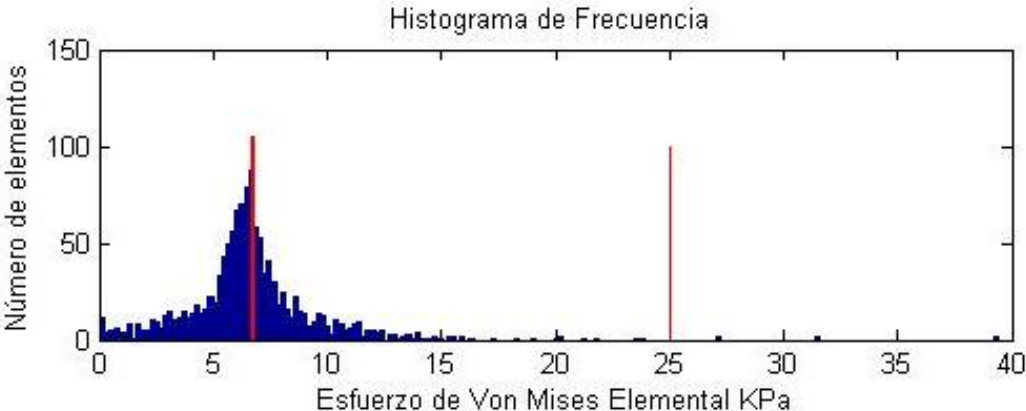


Fig. 5.4. Histograma de los esfuerzos elementales del prototipo mostrado en la Fig. 5.2.

En la Fig. 5.4 la línea rosa sobre el valor de 25 KPa denota el valor límite, y la línea roja muestra el valor medio de los datos.

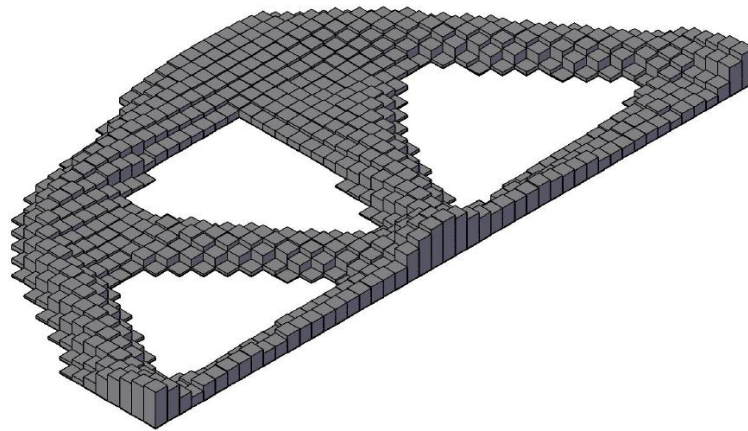


Fig. 5.5. Prototipo considerando control dos posiciones con 4 elementos internos y 8 vecinos en el perímetro.

La Fig. 5.5 muestra el prototipo generado considerando que la regla de evolución utilizada en el proceso de optimización se lleva a cabo por medio de la técnica de control de dos posiciones. Esta técnica a diferencia de la técnica de control derivativa empleada en la obtención del prototipo de la Fig. 5.2, muestra una estructura con tres agujeros. Además, la varianza que presenta este prototipo con respecto al anterior es mucho menor (Tabla 5.3), de igual manera el histograma de la variable de estado (ver Fig. 5.6) muestra una media más cercana al objetivo (la energía de deformación elemental óptima). Por otro lado el histograma de esfuerzos muestra mayor uniformidad en los esfuerzos elementales, aunque algunos elementos sobrepasan el límite establecido de 25 KPa (ver Fig. 5.7).

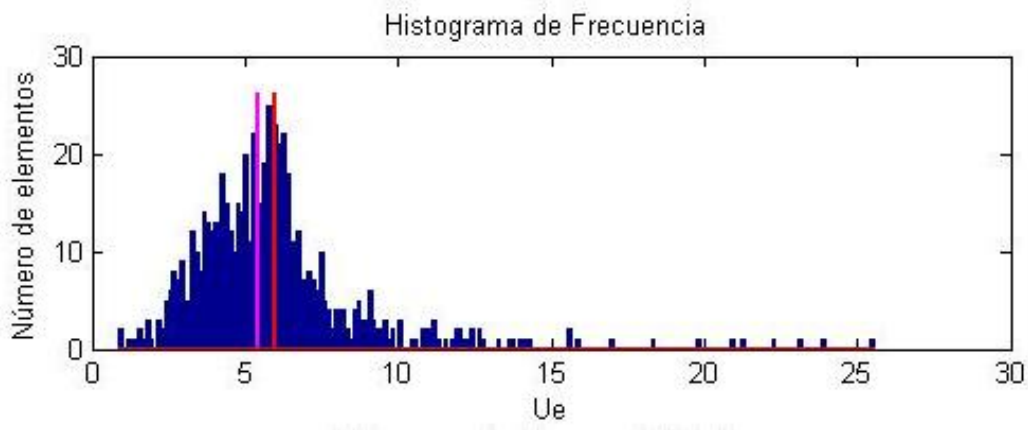


Fig. 5.6. Histograma de energía de deformación del prototipo mostrado en la Fig. 5.5.

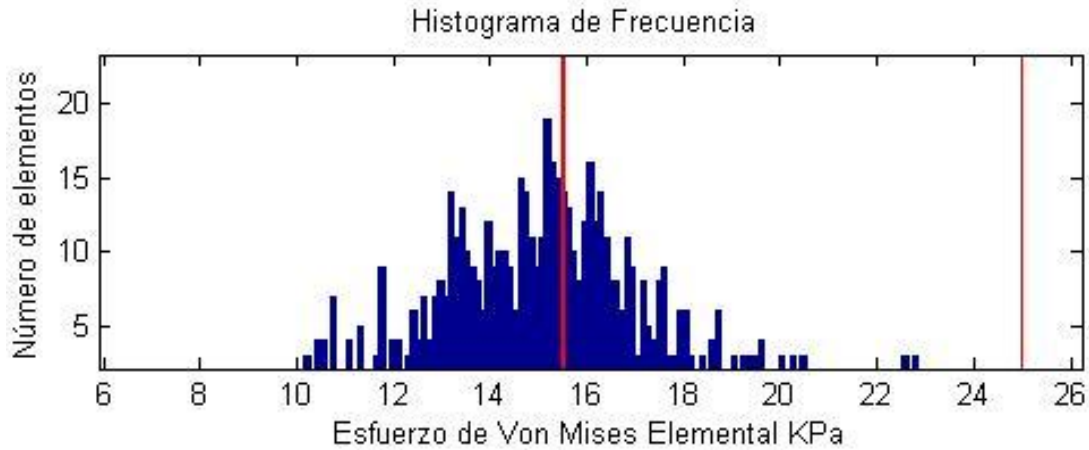


Fig. 5.7. Histograma de esfuerzos elementales del prototipo mostrado en la Fig. 5.5.

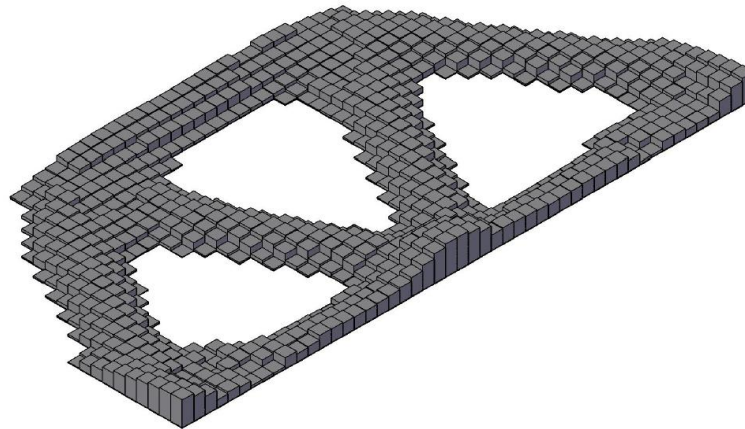


Fig. 5.8. Prototipo considerando control dos posiciones con 8 elementos internos y 12 vecinos en el perímetro.

El prototipo mostrado en la Fig. 5.8 muestra un diseño similar al mostrado en la Fig. 5.5, sin embargo este presenta cambios abruptos menores en los espesores elementales. Como consecuencia el valor de la varianza para este prototipo es uno de los menores $(8.948872 \text{ (} N - \text{cm}/\text{cm}^3 \text{)}^2)$ lo cual puede ser comprobado gráficamente por el histograma de energía de deformación, el cual presenta valores de la media más cercanos al óptimo buscado (ver Fig. 5.9). De manera similar el histograma de los esfuerzos elementales muestra mayor uniformidad en los esfuerzos elementales (ver Fig. 5.10), en comparación con los prototipos anteriores. Lo anterior puede comprobarse al observar la dispersión de datos en la Tabla 5.3, además las Fig. 5.9 y 5.6 muestran como la media de la energía de deformación de los CAs tiende a estar más cerca del objetivo en el caso donde se utilizó la técnica de control dos posiciones con una vecindad 8 elementos para elementos internos y 12 para los elementos en el perímetro.

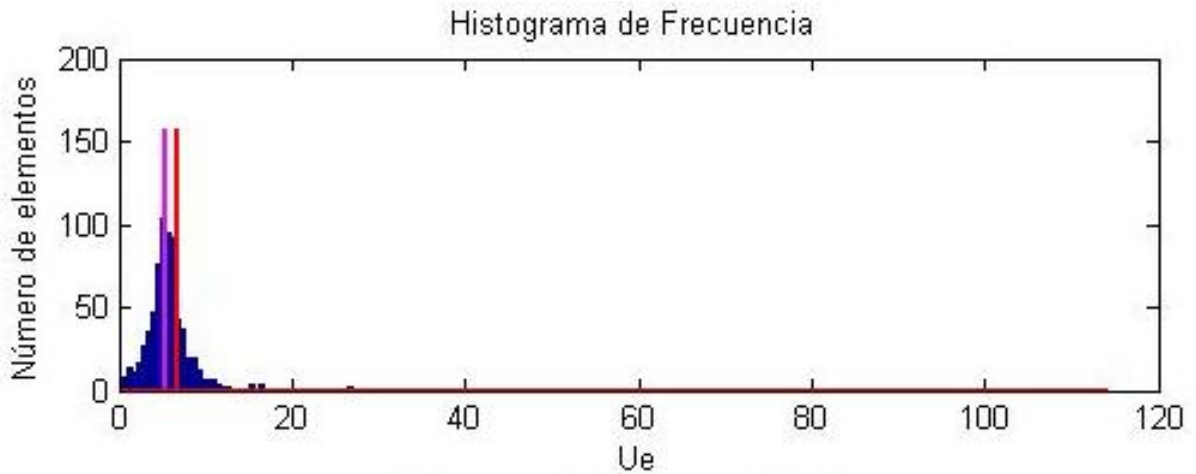


Fig. 5.9. Histograma de energía de deformación elemental del prototipo mostrado en la Fig. 5.8.

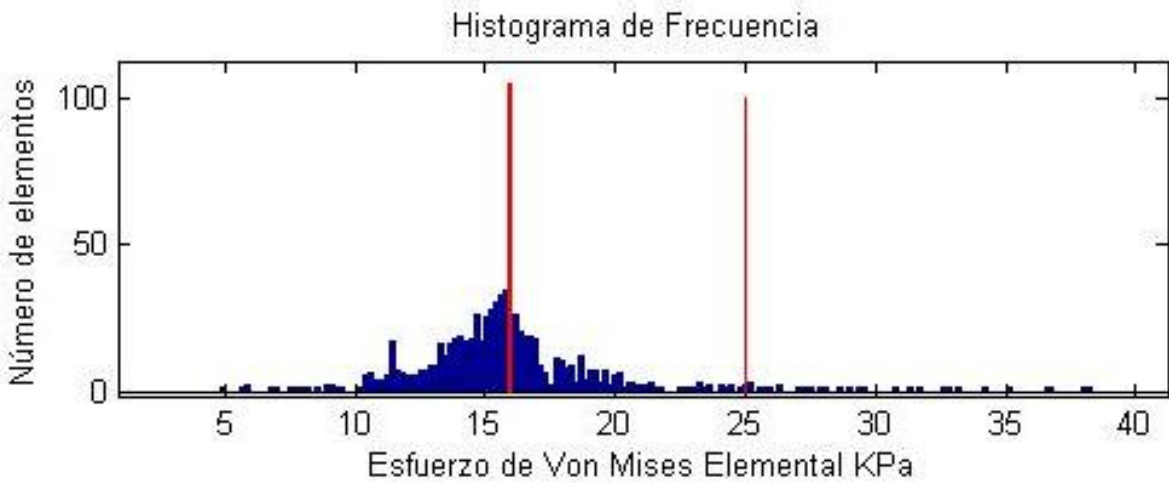


Fig. 5.10. Histograma de los esfuerzos elementales del prototipo mostrado en la Fig. 5.8.

El prototipo mostrado en la Fig. 5.11, el cual fue generado con la técnica de control integral, muestra una variación suave en los espesores elementales la cual pudiera asumirse como la mejor hasta el momento. Lo anterior puede confirmarse con la Tabla 5.3 dado que este prototipo presenta la menor varianza de energía de deformación en comparación con los demás casos analizados. Esto nos confirma que la medida de dispersión de la energía de deformación está asociada con la generación de prototipos que presenten una energía de deformación similar a la establecida por la Ec. (2.72).

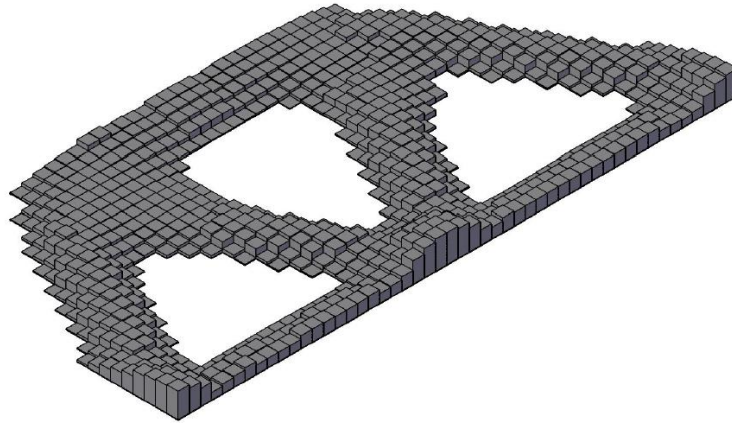


Fig. 5.11. Prototipo considerando control integral con 8 elementos internos y 12 vecinos en el perímetro.

Es de notar que de los tres anteriores prototipos mostrados en las Fig. 5.5, 5.8 y 5.11 son prácticamente los mismos si solo se consideran aspectos generales de su geometría, pues los tres presentan una configuración similar en cuanto a la ubicación de las partes vacías dentro del espacio de diseño. Por consiguiente se puede establecer que la energía de deformación óptima establecida por la Ec. (2.72) para este problema determina que la estructura óptima buscada tiene la característica de presentar los tres huecos que caracterizan a los tres anteriores prototipos mostrados, con base en lo anterior se puede afirmar que a menor varianza de la energía de deformación elemental, el prototipo generado tiende al óptimo.

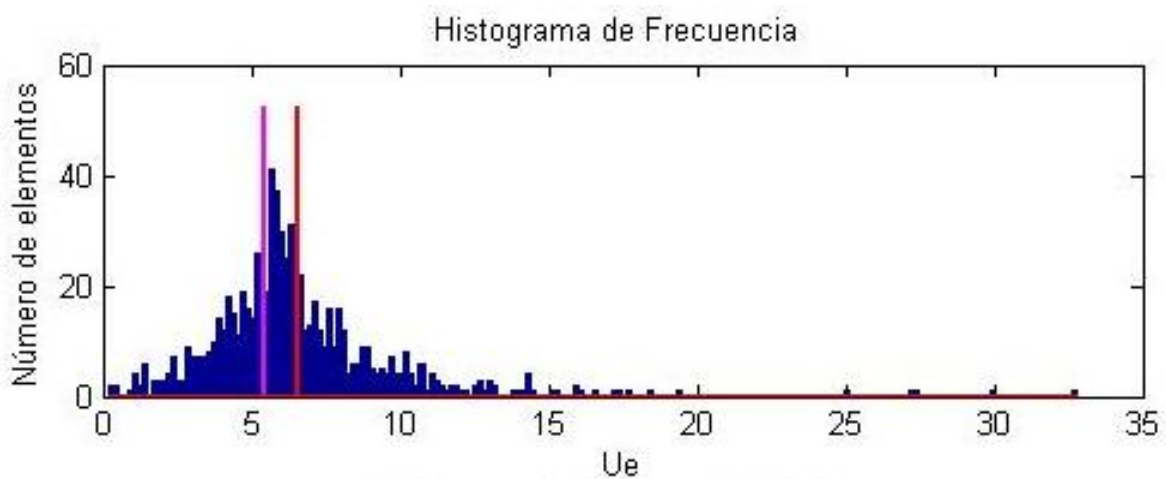


Fig. 5.12. Histograma de frecuencia de la energía de deformación elemental del prototipo mostrado en la Fig. 5.11.

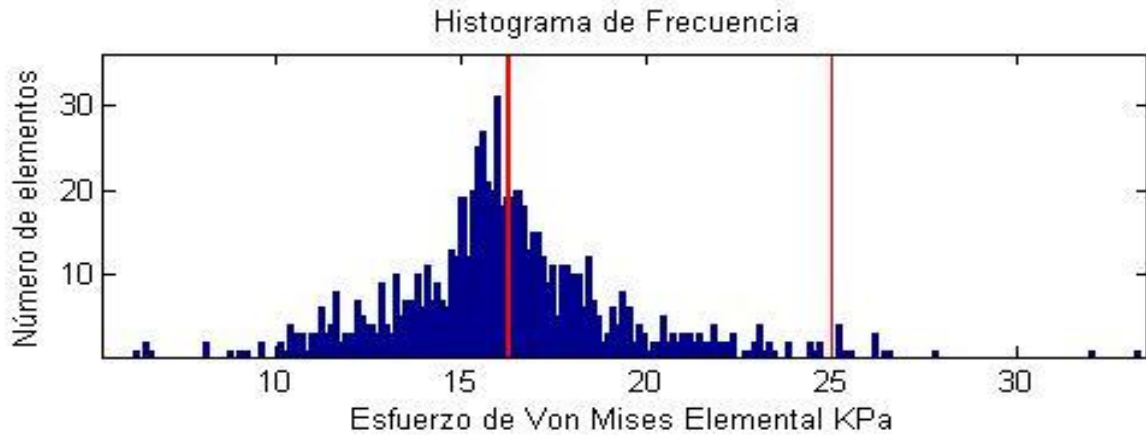


Fig. 5.13. La Histograma de frecuencia de los esfuerzos elementales del prototipo mostrado en la Fig. 5.11.

Las Fig. 5.9 y 5.12 muestran que se obtienen una mejor tendencia en los datos obtenidos para este problema en particular, pues en estas se puede apreciar como la media de la energía de deformación de los CAs se acerca más al valor óptimo establecido por la Ec. (2.72). Sin embargo ampliando las Fig. 5.9 y 5.12 se puede apreciar que esta diferencia es menor en el caso de la regla de control integral, con la cual resulta el prototipo mostrado en la Fig. 5.11. Sin embargo, este prototipo aún presenta elementos que sobrepasan el esfuerzo máximo permisible y por consecuencia también estos mismos elementos presentan una alta energía de deformación. Este problema es tratado en la siguiente sección por medio de la implementación de vecindarios especiales para los elementos que sobrepasan el esfuerzo límite, y aumentando el espesor de toda la estructura. En la siguiente sección se retomará el problema y se expondrán las técnicas utilizadas con más detalle.

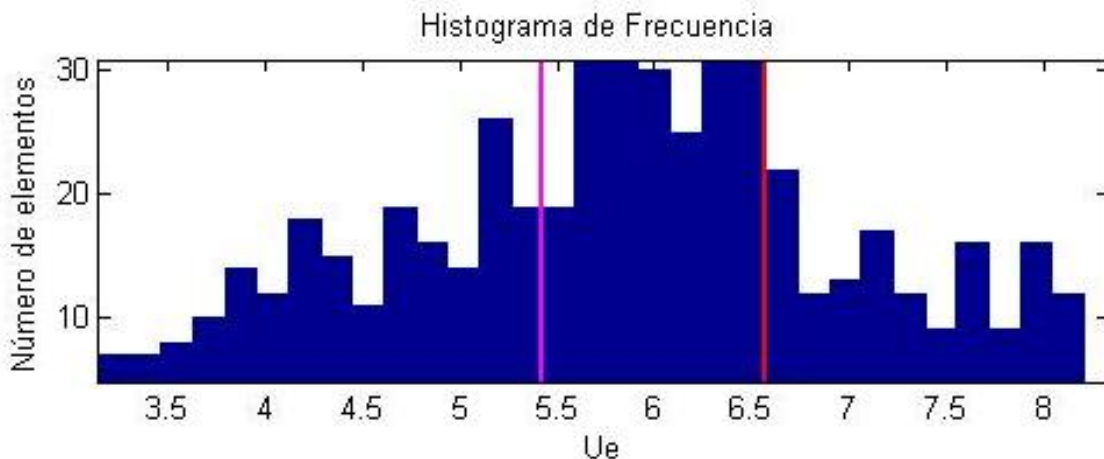


Fig. 5.14. Ampliación del histograma de energía de deformación elemental de la Fig. 5.13.

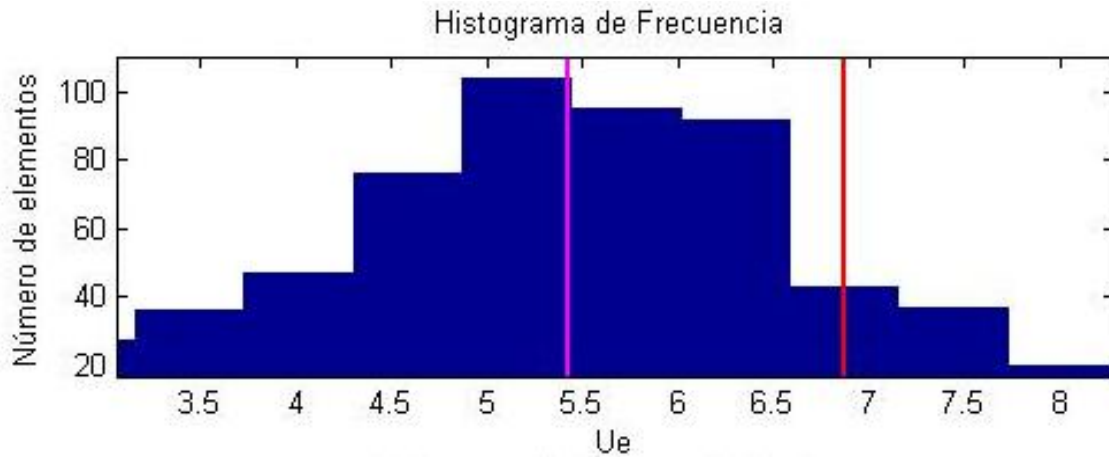


Fig. 5.15. Ampliación del histograma de energía de deformación elemental de la Fig. 5.9.

La diferencia obtenida de los resultados utilizando las técnicas de control dos posiciones e integral son mínimas, sin embargo la técnica integral ofrece una media de la energía de deformación de los CAs más cercana al óptimo, que la técnica de control dos posiciones. Esta pequeña diferencia a favor de la técnica de control integral tiene como consecuencia que los prototipos generados por esta técnica presentan una variación de los espesores elementales más uniforme que los prototipos generados por la demás técnicas (ver Fig. 5.17).

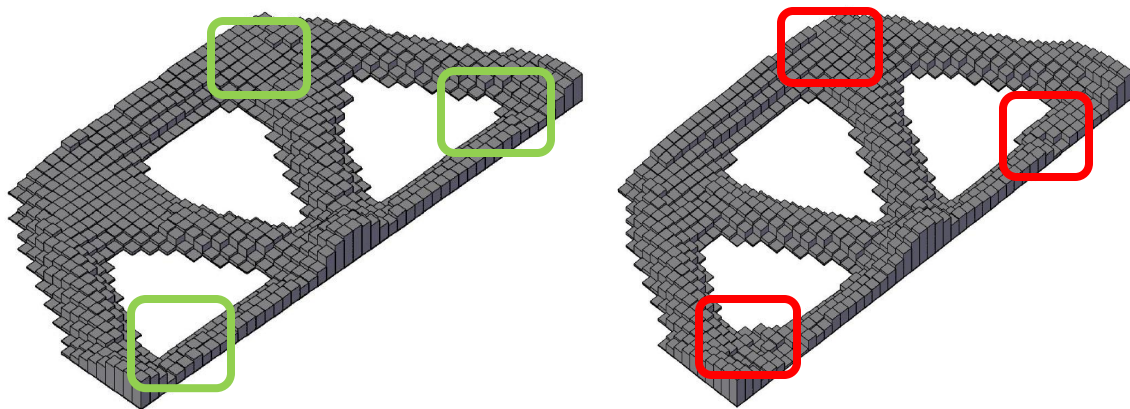


Fig. 5.16. Diferencias de los prototipos generados con las técnicas de control integral (izquierdo) y control dos posiciones (derecho).

La Fig. 5.16 muestra que a pesar de que los dos prototipos generados son prácticamente iguales en su geometría, los espesores y uniformidad de estos es diferente, siendo el prototipo generado con la técnica de control integral el que mejor conserva la uniformidad de los elementos, pues no presenta cambios de espesor tan bruscos como en el prototipo generado por la técnica de control dos posiciones. Como conclusión se puede establecer que la varianza de la energía de deformación elemental con respecto a él

óptimo definido por la Ec. (2.72) junto con los valores medios del histograma de energía de deformación y el valor objetivo correspondiente determina la calidad del prototipo generado y por consecuencia la uniformidad de espesores dentro del mismo.

Dicho lo anterior en las secciones siguientes solo se considerara los resultados obtenidos con la técnica de control dos posiciones e integral, con un vecindario interno de 8 elementos y 12 elementos vecinos para los CA en el perímetro del espacio de diseño, sin embargo cabe mencionar que debido al gran número de combinaciones que se pueden lograr con las variables involucradas en el proceso de diseño es posible que exista una combinación de factores que genere mejores resultados que los mostrados en la siguiente sección.

5.4 Esfuerzos elementales

Como se mencionó en la sección anterior los prototipos generados con las técnicas de control dos posiciones e integral a pesar de generar prototipos con una varianza pequeña, estos presentan esfuerzos elementales superiores al máximo establecido. Los elementos que presentan un esfuerzo superior al máximo establecido pueden ser identificados por medio de la Fig. 5.17. En esa figura la línea roja establece el esfuerzo límite permitido, y los puntos azules indican el esfuerzo que presenta cada elemento.

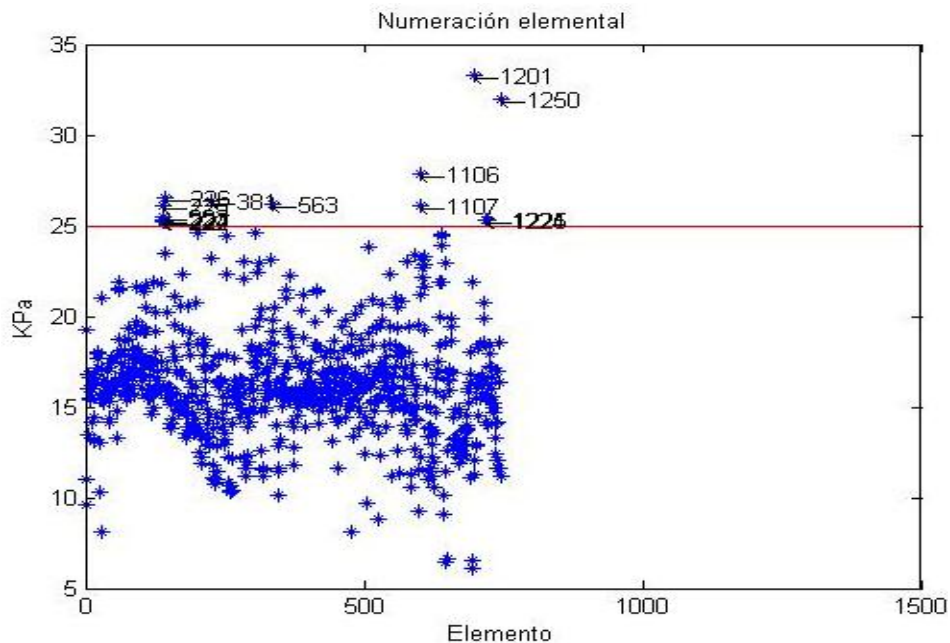


Fig. 5.17. Esfuerzos elementales presentes en el prototipo mostrado en la Fig.5.11.

Una ampliación de la Fig. 5.17 en las zonas donde se presentan los elementos que superan el esfuerzo máximo se muestra en la Fig. 5.18.

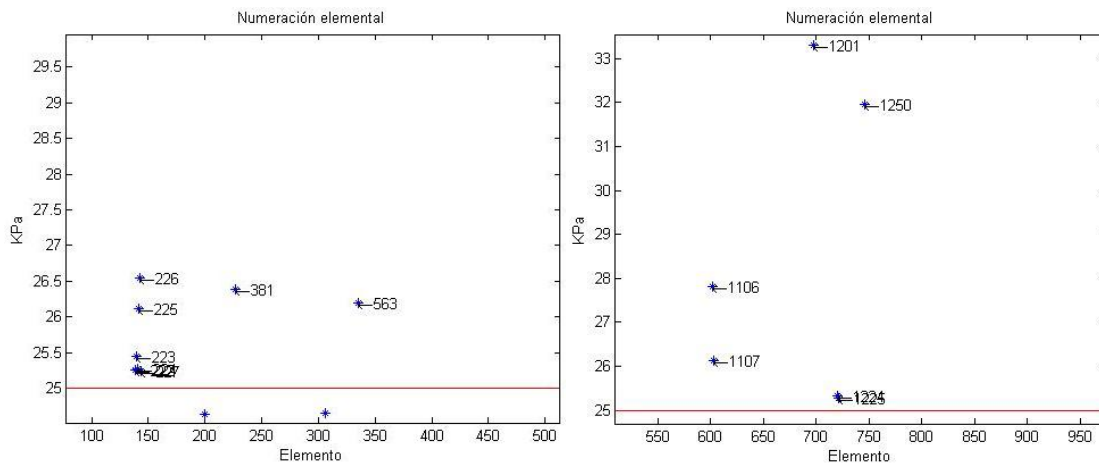


Fig. 5.18. Ampliación de los elementos que superan el esfuerzo permitido.

La Fig. 5.18 muestra que los elementos que tienen un esfuerzo mayor a 25 KPa son los elementos 222, 223, 224, 225, 226, 227, 381, 563, 1106, 1107, 1201, 1224, 1225 y 1250. Estudiando la ubicación de estos elementos se determinó estos elementos son CAs que se encuentran cerca de los apoyos y del lugar donde se aplica la carga puntual, la Fig. 5.19 nos puede confirmar lo anterior

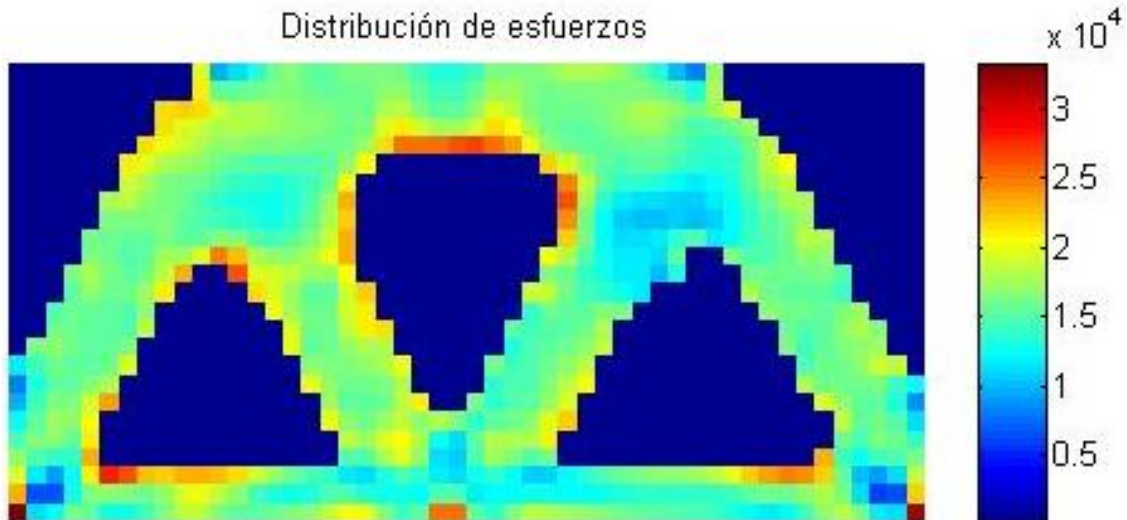


Fig. 5.19. Distribución de esfuerzos elementales presentes en el prototipo mostrado en la Fig.5.11.

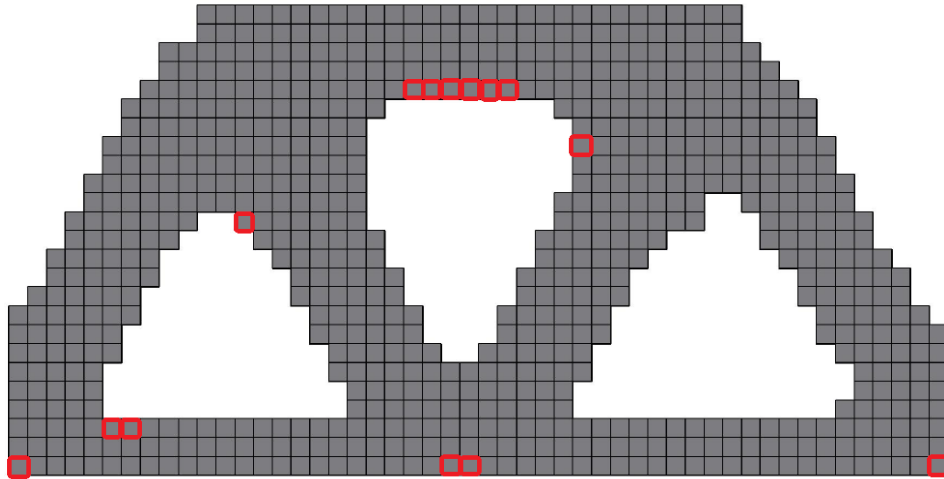


Fig. 5.20. Elementos que presentan estado de esfuerzos mayor al permitido.

Los espesores de los elementos mostrados en la Fig. 5.20 así como sus respectivas energías de deformación y esfuerzos se muestran en la Tabla. 5.4. En la misma figura se pueden ubicar en rojo los elementos que presentan un estado de esfuerzo superior a 25 KPa.

Tabla 5.4. Energía de deformación, esfuerzos y espesores de los elementos que sobre pasan el límite de esfuerzos.

Elemento	Energía de deformación	Esfuerzo	Espesor
	N cm/cm ³	Pa	cm
222	1.6194	25249.5039	0.10096082
223	0.8736	25455.1348	0.06087514
224	0.6047	25265.6554	0.04388601
225	0.534	26118.2646	0.03710542
226	0.6934	26551.1778	0.03766289
227	1.0658	25248.6755	0.08232267
563	2.7017	26195.6733	0.18879741
1106	2.8922	27809.876	0.11566316
1107	1.6531	26119.1527	0.13678949
1201	72.0393	33318.2399	2.19507538
1250	63.6295	31970.0695	2.11798474

En la Tabla 5.4 se puede apreciar que los elementos que presentan mayor energía de deformación también presentan los mayores esfuerzos, y estos elementos son los apoyos de la estructura (elementos 1201 y 1250). Los demás elementos son elementos que

presentan un espesor pequeño y que se encuentran en las fronteras del prototipo. Una alternativa obvia para reducir estos esfuerzos elementales altos consiste en aumentar el espesor de estos elementos, y este aumento puede considerarse a todos los elementos del prototipo o solo a los que presenten un estado de esfuerzos superior al límite. A continuación se muestran los esfuerzos elementales obtenidos después de aumentar el espesor en +0.01 cm de todos los elementos que conforman el prototipo mostrado en la Fig. 5.11 (ver Fig. 5.21).

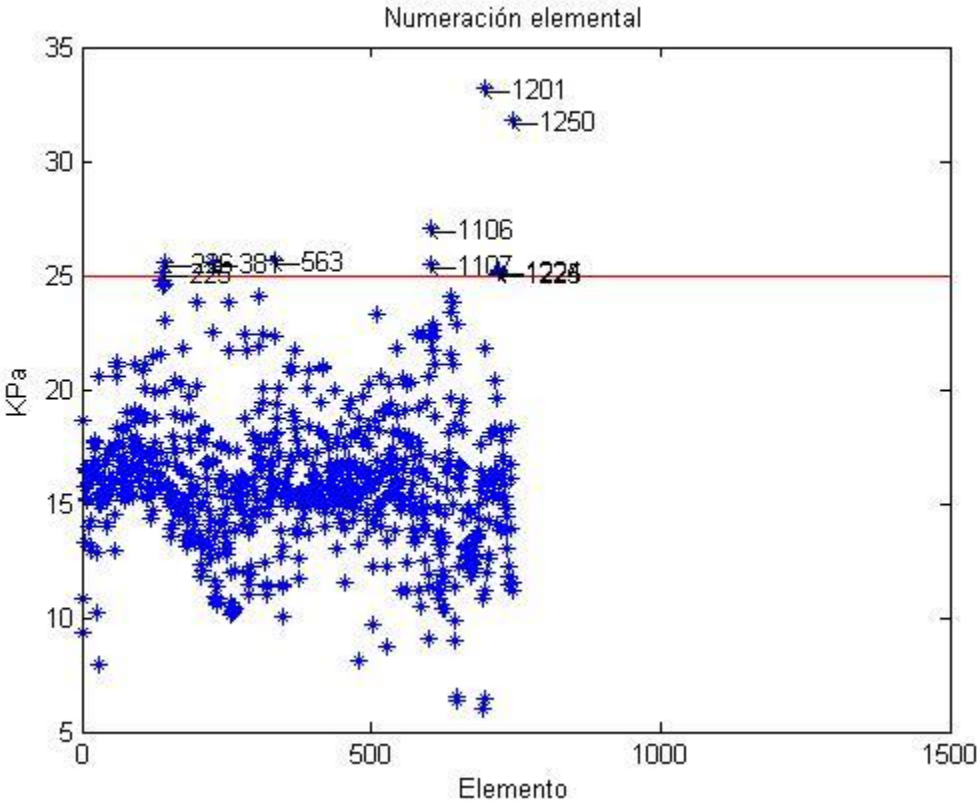


Fig. 5.21. Esfuerzos del prototipo mostrado en la Fig. 5.11 después de incrementar el espesor 0.01 cm.

Se puede apreciar por medio de la comparación de la Fig. 5.21 y la Fig. 5.17 que los esfuerzos elementales del prototipo mostrado en Fig. 5.11 son proporcionales al incremento del espesor en toda la estructura. Por lo tanto si nuevamente se incrementa el espesor del prototipo en 0.035 cm, se puede obtener un estado de esfuerzos elementales donde solo los elementos 1106, 1201 y 1250 superan el esfuerzo máximo permitido de 25 KPa (ver Fig. 5.22).

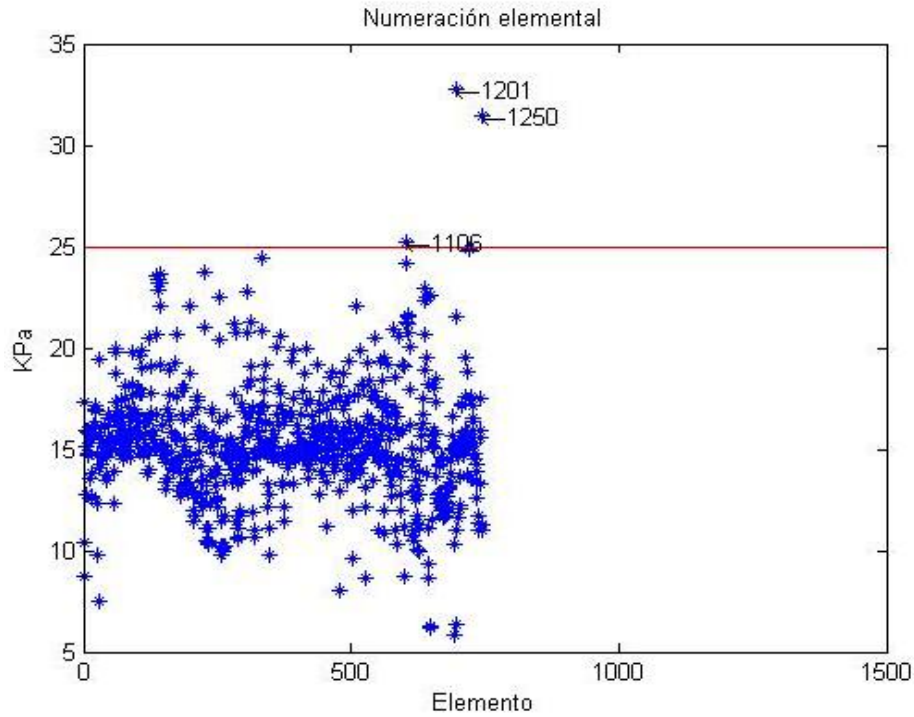


Fig. 5.22. Esfuerzos del prototipo mostrado en la Fig. 5.11 después de incrementar el espesor 0.035 cm.

De esta manera si se aumenta una vez más el espesor elemental de prototipo se puede lograr que todos los esfuerzos elementales permanezcan por debajo del máximo admisible. Si ahora se obtiene el histograma de la energía de deformación del prototipo con un incremento de 0.035 cm, se puede observar que el valor medio del conjunto de datos está más cercano al valor óptimo establecido (ver Fig. 5.23) que el mostrado en la Fig. 5.14.

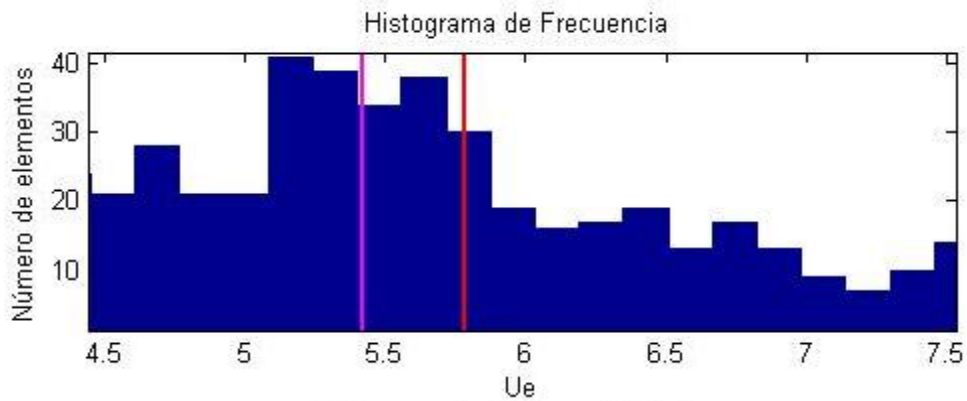


Fig. 5.23. Histograma de la energía de deformación elemental del prototipo mostrado en la Fig. 5.11.

Otra alternativa para el incremento de los espesores elementales es que este se lleve a cabo solo en los elementos que presenten un estado de esfuerzos mayor al máximo. La Fig. 5.22 muestra la distribución de esfuerzos del prototipo mostrado en la Fig. 5.11 después de incrementar los espesores (+0.01cm) de todos los elementos que sobrepasan el límite de 25 KPa.

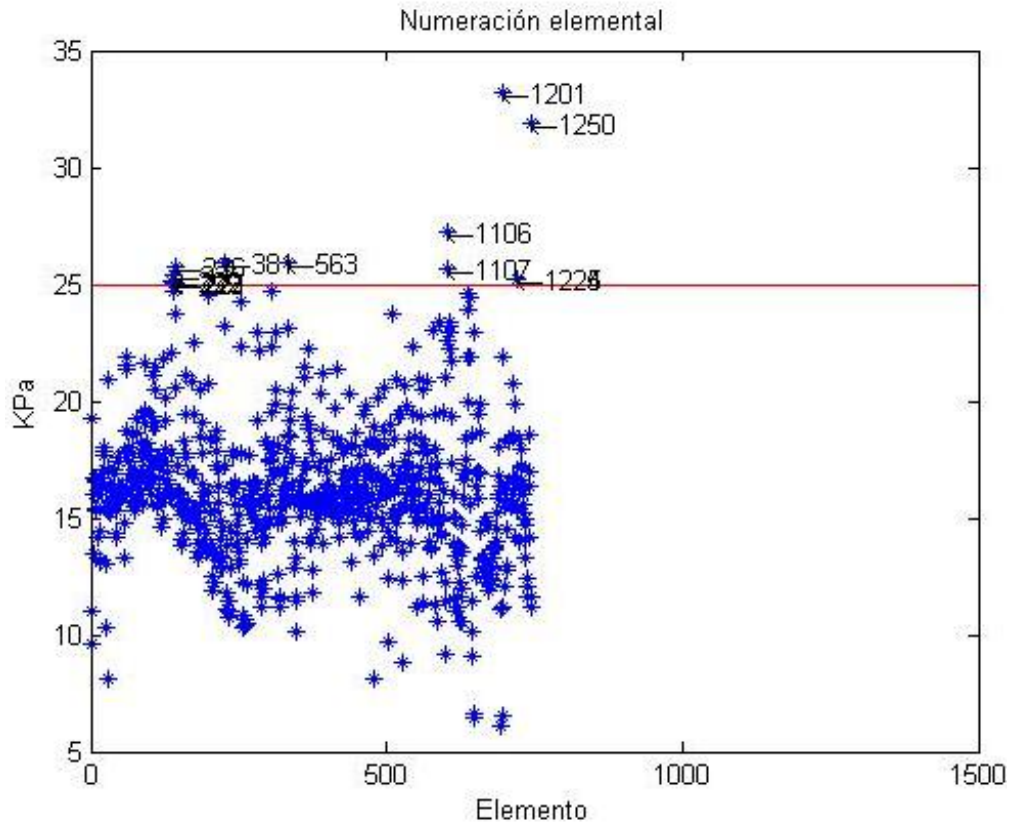


Fig. 5.24. Esfuerzos del prototipo mostrado en la Fig. 5.11 después de incrementar el espesor (+0.01cm).

Como se puede apreciar en la figura anterior, el incremento de los espesores en el prototipo reduce los esfuerzos solamente en los elementos previamente mencionados, y en este caso los esfuerzos elementales que sobrepasan el esfuerzo máximo son los únicos que presentan un esfuerzo menor después del incremento. Lo anterior se puede apreciar por medio de la comparación entre las Fig. 5.24 y la Fig. 5.23, las cuales muestran los esfuerzos elementales después de incrementar los espesores en 0.01cm y 0.035cm respectivamente. En estas figuras se puede apreciar que la disminución de los esfuerzos elementales en los CAs mencionados es directamente proporcional al incremento del espesor elemental, sin embargo este incremento de espesores modifica el peso y la energía de la deformación del prototipo.

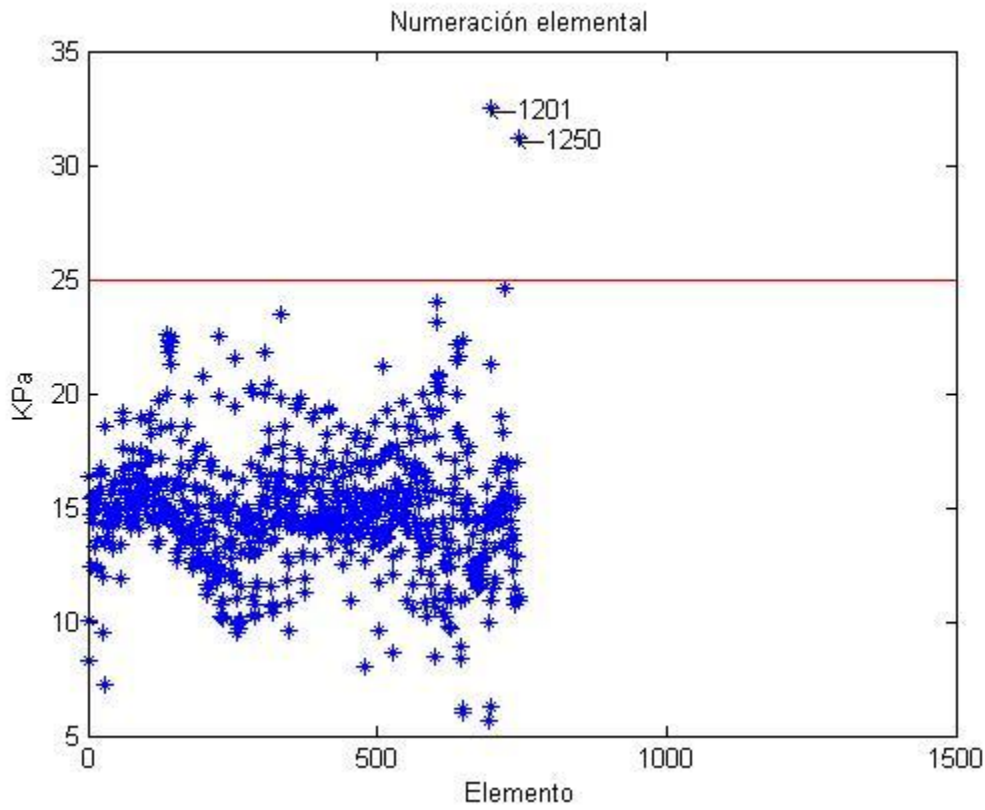


Fig. 5.25. Esfuerzos del prototipo mostrado en la Fig. 5.11 después de incrementar el espesor (+0.055cm)

5.5. Curva de Pareto

Como se definió en el capítulo anterior, la curva de Pareto está conformada por los diferentes puntos óptimos que se generan al variar el factor de peso w que afectan a la función de masa y de la energía de deformación del problema de optimización. La Fig. 5.26 muestra la curva de Pareto obtenida utilizando los datos establecidos por la Tabla 5.5 definida en el capítulo 4, y las vecindades de 8 elementos internos y 12 vecinos para los elementos sobre el perímetro del espacio de diseño. En la misma figura se puede apreciar que la variación del factor de peso genera diferentes prototipos. Además, en la Tabla 5.5 se muestran los valores de los puntos mostrados en la Fig. 5.26.

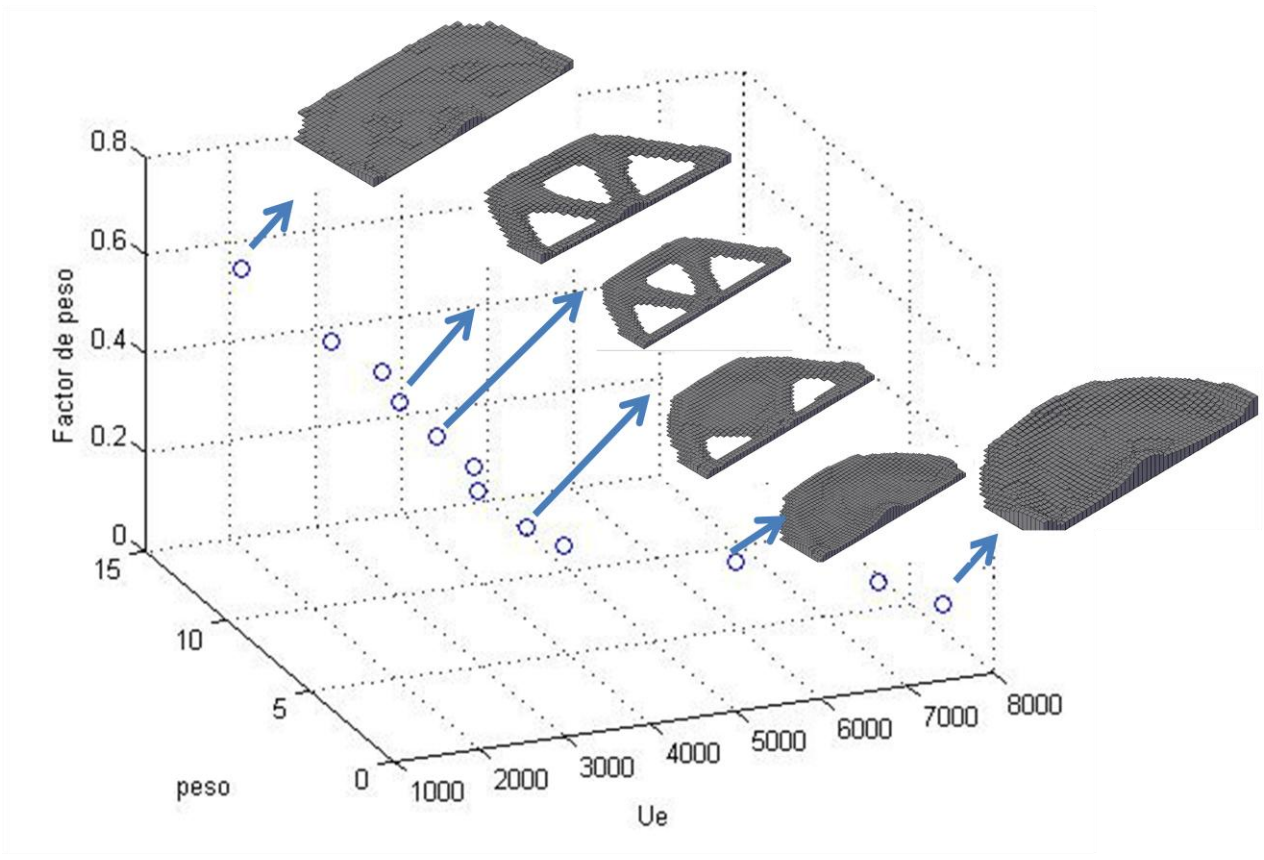


Fig. 5.26. Frontera de Pareto generada considerando una constante de control $C_d=0.1618033$.

Tabla 5.5. Se puede apreciar claramente que la variación del factor de peso que caracteriza cada punto tiene una fuerte influencia en el peso y energía de deformación de la estructura.

Factor de peso	Energía de deformación	Masa
w	N/cm^2	Kg
0.1	7744.8116	1.747
0.15	7080.0264	2.13
0.2	5601.9979	3.086
0.25	3799.0248	4.113
0.3	3344.1939	4.093
0.35	2978.5842	5.154
0.4	2944.7867	5.17
0.45	2650.1333	5.921
0.5	2396.696	6.829
0.55	2274.0217	7.296
0.6	1850.1688	8.135
0.7	1217.6779	10.335

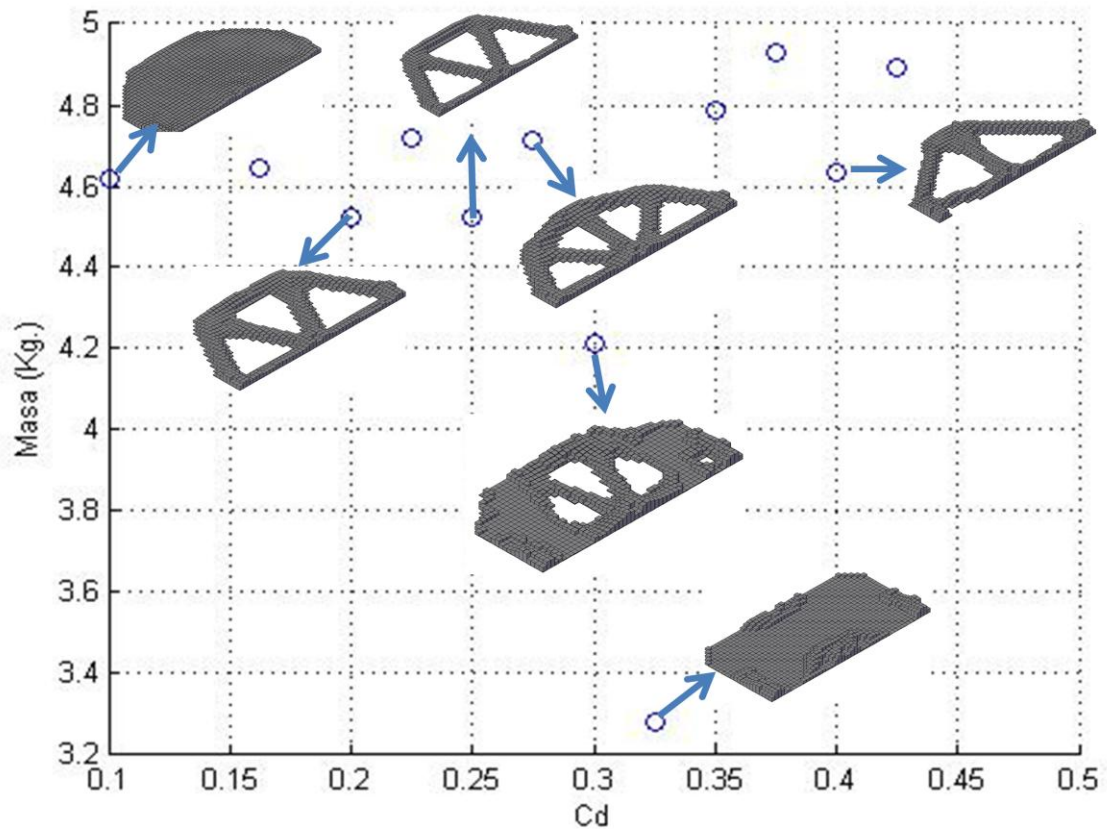


Fig. 5.27. Prototipos y su masa obtenidos variando la variable de control Cd.

Las estructuras mostradas en la Fig. 5.26 fueron generadas variando el factor de peso w , y cada punto fue alcanzado utilizando la técnica de control de dos posiciones y la constante de control $C_d=0.1618033$. Sin embargo estructuras diferentes se pueden obtener considerando ahora el factor de peso w constante y variando la constante de control C_d dentro del proceso de optimización. Utilizando los valores mostrados en la Tabla 5.6 con una vecindad de 8 elementos para los CA en el interior del dominio de diseño y un vecindario de 12 para los que conforman el perímetro, y un factor de peso $w=0.30$, con estos parámetros se obtuvieron los resultados mostrados en la Figs. 5.27 y 5.28.

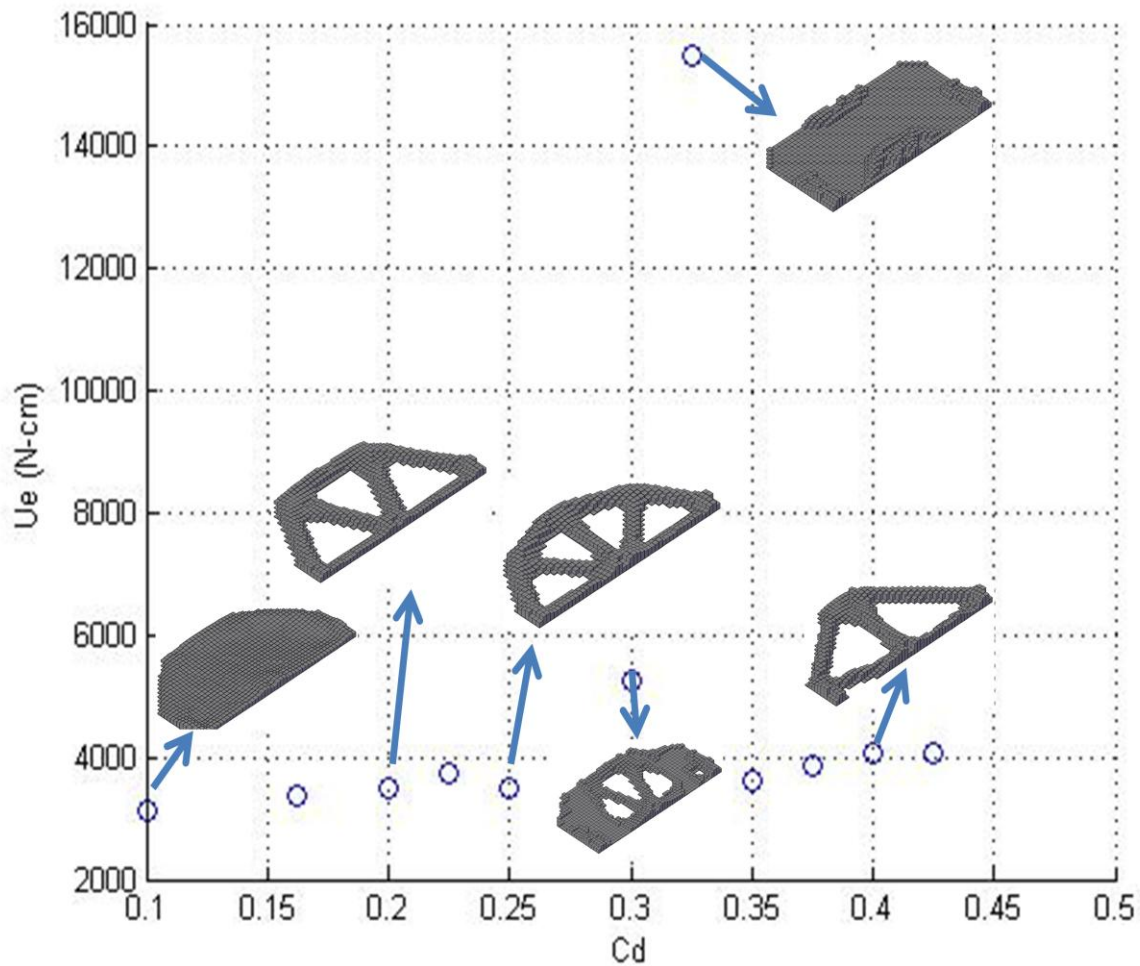


Fig. 5.28. Prototipos y su energía de deformación obtenidos variando la variable de control Cd.

En la Fig. 5.29 se puede observar que la energía de deformación total de la estructura en la mayoría de los casos tiene un valor de entre 3111.0539 (N-cm) a 4086.8245 (N-cm), sin embargo cuando se considera un $Cd=0.325$ el peso disminuye en gran medida y por consecuencia aumenta la energía de deformación hasta un valor de 15485.6527 (N-cm).

Estudiando el prototipo generado en este punto (ver Fig. 5.30) se puede apreciar que el prototipo presenta una notable variación del espesor de elemento a elemento, esto ocasiona que el prototipo no cumpla con las condiciones de un elemento sujeto a esfuerzo plano

Tabla 5.6. Energía de deformación y peso de los prototipos generados considerando diferentes constante de control para la técnica de control dos posiciones y $w=0.3$.

Constante de control (Cd)	Energía de deformación	Masa
	N cm	Kg
0.1	3111.0539	4.621
0.1618033	3379.7255	4.647
0.2	3507.5355	4.525
0.225	3754.7991	4.718
0.25	3491.5277	4.523
0.275	3498.2055	4.715
0.3	5262.0771	4.211
0.325	15485.6527	3.283
0.35	3636.8491	4.788
0.375	3872.3162	4.931
0.4	4086.8245	4.632
0.425	4048.516	4.894

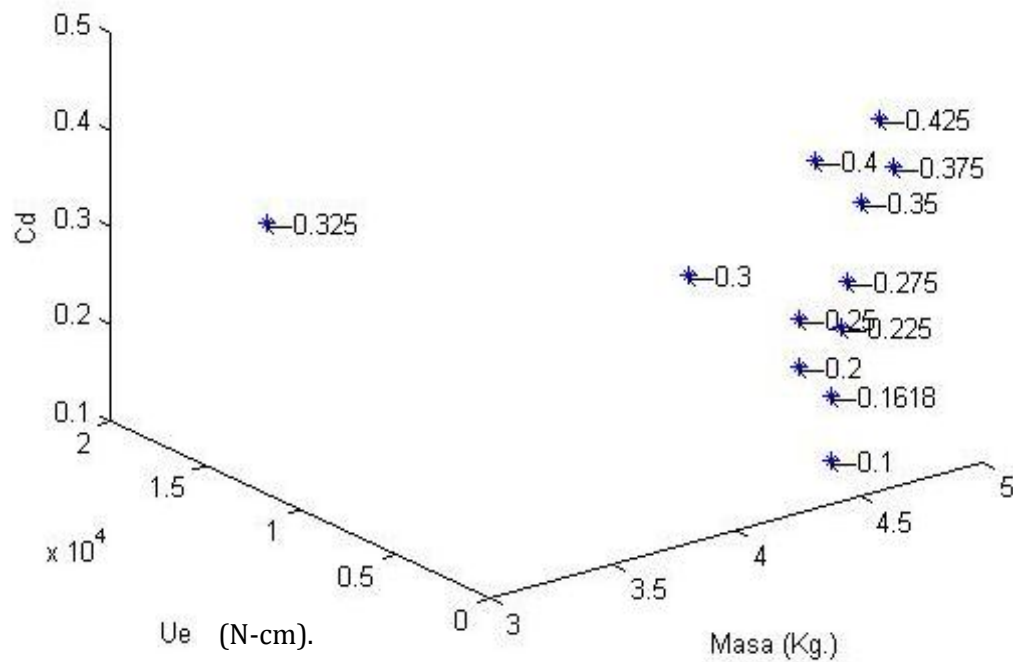


Fig. 5.29. Relación entre energía de deformación y masa variando la constante de control Cd.

También se puede apreciar en la Fig. 5.31 que durante el proceso de optimización se presenta una clara tendencia de convergencia en la masa total del prototipo la cual no

alcanza a estabilizarse del todo, y un comportamiento similar para la energía de deformación puede observarse en la Fig. 5.32. El comportamiento de las Fig. 5.31 y 5.32, respecto a su rápida convergencia hacia valores que no generan un buen prototipo en el espacio de diseño, es atribuida a que la técnica de control implementada con un valor de $C_d=0.325$ el cual ocasiona una variación poco uniforme del espesor de los elementos, ocasionando que la energía de deformación sea calculada de manera inadecuada, lo cual repercute en una mala evolución de los CAs.

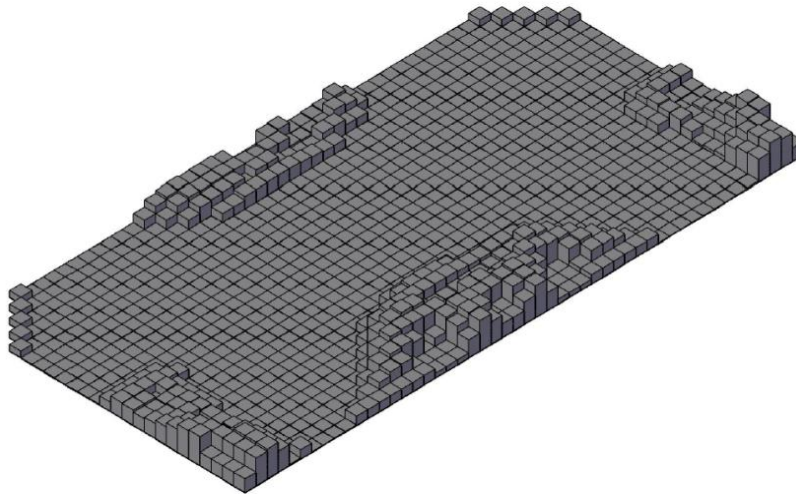


Fig. 5.30. Prototipo obtenido utilizando la constante de control $C_d=0.325$.

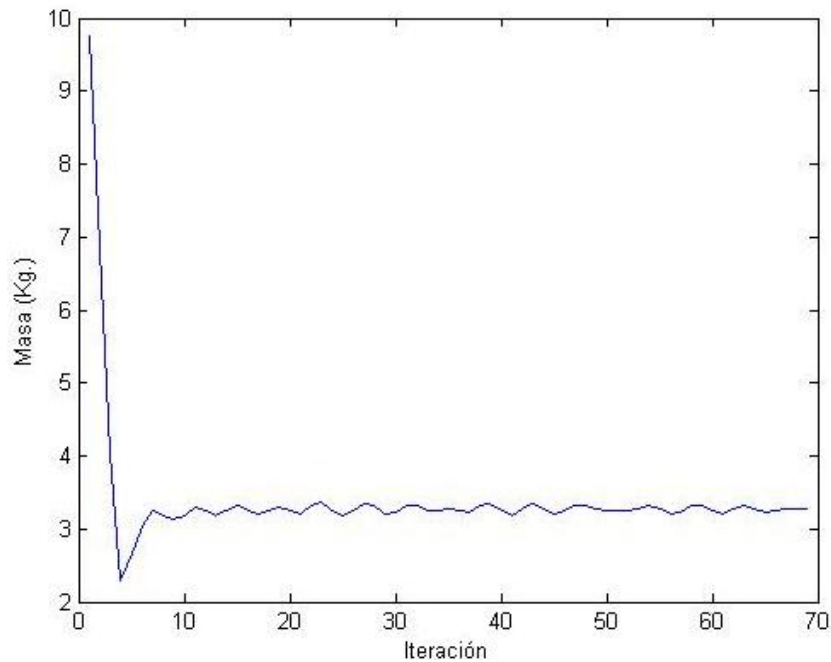


Fig. 5.31. Convergencia de la masa del prototipo considerando $C_d=0.325$ y $w=0.30$.

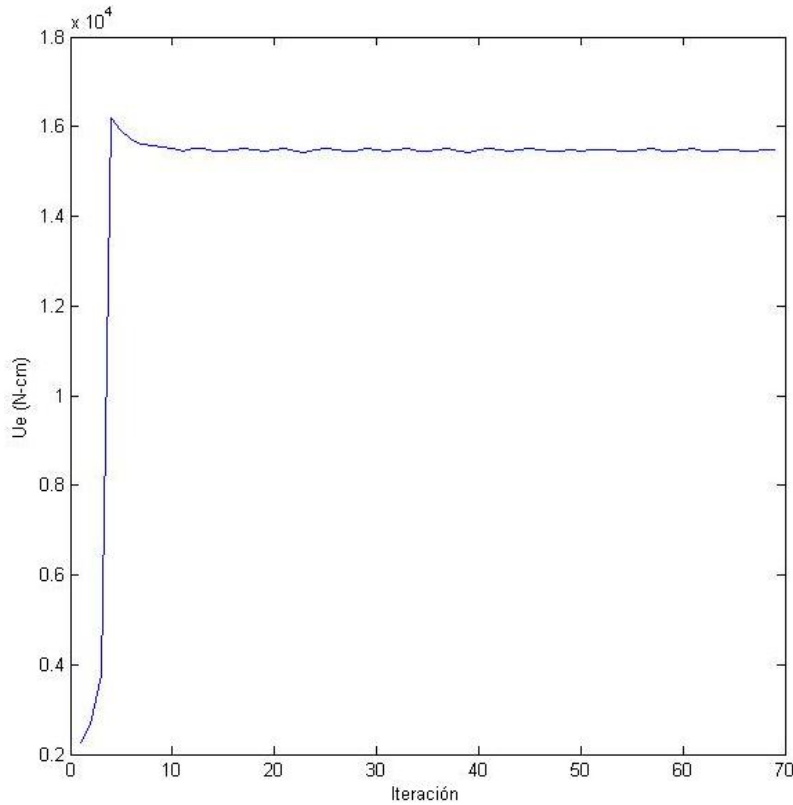


Fig. 5.32. Convergencia de la energía de deformación total del prototipo generado bajo las condiciones de $C_d=0.325$.

Con el objetivo de comparar los resultados de la Fig. 5.27 y 5.28, ahora se considerará el prototipo generado utilizando un $C_d=0.275$ como constante de control para la técnica de control dos posiciones. Los resultados obtenidos pueden verse en las Fig. 5.33 y 5.34, en donde se observa una oscilación en el comportamiento de la masa y la energía de deformación durante el proceso de optimización entre los valores de 4.7 Kg y 3600 (N-cm) respectivamente. En la Fig. 5.35 se puede apreciar que el prototipo obtenido es mucho mejor que el mostrado en la Fig. 5.30, y en este se nota que la variación del espesor elemental es uniforme en gran parte del prototipo, cumpliendo con la restricción de uniformidad de los espesores de elemento a elemento mencionada en el capítulo anterior. Esta restricción junto con las demás consideraciones establecidas en el capítulo 4 permiten calcular la energía de la deformación y los esfuerzos generados de manera más apropiada durante el proceso iterativo de optimización, con lo que se asegura que la regla de evolución de los CAs tome las decisiones correctas durante el proceso de optimización.

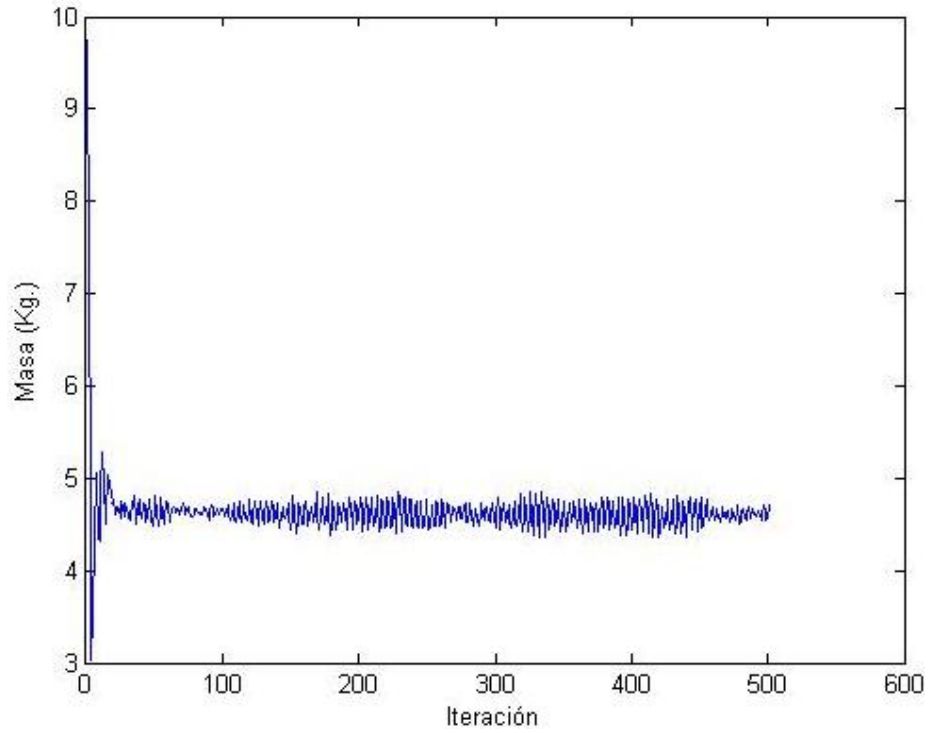


Fig. 5.33. Convergencia del peso total del prototipo generado considerando $C_d=0.275$ y $w=0.30$.

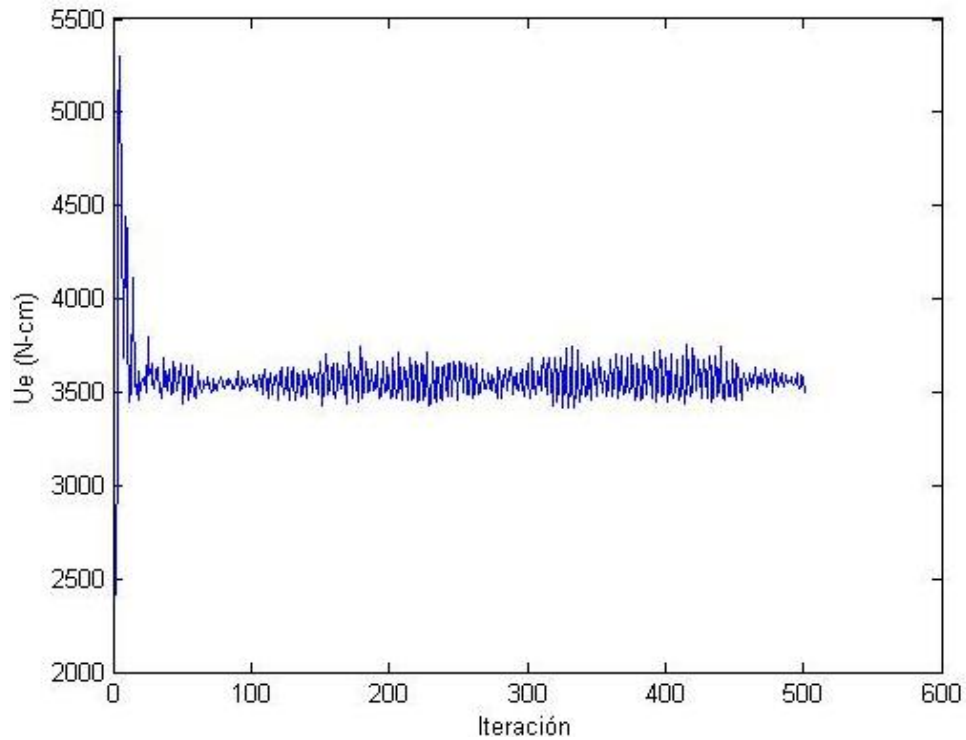


Fig. 5.34. Convergencia de la energía de deformación total del prototipo considerando un $C_d=0.275$ y $w=0.30$.

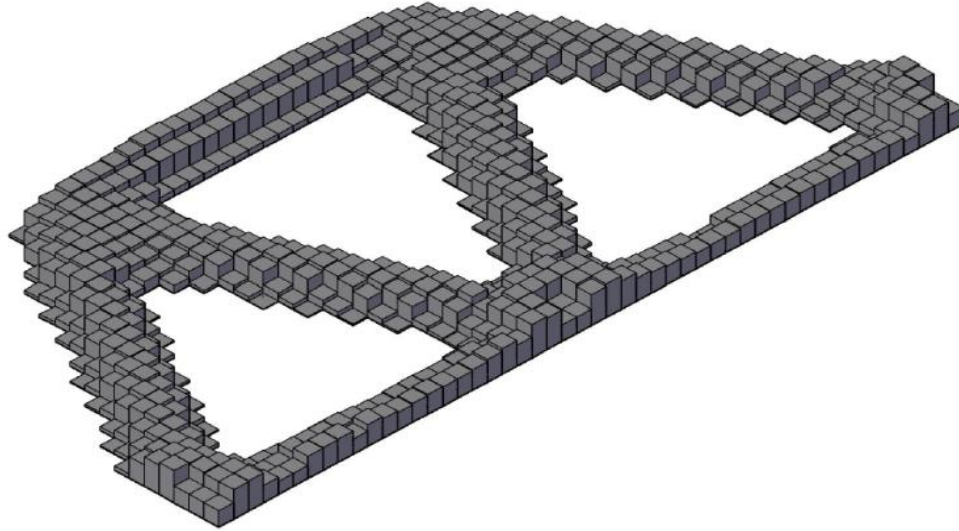


Fig. 5.35. Prototipo obtenido utilizando la constante de control $C_d=0.275$ y $w=0.30$.

Los prototipos mostrados en las Fig. 5.30 y 5.35 muestran claramente como la constante de control empleada es de vital importancia durante el proceso de optimización, pues esta define implícitamente la variación del espesor de todos los elementos dentro del espacio de diseño. La selección de esta variable de control en particular para la técnica de control de dos posiciones para este caso en particular está limitada a los valores mostrados en la Fig. 5.36 y la Tabla 5.7. Esta tabla muestra los valores de las funciones de peso y energía de deformación obtenidos, y la figura muestra los prototipos obtenidos considerando el factor de peso $w=0.30$, al considerar este factor de peso la energía de deformación elemental óptima es $4.219 \left(\frac{N-cm}{cm^3} \right)$, por lo que los mejores prototipos deberán de presentar una varianza mínima respecto a este valor.

Tabla 5.7. Valores del peso y energía de deformación total de los prototipos obtenidos considerando un factor de peso $w=0.30$.

Constante de control (Cd)	Energía de deformación	Masa
	(N-cm)	Kg
0.1	2947.7663	4.993
0.1618033	2978.5842	5.154
0.2	3267.6896	4.863
0.225	3249.2982	5.002
0.25	3398.9651	4.786
0.275	3280.4744	5.027

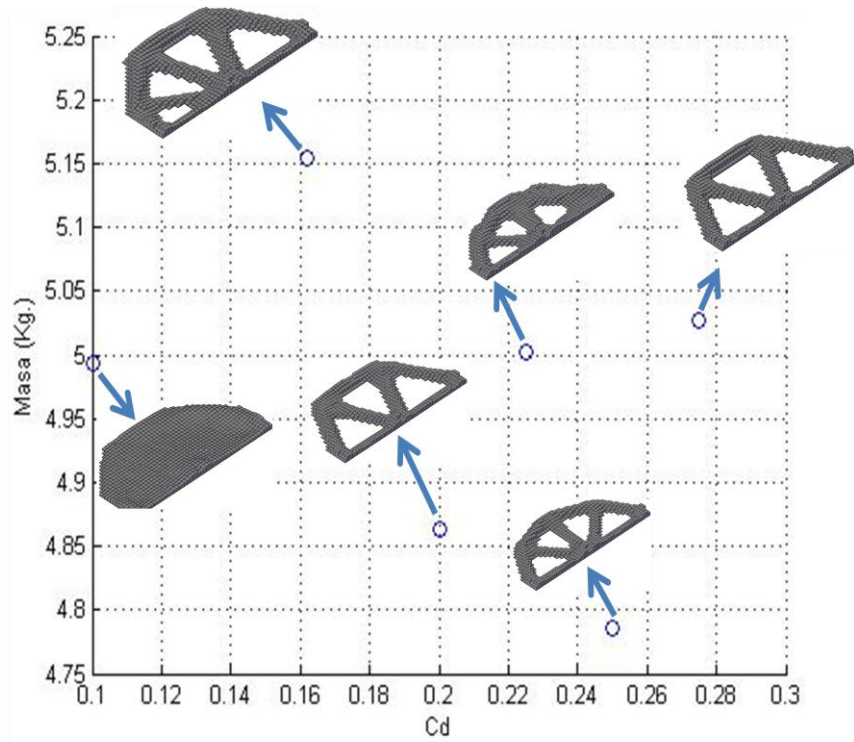


Fig.5.36. Variación de la masa de los prototipos obtenidos considerando $w=0.3$.

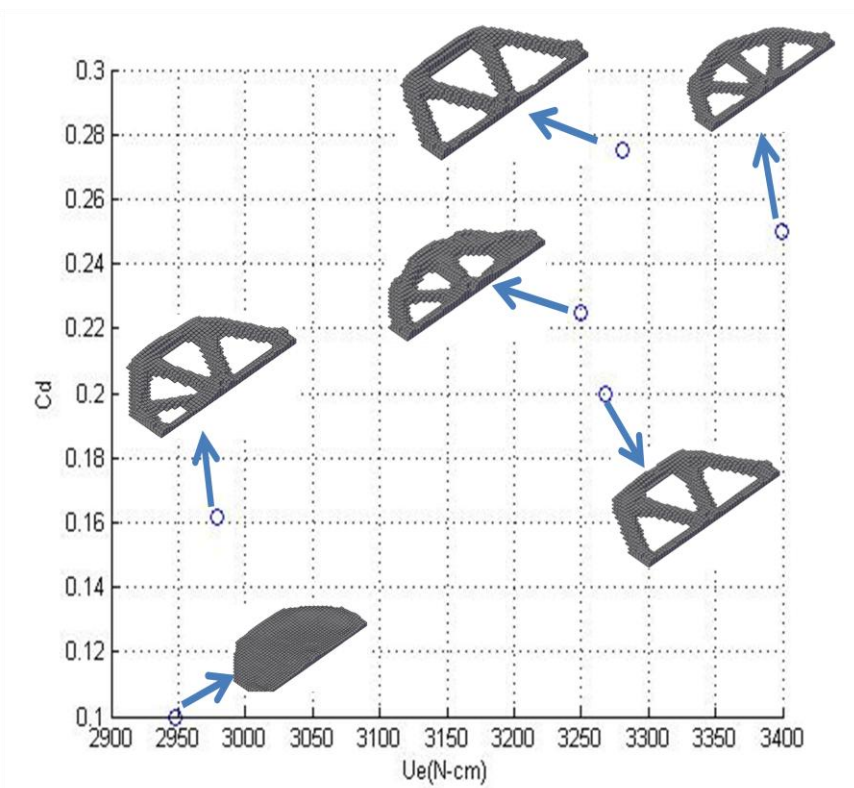


Fig. 5.37. Variación de la energía de deformación de los prototipos considerando $w=0.3$.

Las dos figuras anteriores (Fig. 5.36 y 5.37) muestran que diferentes prototipos pueden presentar una masa similar pero muy diferente energía de deformación, este es el caso de los prototipos que consideran una constante de control $C_d=0.1$, $C_d=0.225$ y $C_d=0.275$, donde se puede apreciar que la masa que estos presentan es aproximadamente 5 Kg, sin embargo la energía de deformación de estos tres prototipos es muy diferente una de otra. Obteniendo la varianza definida por la Ec. 5.1 de la energía de deformación elemental de los distintos prototipos, se puede establecer que el prototipo que considera un $C_d=0.1$ presenta una mayor cantidad de elementos con una energía de deformación similar a la óptima establecida por la Ec. 2.72 (ver Tabla 5.8).

Tabla 5.8. Medidas de dispersión de la energía de deformación elemental.

Cd	Desv. Std.	Varianza
	N cm/cm ³	(N cm/cm ³) ²
0.1	9.56361753	91.46278023
0.225	12.5382186	157.2069258
0.275	12.4845672	155.8644185

Los histograma de la energía de deformación elemental (ver Fig. 5.38, 5.39 y 5.40) muestran las distancias aritméticas entre los valores medios del conjunto de CAs de los diferentes prototipos y el valor óptimo establecido para este problema.

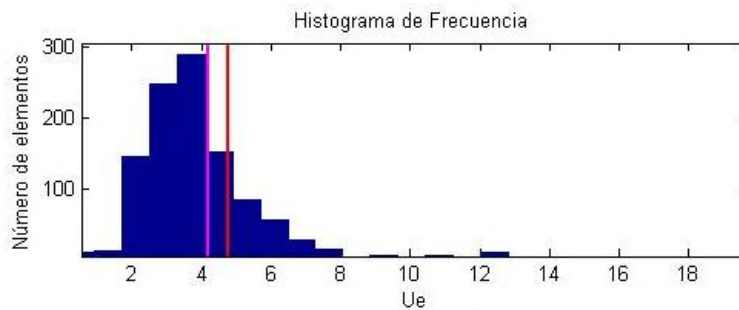


Fig. 5.38. Histograma de la energía de deformación considerando $C_d=0.1$.

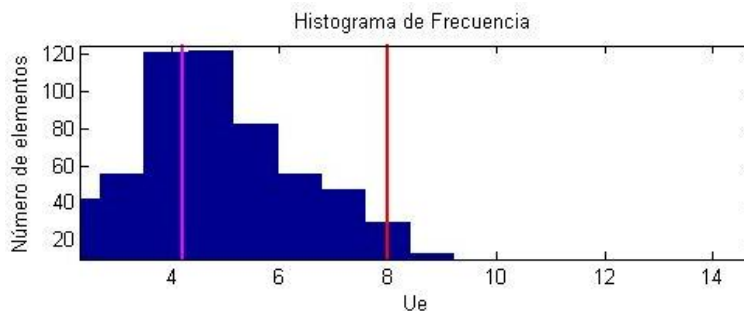


Fig. 5.39. Histograma de la energía de deformación considerando $C_d=0.225$,

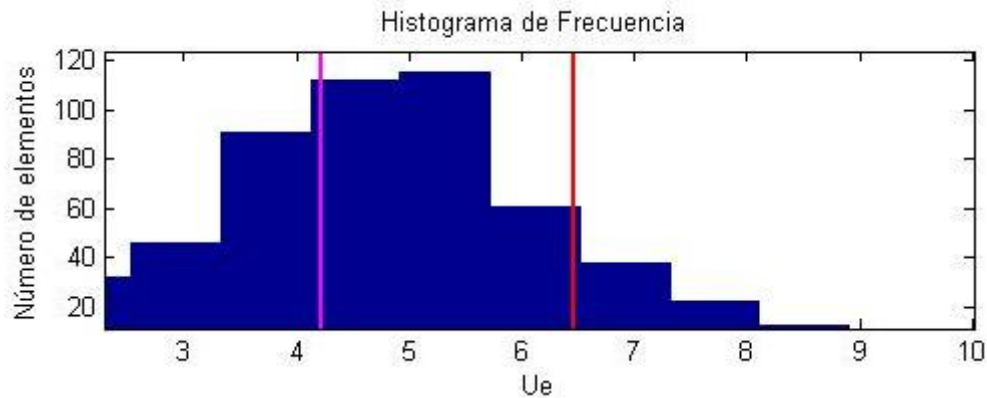


Fig. 5.40. Histograma de la energía de deformación considerando $Cd=0.275$.

Por medio de la inspección visual se puede determinar que la distancia aritmética menor es la presente en la Fig. 5.38, la cual corresponde al caso donde se utilizó un $Cd=0.1$. Recordando que a mayor cantidad de CAs que presenten la energía de deformación óptima, mejores prototipos son obtenidos, entonces el prototipo seleccionado como óptimo sería el definido por la constante de control $Cd=0.1$. La Fig. 5.38 confirman que la energía de deformación que presenta la estructura es la menor de todos los prototipos, sin embargo la Fig. 5.39 muestra que la masa que presenta el prototipo definido por la constante de control $Cd=0.1$ no es el prototipo con menor masa, esto ocasiona que el criterio del diseñador junto con las restricciones propias del problema (minimizar masa y/o minimizar energía de deformación) definan la selección del prototipo.

Cabe resaltar que valores mayores en la constante de control a los mostrados en la Tabla 5.6 causan una variación muy notable en el espesor elemental, y como resultado se producirán inestabilidades numéricas en la optimización del problema estructural.

5.6. Procedimiento de Optimización

En las secciones anteriores se mostró que los diferentes factores involucrados en el proceso de optimización utilizando HCA pueden afectar de manera notable los resultados obtenidos. En esta sección se establece el procedimiento a seguir para poder determinar los factores que ofrecen los mejores resultados dependiendo de las restricciones o preferencias del diseñador.

El proceso para determinar estos factores consiste en determinar la curva de Pareto del problema variando los factores de peso w , tal como se mostró en la sección 5.5. Esta curva nos ayuda a determinar los rangos de la energía de deformación y masa para los diferentes factores de peso, lo cual nos permite seleccionar los prototipos que reduzcan

de mejor manera el peso y/o la energía de deformación. Esta selección dependerá del diseñador y de las restricciones que se deseen cumplir. Una vez seleccionado el factor de peso se realizan diferentes pruebas para determinar la mejor constante de control C_d , la cual depende fuertemente de la técnica de control utilizada, y se seleccionará la constante que reduzca la energía de la deformación y/o masa. Cabe hacer mención que la elección también depende del criterio del diseñador y de las restricciones que se deseen satisfacer. Si los prototipos generados variando C_d presentan energías de deformación muy similares, con el uso de la varianza se puede identificar al prototipo que presente una distribución más homogénea de energía de deformación y esfuerzos, facilitando así la elección de la constante de control.

El análisis de los esfuerzos elementales presentes en el prototipo generado de la selección de los parámetros w y C_d , nos indicará si el prototipo cumple con las restricciones de esfuerzos y si el prototipo presenta elementos que superan el esfuerzo permisible. Si el análisis de esfuerzos no es favorable, se puede incrementar el espesor de los elementos que presenten los esfuerzos más altos o se puede incrementar todo el espesor a la estructura hasta cumplir con la restricción de esfuerzos establecida (ver sección 5.4), por otra parte si el prototipo cumple con todas las restricciones se procede a generar el prototipo en 3D para ofrecer una mejor visualización del prototipo.

Capítulo 6

Resultados

6.1 Introducción

En este capítulo se muestra la metodología utilizada para determinar estructuras de espesor variable utilizando el algoritmo de los autómatas celulares híbridos. El problema analizado en este capítulo considera un espacio de diseño el cual debe de mantener regiones libre de material. La obtención del prototipo final para el problema propuesto en esta sección, fue obtenido utilizando diagramas de Pareto para determinar los factores involucrados en la optimización que permitían una reducción en la energía de deformación y la masa de los prototipos, posteriormente se selecciono el prototipo que presentara una medida de dispersión menor en cuanto la energía de deformación objetivo, establecida para este problema.

6.2. Selección de parámetros de optimización

Como se mencionó en el capítulo anterior, la selección de los diferentes parámetros involucrados en el proceso de optimización debe darse con cautela pues las inestabilidades numéricas ocasionan que no se obtengan prototipos confiables.

A continuación se realiza la búsqueda de los mejores parámetros de optimización para el problema mostrado en la Fig. 6.1. Las restricciones de esfuerzo y características del material, así como la fuerza aplicada son definidas en la Tabla 6.1. La selección de los parámetros se dará buscando lo siguiente: esfuerzos elementales menores al máximo establecido en la Tabla 6.1, una reducción de por lo menos 20% del peso total de la estructura y una reducción del por lo menos el 10% de la energía de deformación total del de la estructura inicial. En este problema en particular se busca principalmente el ponderar más a la función de masa de la estructura por lo que se consideran valores de w pequeños de alrededor de 0.425 con el fin de ponderarlo más respecto a la minimización del peso de la estructura. Para la determinación del prototipo se utilizará la técnica de control integral, pues como se mencionó en secciones anteriores esta técnica de control ofrece buenos resultados en cuanto a la distribución de los espesores elementales, y los factores de peso C_d que se utilizarán para este problema son variaciones de alrededor de $C_d=1.125$.

Tabla 6.1. Constantes del material y características geométricas iniciales del problema de optimización.

Características del problema	Cantidad
Módulo de Young (N/cm ²)	2.00E+07
Relación de Poisson	0.3
Esfuerzo máximo permisible (N/cm ²)	2.50E+04
Ancho de la viga (cm)	25
Largo de la viga (cm)	50
Espesor inicial (cm)	1
Masa inicial de la estructura (Kg)	8.908
Fuerza aplicada (N)	1.00E+04
Energía de deformación inicial (N-cm)	26.6

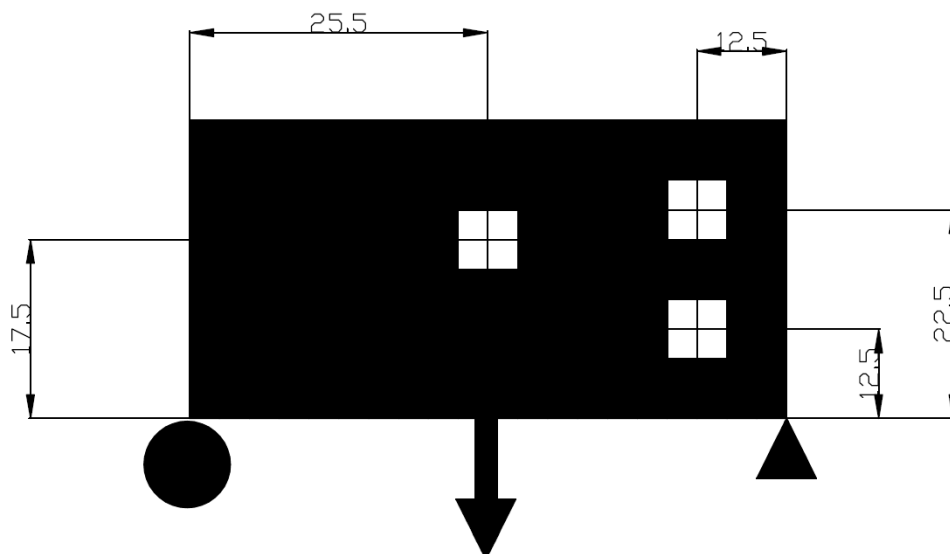


Fig. 6.1. Espacio de diseño disponible para la optimización.

Las restricciones geométricas que tiene que cumplir este problema son tres espacios rectangulares, los cuales tienen que permanecer sin material. Generando las curvas de Pareto, las cuales consideran las características mostradas en la Tabla 6.2 se obtuvieron diferentes prototipos que presentan diferentes energías de deformación y masa, así como geometrías muy distintas.

Tabla 6.2. Factores considerados durante el proceso de optimización.

Factor de peso	Vecindades internas	Vecindades en perímetro	Constante de control
w	V_i	V_e	C_d
0.425	4	12	0.1
0.45	8	12	0.1618033
0.475	12	24	0.325
0.5	Considerando vecindades extendidas en apoyos solamente.		0.525
0.525			0.675
0.55			1
0.6	0	4	1.25

Dentro del conjunto de curvas de Pareto, la que presentó mejores resultados es la mostrada en la Fig. 6.2. La cual muestra los diferentes prototipos obtenidos considerando la técnica de control integral, con un vecindario de 8 elementos para los CAs que se encuentran dentro del espacio de diseño y 12 elementos para los CAs en el perímetro, y el factor de peso w que se consideró fue $w = 0.425$.

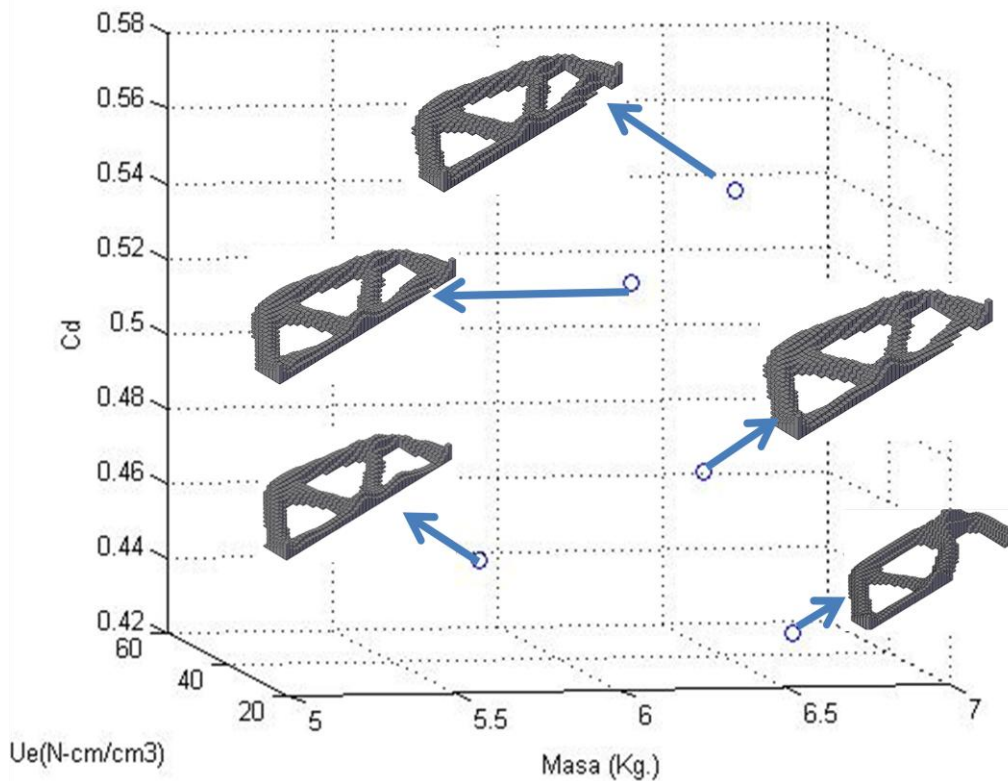


Fig. 6.2 Diferentes prototipos que reducen la masa y/o la energía de deformación del problema.

Tabla 6.3 Energía de deformación y masa de los diferentes prototipos obtenidos.

Constante de control	Energía de deformación	Masa
Cd	N-cm	Kg
1.0	41.5332	6.727
1.125	31.4428	5.681
1.2	26.0675	6.314
1.225	23.8694	6.987
1.5	27.8421	6.11
1.525	26.4302	6.411

En la Fig. 6.3 se puede observar que el que prototipo que cumple con la restricción de masa y que reduce la energía de deformación es el caso que considera $Cd=1.225$. La masa y energía de deformación obtenidas con esta constante de control reduce en un 21.56% la masa de la estructura y en un 10.24% la energía de la deformación. Lo anterior cumple con las restricciones de masa y energía establecidas, las cuales restringen la solución a una reducción de masa de por lo menos 20% y una reducción en la energía de la deformación de por los menos 10%. Los resultados de los diferentes prototipos son mostrados en la Tabla 6.3.

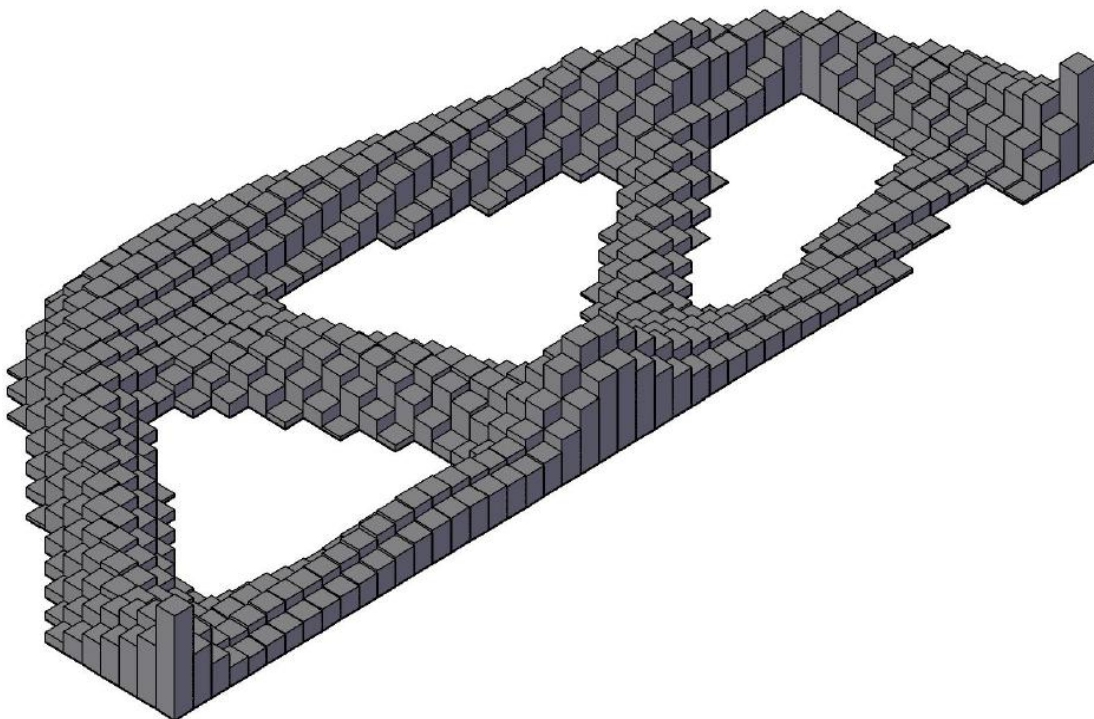


Fig. 6.3 Prototipo que reduce la masa y la energía de deformación.

El prototipo mostrado en la Fig. 6.3 fue obtenido considerando la técnica de control integral, vecindarios de 8 elementos para elementos internos y 12 para elementos en el perímetro del espacio de diseño, un factor de peso $w = 0.425$ y una constante de control $Cd=0.5$.

Se puede apreciar que el prototipo mostrado en la Fig. 6.3 presenta cambios suaves en los espesores elementales. Obteniendo la varianza definida por la Ec. 5.1 de la energía de deformación con respecto a la energía de energía de deformación objetivo del problema ($0.032 \frac{N-cm}{cm^3}$) se obtiene que esta tiene un valor de $\sigma^2 = 0.00242287 \frac{N-cm}{cm^3}$. Por medio del histograma de la energía de deformación se puede observar que gran cantidad de CAs presentan una energía de deformación cercana al objetivo (ver Fig. 6.4).

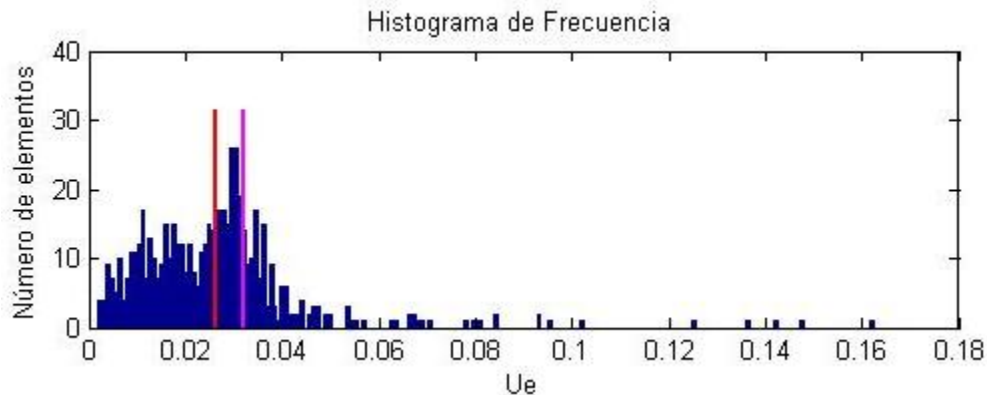


Fig. 6.4. Histograma de la energía de deformación del prototipo mostrado en la Fig.6.3.

Por medio de un acercamiento a la Fig. 6.4 se puede observar que entre el valor medio de la energía de deformación y el objetivo existen una gran cantidad de elementos que presentan una energía de deformación cercana al objetivo (ver Fig. 6.5).

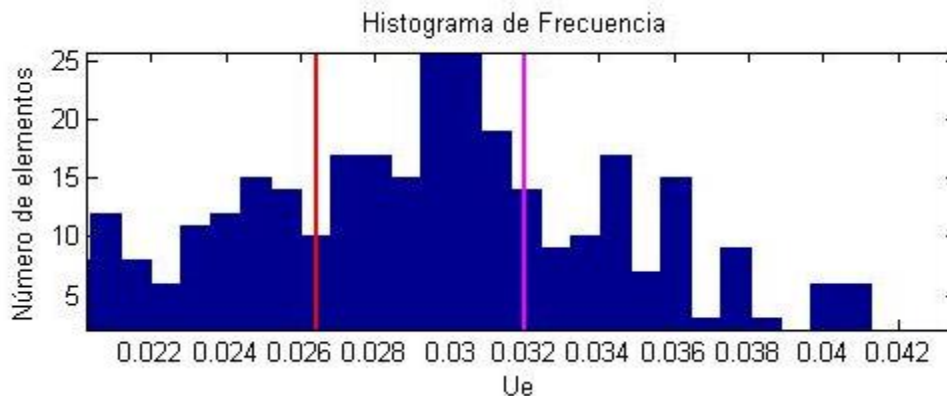


Fig. 6.5 Acercamiento del histograma de la energía de deformación elemental.

El análisis de los esfuerzos elementales que presenta el prototipo mostrado en la Fig. 6.3 confirma que los esfuerzos presentes no superan el máximo permitido de 25 KPa (ver Fig. 6.6). Lo anterior indica que los parámetros de optimización seleccionados fueron los adecuados, pues no se necesita hacer un tratamiento posterior al modelo por medio de los incrementos de los espesores como se mencionó en problemas anteriores.

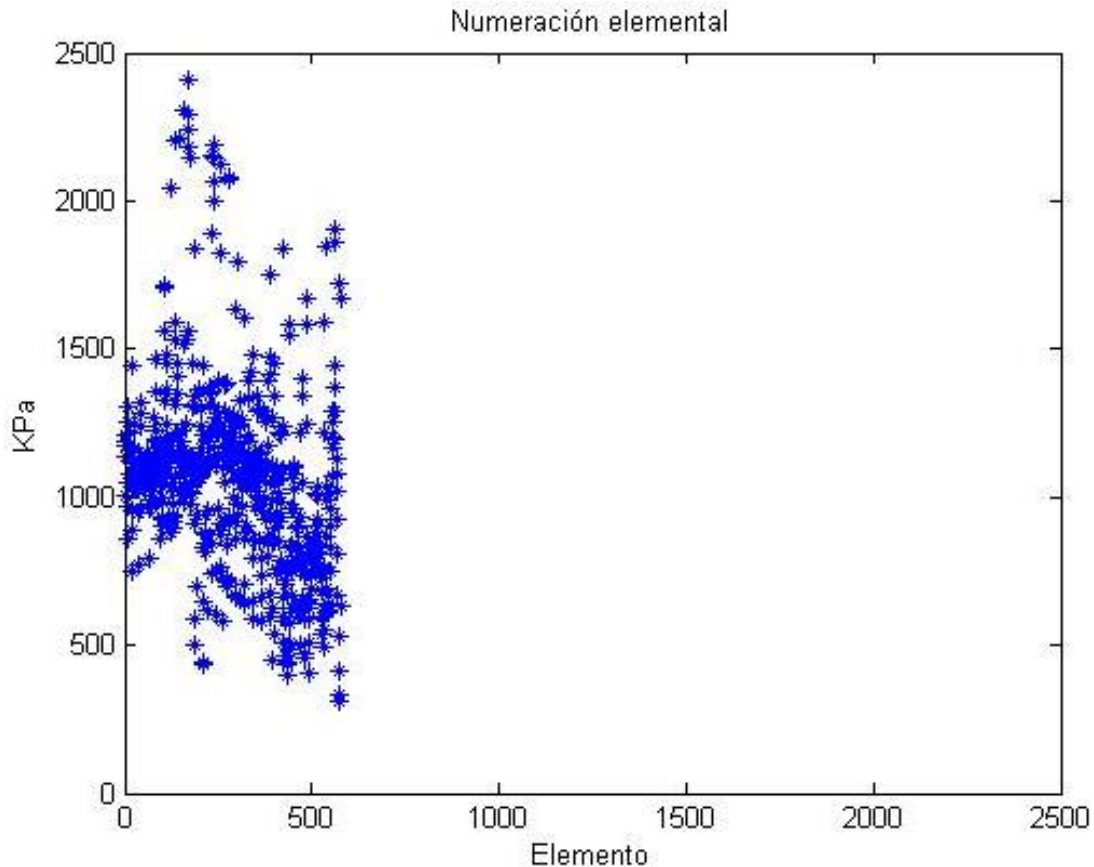


Fig. 6.6. Esfuerzos elementales presentes en el prototipo mostrado en la Fig. 6.3.

El histograma de los esfuerzos elementales del prototipo nos muestra que gran cantidad de los elementos tiene valores cercanos a 1000 KPa, por lo que es de suponer que la energía de deformación óptima ($0.032 \frac{N-cm}{cm^3}$) establecida por la Ec. (2.72) corresponde a un valor de esfuerzo aproximado a 1000 KPa (Ver Fig. 6.7).

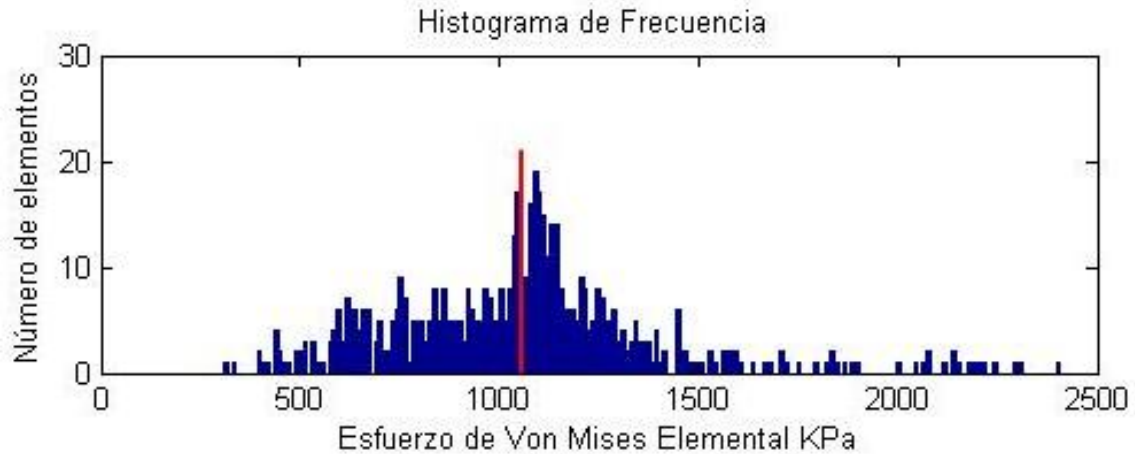


Fig. 6.7. Histograma de esfuerzos elementales del prototipo mostrado en la Fig. 6.3.

La identificación de los elementos que presentan los esfuerzos más altos en el prototipo son mostrados en la Fig. 6.8. La distribución de los esfuerzos muestra que los CAs que presentan los esfuerzos más altos dentro del prototipo están localizados en los bordes donde se presenta la restricción de los agujeros, sin embargo estos no superan el máximo establecido de 25 KPa.

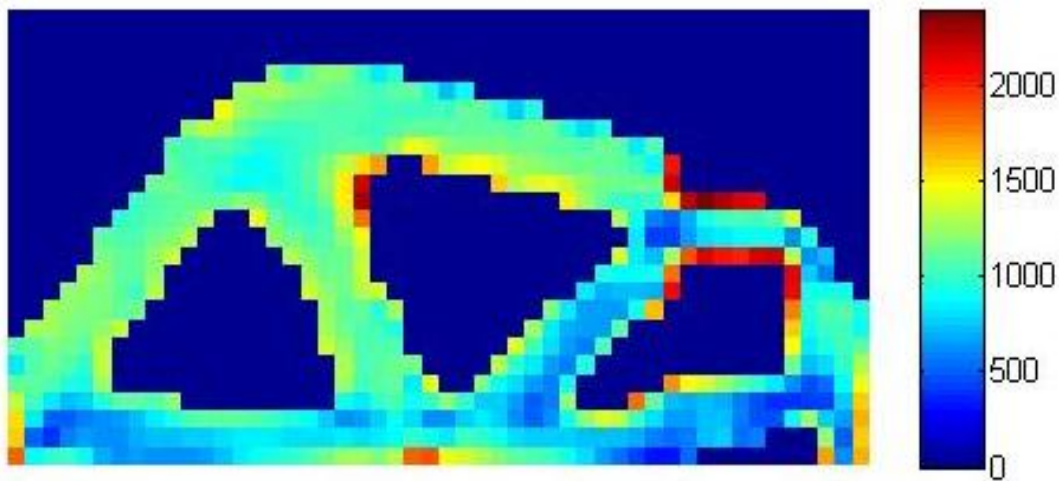


Fig. 6.8. Distribución de los esfuerzos elementales presentes en el modelo mostrado de la Fig. 6.3.

Se puede concluir que el prototipo logrado en esta sección cumple con todos los requerimientos definidos en el problema, pues la masa final de este es de 6.987 Kg lo cual equivale a una reducción del 21.56% con respecto al modelo inicial. De igual manera la energía de deformación inicial es 26.5917 (N-cm), mientras que el prototipo final presenta una energía de deformación final de 23.8694 (N-cm), lo cual equivale a una reducción del

10.24% en la energía de deformación. A pesar de que el prototipo mostrado en la Fig. 6.3 cumple con todas las restricciones, y reduce la energía de deformación y la masa de la estructura inicial, cabe mencionar que puede existir un conjunto de factores de optimización que puedan mejorar los resultados obtenidos por el prototipo mostrado en la Fig. 6.3.

Conclusiones

Durante el desarrollo del presente trabajo se propuso una metodología para desarrollar un modelo proceso de manufactura-microestructura-propiedades (PM-M-P). También se desarrolló una herramienta computacional que optimiza estructuras de espesor variable, la cual permite la implementación de modelos PM-M-P. Las conclusiones más relevantes de este trabajo de tesis se resumen a continuación:

1.- Metodología para generar modelos PM-M-P

Se pudo establecer que la variación del límite de fluencia que presentan los aceros inoxidables ferrítico 430 y AISI 301, son ocasionadas debido a las diferentes temperaturas de recocido a los que son expuestos. Estas variaciones en el límite de fluencia del material pueden ser utilizados como variables de diseño en el proceso de optimización estructural. Se estableció que la implementación de estas variaciones en el límite de cedencia pueden ser consideradas dentro del modelo matemático de optimización si se desarrollara un modelo proceso de manufactura-microestructura-propiedades. Durante el capítulo 1 se propuso una metodología para desarrollar el modelo PM-M-P el cual puede ser incorporado al problema de optimización de estructuras de espesor variable.

2.- Formulación matemática del problema de optimización de estructuras de espesor variable.

Considerando el trabajo de Tanskanan, el cual demostró que al eliminar elementos con baja energía de deformación se logra una estructura con una rigidez máxima y un volumen mínimo, se formuló el problema de optimización de estructuras de espesor variable, considerando a la energía de deformación y la masa de la estructura como funciones objetivos a minimizar. Las variables de diseño consideradas fueron los espesores que podía presentar la estructura. Las condiciones de optimalidad demostraron que la energía de deformación óptima para generar un diseño óptimo respecto al diseño inicial, depende de la energía de deformación inicial de la estructura, de su masa y del factor de peso utilizado para ponderar la energía de deformación de la estructura. Por medio de las condiciones de regularidad de Abadie para las restricciones, se pudo establecer que la solución obtenida corresponde a un punto mínimo local del problema resuelto

3.-Implementación de la solución.

Se logró la implementación de las diferentes condiciones de optimalidad al algoritmo de los autómatas celulares híbridos considerando a la energía de deformación de los CAs como variable de estado y los espesores de los mismos CAs como variables de diseño.

4.-Se determinó que por medio de curvas de Pareto y medidas de dispersión con respecto a la energía de deformación se pueden cuantificar los parámetros de optimización involucrados en el algoritmo de los HCA. También se determinó que la dispersión de la energía de deformación con respecto al óptimo establecido, está relacionado con la generación de los mejores prototipos.

5.- Se pudieron obtener prototipos que cumplen con restricciones de masa y energía de deformación, así como también con restricciones de esfuerzo establecidas para las estructuras de espesor variable.

Contribuciones

Se propuso generar un modelo proceso de manufactura-microestructura-propiedades para los aceros inoxidables ferrítico 430 y AISI austenítico 301, utilizando los parámetros de control utilizados en el proceso de recocido. Este modelo permitirá incorporar la variación del límite de cedencia del material al problema de optimización de estructuras de espesor variable.

Se generó una herramienta computacional que permite obtener prototipos de estructuras de espesor variable que reducen la masa y la energía de deformación con respecto al diseño inicial. Esta herramienta también es capaz de soportar la integración del modelo PM-M-P.

Se determinaron las condiciones de optimalidad para los problemas de optimización de estructuras de espesor variable, considerando estructuras que no presentan restricciones en el espesor mínimo que estas pueden presentar, también se determinaron las condiciones de optimalidad para problemas de estructuras de espesor variable que si tienen una restricción de espesor mínimo diferente de cero.

Se pudo determinar que la dispersión de la energía de deformación que presentan los diferentes elementos que conforman el prototipo, está relacionado con la generación de prototipos que minimizan la masa y la energía de deformación.

Trabajo Futuro

Con el objetivo de mejorar y explorar el desempeño de la herramienta computacional se identifican los siguientes puntos a desarrollar como trabajo a futuro:

- Desarrollar técnicas de control que permitan una convergencia del resultado de manera mas rápida. El algoritmo de optimización de los HCA utiliza técnicas simples de control por lo que la implementación de técnicas más avanzadas permitirían reducir el tiempo de convergencia.
- Determinar una metodología para establecer los parámetros de optimización adecuados para el método de los HCA que minimicen las inestabilidades. Como se pudo apreciar en el capítulo 5 los diferentes parámetros utilizados en el proceso de optimización fueron obtenidos por medio de prueba y error por lo que cabe la posibilidad de que existan parámetros que mejoren los resultados obtenidos.
- Vincular el código de optimización de los HCA con ANSYS como módulo de FEM. Los diferentes tipos de elementos finitos que ofrece el software ANSYS permitiría analizar la convergencia de los prototipos considerando diferentes tipos de elementos finitos.
- Extender el método de optimización de los HCA a prototipos que no consideren elasticidad plana. El paso lógico a desarrollar es la implementación del modelo de optimización a problemas que no consideren elasticidad plana (3D). Esto permitiría considerar problemas más complejos.

Referencias

- [1] Sigmund, Ole (2000). Topology optimization: a tool for the tailoring of structures and materials; *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* 358(1765): 211-227.
- [2] Falco, S.A.; Afonso, S.M.B. & Vaz, L.E. (2004). Analysis and optimal design of plates and shells under dynamic loads – II: Optimization, *Struct Multidisc Optim* (27):197–209.
- [3] WenQuan, C.; Chang, W.; CunYu, W.; Jie, S.; MaoQiul, W. (2012). Microstructures and mechanical properties of the third generation automobile steels fabricated by ART-annealing. *SCIENCE CHINA Technological Sciences.* 55(7): 1814–1822.
- [4] Panigrahi, S. K.; Jayaganthan, R. (2010). Effect of annealing on precipitation, microstructural stability, and mechanical properties of cryorolled Al 6063 alloy. *Journal of Materials Science.* 45(20): 5624–5636.
- [5] Qin, Ch.; Qing-lin, P.; Ying, W. (2012). Microstructure and mechanical properties of Al-5.8Mg-Mn-Sc-Zr alloy after annealing treatment. *Journal of Central South University.* 19: 1785–1790.
- [6] Johannsen, D. L.; Kyrolainen, A. & Ferreira, P. J. (2006). Influence of Annealing Treatment on the Formation of Nano/Submicron Grain Size AISI 301 Austenitic Stainless Steels. *Metallurgical and Materials Transactions.* 37A: 2006-2325.
- [7] Okitsu, Y.; Takata, N.; Tsuji, N. (2008). Mechanical properties of ultrafine grained ferritic steel sheets fabricated by rolling and annealing of duplex microstructure. *Journal of Materials Science.* 43:7391–7396.
- [8] Stegmann, J. & Lund, E. (2005). On discrete material optimization of laminated composites using global and local criteria. *Capítulo 12.*
- [9] Panigrahi, S., K.; Jayaganthan, R. (2010). Effect of annealing on precipitation, microstructural stability, and mechanical properties of cryorolled Al 6063 alloy. *Journal of Materials Science.* 45(20): 5624–5636.
- [10] Narayana-Rao, M. (2010). High performance stainless steels for critical engineering applications. *Transactions of The Indian Institute of Metals.* 63(2-3):321-331.

- [11] Dos-Santos, C. N.; Vieira, A. G.; Paula, A. S.; Viana, C. S. C. (2009). Influence of the austenitic rolling temperature on the microstructure of a TRIP steel before intercritical annealing. *Journal of Materials Science*. 44(12): 3057–3060.
- [12] Achtziger, W.; Kanzow, C.; (2007). *Mathematical programs with vanishing constraints: Optimality conditions and constraint qualifications*. Math. Program. Springer-Verlag.
- [13] Hoheisel, T.; Kanzow, Ch. (2009). First and Second-order optimality conditions for mathematical programs with vanishing constraints. *Applications of Mathematics*. 52: 495-514.
- [14] Méndez-Algarra. (2009). *Desarrollo de algoritmo para la integración de la optimización topológica y la optimización de forma en estructuras*. Universidad Nacional de Colombia. Tesis de Maestría.
- [15] Mroginski, J.L.; Gutiérrez, G. J.; Beneyto, P. A.; Di-Rado, H. A. (2009). Optimización topológica de sistemas estructurales bidimensionales discretos mediante algoritmos genéticos. *Mecánica Computacional (XXVIII)*: 2657-2674.
- [16] Yu-Wang, M. & Wang, X. (2003). Level set models for structural topology optimization. ASME 2003. Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Chicago, Illinois, USA.
- [17] Firl, M. (2010). *Optimal Shape Design of Shell Structures*. Technischen Universität München, PhD. Thesis.
- [18] Bakhtiary, Nima; Allinger, P.; Friedrich, M.; Müller, O.; (1996). A New Approach for Sizing, Shape and Topology Optimization. SAE International Congress and Exposition. Detroit, Michigan, USA.
- [19] MD/MSC Nastran, MD Design Sensitivity and Optimization User's Guide. (2010).
- [20] Inzarulfaisham, A.R. & Azegami, H. (2004). Solution to boundary shape optimization problem of linear elastic continua with prescribed natural vibration mode shapes. *Struct Multidisc Optim* (27): 210–217.
- [21] Dorn, W. S.; Gomory, R. E.; Greenberg, H. J. (1964). Automatic design of optimal structures. *Journal Mec*. 3: 25-52.

[22] Wei, P.; Ma, H. (2010). Stiffness Spreading Method for Layout Optimization of Truss Structures, 6th China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems. Kyoto, Japan.

[23] Zhang, W.H. & Domaszewski, M. (1999). Efficient sensitivity analysis and optimization of shell structures by the ABAQUS code. *Structural Optimization* (18)2-3: 173-182.

[24] Rais-Rohani, M.; Lokits, J. (2007). Reinforcement layout and sizing optimization of composite submarine sail structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 34(1):75-90.

[25] Sokół, T. (2011). Topology optimization of large-scale trusses using ground structure approach with selective subsets of active bars. Warsaw, Poland. *Computer Methods in Mechanics* (9):12.

[26] Haftka, R.T. & Gürdal, Z. (1992). *Elements of Structural Optimization*. Kluwer Academic Publishers.

[27] Stegmann, J. & Lund, E. (2005). On discrete material optimization of laminated composites using global and local criteria. *Capítulo 12*.

[28] Stegmann, J. & Lund, E. (2005) Discrete material optimization of general composite shell structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 62(14):2009–2027.

[29] Bendsøe, M.P.; Guades, J.M.; Haber, R. B.; Pedersen, P. Taylor, J.E. (1994) An analytical model to predict optimal material properties in the context of optimal structural design. *Journal of Applied Mechanics*. 61(4):930.

[30] Kocvara, M.(2002). Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials. PhD Tesis. Eindhoven : Technische Universiteit Eindhoven.

[31] Cheng, G.; Mei, Y. & Wang, X. (2006). A feature-based structural topology optimization method. *IUTAM Symposium on Topological Design Optimization of Structures, Machines and Materials: Status and Perspectives*.

[32] Bendsøe, M.P & Sigmund, O. (2004). *Topology Optimization*. Ed. Springer.

- [33] Eschenauer, H.A. & Olhoff, N. (2001). Topology optimization of continuum structures: A review, *Appl. Mech.* 54(4): 331-390.
- [34] Cadman, J. E.; Zhou, S.; Chen, Y.; Li, Q. (2013). On design of multi-functional microstructural materials. *Journal of Materials Science.* 48(1): 51-56.
- [35] Bendsøe, M.P. (1989). Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization.* 1(4):193-202.
- [36] Parvizian, J.; Düster, A.; Rank, E. (2012). Topology optimization using the finite cell method, *Optimization and Engineering.* 13(1): 57-78.
- [37] Hassani, B. & Hinton, E. (1998). A review of homogenization and topology optimization I-homogenization theory for media with periodic structure. *Computers & Structures* 69(6): 707-717.
- [38] Bendsøe, M.P. & Kikuchi, N. (1988) Generating optimal topologies in structural desing using a homogenization method. *Com. Meth. App. Mech, Engrg.*, 71(2): 197-224.
- [39] Kamiński, M. M. (2000). Multiresolutional wavelet-based homogenization of random composites Technical report Katedra Mechaniki Materiaow Politechniki Lodzkiej.
- [40] Kouznetsova, V. G. (2002). Computational homogenization for the multi scale analysis of multi-phase materials. PhD. Thesis. Universiteitsdrukkerij TU Eindhoven, Eindhoven, The Netherlands.
- [41] Zhou, S. & Li, Q. (2008). Design of graded two-phase microstructures for tailored elasticity gradients. *J Mater Sci* 43: 5157-5167.
- [42] Zhang, W.H. & Sun, S.P. (2006). Scale-related topology optimization of cellular materials and structures. *International Journal of Numerical Methods in Engineering.* 68: 993-1011.
- [43] Sigmund, O. (1994). Materials with prescribed constitutive parameters: an inverse homogenization problem. *International Journal Solids Struct.* 31: 2313-2329.

- [44] Suzuki, K. & Kikuchi, N. (1991) A homogenization method for shape and topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 93(3): 291-318.
- [45] Sigmund, O.(2001) A 99 line topology optimization code written in Matlab Struct. *Multidisc. Optim.* 200 (21): 120-127.
- [46] Reitz A. (2001). (2001). Sufficiency of a finite exponent in SIMP (power law) methods. *Struct Multidisc Optim* 21:159–163
- [47] Sigmund, O. & Petersson. (1998). Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural Optimization*. 16(1): 68-75.
- [48] Xie, Y. M. & Steven, G. P. (1993) A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers & Structures* 49(5): 885-896.
- [49] Huang, X. & Xie, Y. M. (2010). *Evolution topology optimization of continuum structures, methods and applications*. UK. Wiley.
- [50] Edwards, C. S.; H. A. Kim, H.A.; Budd, C.J. (2007). An evaluative study on ESO and SIMP for optimising a cantilever tie-beam, *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 34(5): 403-414.
- [51] Osher, S.J. & Sethian, J.A. (1988) Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on the Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*. 79(1):12-49.
- [52] Sethian, J.A. (1999). *Level set method and fast marching methods: Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision and materials science*. Cambridge Monographs on Applied and computational Mathematics, Vol 3. 2^o Edición. Cambridge University press, Cambridge.
- [53] Osher, S. & Fedkiw, R. (2003). *Level set method and dynamic implicit surfaces*. Applied mathematical science. New York. Editorial Springer.

- [54] Osher, S.J. & Santosa, F. (2001) Level set method for optimization problems involving geometry and constraints: I. Frequencies of a two-density inhomogeneous drum. *J. Comput Phys.* 171: 272-288.
- [55] Challis, V. J. (2010). A discrete level-set topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization.* 41(3): 453-464.
- [56] Benliang, Z.; Zhang, X.; Wang, N. (2012). Topology optimization of hinge-free compliant mechanisms with multiple outputs using level set method. *Structural and Multidisciplinary Optimization.*
- [57] Van-Dijk, N.P.; Yoon, G.H.; Van-Keulen, F.; Langelaar, M. (2010). A level-set based topology optimization using the element connectivity parameterization method. *Struct Multidisc Optim.* 42: 269-282.
- [58] Xia, Q.; Shi, T.; Yu-Wang, M.; Liu, S. (2010). A level set based method for the optimization of cast part. *Structural and Multidisciplinary Optimization.* 41(5): 735-747.
- [59] Tovar, A. (2005). Topology optimization with the hybrid cellular automaton technique. *Rev. int. Met NUM. Calc. Dis. Ing.* 21(4): 365-383.
- [60] Chopard, B. & Droz, M. (1998). Cellular automata modeling of physical systems. Cambridge University Press.
- [61] Mozumder, P.; Patel, C.; Renaud, J. (2009). Synthesis of a Dynamically Loaded Structure with Topology Optimization. *SAE International Journal Passeng. Cars – Mech. Syst.* 2(1): 1143-1150.
- [62] Kita, E.; & Toyoda, T. (2000). Structural design using Cellular Automata. *Struct Multidisc Optim.* 19: 64-73.
- [63] Achtziger W (2007) On simultaneous optimization of truss geometry and topology. *Struct Multidisc Optim* 33:285–304.
- [64] Díaz, A. & Sigmund, O. (1995). Checkerboard patterns in layout optimization. *Structural Optimization.* 10(1): 40-45.

[65] Bendsøe, M. P. & Sigmund, O. (1999). Material interpolations schemes in topology optimization. *Archive Applied Mechanics*. 69(9-10): 635

[66] He, Y.; Chuan, W.; Hong-Wei, L. (2011). Review on cellular automata simulations of microstructure evolution during metal forming process: Grain coarsening, recrystallization and phase transformation, *Science China Technological Sciences*. 54(8):2107-2118.

[67] Achtziger, W.; Kanzow, C.; (2007). *Mathematical programs with vanishing constraints: Optimality conditions and constraint qualifications*. Math. Program. Springer-Verlag.

[68] Penninger, C. L.; Watson, L. T.; Tovar, A.; Renaud, J. E. (2010). Convergence analysis of hybrid cellular automata for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 40 (1-6):271–282.

[69] Reddy, J. N. (2008). *An introduction to continuum mechanics*. Cambridge University Press.

[70] Martínez, M.; Sanchis, J.; Blasco, X. (2007). Global and well-distributed Pareto frontier by modified normalized normal constraint methods for bicriterion problems, *Structural Multidisciplinary Optimization*. 34(3): 197-209.

[71] The Plane Stress Problem. Cap. 14. *Introduction to finite element methods (ASEN 5007)*. University of Colorado at Boulder.

[72] Kasprzak, E. M.; Lewis, K.E. (2004). *Pareto Analysis in Multiobjective Optimization Using the Colinearity Theorem and Scaling Method*.

[73] Isoparametric Quadrilaterals, Cap. 17. *Introduction to finite element methods (ASEN5007)*. University of Colorado at Boulder.

ANEXOS

ANEXO A1

Método de elemento finito para problemas de esfuerzo plano

Introducción

Las respuestas mecánicas necesarias para resolver el problema de optimización fueron calculadas utilizando el método de elemento finito, en donde la discretización utilizada para dividir el continuo en elementos finitos utilizó elementos lineales rectangulares. En la siguiente sección se establece la formulación implementada para el análisis del problema de elasticidad plana en los problemas de optimización tratados en este trabajo.

Formulación del método de elemento finito para un solo elemento

Las ecuaciones necesarias para aplicar el método de elemento finito a problemas de esfuerzo plano tratados en este trabajo, comienza definiendo la discretización del dominio mostrado en la Fig. A.1 en elementos finitos rectangulares. Definiendo que el dominio elemental está conformado por las fronteras elementales Γ^e y considerando que el elemento utilizado en la discretización tiene 4 nodos que lo conforman, se puede establecer que los grados de libertad presentes para cada elemento es de 8, los cuales representan los desplazamientos de los nodos en el plano XY, y son representados de la siguiente manera:

$$u_e = [u_x^1 \quad u_y^1 \quad u_x^2 \quad u_y^2 \quad u_x^3 \quad u_y^3 \quad u_x^4 \quad u_y^4]^T \quad \text{A.1.1}$$

Interpolación de los desplazamientos

El campo de los desplazamientos que puede presentar el elemento, puede ser interpolado por medio de los desplazamientos nodales, dicho lo anterior las componentes de los desplazamientos pueden ser calculadas de la siguiente manera:

$$u_x(x, y) = [N_1 \quad 0 \quad N_2 \quad 0 \quad N_3 \quad 0 \quad N_4 \quad 0] u_e \quad \text{A.1.2}$$

$$u_y(x, y) = [0 \quad N_1 \quad 0 \quad N_2 \quad 0 \quad N_3 \quad 0 \quad N_4] u_e \quad \text{A.1.3}$$

Donde N_i son las funciones de forma elementales. Las anteriores ecuaciones pueden ser combinadas y definidas de la siguiente manera:

$$u(x, y) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} u_e = Nu_e \quad \text{A.1.4}$$

En donde N es conocida como la matriz de funciones de forma. Las condiciones de interpolación definidas en el elemento establecen que las funciones de forma N_i deben de tomar el valor de 1 en el nodo i y cero en todos los demás nodos.

Obteniendo la variación del campo de desplazamientos del elemento se puede definir la relación esfuerzo-deformación elemental de la siguiente manera:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} u_e = Bu_e \quad \text{A.1.5}$$

La relación anterior puede ser utilizada para determinar el esfuerzo elemental, el cual está definido de la siguiente manera:

$$\sigma = E Bu_e \quad \text{A.1.6}$$

Donde E está definida por:

$$E = \frac{E_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \begin{array}{cccccc} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{array} \right\} \quad \text{A.1.7}$$

La cual como se mencionó en el capítulo dos es la relación esfuerzo-deformación para un material isotrópico.

Aproximación de las deformaciones utilizando método de elemento finito

Para poder determinar las deformaciones de un sólido discretizado primero se debe de establecer su energía potencial total, la cual está definida por la diferencia ente energía interna de la deformación elástica “U” y la energía consecuencia de las fuerzas externas aplicadas “W”.

$$\text{III} = U - W \quad \text{A.1.8}$$

La energía interna causada por la deformación de un sólido puede ser expresada como:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T E \varepsilon d\Omega \quad \text{A.1.9}$$

La energía de deformación consecuencia de las fuerzas aplicadas puede ser definida de la siguiente manera:

$$W = \int_{\Omega} u^T b d\Omega + \int_{\Gamma} u^T t d\Gamma \quad \text{A.1.10}$$

Donde “b” son las fuerzas de cuerpo y “t” las fuerzas de tracción aplicadas en las fronteras del sólido.

Utilizando la discretización anteriormente mencionada la energía potencial total está definida como:

$$\text{III}_e = \frac{1}{2} u_e^T K_e u_e - f_e u_e^T \quad \text{A.1.11}$$

Por lo que la energía potencial total para todo el dominio discretizado en “N” elementos está definido por:

$$\text{III} = \sum_{e=1}^N \text{III}_e \quad \text{A.1.12}$$

Y utilizando el principio de mínima energía el cual establece que:

$$\frac{\partial \text{III}}{\partial u} = 0 \quad \text{A.1.13}$$

Se puede definir lo siguiente:

$$\sum_{e=1}^N \frac{\partial \text{III}_e}{\partial u} = \sum_{e=1}^N (k_e u_e - b_e - t_e) = 0 \quad \text{A.1.14}$$

Considerando que las fuerzas de cuerpo son despreciables en A.1.14, se puede reducir de la siguiente manera:

$$\sum_{e=1}^N (k_e u_e - t_e) = 0 \quad \text{A.1.15}$$

Donde la matriz de rigidez elemental está definida por:

$$k_e = \int_{\Omega} B^T E B d\Omega \quad \text{A.1.16}$$

La ecuación A.1.15 puede ser utilizada para aproximar las deformaciones de un sólido causadas por las fuerzas externas a las cuales está sujeta.

Anexo A2

Código de optimización utilizando el método de los HCA.

```
%%% OPTIMIZACION ESTRUCTURAL, LA VARIABLE DE DISEÑO ES EL ESPESOR
%%% DE CADA ELEMENTO, EL PROBLEMA SE ESTA MODELANDO COMO UN PROBL.
%%% DE ESFUERZO PLANO Y ELASTICO.
%%% 4/04/2012
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all                                %%%
clc                                       %%%
clf                                       %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% PARAMETROS DE ENTRADA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
X=ones(25,50);                            %%%
Dimenciones (dim y, dim X)
[nely, nelx] = size(X);                    %%% Tipo 2
usuario determina elementos efectivos
tipo=2;                                    %%% Tipo 1
se seleccionan los elementos del perimetro para efectivos
    tp=1;                                   %%% Tp=1
para conciderar todo el perimetro, tp=2 considera part inferior
neighbors = 8;                              %%% Tipo de
vecindad
    newneighbors = 12;                       %%% Vecindad
extendida para elementos seleccionados
    ext=1;                                   %%% ext = 1
se concidera vecidad extendida para elemntos, ext=0 no lo concidera
mo=0.0078; %acero                            %%% cada
elemento pesa Kg/cm^3 aluminio=0.0027
Ymod=20e6;                                    %%%acero
200GPa %20e6N/cm^2 % 20e4 N/mm^2            %%%
ALUMINIO N/cm^2                            Yal=65e5
nu=0.3;                                       %%% modulo
de poison
Gmax=25e3; G=ones(nely,nelx).*Gmax; %Acero 250MPa %25e3N/cm^2
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% PELICULA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
aviobj = avifile('CASO_8_EXT12_W25_INT3.avi','compression','None');
%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% VIGA SIMPLEMENTE APOYADA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for i=1:1:2*(nelx+1)*(nely+1)                %%%
    fxF(i,1)=i;                               % # NODO          %%%
    fxF(i,2)=0;                               % Carga en nodo      %%%
    fxF(i,3)=1;                               %Caso de carga      %%%
    if i==1300%1352                            %%%
        fxF(i,2)=-100000;                    %%%
    end                                         %%%
end                                             %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% NODOS FIJOS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for i=2*(nely+1):1:2*(nely+1)                %%%
    fxU(i,1)=i;                               %%%
    fxU(i,2)=0;                               %%%
    fxU(i,3)=1;                               %%%
end                                             %%%
```

```

fxU(2652,1)=2652; fxU(2651,1)=2651; %%%
fxU(2652,2)=0; fxU(2651,2)=0; %%%
fxU(2652,3)=1; fxU(2651,3)=1; %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% VIGA VOLADIZO %%%%%%%%%
% for i=1:1:2*(nelx+1)*(nely+1) %%%
%   fxF(i,1)=i; % # nodo %%%
%   fxF(i,2)=0; %Carga en el nodo %%%
%   fxF(i,3)=1; %caso de carga %%%
% end %%%
%   fxF((nelx+1)*(nely+1)*2,2)=(50e3); %%% La
carga aplicada
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% NODOS FIJOS %%%%%%%%%
% for i=1:1:2*(nely+1) %%%
%   fxU(i,1)=i; %NODO %%%
%   fxU(i,2)=0; %DESPLAZAMIENTO %%%
%   fxU(i,3)=1; %CASO CARGA %%%
% end %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(1) %%%
XCP=[1:2:nelx*2]*0.5; %%%
YCP=[1:2:nely*2]*0.5; %%%
XY=ones(nely,nelx); %%%
NUM=[1:1:(nelx*nely)]; %%%
imagesc(XY); axis equal; axis tight; axis off; %%%
title('Distribucion de elementos') %%%
ren=1; %%%
for j=1:1:nely %%%
    for i=1:1:nelx %%%
        text(XCP(1,i),YCP(1,j),['|',num2str(NUM(1,ren))... %%%
            ],'HorizontalAlignment','left') %%%
        ren=ren+1; %%%
    end %%%
end %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% NODOS COMO APOYOS %%%%%%%%%
%%% indica la posicion del elemento que esta fijo %%%
if tipo==1 %%%
    C2 = peri(nelx,nely,neighbors,tp); %%%
%%%
end %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if tipo==2 %%%
    npf=input('Numero de elementos fijos: '); %%%
    for i=1:1:npf %%%
        C2(i,1)=input('Elemento fijo #: '); %%%
    end %%%
end %%%
clf %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CORRECCION DE ESPESOR %%%%%%%%%
X(X < 0.001) = 0.001; %%%X=espesor
minimo evita singularidades en K^-1
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% FE-ANALYSIS %%%%%%%%%
VoM = FEAH(X, fxF, fxU, Ymod, nu); %%%

```

```

SED = fea(X, fxF, fxU, Ymod, nu); %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% PLOT %%%%%%%%%
Vm=max(max(VoM)); %%%Max ESF
it = 0; %%% iteracion
#
SE = sum(sum(SED)); %%%SE=energia
de deformacion total
Mo = sum(sum(X*mo)); %%%M=masa
total
fig=subplot(2,1,1); %%%
hfig = imagesc(VoM); axis equal; axis tight; axis off; %%%
str = [ ' t: ' sprintf('%4i',it) ... %%%
' SE: ' sprintf('%10.4f',SE) ... %%%
' M: ' sprintf('%6.3f',Mo)... %%%
' VM: ' sprintf('%6.3f',Vm)]; %%%
title(str); pause(1e-6); %%%
disp(str); %%%
subplot(2,1,2); %%%
xfig = imagesc(X);axis equal; axis tight; axis off; %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
F = getframe(fig); %%%
aviobj=addframe(aviobj,F); %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% PELICULA %%%%%%%%%
% ADD FRAME TO MOVIE %%%
%if movflg %%%
%frm = getframe(fig); %%%
%mov = addframe(mov,frm); %%%
%end %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% MATRIZ DE POSICION DE ELEMENTOS %%%%%%%%%
NE=NumEle(nelx,nely); %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%ACOMODO DE INFORMACION %%%%%%%%%
Se=SED; Uo=SE; %%%
w=0.5; %%%
w1=((1-w)/w)*(mo/Mo)*Uo; %%%
Cd=1.1; %%%
efS = doavgf_1(Se,neighbors,0,NE,C2,newneighbors,ext); %%%
efX = doavgf_1(X,neighbors,0,NE,C2,newneighbors,ext); %%%
efS=efS./efX; %%%
tgS=ones(size(efS)).*w1; %%%
efE = zeros(size(efS)); %%%
efE(efS > tgS) = efS(efS > tgS) - tgS(efS > tgS); %%%
efE(efS < tgS) = efS(efS < tgS) - tgS(efS < tgS); %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% PARA CONTROL DERIVATIVO %%%%%%%%%
efEold = efE; %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%PARA CONTROL INTEGRAL: SE GENERA UN HISTORIAL DE %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CONTROL INTEGRAL %%%%%%%%%
T=0; %%%
efEhis = zeros(size(efE,1),size(efE,2),T+1); %%%
efEsum = zeros(size(efE,1),size(efE,2)); %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% PARA CONVERGENCIA %%%%%%%%%
Mtol = inf; vtol=.002; itmax=500; Mold = 0; %%%

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% PARA TARGET EVOLUCIONANDO %%%%%%%%%
Uo=SE;    Xnew=X;    s=0;    efEold = zeros(size(efE));    %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
while (it<itmax & Mtol>vtol)    %%
it = it + 1;    %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
efV = doavgf_1(VoM,neighbors,0,NE,C2,newneighbors,ext);    %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% TECNICAS DE CONTROL %%%%%%%%%
xid = efE~=0 & efV~=0 & VoM <=Gmax;    %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%RATIO TECHNIQUE%%%%%%%%
%Xnew(xid) =efX(xid).*(efS(xid)./tgS(xid));    %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% DOS POSICIONES %%%%%%%%%
%Xnew(xid) = efX(xid) + Cd.*sign(efE(xid));    %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CONTROL DERIVATIVO %%%%%%%%%
%Xnew(xid) = efX(xid) + Cd.*(efE(xid) - efEold(xid));    %%
%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% PROPORCIONAL CONTROL %%%%%%%%%
%Xnew(xid) = efX(xid) + Cd.*efE(xid);    %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Control integral%%%%%%%%
Xnew(xid) = efX(xid) + Cd.*efEsum(xid)./tgS(xid);    %%
%Xnew(10:1:15,22:1:27)=0;    %%
%Xnew(15:1:20,40:1:45)=0;    %%
%Xnew(5:1:10,40:1:45)=0;    %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% SOLUCION CON NUEVOS ESPESORES %%%%%%%%%
Xnew(Xnew < 0.01) = 0.000001;    %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% FE-ANALISIS %%%%%%%%%
[SEDnew] = fea(Xnew, fxF, fxU, Ymod, nu);    %%
VoMnew = FEAH(Xnew, fxF, fxU, Ymod, nu);    %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CORRECCION DE ESPESORES %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
SEDnew( Xnew < 0.01) = 0;    %%
VoMnew( Xnew < 0.01) = 0;    %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CONVERGENCIA %%%%%%%%%
Mnew = sum(sum(Xnew*mo));    %%
Mtol = (abs(Mnew - Mo) + abs(Mo - Mold))/2;    %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% ACTUALIZAR %%%%%%%%%
SED = SEDnew;    %%
VoM= VoMnew;    %%
X = Xnew;    %%
Mold = Mo;    %%
Mo = Mnew;    %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CANTIDADES EFECTIVAS %%%%%%%%%
efS = doavgf_1(SED,neighbors,0,NE,C2,newneighbors,ext);    %%
efS=efS./efX;    %%
for i=1:nelx    %%
for j=1:nely    %%

```

```

        if X(j,i)<=0.01           %%
            efS(j,i)=0;         %%
        end                     %%
    end                         %%
end                             %%
efX = doavgf_1(X,neighbors,0,NE,C2,newneighbors,ext); %%
efE = zeros(size(efS));        %%
efE(efS > tgS) = efS(efS > tgS) - tgS(efS > tgS); %%
efE(efS < tgS) = efS(efS < tgS) - tgS(efS < tgS); %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
efE=doavgf_1(efE,neighbors,0,NE,C2,newneighbors,ext); %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
efEold = efE;                 %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% PARA CONTROL INTEGRAL: SUMA DE CANTIDADES %%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% EFECTIVAS ACUMULADAS %%%%%%%%%%%
efEsum = efEsum + efE - efEhis(:, :, 1); %%
efEhis(:, :, T+2) = efE;      %%
for t=1:T+1                   %%
efEhis(:, :, t) = efEhis(:, :, t+1); %%
end                             %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% PLOT %%%%%%%%%%%
Uo = sum(sum(SED));           %%
SE=Uo;                         %%
Vm=max(max(VoM));             %%
fig=subplot(2,1,1);          %%
hfig = imagesc(VoM); axis equal; axis tight; axis off; %%
str = [ ' t: ' sprintf('%4i',it) ... %%
' SE: ' sprintf('%10.4f',SE) ... %%
' M: ' sprintf('%6.3f',Mo)... %%
' VM: ' sprintf('%6.3f',Vm)... %%
' Tg: ' sprintf('%6.3f',w1) ]; %%
title(str); pause(1e-6);     %%
disp(str);                   %%
subplot(2,1,2);              %%
xfig = imagesc(X);axis equal; axis tight; axis off; %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% PELICULA %%%%%%%%%%%
% ADD FRAME TO MOVIE %%
%if movflg %%
F = getframe(fig); %%
aviobj=addframe(aviobj,F); %%
%end %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
end %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% GENERACION DE LISTAS DE DATOS %%%%%%%%%%%
num=0; %%
for i=1:1:nely %%
    for j=1:1:nelx %%
        num=num+1; %%
        lis(num,1)=num; %%
        lis(num,2)=SED(i,j); %%
        lis(num,3)=VoM(i,j); %%
        lis(num,4)=X(i,j); %%
    end %%
end %%

```

```

end %%%
end %%%
[nelx,nely]=size(lis); %%%
fi = fopen('DATOS_CASO_01.txt', 'w'); %%%
for i=1:1:nelx %%%
    fprintf(fi, '%6.0f\t %12.4f\t %12.4f\t %12.8f\r\n'... %%%
            ,lis(i,1),lis(i,2),lis(i,3),lis(i,4)); %%%
end %%%
fclose(fi); %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CERRAR PELICULA %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% %%%
%if movflg %%%
%end %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% %%%

```