



**Universidad Autónoma de San Luis Potosí**  
**Facultad de Ingeniería**  
**Centro de Investigación y Estudios de Posgrado**

**Controladores basados en retardo para una clase de sistemas  
completamente actuados**

**T E S I S**

Que para obtener el grado de:

Doctor en Ingeniería Eléctrica

Presenta:

M. I. Juan Carlos Coronado Salazar

Asesor:

Dr. Emilio Jorge González Galván

Co-asesor:

Dr. César Fernando Francisco Méndez Barrios

San Luis Potosí, S. L. P.

Enero de 2024





16 de febrero de 2023

**M.I. JUAN CARLOS CORONADO SALAZAR  
P R E S E N T E.**

En atención a su solicitud de Temario, presentada por los **Dr. Emilio Jorge González Galván y César Fernando Francisco Méndez Barrios**, Asesor y Coasesor de la Tesis que desarrollará Usted con el objeto de obtener el Grado de **Doctor en Ingeniería Eléctrica**, me es grato comunicarle que en la sesión del H. Consejo Técnico Consultivo celebrada el día 16 de febrero del presente año, fue aprobado el Temario propuesto:

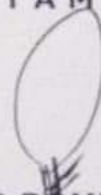
**TEMARIO:**

**"Controladores basados en retardo para una clase de sistemas completamente actuados"**

1. Introducción.
  2. Antecedentes matemáticos.
  3. Modelado de sistemas Euler-Lagrange.
  4. Resultados principales: el controlador basado en retardo.
  5. Ejemplos numéricos: sistemas completamente actuados.
  6. Validación experimental.
  7. Conclusiones y trabajos futuros.
- Referencias

**"MODOS ET CUNCTARUM RERUM MENSURAS AUDEBO"**

**A T E N T A M E N T E**



**DR. RICARDO ROMERO MÉNDEZ**  
**SECRETARIO DEL CONSEJO**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
DE SAN LUIS POTOSÍ  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
SECRETARÍA





**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Área de Investigación y Estudios de Posgrado**

**Aclaración**

El presente trabajo que lleva por título:

**Controladores basados en retardo para una clase de sistemas completamente actuados**

se realizó en el periodo **febrero** de 2017 a **diciembre** de 2023 bajo la dirección del Dr. César Fernando Francisco Méndez Barrios y del Dr. Emilio Jorge González Galván.

**Originalidad**

Por este medio aseguro que he realizado este documento de tesis para fines académicos sin ayuda indebida de terceros y sin utilizar otros medios más que los indicados.

Las referencias e información tomadas directa o indirectamente de otras fuentes se han definido en el texto como tales y se ha dado el debido crédito a las mismas.

El autor exime a la UASLP de las opiniones vertidas en este documento y asume la responsabilidad total del mismo.

Este documento no ha sido sometido como tesis a ninguna otra institución nacional o internacional en forma parcial o total.

Se autoriza a la UASLP para que divulgue este documento de Tesis para fines académicos.

Nombre y Firma del autor

---



---

## **Agradecimientos**

Quisiera expresar mi profundo agradecimiento a todas las personas que contribuyeron de manera significativa a la realización de esta tesis doctoral.

En primer lugar, agradezco al Dr. César Fernando Francisco Méndez Barrios y al Dr. Emilio Jorge González Galván por su guía constante, sabiduría académica y apoyo inquebrantable. Su dedicación y compromiso han sido fundamentales para el éxito de este trabajo de investigación.

Agradezco también a los distinguidos miembros de mi comité de tesis, la Dra. Elvia Hernández Palacios, el Dr. Juan Antonio Cárdenas Galindo, el Dr. Ricardo Álvarez Salas, el Dr. Alejandro González de Alba y el Dr. Adrián Josué Guel Cortez. Sus valiosas aportaciones y comentarios enriquecieron considerablemente este proyecto.

Mi gratitud se extiende a la Universidad Autónoma de San Luis Potosí (UASLP) por proporcionar un entorno académico propicio para la investigación y el desarrollo académico.

A mi familia, mi pilar fundamental, les dedico un agradecimiento especial. A mi esposa Paola y mis tres hijos, su paciencia, amor y apoyo constante fueron mi motivación y fuerza durante este viaje académico. A mis padres, José Luis y Laura Aide, y mis hermanos, Luis y Jorge, gracias por enseñarme el valor de la perseverancia y por nunca dejarme rendirme.

Finalmente al consejo nacional de ciencia y tecnología (CONACYT) por otorgarme la beca para desarrollar mis estudios de posgrado.

Este logro no habría sido posible sin el respaldo de todas estas personas e instituciones, y les estoy profundamente agradecido.

---

## Notación

### Matrices, vectores y escalares

$a$	Los escalares se representan por minúsculas.
$\mathbf{a}$	Los vectores se representan por minúsculas en negritas.
$\mathbf{A}$	Las matrices se representan por mayúsculas en negritas.
$a_{ij}$	$ij$ -ésimo elemento de una matriz $\mathbf{A}$ .
$ a $	Valor absoluto del escalar $a$ .
$\ \mathbf{a}\ $	Norma euclidiana de vector $\mathbf{a}$ .
$\ f\ _\infty = \sup\{ f \}$	Norma infinito de la función $f$ .
$ \mathbf{A} $	Determinante de la matriz $\mathbf{A}$ .
$\mathbf{K}_p$	Frecuentemente utilizada como una matriz diagonal de ganancia proporcional.
$k_p$	Escalar que denota a una ganancia proporcional.
$\mathbf{K}_d$	Frecuentemente utilizada como una matriz diagonal de ganancia derivativa.
$k_d$	Escalar que denota a una ganancia derivativa.
$\mathbf{A} > \mathbf{0}$	Denota que una matriz $\mathbf{A}$ es definida positiva.
$\mathbf{q}_r$	Vector de referencia.
$\mathbf{q}_\tau$	Vector retardado en el tiempo $\mathbf{q}(t - \tau), \forall \tau > 0$ .
$(.)^{-1}$	Función inversa.
$\mathbf{A}^\top$	Transpuesta de la matriz $\mathbf{A}$ .
$\hat{p}$	Estimación del parámetro $p$ .
$\hat{\mathbf{d}}$	Estimación de la función vectorial $\mathbf{d}$ .
$\overline{A}$	Máxima magnitud que el parámetro $A$ puede tener por diseño.



---

## Simbología

$\mathbb{N}$	Conjunto de números naturales.
$\mathbb{R}_+$	Conjunto de números reales estrictamente positivos.
$\mathbb{R}$	Campo de números reales.
$\mathbb{R}^n$	Espacio de todos los vectores columna $n$ -dimensionales con componentes en $\mathbb{R}$ .
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Espacio de matrices reales de tamaño $n \times m$ .
$C([t_0 - \tau, t_0]^\top, \mathbb{R}^n)$	Conjunto de funciones continuamente diferenciables las cuales mapean el vector $[t_0 - \tau, t_0]^\top$ en $\mathbb{R}^n$ .
$\mathcal{PC}([t_0 - \tau, t_0]^\top, \mathbb{R}^n)$	Conjunto de funciones definidas a trozos las cuales mapean el vector $[t_0 - \tau, t_0]^\top$ en $\mathbb{R}^n$ .
$I_n$	Matriz identidad de dimensión $n \times n$ .
$:=$	“Definición”.
$x \rightarrow y$	$x$ tiende a $y$ .
$s_\theta$	Representa el $\sin(\theta)$ .
$c_\theta$	Representa el $\cos(\theta)$ .
$\mathbf{x}^*$	Punto de equilibrio.
$g_1(t) * g_2(t)$	Convolución entre la función $g_1(t)$ y $g_2(t)$ .
$h(t)$	Función Heaviside o escalón.

### **Sistemas Euler-Lagrange**

- $\mathbf{q}(t)$  Vector de estados generalizados.
- $\mathbf{q}_r(t)$  Vector de trayectoria de referencia para el estado  $\mathbf{q}(t)$ .
- $\tilde{\mathbf{q}}(t)$  Vector error definido por  $\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_r(t)$ .
- $\hat{\mathbf{p}}$  Vector de parámetros estimados del sistema.
- $E_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  Energía cinética total del sistema.
- $E_p(\mathbf{q})$  Energía potencial total del sistema.
- $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  Matriz de inercia generalizada.
- $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  Matriz de coriolis y fuerzas centrífugas.
- $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  Vector de gravedad.

### **Acrónimos**

- IAE Integral del Valor Absoluto del Error por sus siglas en ingles.
- ISE Integral del Error Cuadrático por sus siglas en ingles.
- ITAE Integral del Producto del Error y el Tiempo por sus siglas en ingles.
- ITSE Integral del Producto del Error Cuadrático y el Tiempo por sus siglas en ingles.
- ISS Estabilidad de Entrada-Estado por sus siglas en ingles.
- PSA Problema de Seguimiento Acotado.

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción.</b> .....	<b>1</b>
1.1	Estado del arte.	3
1.2	Formulación del problema.	6
1.3	Estructura de la tesis.	8
1.4	Productos académicos.	10
<b>2</b>	<b>Antecedentes matemáticos.</b> .....	<b>11</b>
2.1	Introducción.	11
2.2	Definiciones básicas.	12
2.3	Estabilidad de entrada a estado (ISS).	17
2.4	Índices de desempeño.	19
2.5	Cálculo del índice de desempeño para un sistema de segundo orden.	22
<b>3</b>	<b>Modelado de sistemas Euler-Lagrange.</b> .....	<b>27</b>
3.1	Introducción.	27

<b>3.2</b>	<b>Ecuaciones dinámicas para los sistemas Euler-Lagrange.</b>	<b>28</b>
3.2.1	Propiedades de los sistemas Euler-Lagrange. ....	30
<b>3.3</b>	<b>Modelado de sistemas: Ejemplos.</b>	<b>31</b>
3.3.1	El péndulo compuesto. ....	31
3.3.2	El robot tipo RR. ....	34
3.3.3	El dron de rotor inclinable ( tilt-rotor). ....	38
<b>4</b>	<b>Resultados principales: el controlador basado en retardo. ....</b>	<b>45</b>
<b>4.1</b>	<b>Introducción.</b>	<b>45</b>
<b>4.2</b>	<b>Estabilidad ISS para un sistema de segundo orden.</b>	<b>47</b>
<b>4.3</b>	<b>Desempeño para un sistema de segundo orden.</b>	<b>49</b>
<b>4.4</b>	<b>Proposición principal: desempeño de un sistema de Euler-Lagrange.</b>	<b>54</b>
<b>5</b>	<b>Ejemplos numéricos: sistemas completamente actuados. ....</b>	<b>59</b>
<b>5.1</b>	<b>Sistemas de segundo orden.</b>	<b>59</b>
5.1.1	Ejemplo 5.1: Regulación bajo incertidumbres paramétricas. ....	60
5.1.2	Ejemplo 5.2: Seguimiento de trayectoria bajo incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas. ....	64
5.1.3	Ejemplo 5.3: Observador de Luenberger. ....	67
<b>5.2</b>	<b>Sistemas no lineales.</b>	<b>71</b>
5.2.1	Ejemplo 5.4: El robot tipo RR. ....	71
5.2.2	Ejemplo 5.5: El dron tipo tilt-rotor. ....	74
<b>6</b>	<b>Validación experimental. ....</b>	<b>81</b>
<b>6.1</b>	<b>Introducción.</b>	<b>81</b>
<b>6.2</b>	<b>El péndulo inercial.</b>	<b>82</b>
6.2.1	Primera prueba ....	83
6.2.2	Segunda prueba ....	84

---

6.3	El motor de CD.	85
6.4	Evaluación del controlador comercial MG955 VS el controlador propuesto.	88
7	Conclusiones y trabajos futuros. ....	93
	Referencias. ....	96



# 1. Introducción.

En esta tesis se presenta una innovadora estructura de control diseñada para abordar el desafío de la regulación y el seguimiento de trayectorias en sistemas completamente actuados. El controlador propuesto se distingue por su facilidad de implementación y su capacidad para mitigar los efectos generados por incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas. Su fundamento radica en la estimación de perturbaciones retardadas, logrando una efectiva compensación al cancelar la perturbación actual con la perturbación retrasada mediante la entrada de control. Este trabajo analiza el impacto residual de estas perturbaciones en la dinámica del sistema y establece las condiciones necesarias para lograr un sobreimpulso reducido, un tiempo de establecimiento predefinido y una atenuación efectiva de las perturbaciones

Para demostrar la efectividad de la estructura de control propuesta se evaluó el esquema en diferentes procesos, los cuales en algunos casos la evaluación fue completamente numérica y en otros se consideraron bancos de prueba experimentales, específicamente se consideraron las siguientes plantas:

Ejemplo numérico	Problemática a analizar	Banco de prueba	Problemática a analizar
Sistema lineal genérico de segundo orden: Ejemplos 5.1	Regulación bajo incertidumbres paramétricas.	El péndulo inercial	Regulación bajo incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas.
Sistema lineal genérico de segundo orden: Ejemplos 5.2	Seguimiento de trayectoria bajo incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas.	El motor de CD	Regulación bajo incertidumbres paramétricas.
Sistema lineal genérico de segundo orden: Ejemplos 5.3	Ausencia de información: se asume que se desconoce la velocidad de la trayectoria.	El controlador MG955	Regulación bajo incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas.
Robot RR: Ejemplos 5.4	Seguimiento de trayectoria ante perturbaciones.		
Dron cuadricóptero con rotores inclinables (tilt-rotor): Ejemplos 5.5	Seguimiento de trayectoria bajo la consideración de una carga de masa variable.		

Tabla 1.1: Sistemas a considerar.

Entre los ejemplos numéricos antes mencionados, también se consideró el caso cuando no se conoce completamente el estado. La idea consistió en evaluar el desempeño del controlador cuando el estado es sustituido por una observación de éste. Adicionalmente, se realizan simulaciones en sistemas robóticos, como un robot serial tipo RR y un dron de rotor inclinable. Estos ejemplos representan



casos de aplicación práctica en los que se evalúa el desempeño de la estructura de control en entornos complejos y dinámicos.

Con la finalidad de ilustrar la efectividad del controlador propuesto se realiza una implementación experimental en un péndulo inercial impulsado por hélices y perturbado por un peso oscilante desconocido para el controlador. Este caso de estudio ofrece la oportunidad de evaluar la eficacia y robustez de la ley de control en un sistema físico real. Mediante la aplicación de la estructura de control propuesta, se evalúa la capacidad del controlador para compensar las perturbaciones generadas por un peso oscilante y lograr una regulación precisa y estable del péndulo.

Posteriormente, se realiza una serie de pruebas utilizando el controlador propuesto en un motor de corriente directa de alta velocidad y en otro de alto par. La motivación central de este experimento es evaluar la efectividad del controlador propuesto en una variedad de sistemas sin la necesidad de realizar sintonizaciones específicas de las ganancias. Se busca demostrar que, bajo esta estructura de control, es posible alcanzar un rendimiento esperado en diversos sistemas, sin requerir ajustes personalizados para cada uno de ellos.

Finalmente, se realiza una comparativa entre el controlador propuesto y un controlador comercial para el servomotor MG955. Esta comparación se lleva a cabo con el objetivo de brindar un punto de referencia para evaluar el desempeño de la estructura de control propuesta en relación a las existentes en el mercado. Se analizan diferentes métricas de desempeño, como la precisión, el tiempo de establecimiento y la capacidad de rechazo de perturbaciones. Los resultados obtenidos revelan que la estructura de control propuesta supera al controlador comercial en términos de respuesta transitoria, capacidad de mitigación de perturbaciones y el tiempo de establecimiento, reafirmando así la efectividad y ventajas de la nueva estructura de control en diversos sistemas físicos.

## 1.1 Estado del arte.

En la investigación de sistemas dinámicos, es fundamental considerar la presencia de perturbaciones, ya que estos sistemas a menudo operan en entornos no controlados. Estas perturbaciones pueden generar comportamientos no deseados,

especialmente cuando se suman a las incertidumbres inherentes al modelo del sistema. Estas incertidumbres pueden originarse por una variedad de factores, como cambios en el tiempo, variaciones de temperatura, simplificaciones en el modelo, linealizaciones y errores en la estimación de parámetros debido a mediciones ruidosas, o incluso porque el sistema no es completamente identificable, véase por ejemplo: [1–6].

Tal y como se analiza en [7], la importancia de considerar las incertidumbres del sistema radica en el hecho de que muchos procesos tienen fuentes importantes de incertidumbre. Un ejemplo de la observación anterior se encuentra en los motores síncronos de imanes permanentes, cuyo flujo del rotor puede variar significativamente hasta un 20% de su valor nominal, y la resistencia del devanado del estator puede variar hasta un 200% de su valor nominal. En esta misma dirección, en la regulación de nivel de un líquido en sistemas de almacenamiento (véase [8] para mayores detalles) o en sistemas robóticos es inevitable la presencia de perturbaciones, las cuales dificultan el control de estos procesos, por lo que es importante que el controlador pueda hacer frente a estas perturbaciones. Lo mismo ocurre en sistemas robóticos, como drones, vehículos terrestres o marítimos, y brazos robóticos industriales, que deben operar en presencia de perturbaciones como viento, olas o impactos inesperados, ejemplos de ello se puede ver en [9–12]. Para abordar estos desafíos, se han desarrollado diversas técnicas de control, como las basadas en modos deslizantes [13], que buscan mejorar el rendimiento y la precisión, reduciendo la vibración y rechazando perturbaciones externas desconocidas. También se han utilizado enfoques de optimización para ajustar las ganancias de los controladores, lo que resulta útil cuando la información del modelo no está completamente disponible o contiene errores en su estructura o parámetros. Estas estrategias de control son esenciales para garantizar un rendimiento óptimo en sistemas dinámicos sometidos a perturbaciones y con incertidumbres en su modelado.

El control predictivo es otra técnica muy estudiada para solucionar problemas relacionados con las incertidumbres de los parámetros y las perturbaciones externas. En [14], se implementa un control de velocidad directo predictivo de modelo sólido (MP-DSC) junto con un observador de carga y perturbación de parámetros completos (FPLO, por sus siglas en inglés) de modo deslizante para un motor síncrono de imanes permanentes. El método estima simultáneamente las incertidumbres de los parámetros eléctricos y mecánicos, el error de reconstrucción de

tensión, la velocidad del motor y el par de carga.

La mayoría de los controladores están basados en un modelo matemático y es por ello que al momento de implementar estos controladores se requiere la identificación de sus parámetros. Por lo general, se llevan a cabo diferentes experimentos para lograr la identificación de estos parámetros. Es común aplicar una señal de excitación oscilante y/o de impacto con la intención de observar el comportamiento resultante del sistema, ver [15]. Estos experimentos deben ser hechos en un ambiente controlado, para obtener una correcta parametrización de un sistema dinámico. Factores no controlados como pueden ser perturbaciones desconocidas o demasiado ruido en los sensores del sistema pueden dar como resultado un modelado poco preciso. En [16] se estudia el problema de una identificación incorrecta de parámetros de sistemas no lineales, específicamente cuando el ruido registrado por los sensores es significativo. Esto hace que los datos y el modelo matemático propuesto no sean viables. En ese mismo estudio, se propone un nuevo algoritmo que hace uso de una función objetivo generalizada que reduce los errores de partición de conjuntos de datos contaminados por ruido y por lo tanto, se obtuvo un modelo preciso.

La comunidad científica ha comenzado a desarrollar controladores que no se basan en un modelo matemático o que solo utilizan una parte de este modelo, llamados modelos ultra locales. En trabajos como los de [17] se propone una estrategia novedosa de control basada en modos deslizantes no lineales de supertorsión sin modelo (MFSTNLSMC<sup>1</sup>, por sus siglas en inglés) con un observador de estado extendido mejorado (SESO<sup>2</sup>, por sus siglas en inglés) para accionamientos de motores síncronos de imanes permanentes (PMSM<sup>3</sup>, por sus siglas en inglés). La estrategia consiste en estimar los términos desconocidos del modelo PMSM ultralocal, utilizando el observador SESO, para después utilizar una superficie de modos deslizantes no lineal, que suprime las vibraciones y mejora el rendimiento del sistema. En otras investigaciones como la de [18] se suele expresar el modelo matemático de las centrales nucleares como un modelo ultra local, esto se debe principalmente a que este sistema dinámico contiene términos retardados en el tiempo, dinámicas no lineales y términos variables en el tiempo, las cuales

---

<sup>1</sup>Model-Free Super-Twisting Nonlinear Sliding Mode Control

<sup>2</sup>Smoothing Extended State Observer

<sup>3</sup>Permanent Magnet Synchronous Motor

son difíciles de modelar. Este [19] se busca comparar el control adaptativo y el aprendizaje por refuerzo utilizando un marco común. Se detalla la declaración del problema en cada campo y se destacan sus resultados. Se utilizan dos ejemplos específicos de sistemas dinámicos para ilustrar los detalles de ambos métodos, sus ventajas y deficiencias. A través de este marco común, se motiva la necesidad de métodos de control en tiempo real que aprovechen herramientas de ambas aproximaciones.

Como puede observarse, la tendencia actual en el diseño de controladores aplicados a sistemas dinámicos expuestos a perturbaciones externas y errores paramétricos consiste en:”

- (i) Estimar un vector de perturbaciones desconocidas mediante alguna estrategia de control.
- (ii) El vector estimado se resta del vector de perturbaciones mediante la acción de control.

Motivados por esta metodología, en este trabajo se propone un controlador tipo PD en conjunto con una ley de estimación de perturbaciones retardada, la cual estima el vector de perturbación retardado para posteriormente restarlo. Luego, se analizan los efectos causados por la perturbación atenuada y se establecen condiciones de desempeño, como el tiempo de establecimiento y un sobretiro despreciable, para un sistema ultralocal que posee perturbaciones acotadas y desconocidas. Además, dependiendo de las ganancias del controlador y del máximo valor de la perturbación, se establecen límites superiores e inferiores para los errores de posición y velocidad.

## 1.2 Formulación del problema.

El problema esencial abordado en este trabajo, se refiere al desarrollo e implementación de un esquema de control con la capacidad de atenuar el efecto de las perturbaciones producidas por fuerzas externas y las producidas por el error en la estimación de los parámetros del modelo. En este sentido, la formulación del problema puede expresarse de la siguiente manera.

**Problema 1 — Problema de Seguimiento Acotado (PSA).** Sea  $\mathbf{q}$  el vector de posiciones generalizadas y  $\mathbf{q}_r$  la señal de referencia deseada. Determine un controlador  $\mathbf{u}$

que garantice las siguientes desigualdades:

$$\begin{cases} \|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_r(t)\| < \epsilon_1 \\ \|\dot{\mathbf{q}}(t) - \dot{\mathbf{q}}_r(t)\| < \epsilon_2 \end{cases}, \quad (1.1)$$

$\forall t \geq T$ , donde  $T, \epsilon_1, \epsilon_2$  son constantes positivas.

**Nota** El problema sólo establece la existencia de constantes positivas  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ .

De esta forma, se dice que el Problema de Seguimiento Acotado (PSA) es resuelto para  $\mathbf{q}_r$ , si el Problema 1 ha sido resuelto.

Para resolver el problema anterior, se denota por  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  al vector de perturbación externa,  $\mathbf{q}_r \in \mathbb{R}^n$  la señal de referencia y  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  como la matriz de inercia del sistema.

A lo largo de este trabajo se tomarán las siguientes suposiciones:

- (i) Los vectores  $\mathbf{p}(t)$ ,  $\mathbf{q}_r(t)$  y sus respectivas derivadas  $\dot{\mathbf{p}}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_r(t)$  y  $\ddot{\mathbf{q}}_r(t)$  se asumen continuas y acotadas, con cota conocida;
- (ii) todas las señales y estados pasados se asumen conocidos;
- (iii) todos los estados son medibles y los ruidos de los sensores son despreciables;
- (iv)  $\mathbf{q}(t - \tau) \equiv \mathbf{q}(0) \forall t \in [0, \tau]$ , siendo  $\mathbf{q}(0) \in \mathbb{R}^n$  el vector de condiciones iniciales;
- (v)  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) > 0$ , para todo  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ .

**Nota** Por un lado, la suposición (i) simplemente establece que la señal de referencia del sistema y sus derivadas deben de ser suficientemente suaves. Por otro lado, también requiere que la perturbación y la velocidad con la que esta actúa estén acotadas. Tal condición no es restrictiva, pues en el caso de que se requiera una referencia no suave, ésta se puede aproximar mediante funciones suaves (por ejemplo,

haciendo uso de los interpoladores cúbicos segmentarios) ya que la mayoría de las trayectorias no suaves pueden ser aproximadas por funciones suaves. En lo que respecta a la perturbación, consideramos que asumir que su magnitud y la velocidad con lo que esta actúa estén acotadas, es una restricción natural. La suposición (ii) puede garantizarse almacenando  $q(t)$  a lo largo del intervalo  $(0, \tau]$ . En el caso de la suposición (iii), tal restricción puede ser cumplida por varios sistemas reales mecánicos o eléctricos. En cuanto a los sensores, al hacer uso de filtros, se puede suponer que el ruido es insignificante. El supuesto (iv) establece que el sistema siempre partirá de una condición inicial constante. Finalmente, el supuesto (v) es un requerimiento bastante común en el análisis a los sistemas de Euler-Lagrange, que es el caso en consideración.

### 1.3 Estructura de la tesis.

Este trabajo de investigación esta organizado de la siguiente manera:

- En el Capítulo 1 se realiza un breve repaso del estado del arte en relación a las diferentes estrategias de control, aplicadas a sistemas dinámicos en condiciones reales. Entre estas condiciones se destacan la estimación de perturbaciones externas y valores de parámetros inciertos. Después, se describe la formulación del problema que se aborda en este estudio, el cual abarca a los sistemas de segundo orden y a los sistemas Euler-Lagrange. Por último, se enumeran los productos académicos que se derivaron de esta tesis.
- Algunas nociones de estabilidad utilizadas en este trabajo de investigación son presentadas en el Capítulo 2. Además, se introducen algunas de las definiciones más importantes que se utilizan para una mejor exposición de los resultados.
- La formulación de Euler-Lagrange para la obtención del modelo matemático de sistemas dinámicos se expone en el Capítulo 3, en donde además se mencionan las propiedades fundamentales que cumplen esta clase de sistemas. Por último, se obtienen los modelos dinámicos del péndulo inercial, del robot serial de dos grados de libertad de doble revoluta, y del dron tipo tilt-rotor.

- Las principales contribuciones de este trabajo se exponen en el Capítulo 4, las cuales se pueden resumir como sigue:
  - El primer resultado establece la estabilidad entrada a estado (ISS, por sus siglas en inglés) del controlador propuesto para un sistema de segundo orden. Este resultado garantiza que el controlador es capaz de estabilizar el sistema y mantenerlo en un estado estable, incluso en presencia de perturbaciones externas.
  - En una segunda proposición, se establecen las condiciones que deben cumplir los parámetros del controlador propuesto para asegurar un buen desempeño del sistema bajo condiciones realistas. Estas condiciones consideran escenarios donde existen errores en los parámetros del sistema y se encuentran presentes perturbaciones externas. Es decir, se busca que el controlador sea robusto y capaz de mantener un rendimiento aceptable a pesar de las incertidumbres y perturbaciones típicas en aplicaciones prácticas. Además, se establecen cotas para el error de posición y velocidad, lo que proporciona límites superiores para la magnitud de los errores que se pueden esperar en la respuesta del sistema. Estas cotas son importantes para evaluar y comparar el desempeño del controlador propuesto en términos de precisión y seguimiento de referencia.
  - Por último, se extienden los resultados a sistemas no lineales con estructura de Euler-Lagrange.
- Una parte fundamental para la implementación de cualquier controlador es la correcta selección de las ganancias del controlador. Es por ello que en el Capítulo 5 se muestra cómo aplicar y seleccionar las ganancias del controlador propuesto mediante cinco ejemplos numéricos. Los primeros tres se aplican a los sistemas lineales de segundo orden, en donde se abordan tareas de regulación y seguimiento de trayectorias en presencia de incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas. Adicionalmente, se explora la opción de agregar un observador de Luenberger, con la finalidad de quitar el sensor de velocidad del sistema. En una segunda etapa, se muestra el desempeño del controlador aplicado a dos sistemas Euler-Lagrange. En el primero, se compara el controlador propuesto contra un proporcional-derivativo aplicado a un robot serial tipo RR, mientras que en el segundo

ejemplo se estudia el caso de un dron tipo tilt-rotor. En ambos ejemplos se explica como obtener las constantes del controlador de tal forma que cumpla con un desempeño deseado.

- Con la finalidad que se plantea que el controlador propuesto trabaje en condiciones reales, se procedió a probar su desempeño en una plataforma experimental. Para ello, se aplica primero en un sistema de tipo péndulo inercial, impulsado mediante hélices. En la fase inicial del experimento no se consideran perturbaciones externas mientras que en una segunda etapa se agrega una perturbación oscilante desconocida para el controlador. En un segundo experimento se implementa el controlador en dos motores de corriente directa con características muy diferentes. El primero es un motor de alto torque mientras que el segundo es un motor de alta velocidad. Se probó el funcionamiento de estos motores ante variaciones en el suministro de voltaje, así como variaciones en la estimación de la variable inercial. Por último, se hizo una comparativa del controlador propuesto contra el controlador comercial del servomotor de corriente directa MG955. Los experimentos son expuestos en el Capítulo 6.
- El Capítulo 7 presenta las conclusiones obtenidas y al proponer posibles trabajos futuros. Este análisis reflexivo y prospectivo contribuye a enriquecer el campo de estudio y a impulsar nuevas investigaciones en esta área de conocimiento.

## 1.4 Productos académicos.

Los resultados de esta investigación se han publicado en la revista *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, con un sólido factor de impacto de 1.6, que ha mantenido su relevancia durante cinco años consecutivos. Esta revista se enfoca principalmente en aplicaciones experimentales y estudios industriales, lo que subraya la importancia de la aceptación de nuestro trabajo, el cual se cita a continuación:

- [1 ] Coronado-Salazar JC, Francisco Méndez-Barrios CFF, González-Galván EJ. Delayed-based controller for fully actuated systems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*. 2023;237(6):1066-1077. doi:10.1177/09596518221143812



## 2. Antecedentes matemáticos.

### Índice

---

2.1	Introducción.	11
2.2	Definiciones básicas.	12
2.3	Estabilidad de entrada a estado (ISS).	17
2.4	Índices de desempeño.	19
2.5	Cálculo del índice de desempeño para un sistema de segundo orden.	22

---

### 2.1 Introducción.

En este capítulo, se presentan los resultados más relevantes para el desarrollo de las proposiciones que se desarrollarán en capítulos posteriores. En primer lugar, se definen los sistemas subactuados y completamente actuados. A continuación, se abordan varios criterios de estabilidad, como la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema, la estabilidad de la solución del sistema y la estabilidad para los sistemas retardados. Además, se introducen los conceptos de funciones de clase  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{KL}$ . Posteriormente, se profundiza en la definición de la estabilidad de

entrada a estado (ISS, por sus siglas en inglés). Por último, se describen algunos de los criterios de desempeño más utilizados para comparar el desempeño de los controladores.

## 2.2 Definiciones básicas.

Como se ilustra en la **Sección 3.2**, un sistema dinámico con  $n$  grados de libertad, caracterizado por coordenadas  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ , puede ser descrito mediante la ecuación:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{E}\mathbf{u}, \quad (2.1)$$

donde a matriz  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es una matriz de rango completo que relaciona la entrada externa con las coordenadas generalizadas y  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas de control. Por lo tanto, resulta conveniente distinguir dos clases de sistemas Euler-Lagrange según la estructura de esta matriz:

**Definición 2.1** — [20]. Un sistema Euler-Lagrange es completamente actuado si este tiene igual número de grados de libertad que entradas de control disponibles (por ejemplo si  $\mathbf{E} = \mathbf{I}_n$ ). De lo contrario, si  $m < n$  se dice que el sistema es subactuado.

Ejemplos de sistemas Euler Lagrange subactuados son el robot brachiation de Fukuda [21], el Acrobot [22], los robots de juntas flexibles [23], el péndulo invertido montado sobre un robot móvil [24], entre otros. Esta clase de sistemas pueden ser modelados matemáticamente mediante un sistema Euler-Lagrange de  $n$  grados de libertad con coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ , donde  $\mathbf{q}$  es dividido en las coordenadas generalizadas actuadas  $\mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^m$  y las coordenadas generalizadas no actuadas  $\mathbf{q}_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$  para  $m < n$ , siendo  $m$  el número de actuadores del sistema. Por lo tanto, las ecuaciones de Euler-Lagrange pueden reescribirse como:

$$\mathbf{M}_2(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{c}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) = \mathbf{0}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{M}_1(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{c}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{q}) = \mathbf{u}, \quad (2.3)$$

donde  $\mathbf{M}_1(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $\mathbf{M}_2(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$  son las matrices de inercia de cada subsistema, las funciones vectoriales  $\mathbf{c}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{c}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n-m}$  contienen los términos de Coriolis y fuerzas centrípetas, las funciones vectoriales  $\mathbf{g}_1(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{g}_2(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n-m}$  representan a los términos gravitacionales y  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  representa a las fuerzas de entrada generalizadas ejercidas por los  $m$  actuadores.

Los sistemas Euler-Lagrange completamente actuados siempre son linealizables mediante la retroalimentación exacta de los estados. Por lo que al definir la entrada de control como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{v} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}), \quad (2.4)$$

sustituyendo (2.4) en (2.1) con  $\mathbf{E} = \mathbf{I}_n$  resulta en el siguiente sistema lineal en lazo cerrado:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}. \quad (2.5)$$

Con el propósito de establecer las distintas definiciones de estabilidad, consideré el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.6)$$

donde  $\mathbf{x}$  es el vector de estados del sistema y  $\mathbf{f}$  es una función vectorial que determina como varía  $\dot{\mathbf{x}}$  de acuerdo con  $\mathbf{x}$ . Además, se define como punto de equilibrio  $\mathbf{x}^*$  cualquier vector de estado  $\mathbf{x}$  el cual garantice que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

Sin pérdida de generalidad se asume que  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  tiene un punto de equilibrio en el origen y se procede a estudiar su estabilidad.

**Definición 2.2 — [25].** El punto de equilibrio  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  de (2.6) es estable si, por cada  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \implies \|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.8)$$

El punto de equilibrio  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  se considera inestable si no es estable.

Un punto de equilibrio estable es una condición en la cual un sistema dinámico permanece en reposo o en un estado constante a lo largo del tiempo, incluso si se le somete a pequeñas perturbaciones o fluctuaciones, ver Figura 2.1. En otras palabras, un punto de equilibrio estable es aquel en el cual el sistema tiende a regresar a dicho estado de equilibrio después de haber sido perturbado.

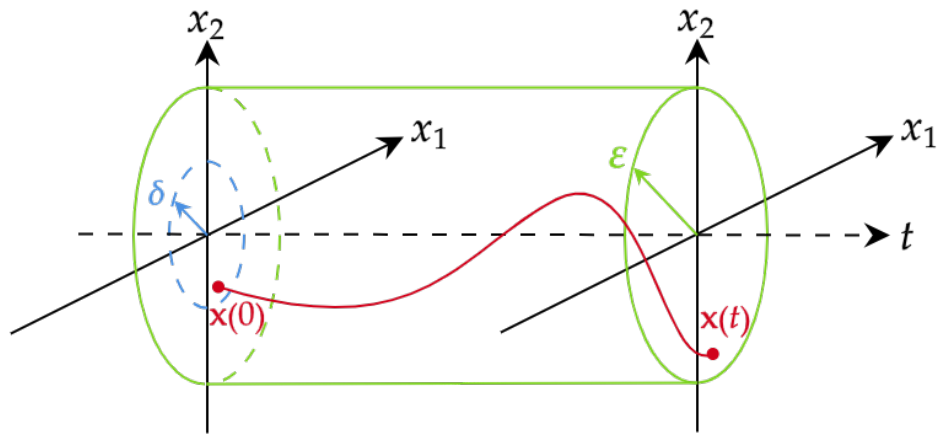


Figura 2.1: Trayectoria de  $\mathbf{x}(t)$  cuando  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  es estable.

**Definición 2.3** — [25]. El punto de equilibrio  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  de (2.6) es asintóticamente estable si este punto de equilibrio es estable y  $\delta$  puede ser elegida tal que

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

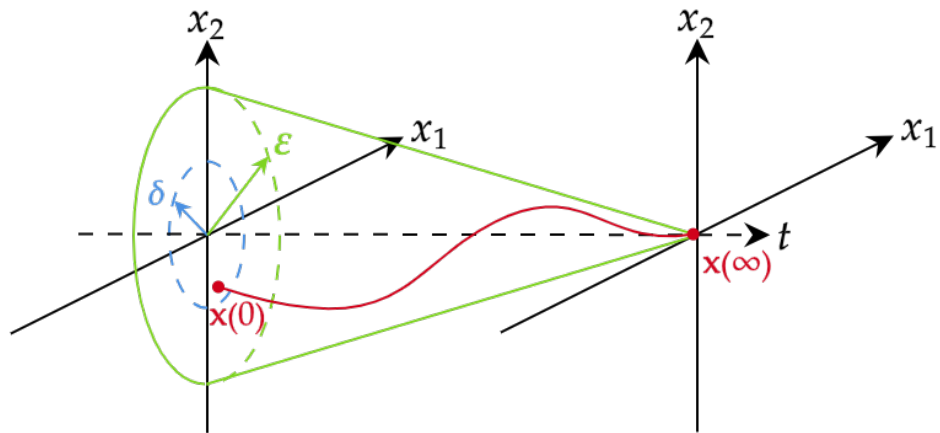


Figura 2.2: Trayectoria de  $\mathbf{x}(t)$  cuando  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  es asintóticamente estable.

En el caso de la estabilidad asintótica, el sistema no solo regresa al punto de equilibrio después de una perturbación, sino que también lo hace de manera

convergente, disminuyendo la distancia al punto de equilibrio a medida que transcurre el tiempo, ver Figura 2.2. Este comportamiento convergente asegura que el sistema se estabilice y alcance su estado de equilibrio de forma progresiva y estable.

**Definición 2.4** — [25]. El punto de equilibrio  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  de (2.6) es exponencialmente estable si este punto de equilibrio es asintóticamente estable y existen  $\alpha, \beta, \delta > 0$  tal que,

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \implies \|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\beta t}, \forall t \geq 0. \quad (2.10)$$

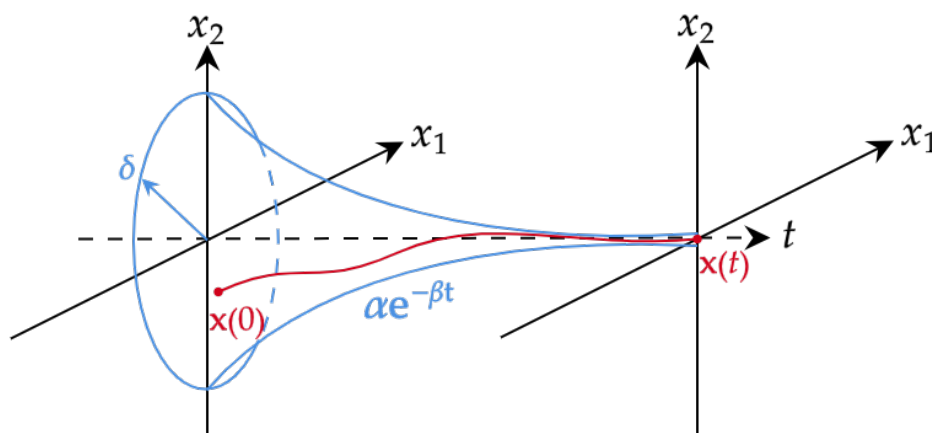


Figura 2.3: Trayectoria de  $\mathbf{x}(t)$  cuando  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  es exponencialmente estable.

La Figura 2.3 ilustra el comportamiento de  $\mathbf{x}(t)$  cuando 2.6 tiene un punto de equilibrio exponencialmente estable, donde la trayectoria del sistema convergen de forma aún más rápida hacia el origen en comparación con la estabilidad asintótica.

En el caso de los sistemas retardados la definición de estabilidad es muy similar. Para poder establecer un criterio de estabilidad primero se considera al siguiente sistema retardado en el tiempo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)), \quad (2.11)$$

donde  $\tau \geq 0$  es el retardo del sistema,  $t \geq t_0$  y  $\mathbf{f}$  es una función continua y bien definida con respecto a sus argumentos.

Es bien conocido que las condiciones iniciales de los sistemas retardados están definidas mediante una función inicial en lugar de un punto inicial como lo es para los sistemas sin retardos. Esto se debe a que en los sistemas retardados, las variables de estado dependen tanto del tiempo actual como de los valores pasados. Por lo tanto, las condiciones iniciales se especifican a través de una función que describe el estado del sistema para todos los tiempos anteriores al tiempo inicial.

Dada una función inicial  $\varphi$ , se define una solución  $x(t)$  tal que satisfaga

$$x(\vartheta) = \varphi(\vartheta), \quad \forall \vartheta \in [t_0 - \tau, t_0], \quad (2.12)$$

donde  $\varphi$  pertenece a un espacio funcional que puede ser  $C([t_0 - \tau, t_0], \mathbb{R}^n)$  o bien  $\mathcal{PC}([t_0 - \tau, t_0], \mathbb{R}^n)$ , ver Figura 2.4. En el cálculo de su norma se utilizará la norma-sup, la cual es definida como:

$$\|\varphi(t)\|_\tau := \sup_{\vartheta \in [-\tau, 0]} \|\varphi(\vartheta + t)\|. \quad (2.13)$$

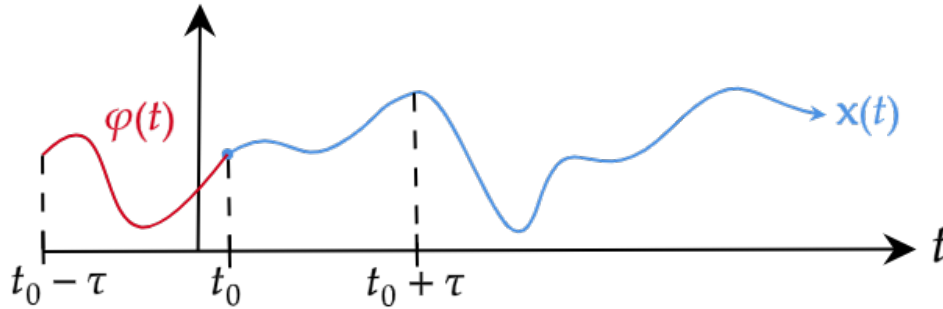


Figura 2.4: Función inicial  $\varphi$  de un sistema retardado.

A continuación, se describen los conceptos de estabilidad en sistemas con retardos:

**Definición 2.5 — [26].** Se dice que la solución trivial de (2.11) es estable si para todo  $\epsilon > 0$  y  $t_0 \geq 0 \exists \delta(t_0, \epsilon) > 0$  tal que para cada  $\varphi \in \mathcal{PC}([t_0 - \tau, t_0], \mathbb{R}^n)$  que verifica la norma  $\|\varphi(t)\|_\tau < \delta(t_0, \epsilon)$  se cumple:

$$\|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.14)$$

Más aún, si  $\delta$  se puede elegir independientemente de  $t_0$ , entonces la solución trivial se dice que es uniformemente estable.

**Definición 2.6 — [26].** La solución trivial de (2.11) se dice que es asintóticamente estable si para todo  $\epsilon > 0$  y  $t_0 \geq 0 \exists \delta(t_0, \epsilon) > 0$  tal que cumple con las siguientes condiciones:

- i) para cada  $\varphi$  con  $\|\varphi(t)\|_\tau < \delta(t_0, \epsilon) \implies \|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0.$
- ii)  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$  cuando  $(t - t_0) \rightarrow \infty.$

**Definición 2.7 — [26].** La solución trivial de (2.11) se dice que es exponencialmente estable si  $\exists \alpha \geq 1, \beta > 0$  y  $\delta > 0$  tal que para cada  $\varphi \in PC([t_0 - \tau, t_0], \mathbb{R}^n)$  que verifica la norma  $\|\varphi(t)\|_\tau < \delta$  se cumple:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha \|\varphi(t)\|_\tau e^{-\beta(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.15)$$

**Lema 2.1 — Valor medio [27].** Sea  $d(t)$  una función continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y diferenciable en el intervalo abierto  $(a, b)$  con  $a < b$ . Entonces, existe al menos algún punto  $c \in (a, b)$  tal que

$$\dot{d}(c) = \frac{d(b) - d(a)}{b - a}. \quad (2.16)$$

**Corolario 2.1 — [27].** Sea  $d(t)$  una función continua en el intervalo cerrado  $[t - \tau, t]$  y diferenciable en el intervalo abierto  $(t - \tau, t)$  con  $t \geq \tau, \tau > 0$  y  $\|\dot{d}(t)\|_\infty < \infty$ . Entonces, se cumple la siguiente desigualdad

$$d(t) - d(t - \tau) \leq \tau \|\dot{d}(t)\|_\infty. \quad (2.17)$$

## 2.3 Estabilidad de entrada a estado (ISS).

Una herramienta esencial para demostrar la estabilidad de sistemas dinámicos perturbados son los conceptos de las funciones de clase  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}_\infty$  y  $\mathcal{KL}$ . Formalmente, una función de clase  $\mathcal{K}$  se define como se muestra a continuación:

**Definición 2.8 — [25].** Una función continua  $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$  se dice que pertenece a una clase  $\mathcal{K}$  si esta es estrictamente creciente y  $\alpha(0) = 0$ . Se dice que esta función pertenece a una clase  $\mathcal{K}_\infty$  si  $a = \infty$  y  $\alpha(r) \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow \infty$ .

La función de clase  $\mathcal{K}$  se caracteriza por tener propiedades específicas que la hacen útil en el análisis y diseño de sistemas, algunas de estas propiedades son:

- **Monotonía:** Una función de clase  $\mathcal{K}$  es estrictamente creciente, lo que implica que su valor aumenta a medida que la variable de entrada aumenta.
- **Límites superiores e inferiores:** Una función de clase  $\mathcal{K}$  tiene límites superiores e inferiores, lo que significa que existen constantes positivas que acotan la función tanto por arriba como por abajo.
- **Composición:** La composición de funciones de clase  $\mathcal{K}$  sigue siendo una función de clase  $\mathcal{K}$ .

**Definición 2.9 — [25].** Una función continua  $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  se dice que pertenece a una clase  $\mathcal{KL}$  si para cada  $s$  fijo, el mapeo  $\beta(r, s)$  pertenece a una clase  $\mathcal{K}$  con respecto a  $r$  y, para cada  $r$  fijo, el mapeo  $\beta(r, s)$  es decreciente con respecto a  $s$  y  $\beta(r, s) \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow \infty$ .

Es decir, es una función continua y estrictamente creciente que mapea los números reales no negativos en sí mismos. Basándose en las definiciones previas, se procede a establecer la definición de la estabilidad ISS (Input-to-State Stability), que en español se traduce como Estabilidad de Entrada-Estado

A lo largo de los años, el concepto de ISS se ha extendido más allá de los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias. Ha sido aplicado con éxito en una variedad de clases de sistemas de control, incluyendo aquellos gobernados por ecuaciones diferenciales parciales, sistemas retardados, sistemas híbridos, entre otros. Esta capacidad de generalización ha ampliado aún más el alcance de ISS y ha fortalecido su relevancia en el campo del control no lineal.

Un sistema ISS se basa en la siguiente definición:



**Definición 2.10** — [28]. El sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (2.18)$$

se dice que es *entrada a estado estable*, si existe una función  $\beta$  que pertenezca a la clase  $\mathcal{KL}$  y una función  $\gamma$  de la clase  $\mathcal{K}$ , tal que para cualquier estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  y cualquier entrada acotada  $\mathbf{u}$ , la solución  $\mathbf{x}$  existe para todo  $t \geq t_0$  y satisface

$$\|\mathbf{x}\| \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t - t_0) + \gamma\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|\mathbf{u}(\tau)\|\right).$$

Haciendo uso de la definición de ISS, se presenta el lema clave que guiará el desarrollo de esta investigación. Este lema es fundamental para determinar las condiciones necesarias que el sistema y sus entradas deben cumplir para lograr la estabilidad de entrada a estado. Este lema es de suma importancia, ya que su aplicación permitirá comprender y evaluar el comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones de entrada. Asimismo, proporcionará una base sólida para el diseño y la implementación de estrategias de control que aseguren la estabilidad deseada en el sistema

**Lema 2.2** — [25]. Supongamos que  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$  es continuamente diferenciable y globalmente Lipschitz en  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , uniformemente en  $t$ . Si el sistema no forzado

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{0}),$$

tiene un punto de equilibrio global exponencialmente estable en el origen. Entonces, el sistema (2.18) es ISS.

## 2.4 Índices de desempeño.

Los índices de desempeño son medidas comunes utilizadas en el control de sistemas para evaluar la calidad y el rendimiento de un controlador en función de la respuesta del sistema. A continuación, se proporciona una breve descripción de cada uno de estos índices de desempeño.

**Definición 2.11** — [29]. El criterio de la integral del valor absoluto del error  $e(t)$  (IAE) es definido como

$$IAE = \int_0^T |e(t)| dt \quad \text{para algún } T > 0. \quad (2.19)$$

Es decir, el IAE calcula el área del valor absoluto del error de la salida del sistema para un tiempo determinado. Cuando el sistema presenta un error que persiste durante un tiempo prolongado, el IAE irá creciendo con el tiempo, ya que el área bajo la curva del valor absoluto del error será mayor. Por otro lado, si el sistema logra reducir rápidamente el error y mantenerlo cerca de cero, el IAE será más bajo, indicando un mejor desempeño del controlador.

Otra herramienta comúnmente utilizada para evaluar el desempeño de la solución de diversos sistemas dinámicos basados en su error es el ISE, el cual se define a continuación.

**Definición 2.12** — [29]. El criterio de la integral del error  $e(t)$  al cuadrado (ISE) es definido como

$$ISE = \int_0^T e^2(t) dt \quad \text{para algún } T > 0. \quad (2.20)$$

La particularidad en el cálculo del ISE consiste en que los errores mayores a la unidad tendrán un impacto más significativo en el resultado de la integral, mientras que los errores inferiores a uno contribuirán menos al cálculo de la integral. Esto significa que el ISE destaca claramente las diferencias entre las respuestas de los sistemas, poniendo mayor énfasis en los errores más grandes. Un ISE más bajo indica un mejor desempeño del controlador, ya que implica que el sistema tiene errores más pequeños en promedio y se acerca más rápidamente a la señal de referencia deseada.

Tanto el IAE como el ISE cuentan con una variación que exige que el error disminuya con el tiempo, de lo contrario significará que la solución del sistema tiene un pobre desempeño. Estas variaciones son el ITSE y el ITAE, las cuales se definen a continuación:

**Definición 2.13** — [29]. El criterio de la integral del valor absoluto del error  $e(t)$  multiplicado por el tiempo  $t$  (ITAE) es definido como

$$ITAE = \int_0^T t|e(t)|dt \quad \text{para algún } T > 0. \quad (2.21)$$

Al tomar en cuenta el valor absoluto del error multiplicado por el tiempo, el ITAE pone énfasis en la reducción constante del error a medida que avanza el tiempo. Esto significa que el criterio penaliza tanto los errores grandes como los errores persistentes, lo que resulta en una evaluación más rigurosa del desempeño del sistema. En otras palabras, se espera que un sistema con un bajo ITAE presente una disminución rápida y continua del error a lo largo del tiempo.

**Definición 2.14** — [29]. El Integral Time Square Error (ITSE) o criterio de la Integral del error cuadrado multiplicado por el tiempo, es definido como

$$ITSE = \int_0^T te^2(t)dt \quad \text{para algún } T > 0. \quad (2.22)$$

El ITSE se basa en el cuadrado del error multiplicado por el tiempo. Al considerar el cuadrado del error, esta métrica acentúa aún más los errores grandes en comparación con el ITAE. Un error cuadrado tiene un efecto cuadrático en el valor total de la integral, lo que implica que los errores más grandes tendrán un impacto mucho mayor en la evaluación del desempeño del sistema. Al igual que el ITAE, un sistema con un bajo ITSE se caracteriza por una rápida disminución del error cuadrático a lo largo del tiempo.

Los cuatro índices de desempeño previamente mencionados, proporcionan una forma cuantitativa de medir y comparar el rendimiento de los sistemas de control. Sin embargo, es importante tener en cuenta que la elección de un criterio sobre el otro dependerá de las características y los requisitos específicos del sistema en estudio. En general, un sistema con un IAE, ISE, ITAE o ITSE se considera que tiene un mejor desempeño en términos de la disminución efectiva del error a lo largo del tiempo.

## 2.5 Cálculo del índice de desempeño para un sistema de segundo orden.

A lo largo de este ejemplo se analizará cómo los índices de desempeño descritos en la sección anterior capturan diferentes aspectos de la respuesta del sistema, brindando información valiosa sobre su calidad y eficiencia. El objetivo es comprender cómo se ven afectados estos índices al variar el factor de amortiguamiento, y cómo se pueden utilizar para evaluar el desempeño de sistemas de segundo orden en diferentes escenarios.

Sea el siguiente sistema de segundo orden.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \omega_n^2 u - 2\zeta\omega_n x_2 - \omega_n^2 x_1, \end{aligned} \quad (2.23)$$

siendo  $\zeta \in \{0.0, 0.1, 0.5, 1/\sqrt{2}, 1.0\}$  el factor de amortiguamiento,  $\omega_n$  la frecuencia natural del sistema y  $u$  la entrada del sistema. En particular, se considera a un sistema con una frecuencia natural  $\omega_n = 2$  y se variará el factor de amortiguamiento para observar distintos comportamientos en la salida del sistema. El factor de amortiguamiento influye en la forma en que el sistema responde a las perturbaciones, determinando su estabilidad y define el comportamiento transitorio de la planta. Al calcular los índices de desempeño mencionados, se podrá evaluar y comparar el rendimiento del sistema para diferentes valores del factor de amortiguamiento.

En este ejemplo, se simularán los diferentes sistemas generados por la ecuación (2.23) al aplicar una entrada escalón de diez unidades de magnitud. Por lo que el error del sistema  $e(t) = 10 - x(t)$  es expresado para  $\zeta \in \{0.0, 0.1, 0.5, 1/\sqrt{2}\}$  como

$$e(t) = \frac{10e^{-2\zeta t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(2\sqrt{1-\zeta^2}t + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right), \quad (2.24)$$

mientras que para  $\zeta = 1$  se expresa como

$$e(t) = 10e^{-2t}(2t+1). \quad (2.25)$$

La Figura 2.5 muestra la señal de error para cada cambio en el factor de amortiguamiento. Esta representación gráfica permitirá visualizar y analizar las diferencias en el comportamiento del sistema para los distintos valores de  $\zeta$ ,

brindando información importante sobre su respuesta y desempeño. Después, se procedió a calcular los índices de desempeño mediante integración numérica trapezoidal y en base a los cálculos realizados, se ha generado la Tabla 2.1 que resume los valores de los índices de desempeño para cada valor del factor de amortiguamiento  $\zeta$ . Estos valores proporcionan una medida cuantitativa del rendimiento del sistema en términos de los índices IAE, ISE, ITAE e ITSE.

La tabla muestra claramente cómo varían los índices de desempeño a medida que se modifica el factor de amortiguamiento. Se puede observar que algunos índices pueden ser más sensibles a cambios específicos en el factor de amortiguamiento que otros. Esto brinda información valiosa sobre el comportamiento del sistema y ayuda a comprender cómo influye el factor de amortiguamiento en el rendimiento general.

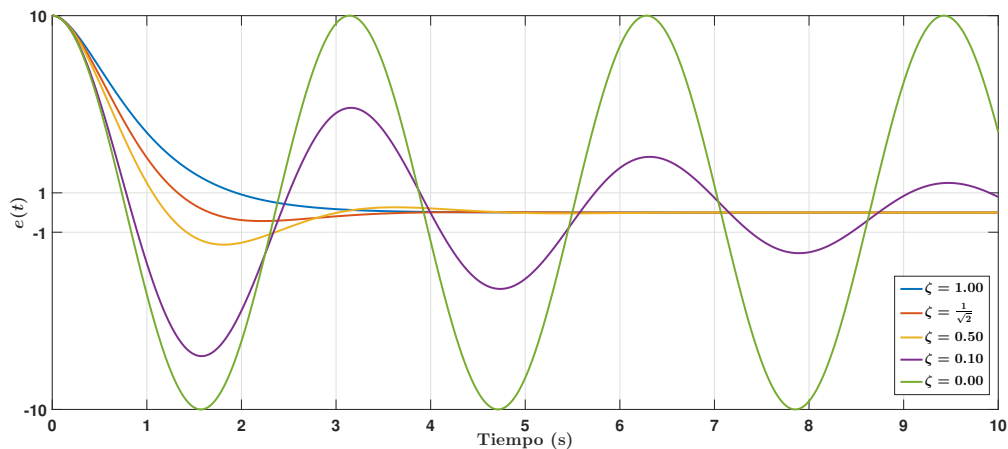


Figura 2.5: Errores de la señal de salida para diferentes factores de amortiguamiento (Ejemplo 2.1).

Al analizar la información obtenida y aplicando los criterios de IAE e ITSE, se puede determinar que el mejor desempeño se logra cuando el factor de amortiguamiento es igual a  $\zeta = 1/\sqrt{2}$ . Este valor de amortiguamiento permite que la respuesta del sistema se estabilice de manera rápida y eficiente. Por otro lado, al utilizar el criterio de ISE, se concluye que la mejor respuesta se obtiene con un factor de amortiguamiento de  $\zeta = 0.50$ . Esta respuesta presenta un equilibrio adecuado entre el sobretiro y la velocidad a la cual el error disminuye a un valor inferior a la unidad. En otras palabras, esta configuración del sistema logra una rápida estabilización con un margen de error inferior a la unidad.

Al calcular el ITSE de los sistemas simulados, se observa que tanto los sistemas con un factor de amortiguamiento de  $\zeta = 1/\sqrt{2}$  como  $\zeta = 0.50$  presentan el mejor desempeño. Esto se debe a que el cálculo de estos índices de desempeño se basa en el área bajo una función, y diferentes funciones pueden generar el mismo valor. Es importante destacar que las configuraciones con menor amortiguamiento ( $\zeta = 0.10$  y  $\zeta = 0.00$ ) obtuvieron las peores calificaciones en términos de desempeño. Esto se evidencia a través de los valores significativamente más altos obtenidos en los índices de ITAE e ITSE en comparación con los otros sistemas dinámicos.

	$\zeta = 1.00$	$\zeta = 1/\sqrt{2}$	$\zeta = 0.50$	$\zeta = 0.10$	$\zeta = 0.00$
<i>IAE</i>	10.00	8.06	8.56	28.04	64.56
<i>ITAE</i>	7.50	4.95	7.35	96.20	326.91
<i>ISE</i>	62.49	53.02	49.99	127.90	509.30
<i>ITSE</i>	28.12	18.75	18.75	286.09	2587.93

Tabla 2.1: Índices de desempeño para sistemas con diversos factores de amortiguamiento y con una frecuencia natural igual a 2.

Este ejemplo nos ayuda a visualizar cómo los criterios de IAE, ISE, ITAE e ITSE permiten evaluar y comparar el desempeño de diferentes sistemas de segundo orden con diferentes factores de amortiguamiento. En este caso, se ha demostrado que los sistemas con  $\zeta = 1/\sqrt{2}$  y  $\zeta = 0.50$  presentan el mejor rendimiento, mientras que las configuraciones con menor amortiguamiento muestran un desempeño inferior. Estos resultados proporcionan una base sólida para la toma de decisiones y la optimización del rendimiento en sistemas dinámicos.

**Resumen del Capítulo 2.**

En este capítulo, se establece una sólida base de antecedentes matemáticos que son fundamentales para el desarrollo de controladores aplicados a sistemas dinámicos. Se abordan diversos temas, entre ellos los sistemas Euler-Lagrange subactuados y completamente actuados, así como los criterios de estabilidad. Se enfatiza particularmente en la estabilidad de entrada a estado, que ha tenido un impacto significativo en el campo del control no lineal. Al unificar las teorías de estabilidad de Lyapunov y de entrada-salida, ISS ha proporcionado un marco teórico sólido y versátil para abordar problemas de estabilidad y control en sistemas no lineales. Finalmente, se explora el tema de los índices de desempeño: IAE, ISE, ITAE e ITSE. Se utiliza un ejemplo para comprender cómo funcionan estos índices y su aplicación en la evaluación del rendimiento del sistema.





## 3. Modelado de sistemas Euler-Lagrange.

### Índice

---

<b>3.1</b>	<b>Introducción.</b>	<b>27</b>
<b>3.2</b>	<b>Ecuaciones dinámicas para los sistemas Euler-Lagrange.</b>	<b>28</b>
3.2.1	Propiedades de los sistemas Euler-Lagrange. . . . .	30
<b>3.3</b>	<b>Modelado de sistemas: Ejemplos.</b>	<b>31</b>
3.3.1	El péndulo compuesto. . . . .	31
3.3.2	El robot tipo RR. . . . .	34
3.3.3	El dron de rotor inclinable ( tilt-rotor). . . . .	38

---

### 3.1 Introducción.

El enfoque de Euler-Lagrange se utiliza en diversos campos de la física y la ingeniería para describir y analizar sistemas mecánicos, como sistemas de partículas, sistemas continuos, sistemas de múltiples grados de libertad y sistemas con restricciones, ver [30–33]. Proporciona una base teórica sólida para el estudio de la dinámica de sistemas físicos y es fundamental en la formulación de las leyes

del movimiento en la mecánica clásica.

A lo largo de este capítulo, se aborda el modelado de sistemas utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange como base fundamental. En primer lugar, se presenta la formulación de la ecuación basada en la función Lagrangiana. Esta función se determina mediante la combinación de una función de energía cinética y otra de energía potencial, que describen las propiedades físicas del sistema en estudio. Con estas ecuaciones, se logra sintetizar una representación matemática que actúa como un modelo para un sistema Euler-Lagrange.

Posteriormente, se procede a detallar las matrices y vectores que conforman un modelo basado en la ecuación de Euler-Lagrange, destacando las propiedades más relevantes de cada uno de ellos. Estas matrices y vectores son fundamentales para caracterizar la dinámica del sistema y permiten analizar su comportamiento y respuesta ante diferentes condiciones.

Finalmente, se presentan tres ejemplos concretos de sistemas dinámicos, en los cuales se establece de manera completa la estructura interna de cada matriz, específica para cada sistema en particular. Los sistemas dinámicos utilizados en estos ejemplos son el péndulo compuesto, el brazo robótico serial de dos grados de libertad tipo Revoluta-Revoluta y el dron tipo tilt-rotor. A través de estos ejemplos, se ilustra cómo se aplica el modelado basado en las ecuaciones de Euler-Lagrange para analizar y comprender el comportamiento de sistemas reales y se destacan las particularidades de cada uno de ellos.

### 3.2 Ecuaciones dinámicas para los sistemas Euler-Lagrange.

Se tiene que para un sistema dinámico de  $n$  grados de libertad con coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  y fuerzas externas totales  $\mathbf{f}_{ext} \in \mathbb{R}^n$ , su modelado se puede obtener mediante la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f}_{ext}, \quad (3.1)$$

donde

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := E_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - E_p(\mathbf{q}) \quad (3.2)$$

es la función lagrangiana. El término  $E_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  se conoce como la energía cinética (o co-energía) la cual puede ser descrita como

$$E_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es llamada *matriz de inercia generalizada*, la cual es definida positiva,  $E_p(\mathbf{q})$  denota a la energía potencial, la cual se asume acotada por abajo [32], es decir que existe alguna  $c_p \geq 0$  tal que:

$$E_p(\mathbf{q}) \geq c_p \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.4)$$

Debido a que la *energía potencial* depende únicamente de las coordenadas generalizadas se tiene:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.5)$$

por consiguiente

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.6)$$

Se tiene que el término  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$  del lado izquierdo de (3.1) se puede dividir en dos términos como se indica a continuación:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial E_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial E_p(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}, \quad (3.7)$$

Ahora, al sustituir (3.6) y (3.7) en (3.1) se obtiene

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial E_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_{ext}, \quad (3.8)$$

siendo  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  el *vector de gravedad*, el cual es definido como:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) := \frac{\partial E_p(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}. \quad (3.9)$$

Además, la suma del segundo y tercer término de (3.8) definen el *vector de Coriolis y fuerzas centrífugas*, es decir,

$$\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial E_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.10)$$

El *vector de Coriolis y fuerzas centrífugas* es único para cada sistema, a diferencia de la *matriz de Coriolis y fuerzas centrífugas*  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  puede ser definida

de múltiples formas. No obstante, para que esta tenga propiedades interesantes, sus elementos deben ser definidos mediante los símbolos de Christoffel de primer orden [34] como se menciona a continuación:

$$C_{ik}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^n C_{ijk}(\mathbf{q}) \dot{q}_j, \quad i, j, k \in 1, 2, \dots, n \quad (3.11)$$

donde

$$C_{ijk}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{ki}(\mathbf{q})}{\partial q_j} + \frac{\partial m_{ji}(\mathbf{q})}{\partial q_k} - \frac{\partial m_{kj}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \right). \quad (3.12)$$

Ahora, haciendo uso de las matrices y los vectores anteriormente definidos, (3.1) se puede reescribir como:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_{ext}, \quad (3.13)$$

donde el vector de fuerzas externas totales  $\mathbf{f}_{ext}$  puede descomponerse de la siguiente forma:

$$\mathbf{f}_{ext} = -\frac{\partial f(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{p} + \mathbf{u}, \quad (3.14)$$

siendo  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  el vector de perturbaciones externas,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  el vector de entradas de control y  $f(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}$  la función de disipación de Rayleigh, la cual satisface [33]:

$$\dot{\mathbf{q}}^\top \frac{\partial f(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \geq 0. \quad (3.15)$$

### 3.2.1 Propiedades de los sistemas Euler-Lagrange.

A continuación se enumeran algunas de las propiedades más relevantes de los sistemas Euler-Lagrange.

**Propiedad 3.1** — [20]. La matriz  $\boldsymbol{\eta} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  dada por:

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (3.16)$$

define una matriz antisimétrica y, como consecuencia, satisface la siguiente igualdad:

$$\mathbf{z}^\top \boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{z} \equiv 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.17)$$

**Propiedad 3.2** — [20]. El sistema (3.1) es lineal con respecto a sus parámetros. Es decir,

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \frac{\partial f(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{\Phi}^\top(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\widehat{\mathbf{p}}, \quad (3.18)$$

donde  $\widehat{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^p$  es el vector formado por los parámetros del sistema y  $\mathbf{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{p \times n}$  es llamada la *matriz regresora*.

**Propiedad 3.3** — [20]. La matriz  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  es simétrica positiva definida, es decir, existen constantes positivas  $m_m$  y  $m_M$  tal que:

$$m_m < \|\mathbf{M}(\mathbf{q})\| < m_M. \quad (3.19)$$

**Propiedad 3.4** — [20]. Existen constantes positivas  $k_g$  y  $k_v$  tal que:

$$\sup_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \left\| \frac{\partial^2 E_p(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}^2} \right\| \leq k_g, \quad (3.20)$$

$$\sup_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \left\| \frac{\partial E_p(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\| \leq k_v. \quad (3.21)$$

**Propiedad 3.5** — [20]. La matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es acotada en  $\mathbf{q}$  y lineal con respecto a  $\dot{\mathbf{q}}$ , es decir:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{z} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{z})\dot{\mathbf{q}} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.22)$$

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq k_c \|\dot{\mathbf{q}}\|, \quad k_c > 0. \quad (3.23)$$

### 3.3 Modelado de sistemas: Ejemplos.

#### 3.3.1 El péndulo compuesto.

El péndulo compuesto o péndulo físico es uno de los sistemas dinámicos no lineales SISO (Mono entrada - Mono salida) más sencillos con respecto a sus ecuaciones dinámicas. A pesar de ello, un sinnúmero de sistemas físicos reales son modelados mediante su ecuación matemática. El sistema consiste en un cuerpo rígido el cual oscila alrededor de un eje fijo, en donde el centro de masa del sistema no pasa por este eje de giro. En función de la posición del pivote de giro, el péndulo es afectado por el campo gravitatorio terrestre.

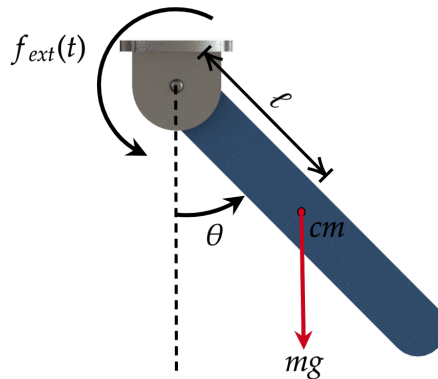


Figura 3.1: Diagrama de cuerpo libre del péndulo compuesto.

Existen algunas variaciones para la entrada de control de este sistema dinámico, las cuales se diferencian por como es inyectado el torque, siendo éste, la señal considerada como la entrada de control. Las entradas de control más comunes son el par generado por un motor eléctrico o de combustión colocado en el eje de giro.

En este capítulo se expresa la entrada de control  $\mathbf{u}$  de forma general, sin especificar qué mecanismo está generando el torque de entrada. La Figura 3.1 muestra la configuración del péndulo compuesto que se considerará a continuación.

Para este ejemplo, la coordenada generalizada está dada por el ángulo de giro  $\theta$ . Se considera que la energía potencial del péndulo está acotada por abajo, como se menciona en (3.4), y es descrita en función de la posición del centro de masa del cuerpo rígido. Bajo estas consideraciones la energía potencial del péndulo se determina como

$$E_p(\theta) = mg\ell(1 - \cos(\theta)), \quad (3.24)$$

siendo  $m$  la masa total del sistema,  $g$  la constante de gravedad y  $\ell$  la distancia entre el pivote y el centro de masa de la barra, donde se puede comprobar que la mínima energía potencial se obtiene cuando  $\theta = 0$  rad, es decir, cuando el péndulo está en su posición más baja, mientras que la máxima energía potencial se encuentra para  $\theta = \pi$  rad, colocando al péndulo en su punto más alto.

Por otro lado, de (3.3) se observa que la energía cinética se define como la mitad de la inercia del sistema multiplicado por la velocidad al cuadrado de la coordenada generalizada. En este caso, la inercia total del sistema es representada

por  $I$ , la cual es obtenida desde el pivote del péndulo. Por lo que la energía cinética queda descrita como

$$E_c(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2. \quad (3.25)$$

Considerando lo anterior, se deduce que el Lagrangiano del sistema está dado por la siguiente expresión:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = E_c(\theta, \dot{\theta}) - E_p(\theta) = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mg\ell(1 - \cos(\theta)). \quad (3.26)$$

Las derivadas parciales de la función Lagrangiana se calculan como

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\ell \sin(\theta) \quad (3.27)$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I\dot{\theta}. \quad (3.28)$$

La derivada temporal de esta última ecuación queda expresada como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = I\ddot{\theta}. \quad (3.29)$$

Por último, sustituyendo (3.29) y (3.27) en (3.1) se obtiene el modelo matemático del péndulo compuesto:

$$I\ddot{\theta} + mg\ell \sin(\theta) = u + p - \frac{\partial f(\dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}}. \quad (3.30)$$

En la ecuación anterior, la función de disipación de energía  $f(\dot{\theta})$  engloba todos los fenómenos que reducen la cantidad energética del sistema, producidos por alguna fuerza no conservativa, como lo es la fricción con el medio por donde se desplaza el péndulo. Por otro lado, la función  $p$  representa la suma de todos los momentos producidos por fuerzas externas y para este trabajo se contempla que cumple con la suposición **(i)**, descrita en la **Sección 1.2**.

Después de obtener la ecuación dinámica del péndulo utilizando la estructura de Euler-Lagrange, resulta relevante analizar cómo se aplican las propiedades discutidas en la **Sección 3.2.1** a este sistema en particular. De todas estas propiedades, la **Propiedad 3.2** es especialmente interesante, ya que se sabe que permite expresar la ecuación 3.30 de forma lineal en relación a su vector de parámetros. Este vector de parámetros se define de la siguiente manera:

$$\widehat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ mg\ell \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

mientras que la transpuesta de la matriz regresora del péndulo se calcula como

$$\begin{aligned} \Phi^T(\theta, \ddot{\theta}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial(p_1\ddot{\theta} + p_2 \sin(\theta))}{\partial p_1} & \frac{\partial(p_1\ddot{\theta} + p_2 \sin(\theta))}{\partial p_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \ddot{\theta} & \sin(\theta) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Además, se puede verificar fácilmente que la **Propiedad 3.3** se cumple para cualquier par de valores de  $m_m$  y  $m_M$  que satisfagan

$$m_m < I < m_M. \quad (3.33)$$

En cuanto a la **Propiedad 3.4**, la cual hace referencia a que la norma del término  $p_2 \sin(\theta)$  y su derivada parcial con respecto a  $\theta$  están acotadas, se cumple siempre y cuando los valores de  $k_g$  y  $k_v$  satisfagan la relación

$$k_g \geq p_2 \quad y \quad k_v \geq p_2. \quad (3.34)$$

### 3.3.2 El robot tipo RR.

El robot tipo RR es un tipo de robot serial que se compone de una cadena abierta formada por dos eslabones conectados por uniones de tipo revoluta, es decir, juntas que permiten el movimiento de rotación. Cada eslabón está impulsado por un actuador que controla el torque aplicado.

En una configuración específica en la que los actuadores giran alrededor de ejes paralelos y dichos ejes son perpendiculares al vector de gravedad, el robot tipo RR puede ser modelado como un péndulo doble. Esta analogía se ilustra en la Figura 3.2, donde se muestra la representación esquemática del robot tipo RR y su similitud con un péndulo doble, siendo la única diferencia la forma en como están actuados los ángulos de revolución.

En este sistema se tiene que las coordenadas generalizadas están dadas por los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  de cada una de las dos juntas de revoluta. Por lo que la energía potencial del sistema debe definirse de tal forma que cumpla la ecuación (3.4) y estar expresada en función de la altura del centro de masa de cada uno de los



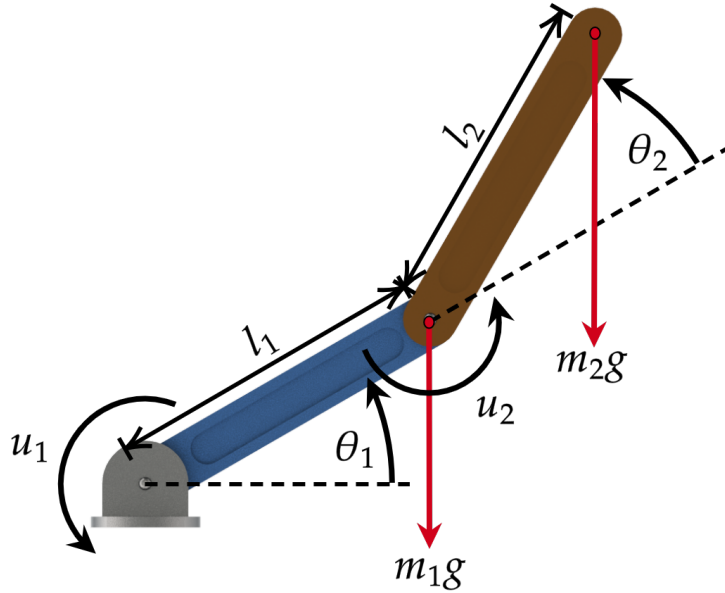


Figura 3.2: Diagrama de cuerpo libre de un robot tipo RR.

eslabones. Considerando lo anterior, se procede a definir la posición del centro de masa  $r_1(\theta_1)$  del primer eslabón como

$$r_1 = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\theta_1) \\ l_1 \sin(\theta_1) \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

mientras que la posición del centro de masa  $r_2(\theta_1, \theta_2)$  del segundo eslabón se puede expresar como:

$$r_2 = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

donde  $l_1$  y  $l_2$  representan el largo de eslabón uno y dos, respectivamente. Bajo estas consideraciones, la energía potencial de este sistema queda definida como

$$E_p(\theta_1, \theta_2) = m_1 g l_1 \sin(\theta_1) + m_2 g (l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)), \quad (3.37)$$

donde  $m_1$  y  $m_2$  denotan a la masa del primer y segundo eslabón, respectivamente. De esta forma se puede comprobar que la mínima energía potencial del robot RR se obtiene cuando  $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$  rad y  $\theta_2 = 0$  rad, es decir, cuando la punta del segundo

actuador del robot está en su posición más baja, mientras que la máxima energía potencial se encuentra al hacer  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$  rad y  $\theta_2 = 0$  rad, con lo cual se coloca la punta del segundo eslabón del sistema en su punto más alto.

Ahora, la energía cinética del sistema dinámico es igual a la mitad de la suma de cada una de las masas de los eslabones multiplicadas por su respectiva velocidad al cuadrado. Para ello se define la velocidad del centro de masa del primer eslabón  $\dot{r}_1$  como

$$\dot{r}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \begin{bmatrix} -\sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_1) \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

por lo que la velocidad al cuadrado del centro de masa del primer eslabón se calcula como

$$\dot{r}_1^\top \dot{r}_1 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2. \quad (3.39)$$

Mientras que la velocidad del centro de masa del segundo eslabón  $\dot{r}_2$  se obtiene al derivar su vector de posición, obteniendo el siguiente vector

$$\dot{r}_2 = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

siendo definida la velocidad al cuadrado del segundo eslabón por la siguiente expresión

$$\dot{r}_2^\top \dot{r}_2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 l_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \dot{\theta}_1^2 (\sin(\theta_1) \sin(\theta_1 + \theta_2) + \cos(\theta_1) \cos(\theta_1 + \theta_2)). \quad (3.41)$$

Por lo tanto, la energía cinética del robot tipo RR se encuentra al sustituir (3.39) y (3.41) en la siguiente ecuación

$$E_c(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^\top \dot{r}_1 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^\top \dot{r}_2. \quad (3.42)$$

Utilizando la identidad trigonométrica de la suma de ángulos del seno y del coseno en la ecuación anterior y agrupando los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  en el vector de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2]^\top$  se reescribe la energía cinética de forma matricial como

$$E_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.43)$$

donde la matriz de inercia  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  se obtiene a partir de (3.42) y (3.43). Específicamente, se tiene que:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} p_1 + 2p_2 \cos(\theta_2) & p_3 + p_2 \cos(\theta_2) \\ p_3 + p_2 \cos(\theta_2) & p_3 \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

siendo sus parámetros definidos como  $p_1 := l_1^2(m_1 + m_2) + l_2^2 m_2$ ,  $p_2 := l_1 l_2 m_2$  y  $p_3 := l_2^2 m_2$ . Es importante destacar que estos parámetros están relacionados con las características físicas del sistema, como las longitudes de los segmentos y las masas de los componentes. Ahora, mediante el uso de la energía potencial del sistema se define el vector de gravedad  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ , el cual es descrito por la ecuación (3.9), esto es

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial E_p(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{g}{l_2} p_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \frac{g}{l_1} (p_1 - p_3) \cos(\theta_1) \\ \frac{g}{l_2} p_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Para finalizar, se procede a calcular los elementos de la matriz de Coriolis y fuerzas centrípetas mediante el uso de los símbolos de Christoffel de primer orden, como se define en la ecuación (3.11), como se muestra a continuación:

$$c_{11} = c_{111}\dot{\theta}_1 + c_{121}\dot{\theta}_2, \quad (3.46)$$

$$c_{12} = c_{112}\dot{\theta}_1 + c_{122}\dot{\theta}_2, \quad (3.47)$$

$$c_{21} = c_{211}\dot{\theta}_1 + c_{221}\dot{\theta}_2, \quad (3.48)$$

$$c_{22} = c_{212}\dot{\theta}_1 + c_{222}\dot{\theta}_2, \quad (3.49)$$

donde

$$c_{111} = c_{221} = c_{212} = c_{222} = 0, \quad (3.50)$$

$$c_{121} = c_{112} = c_{122} = -p_2 \sin(\theta_2), \quad (3.51)$$

$$c_{211} = p_2 \sin(\theta_2), \quad (3.52)$$

por lo que la matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  se define como

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -p_2 \sin(\theta_2) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \\ -\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

Esta matriz completa la estructura de un sistema Euler-Lagrange completamente actuado, como se define en (3.13), para un sistema robótico de dos grados de libertad con juntas de tipo revoluta.

### 3.3.3 El dron de rotor inclinable ( tilt-rotor).

El vehículo aéreo tipo tilt-rotor es similar a un cuadricóptero, con la diferencia de que todos sus motores pueden rotar  $\beta$  grados alrededor del eje  $y_a$  del marco de referencia  $\mathcal{A}$ , el cual está montado sobre el chasis del dron (véase Figura 3.3). Esta topología de dron permite avanzar traslacionalmente mientras los ángulos de roll y pitch son nulos, a diferencia de la topología clásica de un cuadricóptero, la cual puede verse en [35–37].

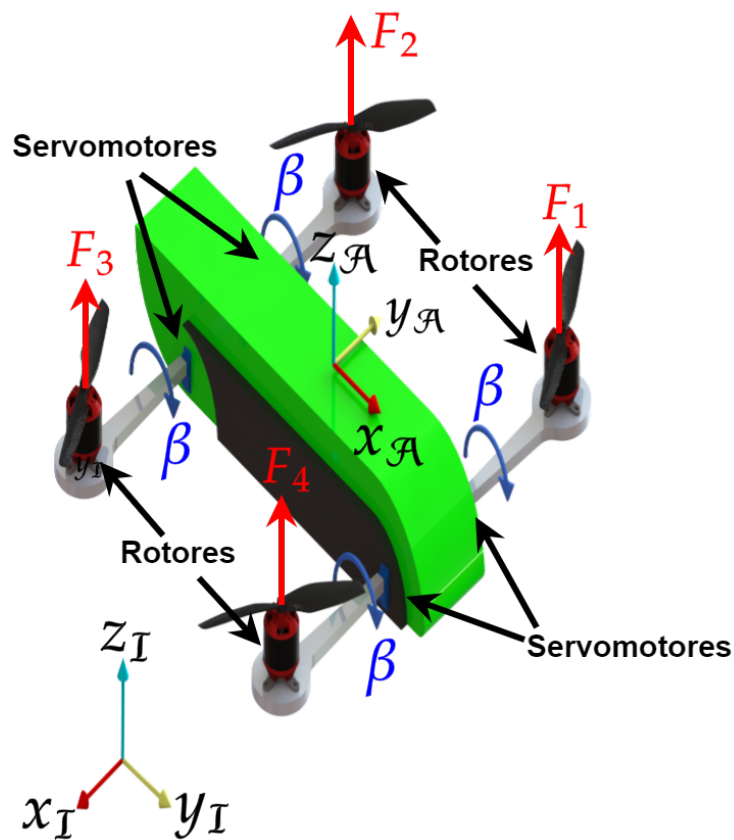


Figura 3.3: Diagrama del dron tipo tilt rotor de cuatro hélices.

El modelo dinámico del tilt-rotor se obtiene mediante el formalismo de Euler-Lagrange, el cual representa al dron como un cuerpo sólido que evoluciona de forma traslacional y rotacional en el plano tridimensional. Para ello se realizarán las siguientes consideraciones, como se sugiere en [38].

- Las hélices y la estructura de la aeronave son rígidas y no sufren deformaciones.
- El centro de masa se asume coincidente con un marco de referencia  $\mathcal{A}$  fijado sobre el dron.
- La estructura de la aeronave es simétrica.
- Se desprecian los efectos causados por el suelo.

Las coordenadas generalizadas referenciadas a un marco inercial  $\mathcal{I}$  fijo en tierra de un vehículo aéreo pueden escribirse como  $\mathbf{q} = [\boldsymbol{\xi}^\top, \boldsymbol{\eta}^\top]^\top \in \mathbb{R}^6$ , siendo  $\boldsymbol{\xi} = [x, y, z]^\top \in \mathbb{R}^3$  el vector del movimiento de traslación del centro de masa del dron y  $\boldsymbol{\eta} = [\phi, \theta, \psi]^\top \in \mathbb{R}^3$  es el vector de orientación formado por los tres ángulos de Euler *roll*, *pitch* y *yaw*, respectivamente.

La energía cinética del dron está dada por

$$E_c = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{\xi}}^\top m_T \dot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{I}_{xyz} \boldsymbol{\omega}), \quad (3.54)$$

donde  $m_T$  es la masa total de dron,  $\mathbf{I}_{xyz} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es el tensor de inercia del dron definido por los momentos de inercia principales  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  y  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$  es el vector de velocidad angular en el marco de referencia  $\mathcal{A}$  el cual esta definido en función de  $\boldsymbol{\eta}$  y  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  por medio la bien conocida matriz  $\mathbf{W}_\eta(\boldsymbol{\eta})$ , (vease [39], para mayores detalles), esto es:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{W}_\eta(\boldsymbol{\eta}) \dot{\boldsymbol{\eta}}, \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \cos(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

De la definición de la energía potencial, se tiene que la matriz inercial del sistema completo esta definida por las matrices inerciales de los subsistema de traslación y rotacion, como se muestra a continuacion:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) := \begin{bmatrix} \mathbf{M}_\xi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_\eta(\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

siendo

$$\mathbf{M}_\xi := \begin{bmatrix} m_T & 0 & 0 \\ 0 & m_T & 0 \\ 0 & 0 & m_T \end{bmatrix} = m_T \mathbf{I}_3, \quad (3.57)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\eta(\eta) &:= \mathbf{W}_\eta(\eta)^\top \mathbf{I}_{xyz} \mathbf{W}_\eta(\eta) \\ &= \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xx}S_\theta \\ 0 & I_{yy}C_\phi^2 + I_{zz}S_\phi^2 & I_{yy}C_\theta C_\phi S_\phi - I_{zz}C_\theta C_\phi S_\phi \\ -I_{xx}S_\theta & I_{yy}C_\theta C_\phi S_\phi - I_{zz}C_\theta C_\phi S_\phi & I_{zz}C_\theta^2 C_\phi^2 + I_{xx}S_\theta^2 + I_{yy}C_\theta^2 S_\phi^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

La matriz de Coriolis queda definida como:

$$\mathbf{C}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_\eta(\eta, \dot{\eta}) \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

donde

$$\begin{aligned} C_{\eta 11} &= 0, \\ C_{\eta 12} &= -\dot{\psi}(I_{xx} + (I_{yy} - I_{zz})C_{2\phi})C_\theta + \dot{\theta}(I_{yy} - I_{zz})C_\phi S_\phi, \\ C_{\eta 13} &= \dot{\psi}(-I_{yy} + I_{zz})C_\theta^2 C_\phi S_\phi, \\ C_{\eta 21} &= \dot{\psi}(I_{xx} + (I_{yy} - I_{zz})C_{2\phi})C_\theta + \dot{\theta}(-I_{yy} + I_{zz})C_\phi S_\phi, \\ C_{\eta 22} &= \dot{\phi}(-I_{yy} + I_{zz})C_\phi S_\phi, \\ C_{\eta 23} &= \dot{\psi}(-I_{xx} + I_{zz}C_\phi^2 + I_{yy}S_\phi^2)C_\theta S_\theta, \\ C_{\eta 31} &= (-I_{xx}\dot{\theta} + \dot{\psi}(I_{yy} - I_{zz})C_\theta C_\phi S_\phi)C_\theta, \\ C_{\eta 32} &= \dot{\phi}(I_{yy} - I_{zz})C_\theta C_{2\phi} + \dot{\theta}((-I_{yy} + I_{zz})C_\phi S_\phi S_\theta + \dot{\psi}(I_{xx} - I_{zz}C_\phi^2 - I_{yy}S_\phi^2)C_\theta), \\ C_{\eta 33} &= -(\dot{\phi}(-I_{yy} + I_{zz})C_\theta C_\phi S_\phi + \dot{\theta}(-I_{xx} + I_{zz}C_\phi^2 + I_{yy}S_\phi^2)S_\theta)C_\theta. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Por otro lado, la energía potencial del sistema está definida como  $E_p = m_T g z$ , por lo cual el vector de gravedad se define como:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m_T g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top. \quad (3.61)$$

Por lo tanto el modelo dinámico del dron queda expresado como:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g = \begin{bmatrix} F_\xi \\ T \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

La entrada de control del subsistema de traslación  $F_\xi$  es el vector de la fuerza

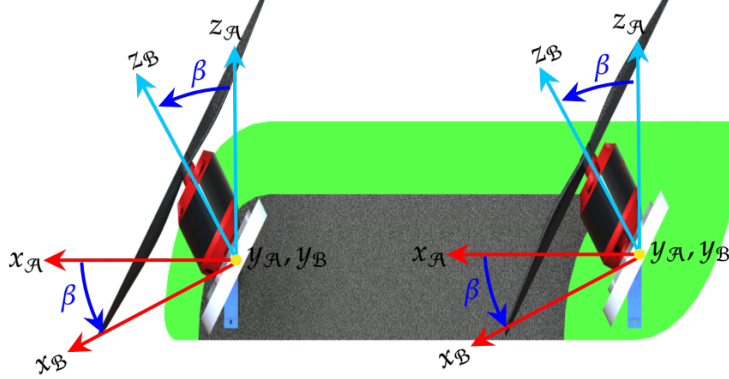


Figura 3.4: Rotación de  $\beta$  rad del marco de referencia  $\mathcal{B}$  con respecto al  $\mathcal{A}$ .

principal de empuje  $u_1$  expresado en el marco de coordenadas  $\mathcal{I}$ . El marco de coordenadas  $\mathcal{B}$  se encuentra unido a la dirección de empuje de los motores, por lo que está rotado  $\beta$  grados sobre el eje  $y_{\mathcal{A}}$  del marco de coordenadas  $\mathcal{A}$ , montado sobre la estructura del dron. Es por ello que las componentes de este vector en el eje  $x_{\mathcal{B}}$  y  $y_{\mathcal{B}}$  son nulas debido a que la fuerza de empuje de cada motor del dron es paralela al eje  $z_{\mathcal{B}}$ , ver Figura 3.4. Para mostrar el vector de empuje en el marco de referencia  $\mathcal{I}$  es necesario premultiplicar por una matriz de rotación  $R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{I}}$ , la cual mapea los vectores del marco de referencia  $\mathcal{B}$  en el marco inercial. Esta matriz está definida por tres rotaciones sucesivas, la primera de  $\psi$  radianes sobre el eje  $z_{\mathcal{B}}$ , la segunda de  $\theta + \beta$  radianes sobre el eje  $Y_{\mathcal{B}}$  y por último una rotación de  $\psi$  radianes sobre el eje  $x_{\mathcal{B}}$ , es decir:

$$R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{I}} = \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & S_\phi S_{\theta+\beta} C_\psi - C_\phi S_\psi & C_\phi S_{\theta+\beta} C_\psi + S_\phi S_\psi \\ C_\theta S_\psi & S_\phi S_{\theta+\beta} S_\psi - C_\phi C_\psi & C_\phi S_{\theta+\beta} S_\psi - S_\phi C_\psi \\ -S_{\theta+\beta} & S_\phi C_{\theta+\beta} & C_\phi C_{\theta+\beta} \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

De esta forma se puede reescribir el vector de fuerzas traslacional en el marco de referencia  $\mathcal{I}$ , esto es:

$$\mathbf{F}_\xi = \begin{bmatrix} F_{\xi x} \\ F_{\xi y} \\ F_{\xi z} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_\mathcal{B}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1, \quad (3.64)$$

$$\mathbf{F}_\xi = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta + \beta) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\psi) \\ \cos(\phi) \sin(\theta + \beta) \sin(\psi) - \sin(\phi) \cos(\psi) \\ \cos(\phi) \cos(\theta + \beta) \end{bmatrix} u_1, \quad (3.65)$$

donde  $u_1$  denota a la fuerza de empuje principal, la cual resulta de la suma de las cuatro fuerzas de empuje de cada motor del dron, esto es:

$$u_1 = \sum_{i=1}^4 F_i. \quad (3.66)$$

Por otro lado, la entrada de control  $\mathbf{T}$  del subsistema de rotación es definida mediante los pares que generan las fuerzas de empuje de cada motor, así como por las fuerzas de arrastre de cada hélice, donde los primeros son modelados en función de las  $i$ -ésimas posiciones de cada motor localizado en el punto  $r_i$ , sus respectivas fuerzas de empuje  $F_i$  y la rotación de  $\beta$  grados del marco  $\mathcal{B}$  con respecto al marco  $\mathcal{A}$  fijo a la estructura del dron. Los momentos producidos por la fuerza de arrastre de cada hélice están modelados en función de la constante de arrastre  $k_{drag}$  y la fuerza de empuje  $F_i$  de su respectivo motor. Además, se debe considerar la rotación de este momento debido a la entrada  $\beta$  (ver Figura 3.4), más específicamente se tiene

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^4 r_i \times R_y(\beta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_i \end{bmatrix} + k_{drag} R_y(\beta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 - F_2 + F_3 - F_4 \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

con

$$R_y(\beta) := \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

La posición  $r_i$  de cada motor puede variar en función de la configuración del dron. Cabe mencionar que no necesariamente se tiene que seguir con estas



configuraciones, pero es de gran importancia al momento de implementar el controlador que la configuración elegida garantice la independencia lineal de las fuerzas de empuje  $F_i$ , es decir, se busca garantizar que la ecuación

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 F_i \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

tenga una única solución real para cada fuerza de empuje  $F_i$ . Puede observarse que hasta este punto el dron tilt-rotor cuenta con seis grados de libertad, tres para el subsistema de posición y tres para el subsistema de orientación, mientras que sólo tiene cinco entradas de control  $u_1, u_2, u_3, u_4$  y  $\beta$ , convirtiéndolo en un sistema subactuado.

### Resumen del Capítulo 3.

En este capítulo se proporciona una introducción al modelado de sistemas utilizando el enfoque de Euler-Lagrange. Para ilustrar la efectividad del enfoque, se considera el modelado de varios sistemas mecánicos. Se cubren aspectos clave como la formulación de la ecuación, las matrices y vectores relevantes, y se ilustra su aplicación a través de ejemplos específicos de sistemas dinámicos reales. Este capítulo brinda una base sólida para comprender y analizar sistemas mecánicos desde una perspectiva Euler-Lagrange.

El capítulo comienza introduciendo la formulación de la ecuación de Euler-Lagrange basada en la función Lagrangiana. Esta función se obtiene combinando las funciones de energía cinética y potencial, las cuales describen las propiedades físicas del sistema en estudio. Con estas ecuaciones, se logra sintetizar una representación matemática que actúa como un modelo para sistemas Euler-Lagrange.

A continuación, se detallan las matrices y vectores que conforman un modelo basado en las ecuaciones de Euler-Lagrange, resaltando las propiedades más relevantes de cada uno de ellos. Estos componentes matemáticos son esenciales para caracterizar la dinámica del sistema y permiten analizar su comportamiento y respuesta ante diferentes condiciones.

Finalmente, se presentan tres ejemplos concretos de sistemas dinámicos, donde se establece la estructura interna de cada matriz específica para cada sistema en particular. Estos ejemplos incluyen el péndulo compuesto, el brazo robótico serial de dos grados de libertad tipo Revoluta-Revoluta y el dron de rotor inclinable (tilt-rotor). A través de estos ejemplos, se ilustra cómo se aplica el modelado basado en las ecuaciones de Euler-Lagrange para analizar y comprender el comportamiento de sistemas reales, destacando las particularidades y características propias de cada uno.

## 4. Resultados principales: el controlador basado en retardo.

### Índice

4.1	Introducción.	45
4.2	Estabilidad ISS para un sistema de segundo orden.	47
4.3	Desempeño para un sistema de segundo orden.	49
4.4	Proposición principal: desempeño de un sistema de Euler-Lagrange.	54

#### 4.1 Introducción.

El objetivo de este capítulo es desarrollar un controlador con la capacidad de resolver el problema de seguimiento de trayectoria acotada (PSA), definido en la sección 1.2, para el vector  $\mathbf{q}_0$  aplicado a un sistema Euler-Lagrange completamente actuado, el cual tiene la siguiente estructura:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} + \mathbf{p}, \quad (4.1)$$

donde  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de coordenadas generalizadas,  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de perturbaciones externas el cual se asume acotado al igual que su derivada

$\dot{p}$ ,  $u \in \mathbb{R}^n$  es el vector de entradas de control,  $M(q) > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia la cual es positiva definida,  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de Coriolis y fuerzas centrípetas.

Antes de abordar el problema principal, considérese el siguiente sistema:

$$A_2 \ddot{q} + A_1 \dot{q} + A_0 q = u + p, \quad (4.2)$$

donde  $A_2 > 0$  es un parámetro constante conocido, mientras que  $A_1, A_0 \in \mathbb{R}$  son parámetros constantes inciertos, donde se conocen sus valores máximos, los cuales se denotan por  $\bar{A}_1$  y  $\bar{A}_0$ , respectivamente;  $q \in \mathbb{R}$  es la variable generalizada de posición,  $u \in \mathbb{R}$  es la señal de control y  $p \in \mathbb{R}$  es una perturbación externa acotada donde su derivada  $\dot{p} \in \mathbb{R}$  también está acotada.

Definiremos como **caso nominal** a la solución del problema de seguimiento de trayectoria en ausencia de incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas. Específicamente se considera el caso cuando

$$A_0 = A_1 = p = 0 \quad (4.3)$$

y el controlador es un clásico control proporcional derivativo normalizado para la señal de referencia  $q_r$  y la señal de error  $\tilde{q} = q - q_r$ , esto es

$$u = -A_2 \left( k_p \tilde{q} + k_d \dot{\tilde{q}} - \dot{q}_r \right). \quad (4.4)$$

Además, si se definen las constantes del controlador como se muestra a continuación

$$\begin{cases} k_p = ak^2 \\ k_d = a(k+1) \end{cases}, \quad (4.5)$$

siendo las constantes escalares  $a > 0$  y  $k > 1$ . Entonces, los polos en lazo cerrado del error del sistema nominal se ubican en  $s_1 = -a$  y  $s_2 = -ak$ . Por lo que el error de la posición nominal  $\tilde{q}_0 = q_0 - q_r$  y el error de la velocidad nominal  $\dot{\tilde{q}}_0 = \dot{q}_0 - \dot{q}_r$  se pueden expresar como:

$$\tilde{q}_0 = \frac{ke^{-at} - e^{-akt}}{k-1} \tilde{q}_0(0) + \frac{e^{-at} - e^{-akt}}{a(k-1)} \dot{\tilde{q}}_0(0), \quad (4.6)$$

$$\dot{\tilde{q}}_0 = \frac{ak(e^{-akt} - e^{-at})}{k-1} \tilde{q}_0(0) + \frac{ke^{-akt} - e^{-at}}{k-1} \dot{\tilde{q}}_0(0). \quad (4.7)$$

## 4.2 Estabilidad ISS para un sistema de segundo orden.

La siguiente proposición tiene el objetivo de resolver el PSA para la trayectoria de referencia  $q_r$ .

**Proposición 4.1** Considere el sistema de segundo orden descrito por (4.2), y sea  $q_r$  una señal de referencia. Entonces, el PSA es resuelto para  $q_r$  si el controlador  $u$  es elegido con la siguiente estructura:

$$u = -A_2 \left( k_p \tilde{q} + k_d \dot{\tilde{q}} - \ddot{q}_r \right) - \widehat{d}(t; \tau), \quad (4.8)$$

donde  $\tilde{q} := q - q_r$  y  $\widehat{d}(t; \tau)$  es una ley de estimación basada en el retardo definida por

$$\widehat{d}(t; \tau) := A_2 \ddot{q}(t - \tau) - u(t - \tau), \quad (4.9)$$

con  $k_p \in \mathbb{R}_+$ , mientras que la ganancia  $k_d$  y el retardo  $\tau$  deben satisfacer las siguientes desigualdades:

$$0 < \tau < \left| \frac{A_2}{A_1} \right| \quad \text{y} \quad 0 < \tau \left| \frac{\overline{A_0}}{A_2} \right| < k_d. \quad (4.10)$$

**Nota** Para simplificar el análisis de la demostración se asumirá que la siguiente aproximación

$$\dot{d}(t) = \frac{d - d(t - \tau)}{\tau} \quad (4.11)$$

se cumple cuando  $\tau$  es pequeña.

*Demostración.* Primero, considere el sistema (4.2) en lazo cerrado con el controlador (4.8):

$$A_2 \ddot{q} = -A_2 \left[ k_p \tilde{q} + k_d \dot{\tilde{q}} - \ddot{q}_r \right] - \widehat{d}(t; \tau) + d,$$

donde  $d$  agrupa las dinámicas desconocidas del sistema y las perturbaciones externas, es decir:

$$d := p - A_1 \dot{q} - A_0 q. \quad (4.12)$$

Ahora, al sustituir la ley de estimación basada en retrasos, se obtiene:

$$A_2 \ddot{q} = -A_2 \left[ k_p \tilde{q} + k_d \dot{\tilde{q}} - \ddot{q}_r \right] + d - A_2 \ddot{q}(t - \tau) + u(t - \tau). \quad (4.13)$$

Dado que la ecuación anterior depende de la entrada retardada  $u(t - \tau)$ , será necesario considerar las señales de entrada pasadas. A tal fin, obsérvese que la ecuación (4.2) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} A_2 \ddot{q} &= u + d, \\ \Rightarrow u &= A_2 \ddot{q} - d, \\ \Rightarrow u(t - \tau) &= A_2 \ddot{q}(t - \tau) - d(t - \tau). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Considerando (4.14) en la dinámica del sistema en lazo cerrado (4.13), resulta:

$$\ddot{\tilde{q}} + k_d \dot{\tilde{q}} + k_p \tilde{q} = \frac{d - d(t - \tau)}{A_2}. \quad (4.15)$$

A continuación, se puede observar que la señal retardada  $d(t - \tau)$  se puede relacionar con  $\dot{d}$ , mediante el siguiente supuesto:

$$\begin{aligned} \dot{d}(t) &= \frac{d - d(t - \tau)}{\tau}, \\ \Rightarrow d - d(t - \tau) &= \tau \dot{d}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Al considerar (4.16), la ecuación (4.15) se puede reescribir como

$$\ddot{\tilde{q}} + k_d \dot{\tilde{q}} + k_p \tilde{q} = \frac{\tau \dot{d}}{A_2}. \quad (4.17)$$

Para poder afirmar que el sistema anterior es ISS, sólo se requiere concluir que la derivada de la perturbación total  $\dot{d}$  es acotada. Debido a que se supone que  $\dot{p}$  está acotada (suposición **(i)**, descrita en el **Capítulo 1.2**) sólo queda corroborar que  $\dot{q}$  y  $\ddot{q}$  están acotadas. Es por ello que a partir de la definición de  $d$ , la expresión anterior se puede establecer como:

$$\left(1 + \tau \frac{A_1}{A_2}\right) \ddot{q} + \left(k_d + \tau \frac{A_0}{A_2}\right) \dot{q} + k_p q = d_1, \quad (4.18)$$

donde

$$d_1 := k_p q_r + k_d \dot{q}_r + \ddot{q}_r + \frac{\tau}{A_2} \dot{p}.$$

Dado que  $\tau$  y  $k_d$  satisfacen la ecuación (4.10), está claro que el sistema en lazo cerrado no perturbado de la ecuación (4.18) tiene un punto de equilibrio global exponencialmente estable en el origen. Por lo tanto, al hacer uso del Lema 2.2, se puede concluir que el sistema en lazo cerrado es ISS. Además, volviendo a tener

en cuenta la suposición (i), es claro que  $d_1$  está acotada, lo que implica que  $q$ ,  $\dot{q}$  y  $\ddot{q}$  permanecerán acotados para todo  $t \geq 0$ , implicando a su vez que  $\dot{d}$  se mantenga acotada. Obsérvese que los sistemas (4.18) y (4.17) son equivalentes, implicando que (4.17) también sea ISS. ■

### 4.3 Desempeño para un sistema de segundo orden.

En la sección anterior se estableció una proposición para un controlador tipo  $PD$  en conjunto con una ley de estimación retardada. En la cual, al cumplirse la desigualdad (4.10) se resuelva el problema de seguimiento de trayectoria acotada, pese a la incertidumbre en algunos parámetros del sistema y estar expuesto a perturbaciones desconocidas. Debido a que sólo se establece que el sistema es ISS, la **Proposición 4.4.1** no establece qué tan grande son las cotas de los errores del seguimiento de trayectoria, establecidos en la ecuación (1.1). Pero al demostrar la existencia de estas cotas, es posible establecer que el sistema a analizar es de orden exponencial y por lo tanto, se puede hacer uso de herramientas como la transformada de Laplace para un análisis frecuencial. Por lo que el siguiente paso lógico es encontrar la magnitud de estas cotas en función de los parámetros  $k_p$ ,  $k_d$  y  $\tau$  del controlador. Así como establecer condiciones para satisfacer los criterios de desempeño mayormente utilizados en los sistemas de segundo orden.

**Lema 4.1** Sean  $g_1 : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ ,  $g_2 : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones reales, Laplace transformables con transformada de Laplace  $G_1, G_2$ , respectivamente, tales que que satisfacen las siguientes propiedades:

- i)  $G_1$  es estrictamente propia con polos estables.
- ii)  $\|g_2\|_\infty < \infty$ .

Entonces,

$$\|\mathcal{L}^{-1}\{G_1(s)G_2(s)\}\|_\infty \leq \|g_2(t)\|_\infty \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s) \quad (4.19)$$

*Demostración.* Dado que  $0 \leq g_1$ , se tiene que

$$g_1(r)g_2(t) \leq g_1(r)\|g_2(t)\|_\infty \quad \forall r, t \geq 0. \quad (4.20)$$

Por lo que

$$\left\| \int_0^t g_1(r)g_2(t-r)dr \right\|_{\infty} \leq \|g_2(t)\|_{\infty} \left\| \int_0^t g_1(r)dr \right\|_{\infty} \quad \forall t \geq 0. \quad (4.21)$$

Observa que el valor máximo de la integral anterior se obtiene cuando  $t \rightarrow \infty$ . Utilizando el Teorema del Valor Final, se concluye que

$$\left\| \int_0^t g_1(r)dr \right\|_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{G_1(s)}{s} \right) \quad (4.22)$$

■

**Lema 4.2** Sean  $g_1, g_2 : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones reales, Laplace transformables con transformada de Laplace  $G_1, G_2$ , respectivamente, tales que que satisfacen las siguientes propiedades:

- i)  $\int_0^{\infty} |g_1(t)|dt < \infty$ .
- ii)  $\exists \|g_2(t)\|_{\infty} < \infty$

Entonces,

$$\|\mathcal{L}^{-1}\{G_1(s)G_2(s)\}\|_{\infty} \leq \|g_2(t)\|_{\infty} \int_0^{\infty} |g_1(t)|dt \quad (4.23)$$

*Demostración.* Se tiene que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}^{-1}\{G_1(s)G_2(s)\}\|_{\infty} &= \left\| \int_0^t g_1(\eta)g_2(t-\eta)d\eta \right\|_{\infty} \\ &\leq \|g_2(t)\|_{\infty} \left\| \int_0^t |g_1(\eta)|d\eta \right\|_{\infty} \leq \|g_2(t)\|_{\infty} \int_0^t |g_1(t)|dt. \end{aligned} \quad (4.24)$$

■

**Proposición 4.2** Considere el sistema de segundo orden descrito en (4.2); sean  $q_r$  una señal de referencia y  $d$  la perturbación total del sistema definida por (4.12). Entonces, la ley de control (4.8) resuelve el PSA para  $q_0$  con los límites

$$0 < \frac{\tau \| \dot{d} \|_{\infty}}{A_2 k_p} \leq \epsilon_1 \quad \text{y} \quad 0 < \frac{2\tau \| \dot{d} \|_{\infty}}{A_2 k_d} \leq \epsilon_2, \quad (4.25)$$



si el retardo de la ley de estimación  $\tau$  satisface

$$0 < \tau < \left| A_2 / \bar{A}_1 \right| \quad (4.26)$$

y las ganancias del controlador  $k_p$  y  $k_d$  son elegidas de la siguiente manera:

$$k_p := a^2 k, \quad (4.27)$$

$$k_d := a(k+1), \quad (4.28)$$

siendo

$$k > \max \left\{ \left| \frac{\bar{A}_0}{a\bar{A}_1} \right| - 1, 1 \right\} \quad \text{y} \quad a > 0. \quad (4.29)$$

*Demostración.* Se procede a adoptar un enfoque en el dominio de la frecuencia para el sistema (4.2) en lazo cerrado con el controlador (4.8) y fijando  $k_p$  y  $k_d$  como en (4.27) y (4.28), respectivamente. Obteniendo la siguiente ecuación

$$\tilde{Q}(s) = \underbrace{\frac{N(s)}{(s+a)(s+ak)}}_{=:G_0(s)} + \underbrace{\frac{1-e^{-\tau s}}{A_2(s+a)(s+ak)}}_{=:G_d(s)} D(s), \quad (4.30)$$

donde  $N(s) := (s+a(k+1))\tilde{q}(0) + \dot{\tilde{q}}(0)$ . Obsérvese que en la solución anterior se ha tenido en cuenta la ecuación (4.12), es decir, el hecho de que el término  $d$  engloba tanto la perturbación  $p$  como a la dinámica desconocida del sistema (la que se refiere a los términos  $A_1\dot{q}$  y  $A_0q$ , que se suponen desconocidos). Por lo tanto, tal solución es consistente.

Como se mencionó en la sección 4.1, para el **caso nominal** (siendo  $d = 0$ ) la ubicación de los polos en lazo cerrado de la ecuación anterior se ubican en  $s_1 = -a$  y  $s_2 = -ak$ . Es por ello que se pueden diseñar las constantes  $a$  y  $k$  de tal forma que la solución de la posición y la velocidad de este sistema tengan un desempeño predefinido, de acuerdo a las ecuaciones (4.6) y (4.7). Para todos los demás casos, cuando  $d \neq 0$ , el error de posición del sistema se obtiene al resolver

$$\tilde{q}(t) = \tilde{q}_0(t) + \mathcal{L}^{-1} \{G_d(s)\}. \quad (4.31)$$

Al definir  $G_p(s) := 1/((s+a)(s+ak))$ , cuya transformada en el dominio del

tiempo satisfice

$$g_p(t) = \frac{1}{a(k-1)} \left( e^{-at} - e^{-akt} \right) \geq 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (4.32)$$

se reescribe  $G_d(s)$  como

$$G_d(s) = G_p(s) \frac{(1 - e^{-\tau s})D(s)}{A_2}. \quad (4.33)$$

Aplicando el Lema 4.1 y el Corolario 2.1 en (4.33) se tiene que

$$\|\mathcal{L}^{-1}\{G_d(s)\}\|_\infty \leq \left\| \frac{d(t) - d(t-\tau)}{A_2} \right\|_\infty \frac{1}{a^2 k} \leq \frac{\tau \|\dot{d}\|_\infty}{A_2 k_p} \quad \forall t \geq \tau. \quad (4.34)$$

Por lo que de (4.31) y (4.34) se concluye que

$$\|\tilde{q} - \tilde{q}_0\| = \|q - q_0\| \leq \frac{\tau \|\dot{d}\|_\infty}{A_2 k_p} \leq \epsilon_1 \quad \forall t \geq \tau. \quad (4.35)$$

Por otro lado, el error en la velocidad del sistema a lo largo del tiempo se obtiene al derivar (4.31), esto es

$$\dot{\tilde{q}}(t) = \dot{\tilde{q}}_0(t) + \mathcal{L}^{-1}\{sG_d(s)\}. \quad (4.36)$$

Al aplicar el Lema 4.2 y el Corolario 2.1 se obtiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\{sG_d(s)\} \leq \tau \left\| \frac{\dot{d}}{A_2} \right\|_\infty \int_0^\infty |\dot{g}_p(t)| dt \quad \forall t \geq \tau, \quad (4.37)$$

donde la función

$$\dot{g}_p(t) = \frac{1}{k-1} \left( k e^{-akt} - e^{-at} \right) \quad (4.38)$$

tiene un único cruce por cero en

$$t_c = \frac{\ln\left(k^{\frac{-1}{k-1}}\right)}{-a}, \quad (4.39)$$

por lo que  $\dot{g}_p \geq 0$  para  $t \in [0, t_c]$  y negativa para  $t \in (t_c, \infty)$ . Ahora, reescribiendo la integral

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\dot{g}_p(t)| dt &= \int_0^{t_c} \dot{g}_p(t) dt - \int_{t_c}^\infty \dot{g}_p(t) dt \\ &= g_p(t_c) - g_p(0) + g_p(t_c) - g_p(\infty) \\ &= 2g_p(t_c) = \frac{2}{ak^{\frac{k}{k-1}}} < \frac{2}{k_d}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Sección 4.4. Proposición principal: Desempeño de un sistema Euler-Lagrange.

Sustituyendo (4.40) y (4.37) en (4.36) se concluye que

$$\|\ddot{\tilde{q}} - \ddot{\tilde{q}}_0\| = \|\dot{q} - \dot{q}_0\| \leq \frac{2\tau \|\dot{d}\|_\infty}{A_2 k_d} \leq \epsilon_2 \quad \forall t \geq \tau. \quad (4.41)$$

La condición de estabilidad de la ganancia  $k$  se obtiene al cumplir que el segundo término de la ecuación (4.18) sea positiva. Esto se logra al definir

$$\begin{aligned} \tau \left| \bar{A}_0 / A_2 \right| &< \left| A_2 / \bar{A}_1 \right| \left| \bar{A}_0 / A_2 \right| \\ \Rightarrow \left| \bar{A}_0 / \bar{A}_1 \right| &< ak + a \\ \Rightarrow \left| \frac{\bar{A}_0}{a \bar{A}_1} \right| - 1 &< k. \end{aligned}$$

■

**Nota** De (4.35) y (4.41) se deriva los límites para  $\tilde{q}$  y  $\dot{\tilde{q}}$ , respectivamente:

$$\|\tilde{q}\|_\infty \leq |\tilde{q}(0)| + \left| \frac{\dot{\tilde{q}}(0)}{k_d} \right| + \frac{\tau \|\dot{d}\|_\infty}{A_2 k_p}, \quad (4.42)$$

$$\|\dot{\tilde{q}}\|_\infty \leq \left| \frac{a \tilde{q}(0)}{k^{\frac{1}{k-1}}} \right| + \left| \frac{\dot{\tilde{q}}(0)}{k^{\frac{k+1}{k-1}}} \right| + \frac{2\tau \|\dot{d}\|_\infty}{A_2 k_d}. \quad (4.43)$$

Para propósitos de implementación la Figura 4.1 ilustra un diagrama de bloques de la estructura de control propuesta.

Los resultados anteriores se resumen mediante el Algoritmo 1. Tal algoritmo permite determinar las ganancias del controlador  $(k_p, k_d, \tau)$ . En este sentido, la información requerida es:

- **los parámetros de los sistemas:**  $A_2, \bar{A}_1$  y  $\bar{A}_0$ ;
- **los límites de la derivada de la perturbación:**  $\|\dot{d}\|_\infty$ ;
- **los parámetros de desempeño:** tiempo de establecimiento deseado ( $T_s$ ) y el máximo error deseado  $\max\{\epsilon_1, \epsilon_2\} \leq e_{max}$ .

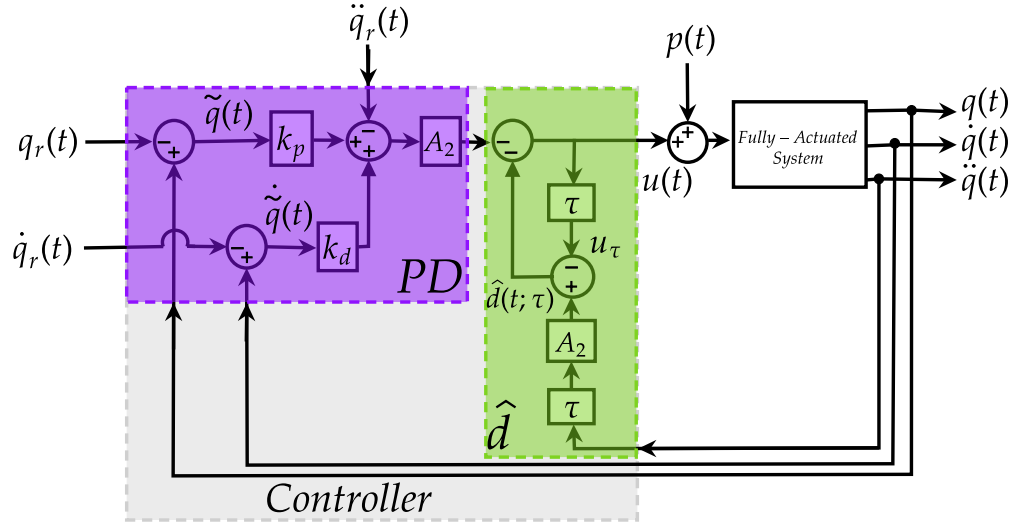


Figura 4.1: Control basado en retardo tipo  $PD$  para el sistema (4.2).

---

**Algoritmo 1** : Diseño de las ganancias del controlador.

---

**Datos:**  $A_2, \bar{A}_1, \bar{A}_0, \|\dot{d}\|_\infty, T_s$  y  $e_{max}$ .

**Resultado:** las ganancias de control  $a, k$  y  $\tau$

- 1: definir  $a := \frac{4}{T_s}$ ;
  - 2: definir  $k > \max \left\{ \left| \frac{\bar{A}_0}{a\bar{A}_1} \right| - 1, 1 \right\}$ ;
  - 3: definir  $\tau < \min \left\{ \frac{e_{max}A_2a^2k}{\|\dot{d}\|_\infty}, \frac{e_{max}A_2a(k+1)}{2\|\dot{d}\|_\infty}, \left| A_2/\bar{A}_1 \right| \right\}$ ;
  - 4: **Regresar**  $a, k$  y  $\tau$
- 

#### 4.4 Proposición principal: desempeño de un sistema de Euler-Lagrange.

En las secciones anteriores se asientan los preámbulos fundamentales para establecer la proposición principal de este trabajo de investigación. El objetivo de esta proposición radica en controlar un sistema Euler-Lagrange completamente actuado de tal forma que realice un seguimiento de trayectoria en un escenario realista. Es decir, contemplando perturbaciones externas e incertidumbres en los parámetros del sistema. Además, se desea que el sistema logre un desempeño similar al prediseñado, mediante un controlador que sea fácil de implementar.

**Proposición 4.3** Considere un sistema de Euler-Lagrange de  $n$  grados de libertad, con velocidad  $\dot{q}$  acotada y completamente actuado, descrito por la ecuación (4.1); sean  $q_r$  una señal de referencia,  $d$  la perturbación total del sistema definida por

$$d := p - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) \quad (4.44)$$

y la ley de estimación retardada  $\widehat{d}(t; \tau)$  definida como:

$$\widehat{d}(t; \tau) := M(q_\tau)\ddot{q}_\tau - u_\tau. \quad (4.45)$$

Entonces, la siguiente ley de control

$$u = -M(q) \left( K_p \tilde{q} + K_d \dot{\tilde{q}} - \ddot{q}_r \right) - \widehat{d}(t; \tau), \quad (4.46)$$

resuelve el PSA para  $q_0$  con los límites

$$0 < \frac{\tau\sqrt{n}}{a^2k} \|M^{-1}(q)\dot{d}\|_\infty \leq \epsilon_1 \quad y \quad 0 < \frac{2\tau\sqrt{n}}{a(k+1)} \|M^{-1}(q)\dot{d}\|_\infty \leq \epsilon_2, \quad (4.47)$$

si las matrices  $K_p$  y  $K_d$  son elegidas de la siguiente manera:

$$K_p := a^2kI_3, \quad (4.48)$$

$$K_d := a(k+1)I_3, \quad (4.49)$$

donde  $\tau > 0$ ,  $k > 1$  y  $a > 0$ .

*Demostración.* Primero, observe que para  $t \geq \tau$ , se cumple la siguiente relación:

$$\begin{aligned} u_\tau + p_\tau &= M(q_\tau)\ddot{q}_\tau + C(q_\tau, \dot{q}_\tau)\dot{q}_\tau + g(q_\tau), \\ \Rightarrow u_\tau &= M(q_\tau)\ddot{q}_\tau + C(q_\tau, \dot{q}_\tau)\dot{q}_\tau + g(q_\tau) - p_\tau. \end{aligned} \quad (4.50)$$

A continuación, sustituyendo el controlador propuesto  $u$  en (4.1) se obtiene:

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) &= u_\tau - M(q_\tau)\ddot{q}_\tau + p \\ &\quad - M(q)(k_p\tilde{q} + k_d\dot{\tilde{q}} - \ddot{q}_r). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Sustituyendo (4.50) en (4.51), resulta:

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} &= C(q_\tau, \dot{q}_\tau)\dot{q}_\tau + g(q_\tau) - p_\tau + p - C(q, \dot{q})\dot{q} \\ &\quad - M(q) \left( k_p\tilde{q} + k_d\dot{\tilde{q}} - \ddot{q}_r \right) - g(q). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Ahora, haciendo uso de la ecuación (4.45) y agrupando la perturbación  $\mathbf{p}$ , el vector de Coriolis  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  y el vector de gravedad  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ , se tiene que el sistema en lazo cerrado se reescribe como

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + k_d \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + k_p \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) (\mathbf{d} - \mathbf{d}_\tau). \quad (4.53)$$

Por definición, es evidente que  $\mathbf{M}^{-1}$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  están acotados. Por lo que al invocar la hipótesis de acotación impuesta sobre  $\dot{\mathbf{q}}$ , se concluye que el vector  $\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) (\mathbf{d} - \mathbf{d}_\tau)$  también se mantiene acotado. Bajo estas consideraciones, se sigue que el sistema (4.53) es ISS. Para finalizar, esta última ecuación se desacopla en  $n$  ecuaciones con la estructura del sistema (4.15); teniendo en cuenta esta observación, una sencilla aplicación de la **Proposición 4.2** completa la demostración. ■

#### Resumen del Capítulo 4.

El objetivo principal del capítulo 4 es desarrollar un controlador que pueda resolver el problema de seguimiento de trayectoria acotada (PSA) en un sistema Euler-Lagrange completamente actuado.

El capítulo presenta el primer resultado obtenido en esta investigación, el cual se utiliza para formular la proposición principal de la tesis. La primera proposición se centra en resolver el PSA para la trayectoria de referencia  $\mathbf{q}_r$ , demostrando la estabilidad ISS del error de seguimiento  $\tilde{\mathbf{q}}$  y de su derivada  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$  en un sistema lineal escalar e invariante en el tiempo de segundo orden, incluso en presencia de una perturbación externa desconocida pero acotada y con incertidumbre en los parámetros  $A_1$  y  $A_0$ .

A continuación, se plantea una segunda proposición preliminar aplicada nuevamente a sistemas lineales escalares e invariantes en el tiempo de segundo orden. El objetivo de esta proposición es resolver el PSA, pero ahora enfocado en la variable de posición nominal  $\mathbf{q}_0$ . Se busca que la posición del sistema de segundo orden  $\mathbf{q}$  se comporte de manera aproximada a la posición nominal  $\mathbf{q}_0$ , que se puede diseñar considerando condiciones iniciales y las constantes  $a$  y  $k$ , para cumplir con ciertos criterios de desempeño preestablecidos.

Finalmente, se extienden los resultados obtenidos a los sistemas Euler-Lagrange. El objetivo de esta proposición es controlar un sistema Euler-Lagrange completamente actuado de manera que pueda realizar un seguimiento de trayectoria en un escenario realista, teniendo en cuenta perturbaciones externas e incertidumbres en los parámetros del sistema. Además, se desea que el sistema alcance un desempeño similar al prediseñado, utilizando un controlador que sea fácil de implementar.





## 5. Ejemplos numéricos: sistemas completamente actuados.

### Índice

---

<b>5.1</b>	<b>Sistemas de segundo orden.</b>	<b>59</b>
5.1.1	Ejemplo 5.1: Regulación bajo incertidumbres paramétricas. . . . .	60
5.1.2	Ejemplo 5.2: Seguimiento de trayectoria bajo incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas. . . . .	64
5.1.3	Ejemplo 5.3: Observador de Luenberger. . . . .	67
<b>5.2</b>	<b>Sistemas no lineales.</b>	<b>71</b>
5.2.1	Ejemplo 5.4: El robot tipo RR. . . . .	71
5.2.2	Ejemplo 5.5: El dron tipo tilt-rotor. . . . .	74

---

### 5.1 Sistemas de segundo orden.

En esta sección se analiza el desempeño del controlador de la **Proposición 4.2** para una familia de sistemas lineales e invariantes en el tiempo de segundo orden, donde todos los sistemas dinámicos miembros de esta familia tienen la estructura de la ecuación (4.2) y únicamente se diferencian por el valor de sus parámetros. Para ello, se realizan tres ejemplos numéricos, el primero de ellos

consiste en realizar una tarea de regulación de posición sin perturbaciones externas y donde, además, se desconoce el valor exacto de los parámetros relacionados con la posición y la velocidad del sistema, es decir, los parámetros  $A_0$  y  $A_1$ . En el segundo ejemplo numérico se vuelve a probar la eficiencia del controlador propuesto para una familia de sistemas lineales de segundo orden pero ahora para una tarea de seguimiento de trayectoria en presencia de una perturbación externa desconocida para el controlador. Para poder resolver estos dos problemas, y de acuerdo a lo establecido en el **Capítulo 4**, todos los parámetros  $A_{0i}$  y  $A_{1i}$  del  $i$ -ésimo sistema dinámico están acotados en magnitud por las constantes de diseño  $\bar{A}_0$  y  $\bar{A}_1$ , respectivamente. Además, el coeficiente de la aceleración  $A_2$  se considera unitario para toda la familia de sistemas dinámicos que se están contemplando. En un tercer ejemplo numérico, se explora la idea de aplicar un observador de Luenberger con la intención de quitar el sensor de velocidad del sistema. Por ello, se procede a diseñar un controlador en lazo cerrado con esta estructura para el observador, demostrando así su estabilidad y desempeño ante errores paramétricos y perturbaciones externas. Todos los ejemplos numéricos son resueltos paso a paso, de tal forma que se explica el porqué de cada ganancia de control y el desempeño esperado.

### 5.1.1 Ejemplo 5.1: Regulación bajo incertidumbres paramétricas.

**Ejemplo 5.1** Resuelva el PSA para  $q_0$ , siendo las cotas  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  menores o iguales que 0.05, el tiempo de establecimiento  $T_s \approx 2$  segundos y siendo la señal de referencia una entrada de escalón unitario. Además, las ganancias del controlador deben ser las mismas sin importar a qué miembro de la familia de sistemas dinámicos SISO de segundo orden controle. Los elementos de la familia tienen la forma del sistema (4.2), donde la  $i$ -ésima perturbación externa  $p_i = 0$  y los parámetros

$$A_{0i}, A_{1i} \in \{-100, -95, \dots, 0, \dots, 95, 100\} \quad \text{y} \quad A_{2i} = 2. \quad (5.1)$$

Donde las condiciones iniciales de todos los miembros de la familia también son nulas.

Para resolver este ejemplo se hace uso del controlador de la **Proposición 4.2** el cual se define por las constantes de control  $a, k$  y  $\tau$ . En donde las primeras dos constantes del controlador definen el comportamiento de la solución nominal,

Sección 5.1.1. Ejemplo 5.1: Regulación bajo incertidumbres paramétricas.

mientras que el retardo  $\tau$  establece la atenuación de la perturbación total del sistema. Por ello, para el cálculo de la primera constante del controlador se utiliza la relación con el tiempo de establecimiento, definida como

$$a \approx \frac{4}{T_s} = 2. \quad (5.2)$$

Ahora, dado que para este problema  $\bar{A}_0 = \bar{A}_1 = 100$ , en conjunto con la restricción (4.29), se elige la segunda constante del controlador como  $k = 2$ . Por último, para el cálculo del retardo se requiere establecer el máximo valor que puede tener  $\dot{d}$ . Dado que el problema no establece esta cota, la cual se puede definir a partir de las limitaciones físicas del sistema, se realiza una primera propuesta para esta cota en función de la posición y velocidad nominal, descritas por las ecuaciones (4.6) y (4.7), respectivamente. Después, se procedería a probar el controlador y de no resolverse el problema con esta cota de la perturbación, se volvería a hacer el análisis pero esta vez con una segunda perturbación propuesta, la cual es definida por los datos que obtenga la función  $\hat{d}$  del primer intento. Bajo estos términos, se tiene que la primera propuesta de la derivada de la perturbación está acotada en magnitud por

$$\|\dot{d}\|_\infty = \bar{A}_1 \|\ddot{q}_0\|_\infty + \bar{A}_0 \|\dot{q}_0\|_\infty \quad (5.3)$$

$$= \bar{A}_1 \ddot{q}_0(0) + \bar{A}_0 \dot{q}_0(0) \quad (5.4)$$

$$= 200. \quad (5.5)$$

Por lo que si se elige

$$\tau = 1.5 \text{ ms} \quad (5.6)$$

se cumple que

$$\epsilon_1 = \frac{\tau \|\dot{d}\|_\infty}{A_2 k_p} = 0.0187 \quad (5.7)$$

y

$$\epsilon_2 = \frac{2\tau \|\dot{d}\|_\infty}{A_2 k_d} = 0.05, \quad (5.8)$$

son menores que el error máximo permitido de 0.05 unidades. El **Algoritmo 1** resume todo el procedimiento utilizado para encontrar estas ganancias, mientras que la Tabla 5.1 muestra el valor de estos resultados.

Parámetros del $i$ -ésimo sistema		
$A_{2i} = 2$	$A_{1i}, A_{2i} \in \{-100, -95, \dots, 0, \dots, 95, 100\}$	
Ganancias del controlador		
$a = 2$	$k = 2$	$\tau = 1.5 \text{ ms}$
Cotas del error ( $\leq 0.05$ )		
$\epsilon_1 = 0.0187$	$\epsilon_2 = 0.05$	
Perturbación externa del $i$ -ésimo sistema		
$p_i = 0$		

Tabla 5.1: Parámetros del Ejemplo 5.1.

La Figura 5.1 ilustra los límites superior e inferior de la posición para los 1681 sistemas dinámicos simulados. Estos límites cumplen la desigualdad

$$q_0 - \epsilon_1 \leq q_i \leq q_0 + \epsilon_1, \quad (5.9)$$

donde  $q_0$  es la posición nominal y  $\epsilon_1$  representa un margen de error. Esta figura proporciona una visión clara de los rangos en los que se encuentran las posiciones de los sistemas y cómo se mantienen dentro de las cotas previamente calculadas.

La Figura 5.1 (Inferior) exhibe los límites de velocidad para la familia completa de sistemas analizados en el problema. Estos límites están definidos por la desigualdad

$$\dot{q}_0 - \epsilon_2 \leq \dot{q}_i \leq \dot{q}_0 + \epsilon_2, \quad (5.10)$$

donde  $\dot{q}_0$  es la velocidad nominal y  $\epsilon_2$  representa un margen de error para estas velocidades. Esta figura proporciona información valiosa sobre los rangos en los que se encuentran las velocidades de los sistemas y los límites que pueden alcanzar.

Finalmente, la Figura 5.2 representa el esfuerzo de control utilizado en cada una de las simulaciones realizadas en los 1681 sistemas dinámicos. Es interesante destacar que, a pesar de que todos los sistemas utilizaron las mismas ganancias para el controlador, el esfuerzo de control en cada sistema es distinto. Esto se debe a que el controlador estimó una perturbación diferente para cada caso, teniendo en cuenta los cambios en los valores de los parámetros  $A_{0i}$  y  $A_{1i}$ . La figura proporciona una visualización clara de cómo varía el esfuerzo de control en función de los

Sección 5.1.1. Ejemplo 5.1: Regulación bajo incertidumbres paramétricas.

diferentes sistemas dinámicos.

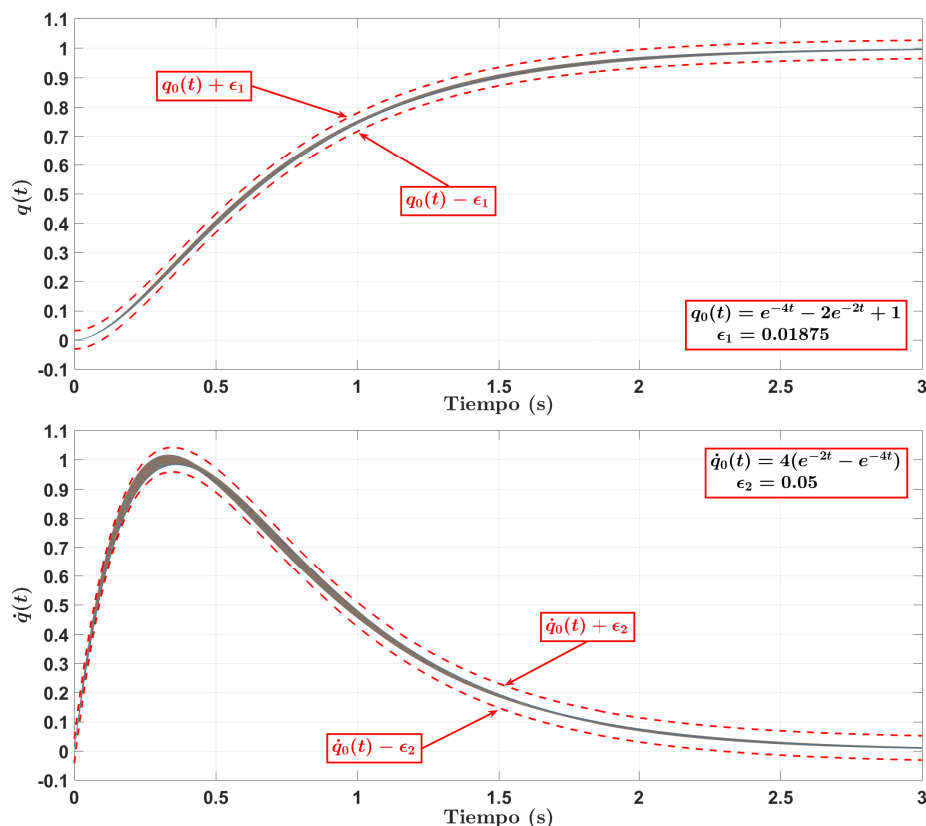


Figura 5.1: Desempeño del controlador para el Ejemplo 5.1. (Superior) Cotas de las posiciones  $q_i$ . (Inferior) Cotas de las velocidades  $\dot{q}_i$ .

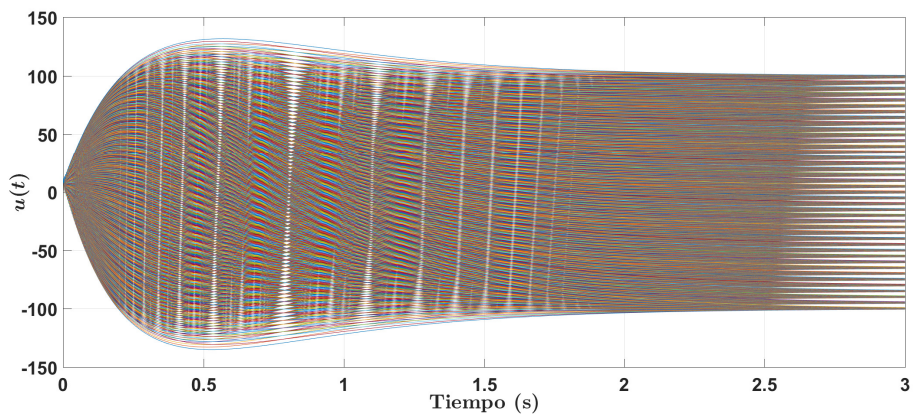


Figura 5.2: Esfuerzos de control para el Ejemplo 5.1.

### 5.1.2 Ejemplo 5.2: Seguimiento de trayectoria bajo incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas.

**Ejemplo 5.2** Resuelva el PSA para  $q_0$ , siendo las cotas  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  menores o iguales que 0.07, el tiempo de establecimiento  $T_s \approx 1$  segundo y la señal de referencia

$$q_r(t) = 5 \sin\left(\frac{1}{2}t\right). \quad (5.11)$$

Además, las ganancias del controlador deben ser las mismas sin importar a qué miembro de la familia de sistemas dinámicos SISO de segundo orden controle. Los elementos de la familia tienen la forma del sistema (4.2), donde la  $i$ -ésima perturbación externa está definida por

$$p_i(t) = \sin^7(175\pi t) \cos^5\left(130\sqrt{2}t\right) + \frac{1}{2} \sin(5 \cos(100t)) \\ + \frac{\sin\left(\frac{2001(t-1)}{2}\right)}{800 \sin\left(\frac{t-1}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{2001(t-10)}{2}\right)}{600 \sin\left(\frac{t-10}{2}\right)} \quad (5.12)$$

y los parámetros

$$A_{0i} \in [-2, 2], A_{1i} \in [-5, 5] \text{ y } A_2 = 1. \quad (5.13)$$

Considere las condiciones iniciales de todos los miembros de la familia nulas.

Al igual que en el Ejemplo 1, el problema se resuelve haciendo uso del controlador de la **Proposición 4.2**. Aplicando nuevamente el **Algoritmo 1** se calculan las constantes  $a$  y  $k$ , las cuales están directamente relacionadas con los parámetros de desempeño, por lo que

$$a \approx \frac{4}{T_s} = 4. \quad (5.14)$$

Ahora, para el Ejemplo 2 se tiene que  $\bar{A}_0 = 2$  y  $\bar{A}_1 = 5$ . Haciendo uso de la restricción (4.29), se elige la segunda constante del controlador como  $k = 2$ . Por último, para el cálculo del retardo se requiere establecer una cota para la derivada de la perturbación total  $\dot{d}$ . Al igual que en el ejemplo anterior, se propone un valor para estas cotas y se prueba el resultado. De no tener el resultado esperado se procederá a modificar estos límites con base en los datos obtenidos en la prueba.

Sección 5.1. Ejemplo 5.2: Seguimiento de trayectoria bajo incertidumbres  
paramétricas y perturbaciones

---

Bajo estos términos, se supone que  $\dot{d}$  está acotada en función de la trayectoria nominal. Esto es,

$$\|\dot{d}\|_\infty = \|\bar{A}_1\ddot{q}_0 + \bar{A}_0\dot{q}_0\|_\infty, \quad (5.15)$$

$$= 60. \quad (5.16)$$

Debido a que la parte Proporcional-Derivativa del controlador atenúa los efectos reflejados en la posición y velocidad del sistema de cualquier perturbación con una alta frecuencia, la perturbación externa no es tomada en cuenta para el cálculo de  $\|\dot{d}\|_\infty$ . Del paso 3 del **Algoritmo 1**, se define el valor del retardo  $\tau = 7$  *ms*. Bajo estas condiciones se tiene que las cotas del error de seguimiento de posición y velocidad están dadas por

$$\epsilon_1 = \frac{\tau \|\dot{d}\|_\infty}{A_2 k_p} = 0.0131 \quad (5.17)$$

y

$$\epsilon_2 = \frac{2\tau \|\dot{d}\|_\infty}{A_2 k_d} = 0.07, \quad (5.18)$$

respectivamente. La Figura 5.3 resume el comportamiento de esta familia de sistemas dinámicos, con diferentes valores de  $A_{0i}$  y  $A_{1i}$  de tal manera que se prueba un mismo controlador ante una variación de sistemas inestables, subamortiguados, críticamente amortiguados y sobreamortiguados. En ambas figuras se puede observar que a pesar del desconocimiento de algunos parámetros y en presencia de perturbaciones externas, el esquema de control propuesto permite preservar el rendimiento especificado. La Figura 5.4 muestra los distintos esfuerzos de control utilizados para cada miembro de la familia. Finalmente la Tabla 5.2 muestra los parámetros utilizados para el segundo ejemplo numérico.

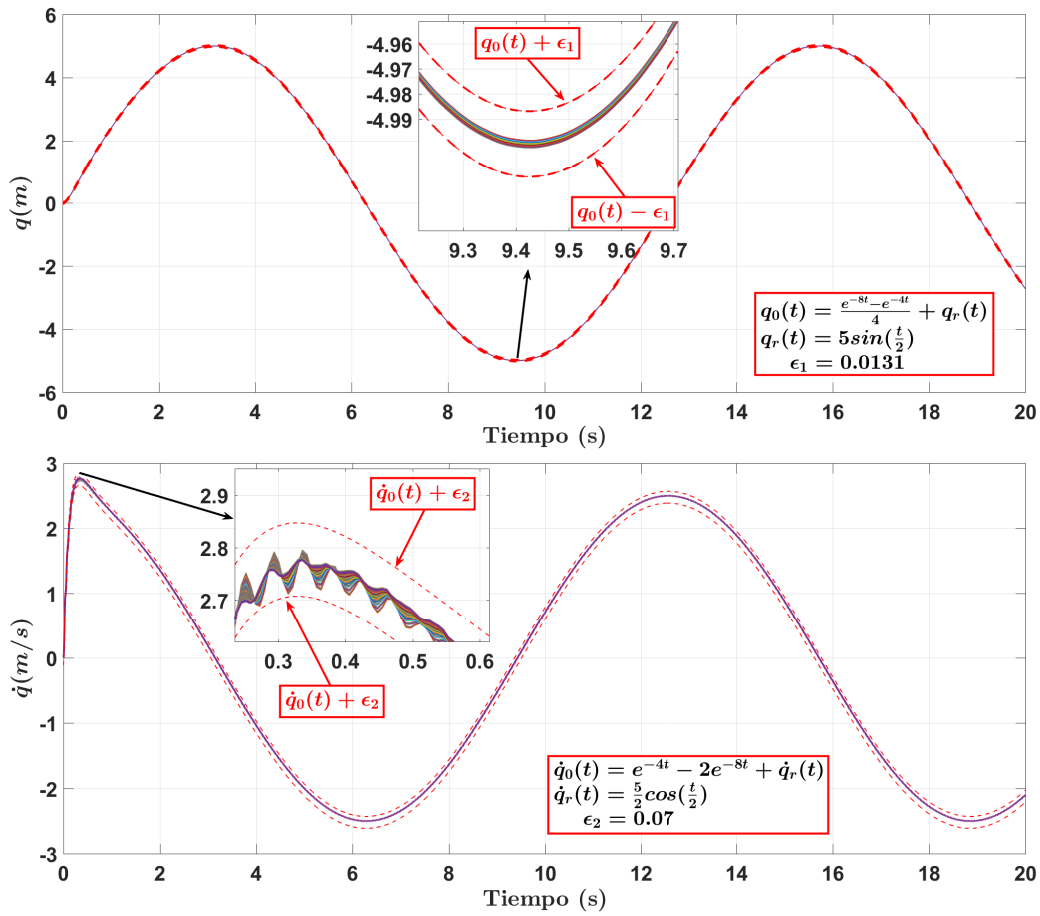


Figura 5.3: Desempeño del controlador para el Ejemplo 5.2. (Superior) Cotas de las posiciones  $q_i$ . (Inferior) Cotas de las velocidades  $\dot{q}_i$ .

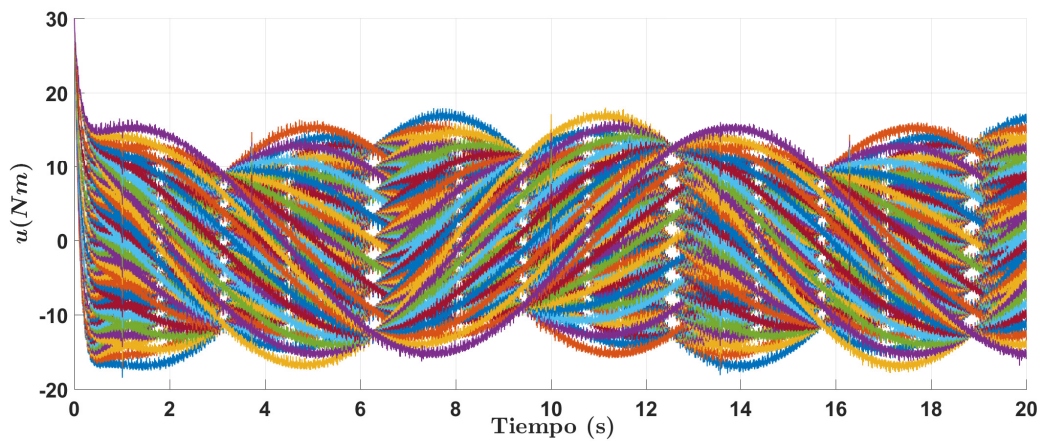


Figura 5.4: Esfuerzo de control para el Ejemplo 5.2.



Sección 5.1.3. Ejemplo 5.3: Observador de Luenberger.

Parámetros del $i$ -ésimo sistema		
$A_{2i} = 1$	$A_{1i} \in [-5, 5]$	$A_{0i} \in [-2, 2]$
Ganancias del controlador		
$a = 4$	$k = 2$	$\tau = 7 \text{ ms}$
Señal de referencia del $i$ -ésimo sistema		
$q_r(t) = 5 \sin\left(\frac{1}{2}t\right)$		
Cotas del error ( $\leq 0.07$ )		
$\epsilon_1 = 0.0131$	$\epsilon_2 = 0.07$	
Perturbación externa del $i$ -ésimo sistema		
$p(t) = \sin^7(175\pi t) \cos^5\left(130\sqrt{2}t\right) + \frac{1}{2} \sin(5 \cos(100t))$ $+ \frac{\sin\left(\frac{2001(t-1)}{2}\right)}{800 \sin\left(\frac{t-1}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{2001(t-10)}{2}\right)}{600 \sin\left(\frac{t-10}{2}\right)}$		

Tabla 5.2: Parámetros del Ejemplo 5.2.

**5.1.3 Ejemplo 5.3: Observador de Luenberger.**

**Ejemplo 5.3** Resuelva el PSA para  $q_0$ , aplicado a un sistema de segundo orden definido por la ecuación (4.2) donde

$$A_2 = 2, A_1 = -1 \text{ y } A_0 = 1. \quad (5.19)$$

Considere las cotas  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  menores o iguales que 0.1, el tiempo de establecimiento  $T_s \approx 4$  segundos, la señal de referencia como un escalón unitario, con condiciones iniciales nulas y una perturbación externa definida como

$$p = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 1.5 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right). \quad (5.20)$$

Además, defina un observador de Luenberger para estimar el estado de velocidad del sistema.

De forma similar a los ejemplos anteriores, se utiliza el **Algoritmo 1** para

encontrar las ganancias del controlador propuesto. Las cuales son,

$$a = 1, \quad (5.21)$$

$$k = 3, \quad (5.22)$$

$$\tau = 50 \text{ ms}. \quad (5.23)$$

Para el desarrollo del observador de Luenberger se considera que el sistema 4.2 en lazo cerrado con el controlador propuesto se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_p & -k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_p q_r \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Por lo tanto, se propone un observador de Luenberger con la siguiente dinámica

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_p & -k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ h_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q - z \\ \dot{q} - \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_p q_r \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Sustrayendo la ecuación (5.25) de la ecuación (5.24) se obtiene la dinámica del error del observador. Esto es,

$$\begin{bmatrix} \dot{q} - \dot{z} \\ \ddot{q} - \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_1 & 1 \\ -h_2 - k_p & -k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q - z \\ \dot{q} - \dot{z} \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Por lo que si se definen

$$0 < h_1$$

y

$$-k_p - h_1 k_d < 0 < h_2,$$

el error de observación es asintóticamente estable.

La figura (5.5) muestra el rendimiento del controlador propuesto en el que la velocidad del sistema se estima mediante la retroalimentación del observador de Luenberger. Las ganancias del controlador se diseñaron de tal manera que la posición y la velocidad no salgan de una banda de 0.2 de ancho con respecto

a la trayectoria nominal  $q_0$  y su derivada  $\dot{q}_0$ , respectivamente. Así mismo, se observa que el sistema cumple con el comportamiento esperado a pesar de no conocer la mayoría de los parámetros del sistema y estar expuesto a perturbaciones desconocidas.

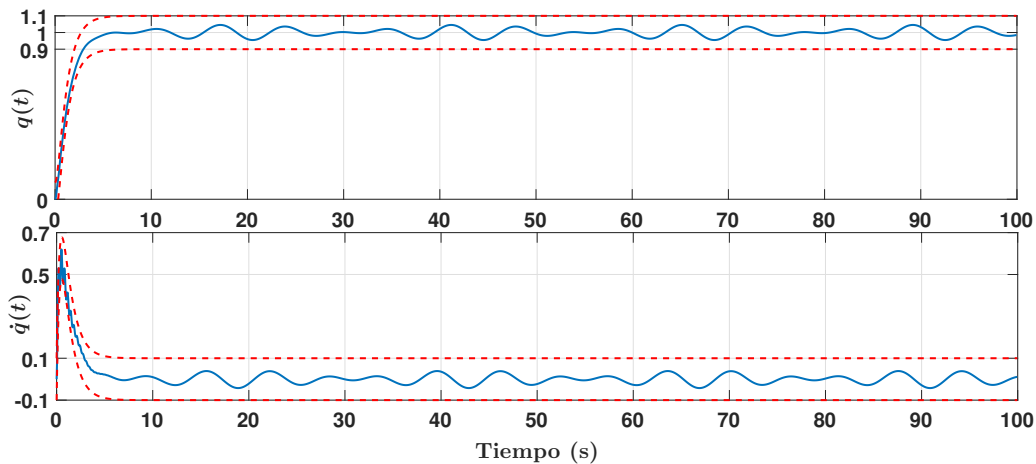


Figura 5.5: Desempeño del controlador propuesto usando el observador Luenberger (Ejemplo 5.3).

De manera similar a [40] y [41], al utilizar la ley de estimación  $\hat{d}(t; \tau)$ , es posible estimar la perturbación total resultante que genera la dinámica desconocida y la fuerza externa. La figura 5.6 muestra la comparación de la perturbación externa, en líneas punteadas, y la estimación de la perturbación total, en líneas continuas. La diferencia entre los dos se debe a la dinámica no modelada, que después de que el observador y el sistema se estabilizan es aproximadamente  $A_0q$ . La Tabla 5.3 resume los parámetros utilizados en el Ejemplo 5.3.

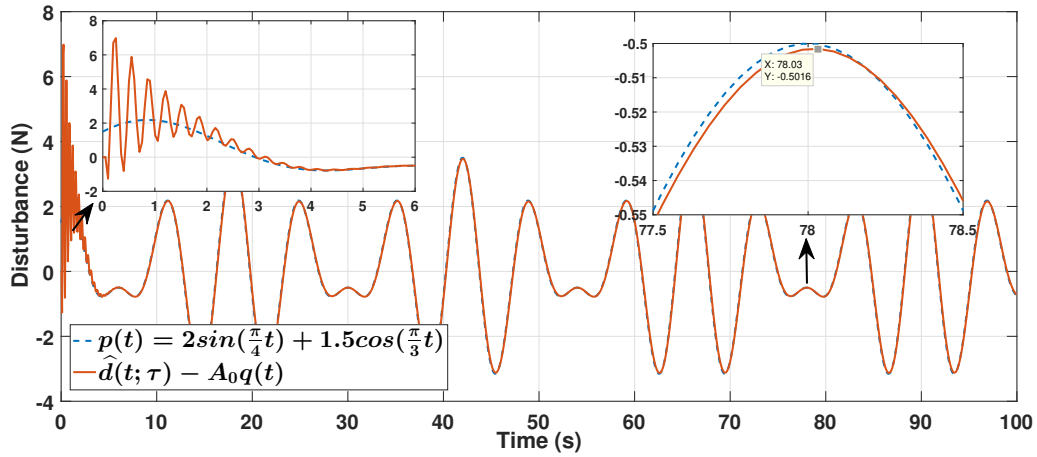


Figura 5.6: Estimación de la perturbación total  $d$  (Ejemplo 5.3).

Parámetros del sistema		
$A_2 = 2$	$A_1 = -1$	$A_0 = 1$
Ganancias del controlador		
$a = 1$	$k = 3$	$\tau = 50\text{ms}$
Ganancias del observador		
$h_1 = h_2 = 1$		
Cotas del error ( $\leq 0.1$ )		
$\epsilon_1 = 0.09$	$\epsilon_2 = 0.07$	
Perturbación externa		
$p = 2 \sin(\frac{\pi}{4}t) + 1.5 \cos(\frac{\pi}{3}t)$		

Tabla 5.3: Parámetros del Ejemplo 5.3.

## 5.2 Sistemas no lineales.

En esta sección se procede a evaluar el desempeño de la **Proposición 4.3** aplicada a sistemas no lineales, más específicamente, a sistemas con una estructura Euler-Lagrange completamente actuados. En el primer ejemplo se muestra cómo la ley de estimación retardada mejora el desempeño de un controlador clásico tipo  $PD$ , aplicado a un robot serial del tipo doble revoluta. Para este ejemplo, se proponen condiciones de perturbaciones externas y variaciones en los parámetros del robot de tal forma que su punto de operación esté muy alejado de donde fue sintonizado. En un segundo ejemplo numérico se muestra el desempeño del controlador propuesto para una tarea de transporte y aplicación de pesticida mediante un dron tipo tilt-rotor. Además, utilizando la ley de estimación retardada, es posible estimar cuánto pesticida se tiene para cada instante de tiempo.

### 5.2.1 Ejemplo 5.4: El robot tipo RR.

**Ejemplo 5.4** Proponga una ley de estimación retardada, definida en la **Proposición 4.3**, de tal forma que se reduzca en al menos 50 veces el error de seguimiento de la posición y de la velocidad de un controlador clásico  $PD$  aplicado al sistema robótico tipo RR definido por las matrices 3.44, 3.9 y 3.53. Sean las ganancias del controlador

$$k_p = \begin{bmatrix} 128 & 0 \\ 0 & 128 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad k_d = \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 24 \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

la trayectoria de referencia

$$\theta_r = 30 \begin{bmatrix} \sin(10t) \\ \cos(10t) \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

las perturbaciones externas

$$p = 50 \begin{bmatrix} \sin + \sin(5t) + \sin(10t) + \sin(20t) \\ \sin \cos(11t^3) \sin(13t^5) \cos(17t^7) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

ver Figura 5.7. Además, se considera que el valor de los parámetros estimados  $\hat{p}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) del sistema son la mitad de su valor real, ver Tabla 5.4.

Parámetros físicos			
$l_1 = 0.4$ m	$l_2 = 0.6$ m	$m_1 = 4$ kg	$m_2 = 2$ kg
Parámetros definidos ( $\text{kgm}^2$ )			
$p_1 = 1.68$	$p_2 = 0.48$	$p_3 = 0.72$	
Parámetros estimados ( $\text{kgm}^2$ )			
$\hat{p}_1 = 0.84$	$\hat{p}_2 = 0.24$	$\hat{p}_3 = 0.36$	

Tabla 5.4: Parámetros del Ejemplo 5.4.

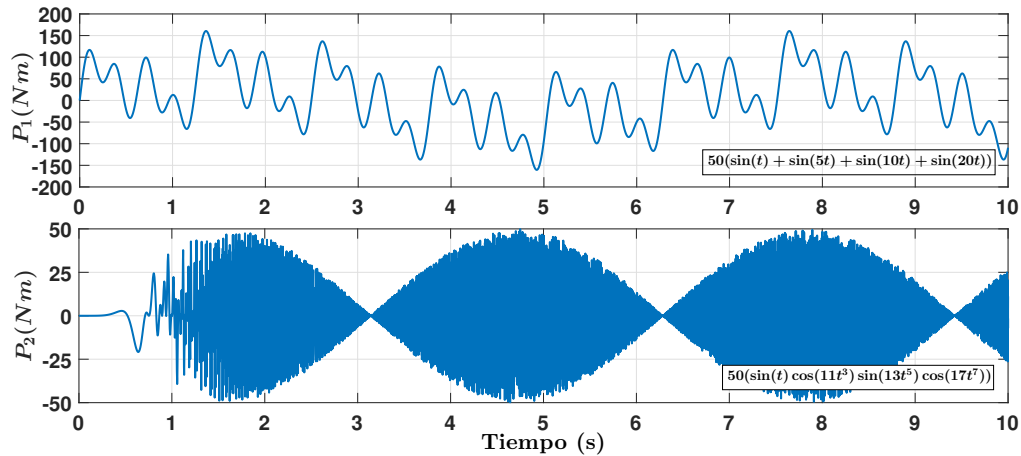


Figura 5.7: Perturbaciones externas del Ejemplo 5.4.

De la definición de las ganancias del controlador se tiene que  $a = 8$  y  $k = 2$ , por lo que se espera que los estados alcancen a sus trayectorias en un tiempo de establecimiento de medio segundo con una respuesta sobreamortiguada. Por otro lado, para definir por completo la ley de estimación retardada sólo basta con proponer un retardo adecuado para la ecuación (4.45). Para ello se desprecia el término de alta frecuencia de la perturbación, la cual es atenuada por la parte Proporcional-Derivativa del controlador. Por lo que el retardo debe satisfacer

$$\tau \leq \frac{\|P_1\|_\infty}{50\sqrt{2}\|\dot{P}_1\|_\infty} = 1.28 \text{ ms.} \quad (5.30)$$

	$\ \tilde{\theta}\ _{\infty}$	IAE	ISE	ITSE	ITAE	$\ u\ _2^2$
$PD$	157.58	222.18	215.11	349.16	35004.08	13691.53
$PD + \hat{d}(t; \tau)$	1.47	1.49	1.10	2.12	1.48	26103.23

Tabla 5.5: Índices de desempeño del Ejemplo 5.4.

Para contrastar el rendimiento del sistema, la Figura 5.9 muestra ambas respuestas. Específicamente, los primeros 3 segundos corresponden al controlador clásico  $PD$ ; el tiempo restante corresponde al esquema propuesto. De tal figura, se puede ver que tan pronto como el esquema propuesto actúa,  $\theta \rightarrow \theta_r$ . De la Figura 5.9 (Inferior) se puede observar que el esquema propuesto permite lograr una atenuación de al menos 50 veces. La Figura 5.8 muestra los esfuerzos de control para ambos esquemas. Nótese que, a pesar de que el controlador propuesto reduce considerablemente el error de seguimiento, las señales de control de ambos controladores son similares. Con la diferencia de que la señal  $u_2$  presenta componentes de alta frecuencia producidos por la perturbación de alta frecuencia, definida en la ecuación (5.29). Finalmente, la tabla 5.5 resume los índices de rendimiento de ambos controladores, definidos en el **Capítulo 2**. Para hacer una comparación justa, se toman los últimos 3 segundos utilizados por cada controlador.

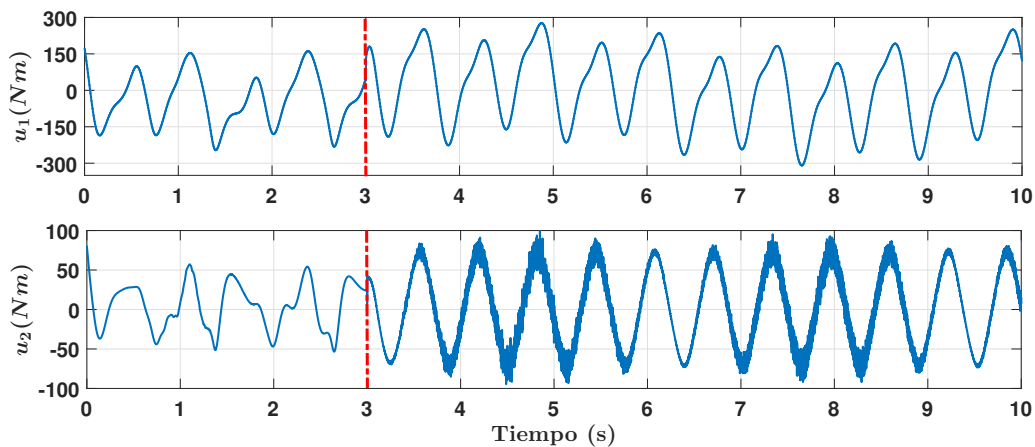


Figura 5.8: Esfuerzos de control del Ejemplo 5.4.

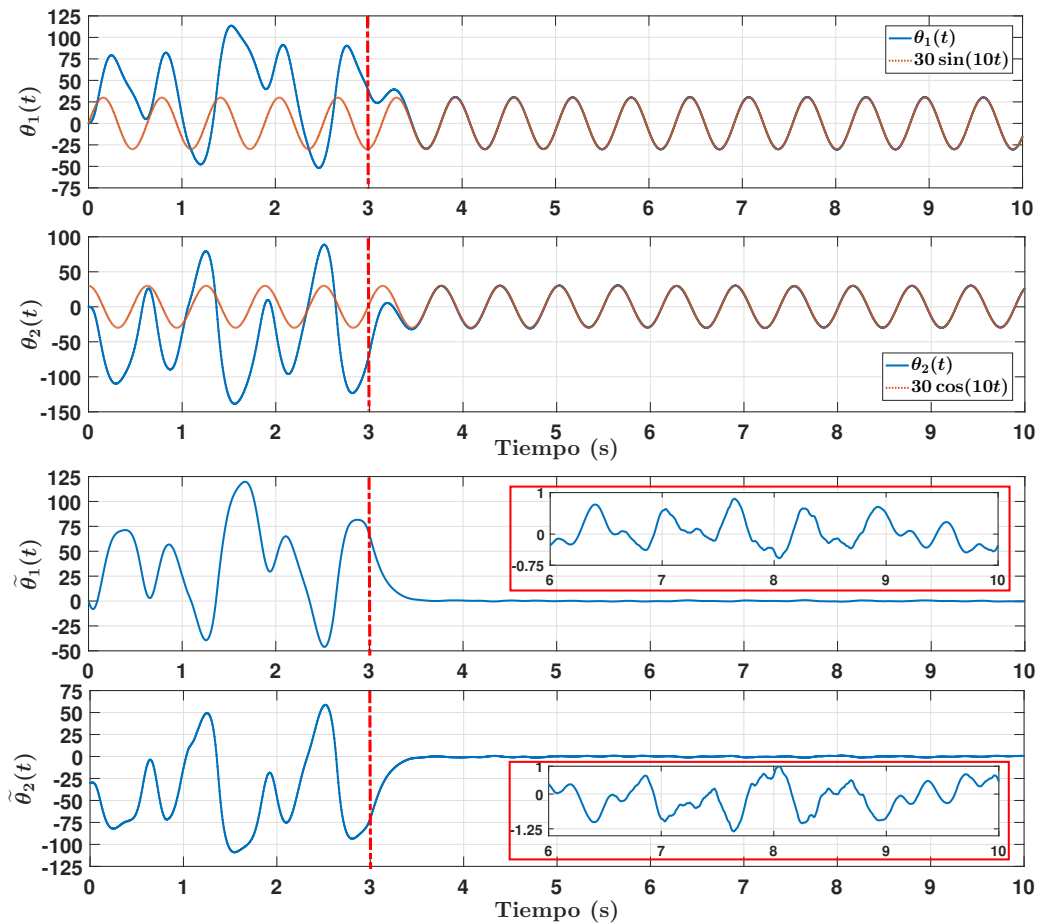


Figura 5.9: Desempeño de ambos controladores (Ejemplo 5.4).  
 (Superior) Seguimiento de trayectorias. (Inferior) Errores de seguimiento.

### 5.2.2 Ejemplo 5.5: El dron tipo tilt-rotor.

**Ejemplo 5.5** Diseñe una estructura de control para un dron tipo tilt-rotor el cual debe de liberar, durante 5 segundos, 10 kg de pesticida, empezando la liberación del pesticida 5 segundos después del despegue del dron. Se desea que el dron tenga un tiempo de establecimiento aproximado de 2 segundos y un error de seguimiento en el eje Z menor a un centímetro a partir de la liberación del pesticida. Los parámetros y señales de referencia son descritos en la Tabla 5.6.



Parámetros del dron tilt-rotor (kg y kgm <sup>2</sup> )			
$m_t = 10$	$I_{xx} = 0.0015$	$I_{yy} = 0.0015$	$I_{zz} = 0.0001$
Señales de referencia (m)			
$x_r = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$	$y_r = \sin\left(\frac{t}{2}\right)$	$z_r = t + 1$	
Perturbación (kg)			
$p_z = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 5 \\ 2t - 10 & \text{si } 5 \leq t \leq 10 \\ 10 & \text{si } 10 < t \end{cases}$			

Tabla 5.6: Parámetros del Ejemplo 5.5.

En la **sección 3.3.3** se describe la dinámica del dron tipo tilt-rotor y se propone una estructura de control para que éste se pueda considerar como un sistema Euler-Lagrange completamente actuado. Por lo que se tiene que establecer un controlador con la estructura de la **Proposición 4.3** para el subsistema de rotación y otro para el subsistema de traslación. Para este ejemplo, las ganancias de ambos controladores serán idénticas. De forma similar a los ejemplos anteriores, se establece la ganancia

$$a = 2 \quad \text{y} \quad k = 3 \quad (5.31)$$

para cumplir con el desempeño deseado. Por lo que la ganancia proporcional y la derivativa se definen como  $k_p = 12$  y  $k_d = 8$ , respectivamente. Mientras que el retardo del controlador debe satisfacer

$$\tau < \frac{m\epsilon_1 k_p}{g\|\dot{p}\|_\infty} = 0.0612 \text{ s}. \quad (5.32)$$

Es por ello que se propone un retardo para la ley de estimación de  $\tau = 60 \text{ ms}$ . Esto permite definir el subcontrol de traslación como

$$u_\xi = -10(12\tilde{\xi} + 8\dot{\tilde{\xi}} - \ddot{\xi}_r + \ddot{\xi}(t - \tau)) + u_\xi(t - \tau) \quad (5.33)$$

y el subcontrol de orientación como

$$u_\eta = -M_\eta(\eta)(12\tilde{\eta} + 8\dot{\tilde{\eta}} - \ddot{\eta}_r) - M_\eta(\eta_\tau)\ddot{\eta}(t - \tau) + u_\eta(t - \tau) \quad (5.34)$$

siendo

$$M_{\eta} = 0.0001 \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

La Figura 5.11 muestra el seguimiento de la trayectoria propuesta para el subsistema de traslación (Superior) y para el seguimiento de señales internas de orientación (Inferior). Mientras que la Figura 5.10 muestra las entradas de control representadas por las fuerzas de empuje, los momentos que estas fuerzas generan y el ángulo de rotación  $\beta$ . En la figura 5.12 se corrobora que el error en la altura del dron no sobrepasa de un centímetro, cuando se empieza a liberar el pesticida, cumpliendo con el objetivo principal. Por último, la Figura 5.13 muestra la estimación de las fuerzas externas aplicada a cada eje de traslación. Se puede observar en los primeros segundos a la perturbación producida por los 20 kg y las fuerzas que producen su aceleración. Una vez estabilizado, se puede distinguir el peso del dron (el cual no fue contemplado en el modelo) y del pesticida, el cual se empieza a reducir en un factor de 2 kg/s, en el intervalo del segundo 5 al 10. Después de ello, sólo se estiman los 10 kg del peso del dron.

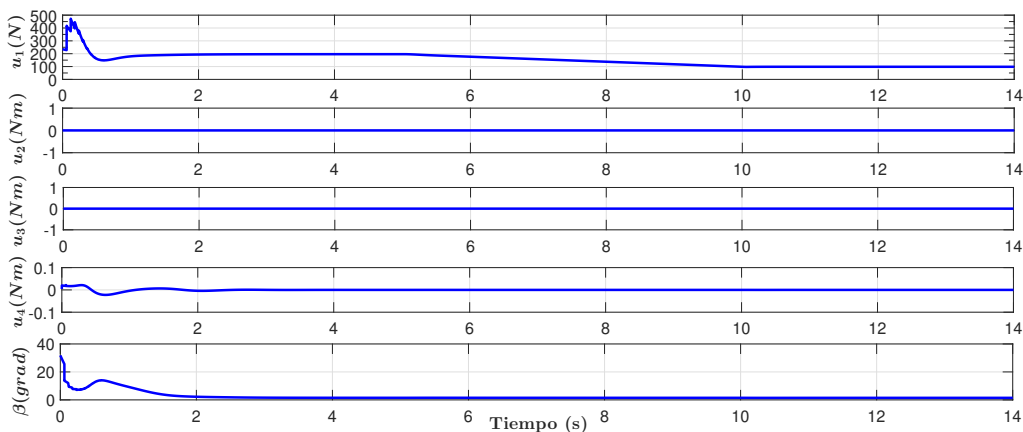


Figura 5.10: Esfuerzos de control del Ejemplo 5.5.

Sección 5.2.2. Ejemplo 5.5: El dron tipo tilt-rotor.

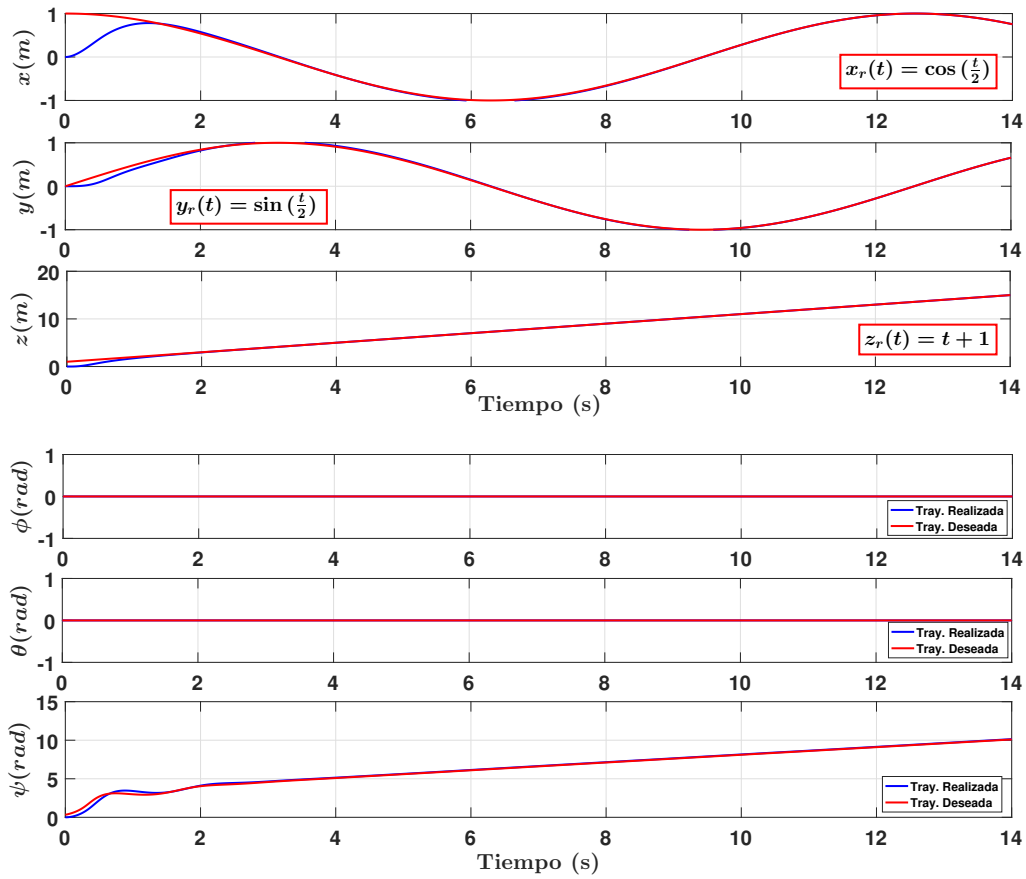


Figura 5.11: Seguimiento de trayectorias (Ejemplo 5.5).  
(Superior) Traslación. (Inferior) Orientación.

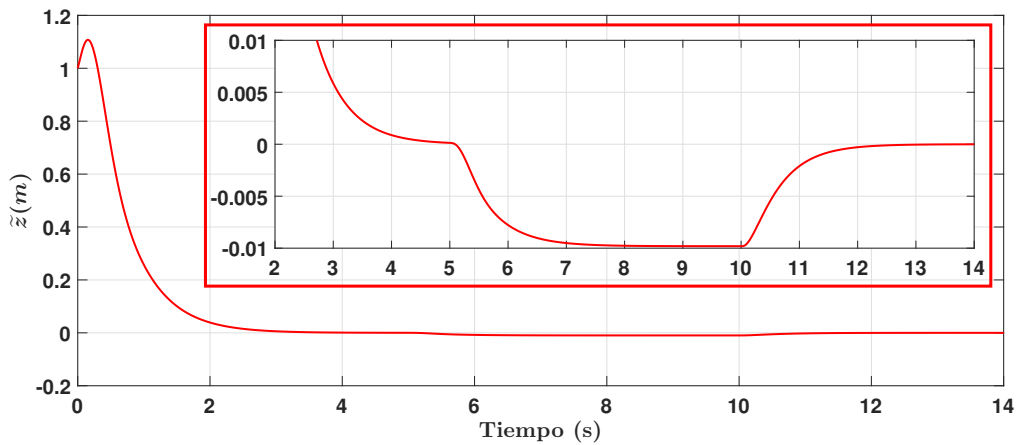


Figura 5.12: Error en el seguimiento de la altura del dron (Ejemplo 5.5).

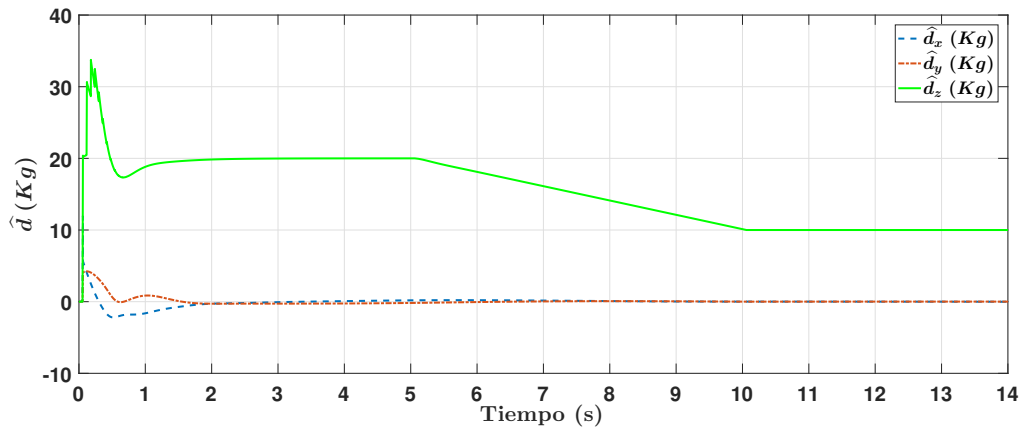


Figura 5.13: Estimación de las perturbaciones externas del Ejemplo 5.5.

### Resumen del Capítulo 5.

En la sección 5.1, se analiza el desempeño del controlador propuesto en la Proposición 4.2 en una familia de sistemas lineales e invariantes en el tiempo de segundo orden. Se realizan tres ejemplos numéricos. En el primer ejemplo, se lleva a cabo una tarea de regulación de posición sin perturbaciones externas, donde se desconoce el valor exacto de los parámetros relacionados con la posición y la velocidad del sistema. En el segundo ejemplo, se prueba la eficiencia del controlador para una tarea de seguimiento de trayectoria en presencia de una perturbación externa desconocida. Todos los parámetros de los sistemas dinámicos están acotados dentro de ciertas constantes de diseño. En el tercer ejemplo, se explora la aplicación de un observador de Luenberger para eliminar el sensor de velocidad del sistema, demostrando su estabilidad y desempeño frente a errores paramétricos y perturbaciones externas.

En la sección 5.2, se evalúa el desempeño de la Proposición 4.3 en sistemas no lineales, específicamente en sistemas Euler-Lagrange completamente actuados. En el primer ejemplo, se muestra cómo la ley de estimación retardada mejora el desempeño de un controlador clásico tipo  $PD$  aplicado a un robot serial de doble revoluta. Se consideran condiciones de perturbaciones externas y variaciones en los parámetros del robot. En el segundo ejemplo, se muestra el desempeño del controlador propuesto en una tarea de transporte y aplicación de pesticida utilizando un dron tipo tilt-rotor. Además, se utiliza la ley de estimación retardada para estimar la cantidad de pesticida en cada instante de tiempo.

En todos los ejemplos numéricos, se detallan paso a paso las ganancias de control utilizadas y se explica el desempeño esperado del sistema.



## 6. Validación experimental.

### Índice

---

<b>6.1</b>	<b>Introducción.</b>	<b>81</b>
<b>6.2</b>	<b>El péndulo inercial.</b>	<b>82</b>
6.2.1	Primera prueba . . . . .	83
6.2.2	Segunda prueba . . . . .	84
<b>6.3</b>	<b>El motor de CD.</b>	<b>85</b>
<b>6.4</b>	<b>Evaluación del controlador comercial MG955 VS el controlador propuesto.</b>	<b>88</b>

---

### 6.1 Introducción.

En este capítulo se implementa el controlador propuesto para distintos tipos de sistemas físicos. Primero, se aplica el controlador en un sistema mecánico tipo péndulo inercial, para después pasar a los sistemas electromecánicos representados por distintos motores de corriente directa. Por último, se realiza una comparativa entre el controlador propuesto contra el servomotor comercial tipo MG955 ante condiciones de operación que los llevan al límite. La idea principal de este capítulo

es probar al controlador en situaciones adversas, e incluso teniendo incertidumbre en el parámetro inercial. Todo esto con la finalidad de ofrecer una solución sencilla, robusta y muy fácil de implementar.

## 6.2 El péndulo inercial.

En esta sección, se lleva a cabo una evaluación experimental del desempeño del controlador propuesto aplicado a un péndulo inercial. Se realizaron dos pruebas de regulación de la inclinación del péndulo. En la primera prueba, no se sometió al sistema a perturbaciones externas, mientras que en la segunda prueba se agregó un peso oscilante que actúa como una gran perturbación para el sistema. El movimiento rotacional del péndulo es generado por la diferencia de dos fuerzas de empuje, originadas por la rotación de dos hélices eléctricamente controladas.

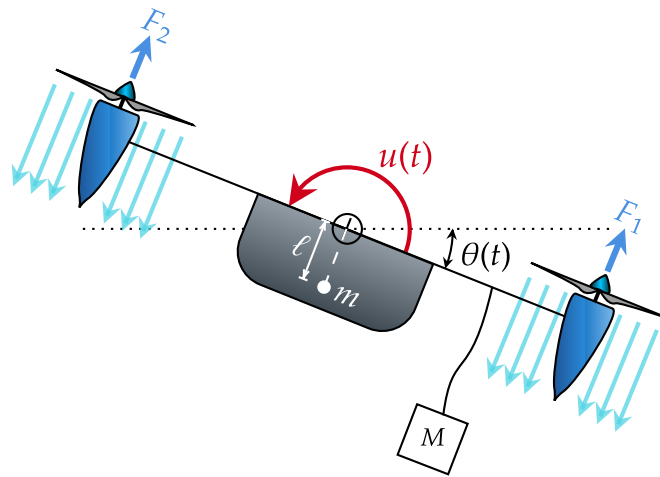


Figura 6.1: Péndulo inercial impulsado por hélices.

La ecuación dinámica que describe el comportamiento del péndulo se obtiene en la **sección 3.3.1** y se representa como:

$$I\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = u + p - \frac{\partial f(\dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}}. \quad (6.1)$$

En esta ecuación, el término que representa el campo gravitacional terrestre, las perturbaciones externas, las fuerzas de fricción y otras dinámicas no modeladas son funciones desconocidas. El único parámetro conocido del sistema es el momento de inercia  $I$ , el cual se obtiene experimentalmente y tiene un valor de



$$I = 0.00154 \text{ Kg m}^2. \quad (6.2)$$

Para el banco de pruebas, se utilizó un conjunto de sensores que consta de un encoder para medir la posición angular y una unidad inercial para detectar la velocidad angular. Utilizando estos sensores, se obtiene la aceleración aplicando una derivada a la velocidad angular, aunque se menciona que esta derivada puede no ser precisa, debido al ruido en los sensores.

### 6.2.1 Primera prueba

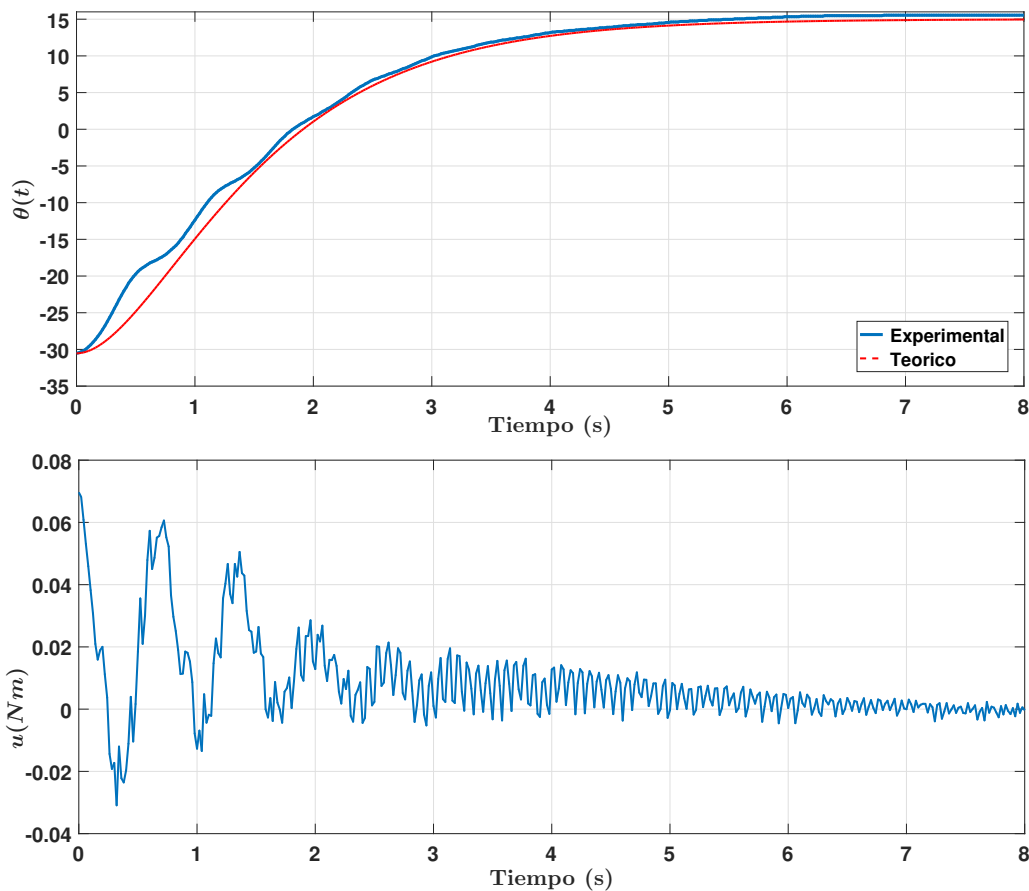


Figura 6.2: Primera prueba aplicada al péndulo inercial.

(Superior) Posición angular con  $\theta_r = 15$  grados. (Inferior) Entrada de control.

La primera prueba tiene como objetivo regular la inclinación del dron a 15 grados (es decir,  $\theta_r = 15^\circ$ ) sin sobre impulso y logrando un tiempo de asentamiento de aproximadamente 4 segundos. Para lograr estos objetivos, se considera a las

constantes del controlador como  $a = 1$ ,  $k = 1.5$  y  $\tau = 20$  ms. Al hacer esto, la Figura 6.2 resume los resultados experimentales de la primera prueba. Específicamente, (Superior) muestra la respuesta de posición angular, donde la línea roja muestra la respuesta deseada y la línea azul la real; (Inferior) representa los esfuerzos de control. Se puede observar que el controlador logra estabilizar la inclinación del sistema en el ángulo deseado, con un error de  $0.5^\circ$ , sin sobretiro y en el tiempo estipulado.

### 6.2.2 Segunda prueba

En la segunda prueba<sup>1</sup> se le añade una masa de 145 gramos mediante una cuerda atada a uno de los brazos del dron a 8 cm desde el eje de rotación del dron, esto con la intención de añadir una perturbación externa desconocida al sistema. Dicha masa se agrega con el objetivo de generar una perturbación oscilatoria, que posteriormente se eliminará drásticamente. Para la segunda prueba se desea que la inclinación del sistema se mantenga a cero grados, no se genere un sobretiro en la etapa transitoria y esta dure menos de 1.5 segundos. Por ello, se considera que  $a = 3$ ,  $k = 2$  y  $\tau = 10$  ms. La inclinación inicial del dron es  $\theta(0) = -65.72^\circ$ . Esta prueba se divide en cuatro fases, como se ve en la Figura 6.3.

La Fase 1 considera los primeros 7.5 s. En esta fase, la tensión del cable varía desde su valor máximo hasta su valor mínimo cero, debido a la aceleración que recibe la carga. La figura 6.3 (Inferior) muestra el comportamiento de la perturbación que tiene una magnitud de  $p = 0.12$  Nm cuando la masa es perpendicular a la horizontal.

En la fase 2, el dron parte de su posición de referencia y se perturba la carga de 145 gramos. Estas perturbaciones son detectadas y atenuadas por el controlador. En la fase 3, con el fin de producir una gran perturbación, la carga se elevó drásticamente. Como se puede observar, el dron vuelve a su posición de referencia al cabo de un segundo y en ese instante la carga se libera por completo provocando una perturbación instantánea.

Finalmente, en la fase 4, la cuerda se cortó, provocando una fuerte perturbación. Sin embargo, incluso en tales circunstancias, el control es capaz de recuperar la inclinación de referencia del péndulo inercial exitosamente.

---

<sup>1</sup>La prueba experimental se puede encontrar en <https://youtu.be/eGhz0fRIywo>

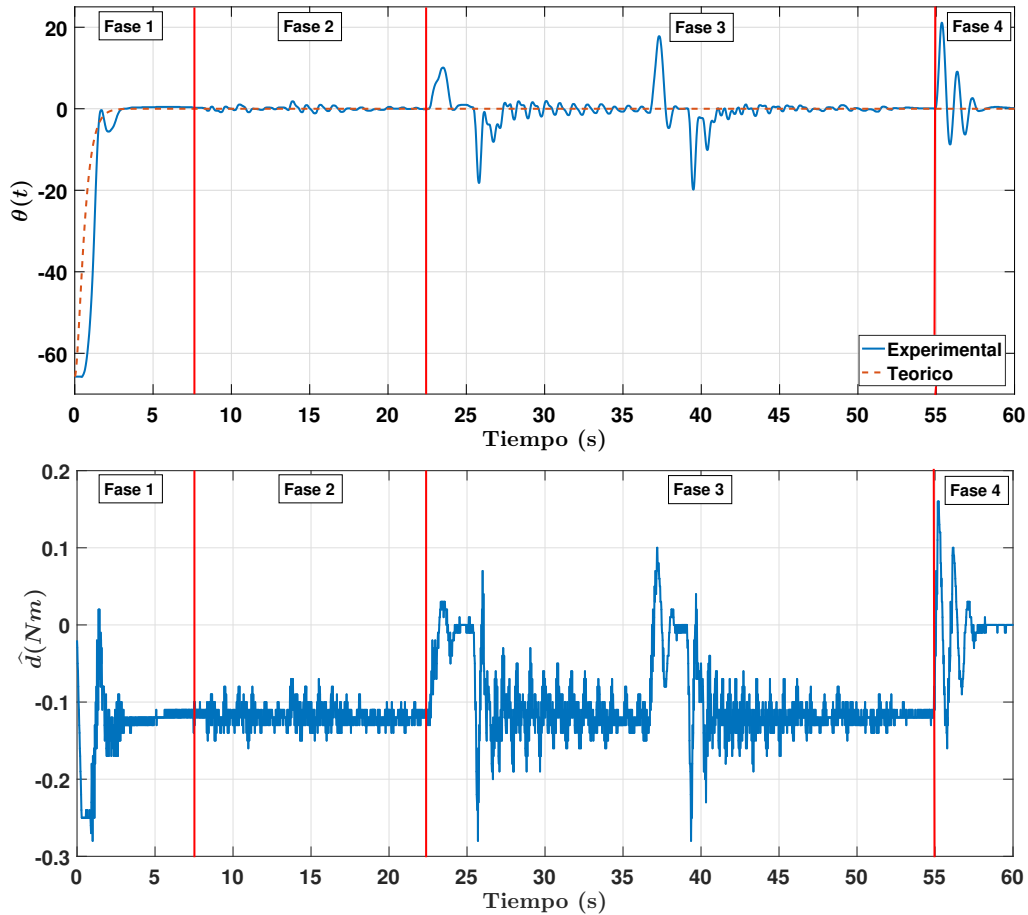


Figura 6.3: Segunda prueba aplicada al péndulo inercial.  
 (Superior) Posición angular  $\theta$ . (Inferior) Estimación de perturbaciones  $\hat{d}$ .

### 6.3 El motor de CD.

En esta sección, se lleva a cabo una validación experimental para evaluar el desempeño del controlador propuesto aplicado a dos motores de CD con características distintas. El primero de ellos es el motor CHW-GW4058-555, un motor de alto par con un voltaje nominal de 12V y una velocidad angular de 144 RPM. El segundo motor es el Crouzet 898100, un motor de alta velocidad que opera a 24V con una velocidad nominal de 4000 RPM. En ambos casos, se utiliza un encoder digital para medir la posición angular del eje del motor, y se obtienen sus derivadas utilizando el método de derivadas sucias. Para realizar la validación, se someten ambos motores a dos conjuntos de pruebas: en la primera serie de pruebas se varía el voltaje de alimentación de 9V a 12V en cuatro experimentos, mientras que en la

segunda serie se realizan cinco experimentos modificando el valor de la inercia estimada del controlador. El objetivo en todos los casos es obtener una respuesta sobre amortiguada con un tiempo de estabilización cercano a los 2 segundos. Para lograr esto, se utilizan las constantes del controlador especificadas en la Tabla 6.1. Cabe destacar que, a pesar de que una de las restricciones del controlador es conocer con precisión todos los parámetros inerciales, se opta por considerar un escenario más realista al tomar en cuenta diferentes valores de inercia para cada motor.

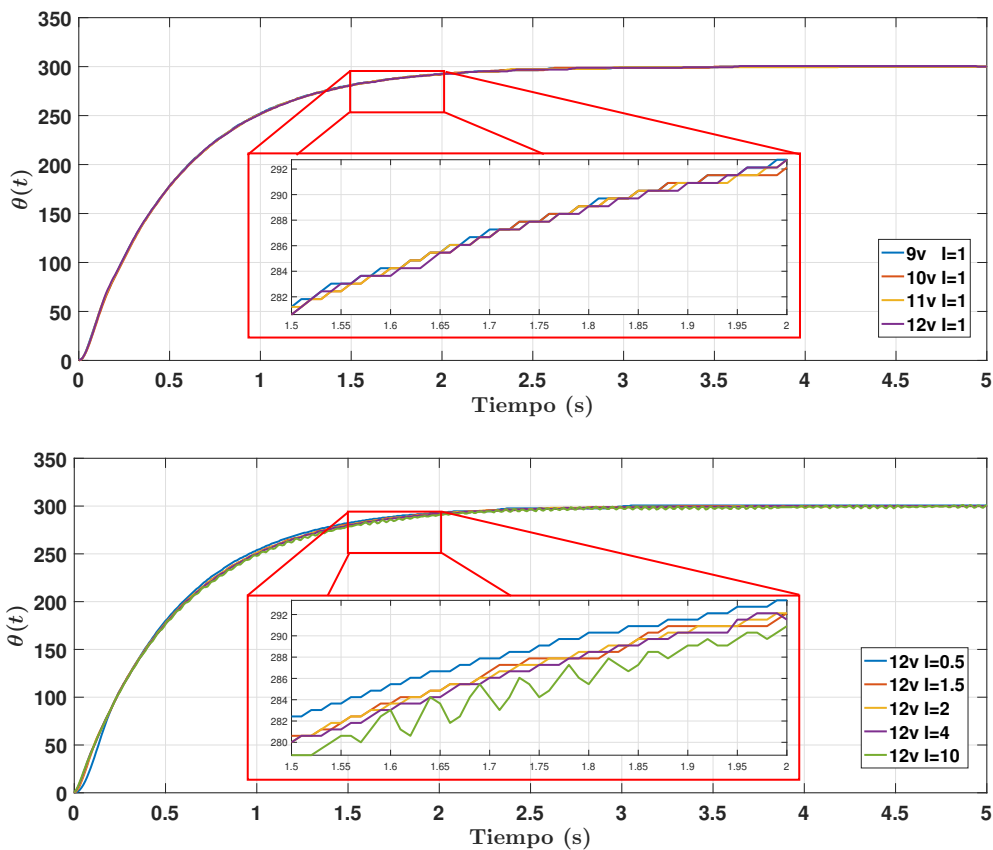


Figura 6.4: Pruebas del motor de alto par CHW-GW4058-555. (Superior) Variación en el voltaje de entrada. (Inferior) Variación de la inercia estimada  $I$ .

En la Figura 6.4 se muestra el desempeño del controlador en el motor de alto par durante ambas series de pruebas. La parte superior de la figura ilustra que la variación en el voltaje de entrada tiene efectos prácticamente insignificantes en este motor. Sin embargo, en la parte inferior se observa que un error en el parámetro

inercial resulta en un ligero desvío del desempeño deseado. En todos los casos, se logra obtener una respuesta sobre amortiguada con el tiempo de establecimiento especificado.

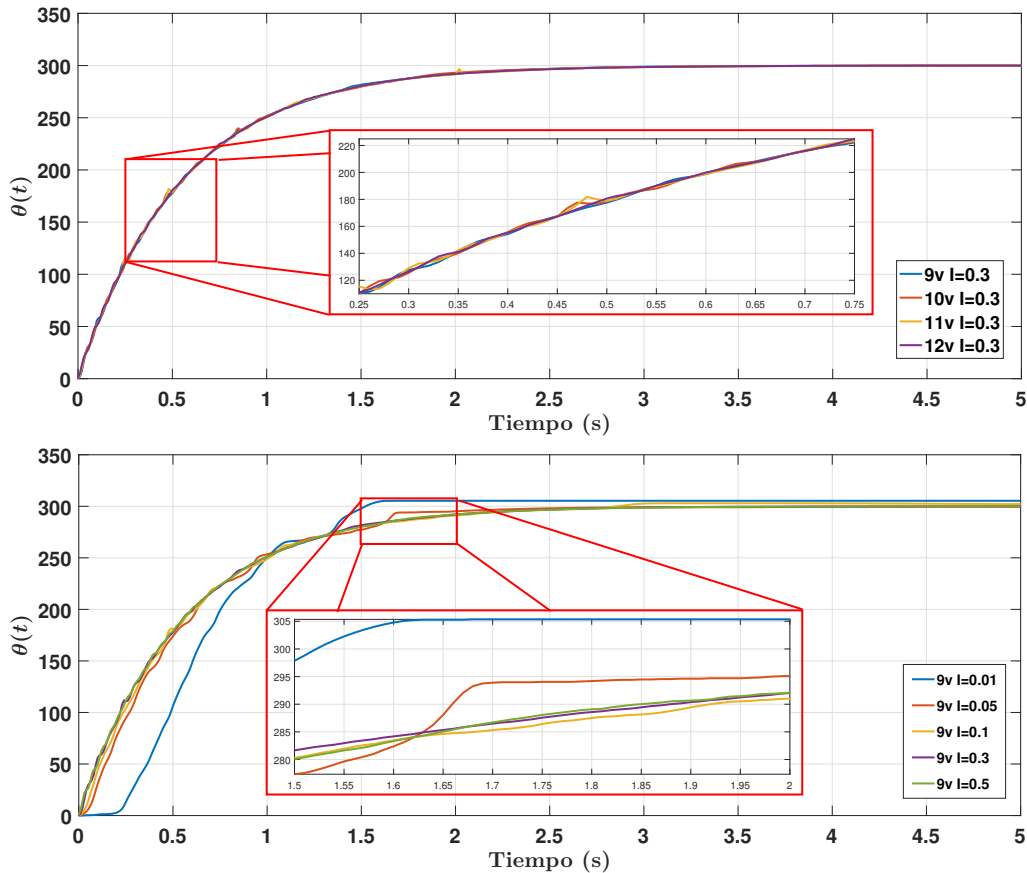


Figura 6.5: Pruebas del motor de alta velocidad Crouzet 898100. (Superior) Variación en el voltaje de entrada. (Inferior) Variación de la inercia estimada  $I$ .

El desempeño del controlador en el motor de alta velocidad durante ambas series de pruebas se presenta en la Figura 6.5. Al igual que en el motor de alto par, la parte superior de la figura muestra que la variación en el voltaje de entrada tiene un impacto mínimo en este motor. No obstante, en la parte inferior de la figura se aprecia que un error en el parámetro inercial conlleva a una desviación mayor en el desempeño deseado en comparación con el motor de alto par. En todos los casos, se logra obtener una respuesta sobre amortiguada con el tiempo de establecimiento especificado.

Ganancias del controlador		
$a = 2$	$k = 2$	$\tau = 1 \text{ ms}$
Valor de referencia		
$\theta_r = 300^\circ$	$\theta(0) = 0^\circ$	

Tabla 6.1: Constantes de control aplicadas en las pruebas de los motores de CD.

#### 6.4 Evaluación del controlador comercial MG955 VS el controlador propuesto.

El servo motor MG955 es un motor de CD comercial ampliamente utilizado en la fabricación de prototipos robóticos y de modelismo. Este servomotor está equipado con un sistema de control cerrado, posiblemente con una estructura de control tipo *PD*, que recibe el valor de referencia deseado mediante una señal de pulsos. A pesar de ser ampliamente utilizado, su desempeño se ve drásticamente afectado cuando se opera en una región alejada de su configuración original. Por ejemplo, al aplicar una carga de  $0.7357 \text{ Nm}$  y solicitar un desplazamiento de 90 grados, el servomotor presenta un error de aproximadamente 30 grados. Además, no es posible configurar el tiempo de establecimiento en este motor, lo cual siempre es algo deseable. Por esta razón, se implementó el controlador propuesto en este motor, para lo cual se eliminó la tarjeta de control del MG955 y se utilizó un Arduino Mega. La posición angular del eje del motor se mide mediante un potenciómetro en ambos casos. Para realizar esta comparación, se utilizaron los parámetros de la Tabla 6.2. La Figura 6.6 muestra cómo el controlador propuesto supera la prueba en la que el controlador comercial del MG955 falla. La prueba experimental se puede encontrar en <https://youtu.be/GfS5v6R4Xgk>.

Ganancias del controlador		
$a = 8$	$k = 2$	$\tau = 10 \text{ ms}$
Valor de referencia		
$\theta_r = 90^\circ$	$\theta(0) = 168.8^\circ$	

Tabla 6.2: Constantes de control aplicadas en las pruebas del motor MG955.

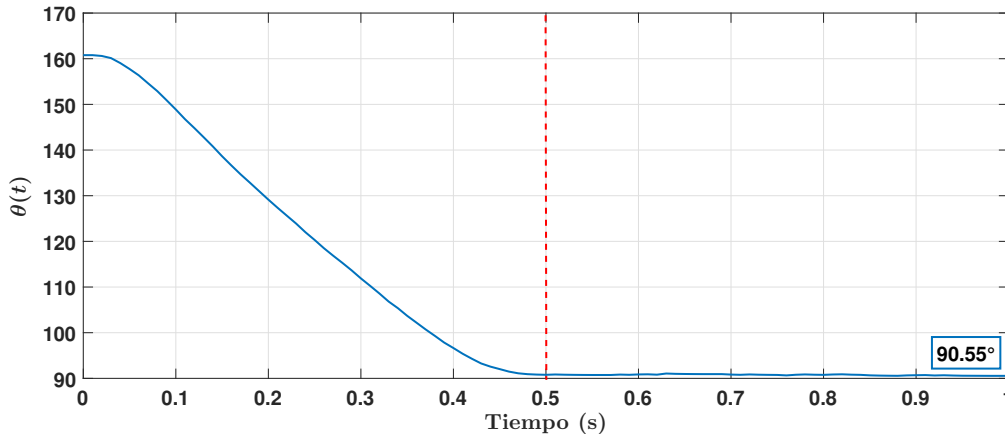


Figura 6.6: El controlador comercial MG955 contra el controlador propuesto.

El controlador propuesto ofrece la ventaja de calcular automáticamente las ganancias de control en función del tiempo de establecimiento, eliminando así la necesidad de ajustar manualmente dichas ganancias. Esto garantiza un excelente rendimiento del sistema, incluso cuando se opera en una región distante de la planificada inicialmente.

Para respaldar esta afirmación, se lleva a cabo una demostración experimental del controlador. Se realiza una prueba inicial del sistema sin carga, seguida de una prueba con una carga de  $0.7357 \text{ Nm}$ . Estas pruebas se realizan para tres diferentes tiempos de establecimiento: 1, 5 y 15 segundos.

Al realizar estas pruebas, se evalúa el comportamiento y la respuesta del sistema en cada caso, verificando si el controlador propuesto es capaz de cumplir con el tiempo de establecimiento deseado y garantizar un rendimiento adecuado en presencia de la carga.

Este enfoque experimental permite validar la eficacia y robustez del controlador propuesto en condiciones reales, donde se considera la presencia de una carga externa que puede afectar la dinámica del sistema. Los resultados obtenidos en estas pruebas experimentales proporcionarán una evidencia sólida del desempeño y la capacidad del controlador propuesto en diferentes escenarios operativos. La Figura 6.7 muestra el excelente desempeño del controlador pese a la presencia de la perturbación externa desconocida y el cambio en su tiempo de establecimiento.

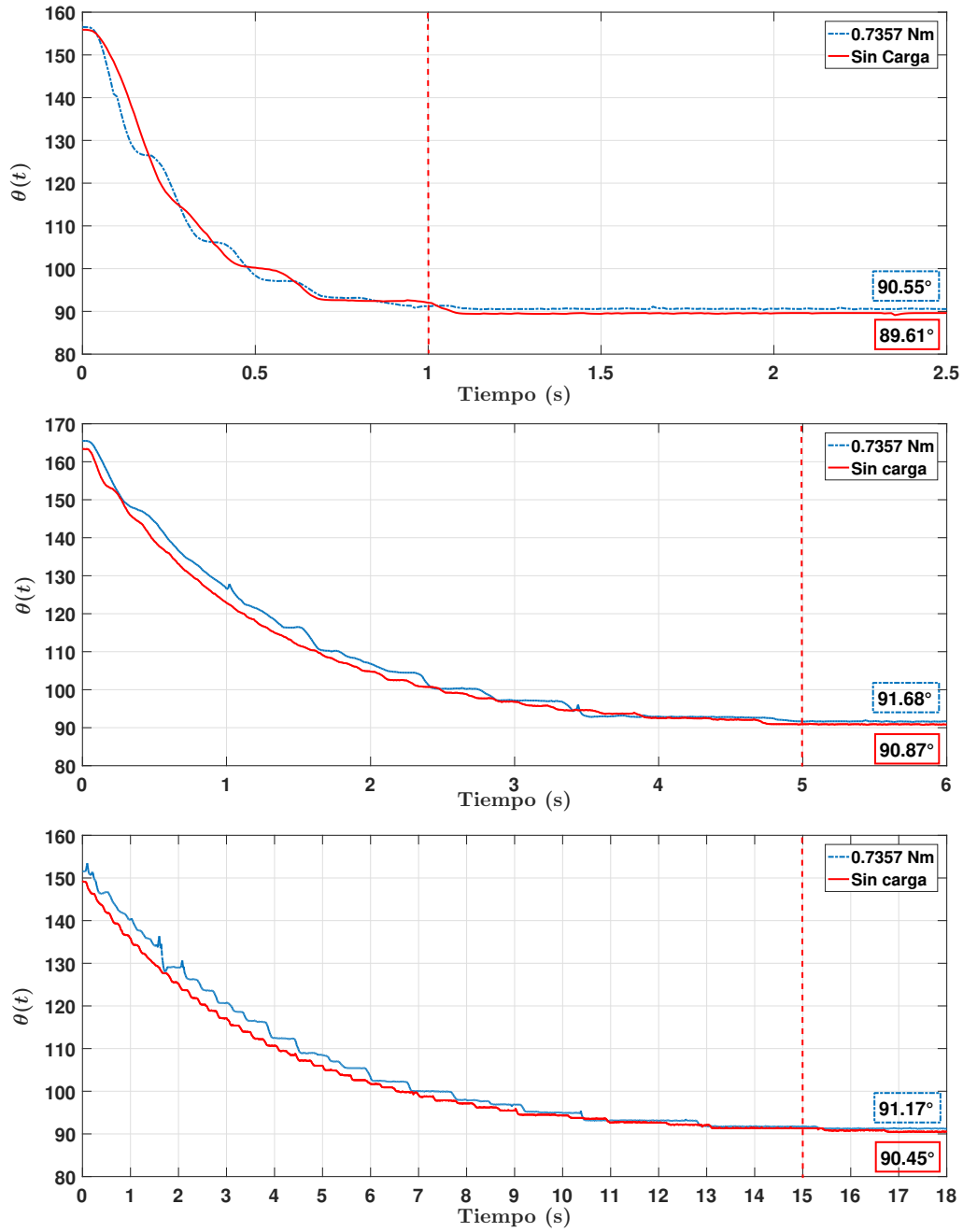


Figura 6.7: Pruebas con carga y sin carga para un  $T_s$  de 1s, 5s y 15s.



### Resumen del Capítulo 6.

En este capítulo se implementa el controlador propuesto en diferentes tipos de sistemas físicos. Se comienza aplicando el controlador en un sistema mecánico de péndulo inercial y luego se extiende a sistemas electromecánicos representados por motores de corriente directa. Se realiza una comparativa entre el controlador propuesto y un servomotor comercial tipo MG955 bajo condiciones extremas.

En la sección 6.2, se lleva a cabo una evaluación experimental del desempeño del controlador aplicado a un péndulo inercial. Se realizan dos pruebas de regulación de la inclinación del péndulo, una sin perturbaciones externas y otra con la adición de un peso oscilante como perturbación. El movimiento rotacional del péndulo se genera mediante la rotación de dos hélices eléctricamente controladas.

En la siguiente sección, se realiza una validación experimental para evaluar el desempeño del controlador aplicado a dos motores de corriente directa con características distintas. Se utilizan un motor de alto par CHW-GW4058-555 y un motor de alta velocidad Crouzet 898100. Se emplea un encoder digital para medir la posición angular de los motores y se varía el voltaje de alimentación y la inercia estimada para realizar las pruebas. Se busca obtener una respuesta sobre-amortiguada con un tiempo de estabilización cercano a los 2 segundos.

Posteriormente, se realiza una comparativa entre el controlador propuesto y el servomotor comercial MG955. Se elimina la tarjeta de control del MG955 y se utiliza un Arduino Mega junto con el controlador propuesto. Se mide la posición angular del eje del motor mediante un potenciómetro. Se demuestra que el controlador propuesto supera las limitaciones del controlador comercial del MG955, especialmente cuando se opera fuera de su configuración original.

En general, el controlador propuesto ofrece ventajas significativas al calcular automáticamente las ganancias de control según el tiempo de establecimiento. Las pruebas experimentales realizadas en diferentes condiciones demuestran la efectividad y el rendimiento del controlador en situaciones realistas. Estos resultados respaldan la utilidad y aplicabilidad del controlador propuesto en situaciones prácticas.



## 7. Conclusiones y trabajos futuros.

En este trabajo de investigación doctoral se propone un nuevo esquema de control con la capacidad de atenuar perturbaciones producidas por fuerzas externas y/o errores en el modelo matemático del sistema.

Se desarrollaron tres proposiciones principales para el cumplimiento de esta tarea de control, las cuales fueron validadas de forma teórica, por simulación y de forma experimental. Para ello, se contemplaron escenarios realistas, y en algunas ocasiones extremos, donde los controladores convencionales tendrían dificultades para cumplir con su tarea de control.

La estructura de control propuesta destaca por su simplicidad, fácil aplicación y bajo costo computacional. Además, si se conocen los valores inerciales del sistema dinámico a controlar, de forma aproximada, el controlador no requiere ser sintonizado y tendrá una respuesta aproximada a la calculada en la teoría. Por lo que no es necesario conocer por completo el modelo dinámico del sistema.

Esto nos acerca un poco más a la idea de un controlador universal para una clase acotada de sistemas dinámicos, el cual solo requiere ser conectado para funcionar de forma robusta. Un ejemplo de esto sería, un controlador universal para motores de CD de un cierto rango de potencias, el cual cumpla con un excelente desempeño pese a que se varíe el voltaje suministrado y la carga de trabajo, dentro

de un rango de operación.

La primera proposición establece las condiciones necesarias que debe cumplir un controlador del tipo *PD* modificado para que un sistema lineal SISO de segundo orden cumpla con una Estabilidad Entrada-Estado. Donde además, se resalta que no es necesario que el controlador base sea del tipo *PD*.

La segunda proposición trata del desempeño de la respuesta del sistema dinámico ante perturbaciones definidas por su máxima amplitud y frecuencia. Al definir las constantes del controlador, como lo establece la segunda proposición, se logra un desempeño preestablecido, el cual cumple con un tiempo de establecimiento, una respuesta amortiguada y un máximo error de posición y velocidad previamente diseñado. La última proposición extiende estos resultados a los sistemas no lineales Euler-Lagrange completamente actuados de grado  $n$ .

La estructura de control propuesta es altamente adaptable y escalable. Se puede utilizar en sistemas dinámicos de diferente complejidad y en diferentes áreas de aplicación, como la robótica, la industria y la ingeniería aeroespacial. Esta versatilidad de la estructura de control aumenta su potencial de aplicación en diferentes campos de la industria, donde se requiere una respuesta rápida y robusta de los sistemas dinámicos.

Las limitaciones identificadas al aplicar la estructura de control se detallan a continuación:

- **El controlador no es aplicable a todos los sistemas.** Para su correcto funcionamiento, se requiere que el sistema sea completamente actuado y posea alguna de las estructuras descritas en el Capítulo 4. Por ejemplo, no es directamente aplicable a un sistema lineal escalar que tenga al menos un cero en su función de transferencia.
- **No se aprovechan las propiedades inherentes que podría tener el sistema dinámico a controlar.** Esto se debe a la falta de conocimiento del modelo dinámico del sistema, lo cual impide su consideración en la sintonización del controlador, despreciando cualquier benevolencia que este pudiera ofrecer.
- **Se hace necesario incorporar un sensor de aceleración,** lo cual va en contra de la corriente de reducir el número de sensores para llevar a cabo

una misma tarea de control, según la ideología predominante. Por lo tanto, se sugiere llevar a cabo un análisis de costo/beneficio para determinar si se implementará la estructura de control propuesta.

- **Limitación tecnológica.** No todos los sistemas físicos disponen de un sensor capaz de medir la aceleración de la variable a controlar. Esto conlleva la aplicación de técnicas como la derivada sucia para obtener dicho valor, y hasta el momento no se ha verificado la estabilidad del sistema en lazo cerrado bajo estas condiciones.
- **Implementación del retardo.** Es importante tener presente que el rendimiento del sistema dinámico puede mejorar a medida que se reduce el valor de este retardo, lo que se traduce en un procesamiento más rápido y una adquisición de datos más eficiente. Aunque, para una amplia variedad de aplicaciones, estas limitaciones no generan inconvenientes significativos, se contempla que con el avance científico, estas restricciones tecnológicas comenzarán a disiparse.

En cuanto a trabajos futuros, se plantea buscar otros controladores base y analizar las ventajas que éstos puedan generar, así como demostrar la estabilidad en función del error de la matriz de inercia. También se propone demostrar la estabilidad al utilizar derivadores sucios y extrapolar la idea para sistemas multiagentes. Finalmente, se plantea probar de forma experimental la metodología de control en más sistemas físicos reales para validar su aplicación en diferentes contextos y condiciones.

#### Resumen del Capítulo 7.

El nuevo esquema de control propuesto en este trabajo de investigación doctoral presenta una solución viable y efectiva para atenuar perturbaciones en sistemas dinámicos producidas por fuerzas externas y/o errores en sus modelos matemáticos. La metodología de control es simple, fácil de aplicar y de bajo costo computacional, lo que la hace altamente adaptable y escalable en diferentes áreas de aplicación. A pesar de las desventajas encontradas, se espera que con el avance de la tecnología se puedan superar y se pueda aplicar esta estructura de control en una amplia gama de sistemas dinámicos en la industria y otros campos de aplicación.



## Bibliografía

- [1] Paredes J, Sharma P, Ha B et al. Development, implementation, and experimental outdoor evaluation of quadcopter controllers for computationally limited embedded systems. *Annual Reviews in Control* 2021; 52: 372–389. DOI:10.1016/j.arcontrol.2021.06.001.
- [2] Chehardoli H. Robust optimal control and identification of adaptive cruise control systems in the presence of time delay and parameter uncertainties. *Journal of Vibration and Control* 2020; 26(17-18): 1590–1601. DOI:10.1177/1077546319901086.
- [3] Askari MR, Hajizadeh I, Rashid M et al. Adaptive-learning model predictive control for complex physiological systems: Automated insulin delivery in diabetes. *Annual Reviews in Control* 2020; 50: 1–12. DOI:10.1016/j.arcontrol.2020.10.004.
- [4] You SH, Hahn JO and Lee H. New adaptive approaches to real-time estimation of vehicle sideslip angle. *Control Engineering Practice* 2009; 17(12): 1367–1379. DOI:10.1016/j.conengprac.2009.07.002.
- [5] Califano C, Scharbarg E, Magdelaine N et al. A nonlinear time-delay realization for gastroparesis in patients with diabetes. *Annual Reviews in Control* 2019; 48: 233–241. DOI:10.1016/j.arcontrol.2019.07.005.

## Referencias.

---

- [6] Carè A, Carli R, Dalla Libera A et al. Kernel methods and gaussian processes for system identification and control: A road map on regularized kernel-based learning for control. *IEEE Control Systems* 2023; 43: 69–110. DOI:10.1109/MCS.2023.3291625.
- [7] Krishnan R. *Electric motor drives: modeling, analysis, and control*. 1st ed. UpperSaddle River, NJ: Prentice Hall, 2001.
- [8] Xu T, Yu H, Yu J et al. Adaptive disturbance attenuation control of two tank liquid level system with uncertain parameters based on port-controlled hamiltonian. *IEEE Access* 2020; 8: 47384–47392. DOI:10.1109/ACCESS.2020.2979352.
- [9] Labbadi M, Djemai M and Boubaker S. A novel non-singular terminal sliding mode control combined with integral sliding surface for perturbed quadrotor. *Proc IMechE Part I: J Systems and Control Engineering* 2022; 236(5): 999–1009. DOI:10.1177/09596518211064791.
- [10] Hang P and Chen X. Path tracking control of 4-wheel-steering autonomous ground vehicles based on linear parameter-varying system with experimental verification. *Proc IMechE Part I: J Systems and Control Engineering* 2021; 235(3): 411–423. DOI:10.1177/0959651820934572.
- [11] Altiner B, Delibaşı A and Erol B. Modeling and control of flexible link manipulators for unmodeled dynamics effect. *Proc IMechE Part I: J Systems and Control Engineering* 2019; 233(3): 245–263. DOI:10.1177/0959651818791071.
- [12] Kalil Lauand C and Meyn S. Quasi-stochastic approximation: Design principles with applications to extremum seeking control. *IEEE Control Systems* 2023; 43: 111–136. DOI:10.1109/MCS.2023.3291884.
- [13] Ji X, Wang C, Zhang Z et al. Nonlinear adaptive position control of hydraulic servo system based on sliding mode back-stepping design method. *Proc IMechE Part I: J Systems and Control Engineering* 2021; 235(4): 474–485. DOI:10.1177/0959651820949663.
- [14] Zhang X, Cheng Y, Zhao Z et al. Robust model predictive direct speed control for spmsm drives based on full parameter disturbances and load observer. *IEEE Transactions on Power Electronics* 2019; 35(8): 8361–8373. DOI:10.1109/TPEL.2019.2962857.



- 
- [15] Witkowski K, Kudra G, Wasilewski G et al. Modelling and experimental validation of 1-degree-of-freedom impacting oscillator. *Proc IMechE Part I: J Systems and Control Engineering* 2019; 233(4): 418–430. DOI:10.1177/0959651818803165.
- [16] Telmoudi AJ, Soltani M, Chaouech L et al. Parameter estimation of nonlinear systems using a robust possibilistic c-regression model algorithm. *Proc IMechE Part I: J Systems and Control Engineering* 2020; 234(1): 134–143. DOI:10.1177/0959651818756246.
- [17] Peng G, Guangming Z and Xiaodong L. Model-free control using improved smoothing extended state observer and super-twisting nonlinear sliding mode control for pmsm drives. *Energies* 2021; 14(4). DOI:10.3390/en14040922.
- [18] Yonglu D, Haotian L, Minrui F et al. Water level control of steam generator in nuclear power plant based on intelligent mfac-pid. In *2021 40th Chinese Control Conference (CCC)*. pp. 2549–2554. DOI:10.23919/CCC52363.2021.9549567.
- [19] Annaswamy AM. Adaptive control and intersections with reinforcement learning. *Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems* 2023; 6(1): 65–93. DOI:10.1146/annurev-control-062922-090153.
- [20] Ortega R, Loría JA, Nicklasson PJ et al. *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: mechanical, electrical and electromechanical applications*. 1st ed. London: Springer Science & Business Media, 2013.
- [21] Farzan S, Azimi V, Hu AP et al. Adaptive control of wire-borne underactuated brachiating robots using control lyapunov and barrier functions. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 2022; 30(6): 2598–2614.
- [22] Nishiki Y, Kajiwara H and Aoyagi M. Control of swing-up and giant-swing motions of acrobot based on periodic input. *Nonlinear Dynamics* 2022; 108(3): 2297–2308.
- [23] Ma H, Ren H, Zhou Q et al. Observer-based neural control of  $n$ -link flexible-joint robots. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems* 2022; .

## Referencias.

---

- [24] Balcazar R, Rubio JdJ, Orozco E et al. The regulation of an electric oven and an inverted pendulum. *Symmetry* 2022; 14(4): 759. DOI:10.3390/sym14040759.
- [25] Khalil, HK. *Nonlinear systems*. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.
- [26] Kharitonov V. *Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [27] Spivak M. *Calculus*. Cambridge University Press, 2006.
- [28] Sontag ED. *Mathematical Control Theory*. 2nd ed. Piscataway, NJ: Springer, 1998.
- [29] Chaib L, Choucha A and Arif S. Optimal design and tuning of novel fractional order pid power system stabilizer using a new metaheuristic bat algorithm. *Ain Shams Engineering Journal* 2017; 8(2): 113–125.
- [30] Scherpen JM and Ortega R. On nonlinear control of euler-lagrange systems: Disturbance attenuation properties. *Systems & Control Letters* 1997; 30(1): 49–56. DOI:[https://doi.org/10.1016/S0167-6911\(96\)00081-3](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(96)00081-3).
- [31] Chung SJ and Slotine JJE. Cooperative robot control and concurrent synchronization of lagrangian systems. *IEEE Transactions on Robotics* 2009; 25(3): 686–700. DOI:10.1109/TRO.2009.2014125.
- [32] Sharma N, Bhasin S, Wang Q et al. Predictor-based control for an uncertain euler-lagrange system with input delay. In *Proceedings of the 2010 American Control Conference*. pp. 1422–1427. DOI:10.1109/ACC.2010.5531212.
- [33] Nuño E. Consensus of euler-lagrange systems using only position measurements. *IEEE Transactions on Control of Network Systems* 2018; 5(1): 489–498. DOI:10.1109/TCNS.2016.2620806.
- [34] Spong MW, Hutchinson S and Vidyasagar M. *Robot modeling and control*. John Wiley & Sons, 2020.
- [35] Eltayeb A, Rahmat MF, Basri MAM et al. Integral adaptive sliding mode control for quadcopter uav under variable payload and disturbance. *IEEE Access* 2022; 10: 94754–94764.

- 
- [36] Xu T. Pid control and simulation of moving mass quadcopter uav. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 2489. IOP Publishing, p. 012015.
- [37] Jiang F, Pourpanah F and Hao Q. Design, implementation, and evaluation of a neural-network-based quadcopter uav system. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 2019; 67(3): 2076–2085.
- [38] Koo T and Sastry S. Output tracking control design of a helicopter model based on approximate linearization. In *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.98CH36171)*, volume 4. pp. 3635–3640 vol.4. DOI:10.1109/CDC.1998.761745.
- [39] Olfati-Saber R. *Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles*. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2001.
- [40] Mohammadi A, Tavakoli M, Marquez H et al. Nonlinear disturbance observer design for robotic manipulators. *Control Engineering Practice* 2013; 21(3): 253–267. DOI:10.1016/j.conengprac.2012.10.008.
- [41] Chen W, Ballance D, Gawthrop P et al. Nonlinear disturbance observer for robotic manipulators. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 2000; 47(4): 932–938. DOI:10.1109/41.857974.