



**Universidad Autónoma de San Luis Potosí**  
**Facultad de Ingeniería**  
**Centro de Investigación y Estudios de Posgrado**

## **Diseño de control cooperativo para sistemas multiagentes**

### **T E S I S**

Que para obtener el grado de:

Maestro en Ingeniería Eléctrica

Presenta:

Ing. Alfredo Arriaga Contreras

Asesor:

Dr. César Fernando Francisco Méndez Barrios

Co-asesor:

Dr. Emiio Jorge González Galván

San Luis Potosí, S. L. P.

Diciembre de 2017







**UASLP**

Universidad Autónoma  
de San Luis Potosí

26 de octubre de 2017

**ING. ALFREDO ARRIAGA CONTRERAS  
P R E S E N T E.**

En atención a su solicitud de Temario, presentada por los **Dres. César Fernando Francisco Méndez Barrios Y Emilio Jorge González Galván**, Asesor y Co-asesor de la Tesis que desarrollará Usted con el objeto de obtener el Grado de **Maestro en Ingeniería Eléctrica**, me es grato comunicarle que en la Sesión del H. Consejo Técnico Consultivo celebrada el día 26 de octubre del presente, fue aprobado el Temario propuesto:

**TEMARIO:**

**“Diseño de control cooperativo para sistemas multiagentes”**

Introducción.

1. Modelado matemático de sistemas multiagentes.
  2. Fundamentos teóricos de control.
  3. Diseño de controladores para regulación, seguimiento y sincronización.
  4. Resultados numéricos.
- Conclusiones.  
Referencias.

**“MODOS ET CUNCTARUM RERUM MENSURAS AUDEBO”**

**A T E N T A M E N T E**

**M. I. JORGE ALBERTO PÉREZ GONZÁLEZ  
DIRECTOR.**



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
DE SAN LUIS POTOSÍ  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIRECCIÓN



**FACULTAD DE  
INGENIERÍA**

Copia. Archivo.  
\*etn.

Av. Manuel Nava 8  
Zona Universitaria • CP 78290  
San Luis Potosí, S.L.P.  
tel. (444) 826 2330 al39  
fax (444) 826 2336  
www.uaslp.mx



# Diseño de control cooperativo para sistemas multiagentes

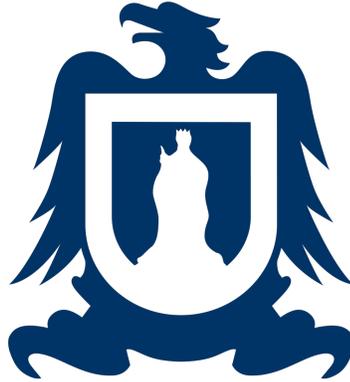
---

Ing. Alfredo Arriaga Contreras

*5 de diciembre de 2017*



Universidad Autónoma de San Luis Potosí



Facultad de Ingeniería  
Centro de Investigación y Estudios de Posgrado  
Posgrado en Ingeniería Eléctrica

Documento de Tesis

## **Diseño de control cooperativo para sistemas multiagentes**

Ing. Alfredo Arriaga Contreras

*Asesor* Dr. César F. F. Méndez Barrios  
Facultad de Ingeniería  
Universidad Autónoma de San Luis Potosí

*Co-asesor* Dr. Emilio Jorge González Galván  
Facultad de Ingeniería  
Universidad Autónoma de San Luis Potosí

*Revisores* Dr. Edwing A. Moreno Basaldúa  
Dr. Ricardo Álvarez Salas  
Dr. Mauro E. Maya Méndez

5 de diciembre de 2017

**Ing. Alfredo Arriaga Contreras**

*Diseño de control cooperativo para sistemas multiagentes*

Documento de Tesis, 5 de diciembre de 2017

Asesor: Dr. César F. F. Méndez Barrios

Co-asesor: Dr. Emilio Jorge González Galván

Revisores: Dr. Edwing A. Moreno Basaldúa, Dr. Ricardo Álvarez Salas y Dr. Mauro E. Maya Méndez

**Universidad Autónoma de San Luis Potosí**

*Posgrado en Ingeniería Eléctrica*

Centro de Investigación y Estudios de Posgrado

Facultad de Ingeniería

Manuel Nava No. 8

78280, San Luis Potosí, S. L. P.

# Agradecimientos

A mi familia, por apoyarme en todo momento e impulsarme a ser mejor cada día, seguir mis metas, enseñarme a esforzarme más sin rendirme cuando las situaciones son difíciles, por escucharme, aconsejarme y estar siempre para darme un mensaje de aliento cuando lo necesito.

A mis amigos, por los momentos de diversión, por su compañía en momentos de dificultades, por su ayuda y apoyo siempre, que me permitió seguir adelante y hacer más alegre este camino.

A mis asesores, Dr. César F. F. Méndez Barrios y Dr. Emilio González Galván, por darme la oportunidad de trabajar con ustedes. Gracias por todo el conocimiento y el tiempo brindado en el desarrollo de este trabajo. Gracias por facilitarme todos los recursos necesarios para la realización del mismo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por haberme otorgado la beca para realizar mis estudios de maestría.



# Índice general

<b>Índice de figuras</b>	<b>XI</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XIII</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>XV</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
Motivación . . . . .	1
Planteamiento del problema . . . . .	4
Objetivos . . . . .	5
Objetivo general . . . . .	5
Objetivos particulares . . . . .	5
Metodología . . . . .	6
Estructura de la tesis . . . . .	6
<b>1 Modelado matemático de sistemas multiagentes</b>	<b>9</b>
1.1 Análisis cinemático . . . . .	10
1.2 Análisis dinámico . . . . .	13
1.3 Teoría de grafos . . . . .	19
1.4 Modelado de sistemas multiagentes . . . . .	21
1.5 Propiedades de la matriz Laplaciana . . . . .	23
1.6 Ejemplo de aplicación . . . . .	26
<b>2 Fundamentos teóricos de control</b>	<b>29</b>
2.1 Tipos de sistemas . . . . .	29
2.2 Conceptos de estabilidad . . . . .	31
2.3 Estabilidad en el sentido de Lyapunov . . . . .	33
2.4 Resultados preliminares . . . . .	35
2.4.1 Backstepping . . . . .	35

2.4.2	Saturaciones anidadas . . . . .	39
2.4.3	Sistemas con retardos y matrices . . . . .	41
2.4.4	Control con parámetros desconocidos . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Diseño de controladores para regulación, seguimiento y sincronización</b>	<b>45</b>
3.1	Modelo de error . . . . .	45
3.2	Cálculo de ángulos deseados . . . . .	46
3.3	Trayectoria de referencia . . . . .	47
3.4	Controlador Backstepping . . . . .	47
3.4.1	Diseño del controlador para traslación . . . . .	48
3.4.2	Diseño del controlador para rotación . . . . .	50
3.5	Controlador por saturaciones anidadas . . . . .	51
3.5.1	Diseño del controlador para traslación . . . . .	51
3.5.2	Diseño del controlador para rotación . . . . .	53
3.6	Controlador con retardo variable a la entrada . . . . .	54
3.7	Controlador con retardo para sincronización de sistemas multi- agentes . . . . .	58
3.7.1	Definición de error . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Resultados numéricos</b>	<b>65</b>
4.1	Parámetros de simulación . . . . .	65
4.2	Trayectoria de referencia . . . . .	66
4.3	Resultados del controlador Backstepping . . . . .	67
4.4	Resultados del controlador por saturaciones anidadas . . . . .	72
4.5	Resultados del controlador con retardo variable a la entrada . . . . .	76
4.6	Ejemplo comparativo entre controladores para sistemas multi- agentes . . . . .	81
4.7	Resultados del controlador con retardo para sincronización de sistemas multiagentes . . . . .	85
	<b>Conclusiones</b>	<b>89</b>
4.8	Trabajo futuro . . . . .	90





# Índice de figuras

1.1	Sistemas de coordenadas. . . . .	10
1.2	Grafo . . . . .	20
1.3	Grafo dirigido (digrafo) . . . . .	21
1.4	Grafo direccionado. . . . .	22
1.5	Grafo de comunicación. . . . .	27
1.6	Sincronización de la junta 1. . . . .	28
1.7	Sincronización de la junta 2. . . . .	28
2.1	Estabilidad . . . . .	32
2.2	Estabilidad asintótica . . . . .	32
4.1	Helicoidal vertical. . . . .	66
4.2	Estructura del controlador. . . . .	67
4.3	Seguimiento de trayectoria. . . . .	68
4.4	Evolución del estado. . . . .	69
4.5	Evolución de los errores en el estado. . . . .	70
4.6	Evolución de las señales de control. . . . .	71
4.7	Estructura del controlador. . . . .	72
4.8	Seguimiento de trayectoria. . . . .	73
4.9	Evolución del estado. . . . .	74
4.10	Evolución de los errores en el estado. . . . .	75
4.11	Evolución de las señales de control. . . . .	76
4.12	Estructura del controlador. . . . .	76
4.13	Seguimiento de trayectoria. . . . .	77
4.14	Evolución del estado. . . . .	78
4.15	Evolución de los errores en el estado. . . . .	79
4.16	Evolución de las señales de control. . . . .	80
4.17	Retardo aplicado. . . . .	81

4.18	Estructura del controlador. . . . .	82
4.19	Evolución de los estados para los agentes. . . . .	83
4.20	Evolución de los errores para los agentes. . . . .	84
4.21	Ruido aplicado. . . . .	84
4.22	Estructura del controlador. . . . .	85
4.23	Seguimiento de trayectoria. . . . .	86
4.24	Evolución del estado. . . . .	87
4.25	Evolución de los errores en el estado. . . . .	88

# Índice de tablas

4.1	Parámetros del cuadricóptero. . . . .	66
4.2	Ganancias backstepping. . . . .	67
4.3	Ganancias saturaciones anidadas. . . . .	72
4.4	Ganancias multiagentes. . . . .	86



# Lista de símbolos

$\mathcal{I}$	Marco de referencia inercial
$\mathcal{B}$	Marco de referencia móvil
$q$	Coordenadas generalizadas del cuadricóptero
$\xi = (x, y, z)$	Coordenadas generalizadas de posición
$\eta = (\phi, \theta, \psi)$	Coordenadas generalizadas de orientación
$R(\cdot, \cdot)$	Matriz de rotación simple
$c.$	Coseno
$s.$	Seno
$R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{I}}$	Coordenadas generalizadas de orientación
$S$	Matriz antisimétrica
$a, b, c$	Elementos de la matriz antisimétrica
$\omega$	Velocidades del dron en el marco móvil
$W_n$	Jacobiano en coordenadas locales
$\dot{\eta}$	Velocidades angulares en coordenadas generalizadas
$L$	Lagrangiano
$E_c$	Energía cinética
$E_p$	Energía potencial
$E_{cTrasl}$	Energía cinética traslacional
$E_{cRot}$	Energía cinética rotacional
$D(q, \dot{q})$	matriz de inercia
$m$	Masa del cuadricóptero
$I$	Matriz identidad
$J$	Jacobiano en coordenadas globales
$I_n$	Matriz de momentos de inercia
$\dot{\xi}$	Velocidades lineales en coordenadas generalizadas
$g$	Gravedad
$G, \vec{g}$	Vector de gravedad

$F_\xi$	Fuerza de control
$\tau$	Vector de pares de control
$f_i$	Fuerza generada por el motor $i$
$\tau_{M_i}$	Par generado por el motor $i$
$C(q, \dot{q})$	Matriz de Coriolis
$M(\eta)$	Matriz inercial
$\tau_\eta$	Par de control para el subsistema de rotación
$u_i$	Señal de control $i$
$l$	Longitud del brazo
$\Phi$	Matriz de regresión
$\hat{\theta}$	Vector de parámetros para linealización y estimación
$\mathcal{G}$	Grafo
$V$	Conjunto de vértices de un grafo
$E$	Conjunto de aristas de un grafo
$ \cdot $	Valor absoluto, orden de un grafo
$\ \cdot\ $	Norma, número de aristas de un grafo
$\mathcal{E}$	Conjunto de aristas de un grafo dirigido
$\mathcal{A}$	Matriz de adyacencias
$d_G(\cdot)$	Valencia de un vértice
$x_d$	Trayectoria deseada
$\tilde{x}$	Error en posición
$x_i$	Estado del $i$ -ésimo agente
$\mathcal{L}$	Matriz Laplaciana
$\mathcal{N}_i$	Conjunto de agentes que transmiten información al agente $i$
$w_r$	Eigenvector unitario
$\lambda$	Eigenvalor
$\sigma(\cdot)$	Espectro de matriz, función de saturación lineal
$\mathcal{D}$	Disco de Geršgorin
$\alpha, \beta, \delta$	Parámetros del robot manipulador industrial
$h$	Retardo en el sistema
$\varphi$	Solución del sistema

$V, \mathcal{V}$	Función de Lyapunov
$L, M$	Constantes para la saturación lineal
$e$	Vector de error
$\epsilon$	Variable de error para sincronización
$u_x, u_y$	Controles virtuales para los ángulos deseados
$d(t)$	Retardo variable en el sistema
$\Psi$	Matriz para el sistema con retardos
$T_{i,j}$	Retardo en la comunicación
$\Gamma$	Matriz de ganancia para la estimación paramétrica
$\lambda_i$	Ganancias para sincronización



# Introducción

## Motivación

En la naturaleza se pueden encontrar comportamientos cooperativos entre distintos seres vivos (agentes), dentro de los ejemplos más conocidos se pueden mencionar: los bancos de peces, bandadas de pájaros, colonias de hormigas, etc. Por otro lado, debido a sus diversas aplicaciones a la ingeniería, física, biología, entre otras disciplinas, el análisis y diseño de leyes de control cooperativo, para agentes dinámicos de distinta naturaleza, es de interés en la teoría del Control Automático [1]. En particular, el control cooperativo de sistemas multiagentes resulta de sumo interés cuando se requiere realizar tareas en las que es necesaria la intervención de varios agentes, o bien, también se ha demostrado que la utilización de varios agentes (sistemas) reduce el consumo energético al realizar ciertas tareas, tales como: transporte, monitoreo, entre otras, ejemplos pueden encontrarse en [2] y [3].

Por esta razón en los últimos años, muchos investigadores de la comunidad científica han abordado problemas como la vigilancia de tráfico, el trazado de mapas para áreas de cultivo, la detección de incendios en largas extensiones de bosque, la búsqueda y rescate de personas en situaciones de riesgo o en desastres naturales, e incluso, actividades civiles y militares como el reconocimiento visual de áreas amplias de terreno. Para poder resolver estos problemas, se requiere contar con sistemas de rápida respuesta y alta maniobrabilidad, los grupos de investigación en las áreas de control y robótica han utilizado vehículos aéreos no tripulados (UAVs por sus siglas en inglés) [4]. Los problemas antes mencionados pueden abordarse mediante el uso de UAVs dado que dichos vehículos tienen la capacidad de acceder en ambientes peligrosos que pueden amenazar la seguridad de seres humanos, simplificar y reducir el esfuerzo desempeñando dichas actividades, un ejemplo se observa en [5].

De acuerdo con P. Castillo, R. Lozano y A. Dzul [6], las aeronaves de rotores se clasifican como sigue:

- Configuración convencional de rotor principal y de cola.
- Configuración de un solo rotor.
- Configuración coaxial con dos rotores.
- Configuración de dos rotores a los costados.
- Configuración multirotor.

Particularmente, los robots aéreos de tipo cuadricóptero se han convertido en sistemas muy populares gracias a su capacidad de lograr despegue y aterrizaje vertical, además de lograr vuelo estacionario, lo que les proporciona grandes capacidades de manejo en espacios estrechos y de difícil acceso, sin embargo, presentan la dificultad de ser sistemas subactuados [7].

Un sistema dinámico subactuado es aquel que cuenta con una cantidad de entradas de control menor que las variables posibles a controlar. Los sistemas de este tipo se utilizan en una gran cantidad de aplicaciones tales como robótica móvil, sistemas aeroespaciales y aeronáuticos, robótica flexible, entre otros. El que un sistema sea subactuado se debe a alguna de las siguientes razones [8]:

- La propia dinámica del sistema.
- Por diseño para la reducción de costos y objetivos prácticos.
- Debido a fallas en los actuadores.
- Impuesta artificialmente para crear sistemas más complejos de orden menor, y así ganar percepción en el control de sistemas subactuados de orden mayor.

Para controlar los UAVs, se han propuesto diversas estrategias de control a lo largo de los años. En [9] K. U. Lee, Y. H. Yun, W. Chang, J. B. Park, y Y. H. Choi propusieron un control de orientación para un UAV mediante el método de control por superficie dinámica (DSC) utilizando la teoría de estabilidad de Lyapunov el cual validaron mediante resultados experimentales, mientras que el diseño de controles no lineales mediante saturaciones anidadas para un cuadricóptero se muestran en [7] y [10], asegurando estabilidad global.

En redes de agentes o sistemas dinámicos, “lograr un consenso” se refiere a alcanzar un acuerdo basado en cierto valor de interés que depende del estado de cada uno de los agentes. Para el caso de sincronización, dicho acuerdo debe alcanzarse de manera simultánea al seguimiento de trayectoria para cada agente. Para este fin, se necesita desarrollar algoritmos para sincronización. Un algoritmo para sincronización se puede definir como un conjunto de reglas que especifican como se realiza el intercambio de información entre un agente y todos sus vecinos en una red.

En sincronización de sistemas, la aplicación de controles cooperativos que logren la sincronización ofrece grandes beneficios para resolver problemas relacionados a redes multiagentes. Las capacidades de coordinación entre múltiples sistemas involucra el sensado, la comunicación y la sincronización del movimiento como se expresa en [11]. Además, es posible incrementar el desempeño de este tipo de redes en sincronización y, así, aumentar el ahorro de energía para los agentes si se mejoran los ajustes de ganancias y la optimización de las leyes de control.

Cuando se combinan las ventajas con las que cuentan los cuadricópteros con un enfoque de redes de sistemas multiagentes, podemos incrementar de manera sustancial las capacidades de aplicación para este tipo de robots, logrando un gran apoyo en tareas de exploración y cobertura de lugares extensos. Podemos observar un ejemplo de estas aplicaciones en [12], donde se presenta una formación de tres robots tipo cuadricóptero utilizando evasión de colisiones,

mientras que [13] y [14] emplean una estructura de líder y subordinado para una red de tres sistemas de este mismo tipo. Un esquema de seguimiento para tres robots utilizando las posiciones reales y deseadas de los vecinos de la red y un líder virtual se muestra en [15]. Por otro lado, el concepto de sincronización se utiliza ampliamente para formaciones de sistemas robóticos multiagentes, por ejemplo, en [16], se desarrolla una ley de control distribuida de velocidad para lograr la sincronización en un grupo euclideo especial ( $SE(3)$ ), bajo la suposición que el intercambio de información entre los agentes se establece mediante un grafo fuertemente conectado. También se muestra que la entrada de control es adecuada para el caso de líder y subordinado, e incluso para los casos en que existen retardos en la comunicación y cambios en la topología.

Para el desempeño correcto de las leyes de control es necesario conocer los parámetros adecuados del sistema a controlar; sin embargo, en casos prácticos, los valores reales de dichos parámetros son difíciles de determinar de manera precisa. La implementación de métodos de control adaptativo permite abordar la problemática de incertidumbres paramétricas en el sistema y perturbaciones externas, tales como esfuerzos generados por situaciones ambientales. Más allá de lograr la estabilización, regulación y seguimiento mediante controles robustos y adaptativos, el problema de sincronización de posición implica diseño adicional en los controladores. Esto se logra mediante la inclusión de términos del consenso en los controladores que permitan penalizar el desajuste que exista entre los estados de los diferentes agentes de la red, por ejemplo, pueden incluirse términos que establezcan y penalicen, mediante una ganancia, la diferencia de las velocidades entre los agentes.

## Planteamiento del problema

Para completar las tareas mencionadas previamente, es necesario tomar en cuenta varios aspectos, entre ellos, la complejidad de la dinámica subactuada de los UAVs, su interacción con el ambiente en el que se desempeñan y los

retardos de comunicación que existen entre los UAVs y el ser humano. Por estas razones, el problema aún tiene un gran reto en el diseño de controles para estos vehículos.

## Objetivos

Esta tesis de investigación se desenvuelve de acuerdo a los objetivos estipulados a continuación.

### Objetivo general

El presente trabajo de tesis tiene por objeto el desarrollo de algoritmos de control cooperativo que logren la sincronización de múltiples agentes; en este caso, robots aéreos de tipo cuadricóptero modelados mediante la técnica basada en energías Euler-Lagrange.

### Objetivos particulares

Dentro del alcance de esta tesis se plantean objetivos particulares para el correcto desarrollo de la investigación. Estos objetivos son:

- Obtener un modelo de los robots tipo cuadricóptero mediante la técnica Euler-Lagrange.
- Síntesis de leyes de control local.
- Análisis de estabilidad del sistema controlado.
- Síntesis de leyes de control que logren la sincronización de robots aéreos tipo cuadricóptero.
- Análisis de estabilidad de la red de multiagentes.

## Metodología

Para lograr los objetivos planteados anteriormente, se trabaja con la siguiente metodología. Como primer paso, se realizará una revisión bibliográfica que permita conocer los avances actuales en el ámbito del modelado con robots aéreos no tripulados de tipo cuadricóptero. Como segundo paso, se modelará el cuadricóptero mediante las ecuaciones Euler-Lagrange de manera que permita la síntesis de controladores. En un tercer paso, se hará una investigación bibliográfica para identificar el estado del arte en el aspecto de los controladores, tanto locales como para sincronización, para sistemas dinámicos y, específicamente, para robots aéreos. Como siguiente paso, se desarrollarán de manera teórica los algoritmos de control para lograr la estabilidad y seguimiento de trayectorias, tanto en sistemas dinámicos de único agente (controladores locales) y sistemas multiagentes. Por último, se realizará la simulación de los algoritmos de control y se reportarán los resultados obtenidos en el presente trabajo.

## Estructura de la tesis

El resto de este trabajo está dividido como sigue:

- En el capítulo 1 se describe la estructura del cuadricóptero, así como las fuerzas que ejercen sus cuatro motores para el movimiento del mismo. Primeramente, se presenta el análisis cinemático del sistema, considerando los marcos de referencia del cuerpo móvil y el marco fijo a tierra, denominado inercial, derivando en la obtención de la matriz de rotación del vehículo, que permite relacionar estos dos marcos para dar posición y orientación espacial del cuadricóptero. En segunda instancia, se presentan las ecuaciones dinámicas que describen los movimientos de rotación y traslación del sistema, utilizando la formulación Euler-Lagrange, basada en los conceptos de energía cinética y potencial, dando lugar al modelo del cuadricóptero, dicho modelo es apropiado para la síntesis de controladores.

En la sección final se presenta un repaso sobre la teoría de grafos, resaltando algunos conceptos básicos y propiedades de los mismos, así como su formulación matemática para el desarrollo de algoritmos de control.

- En el capítulo 2 se retoman varios conceptos importantes en la teoría de control de sistemas dinámicos. En la primera parte se muestran definiciones como estabilidad o estabilidad asintótica, así como un repaso de las nociones de sistema y estado. Posteriormente se exponen teoremas que son fundamentales para poder comprobar la estabilidad de sistemas dinámicos no lineales. Finalmente, se presentan teoremas que serán de utilidad para el desarrollo de los algoritmos de control propuestos en esta tesis.
- En el capítulo 3 se presentan las cuatro estructuras de control propuestas. Primero, se establece el modelo de error necesario para lograr el seguimiento de trayectorias. Posteriormente, se desarrolla una estrategia basada en la técnica de backstepping. Después, se propone una ley de control por medio de saturaciones anidadas, que permite controlar los esfuerzos de control ejercidos por los motores del cuadricóptero. La tercer propuesta consta de una ley de control para el subsistema de traslación que considera los retardos que son generados en la retroalimentación del sistema debido al sensor de posicionamiento global. Por último, se propone una estrategia de control para la sincronización de sistemas multiagentes de tipo Euler-Lagrange, considerando la variación en los parámetros del sistema.
- El capítulo 4 presenta los resultados de simulación para cada una de las leyes de control propuestas en el capítulo 3. Primeramente, se muestran los parámetros de la aeronave utilizados para realizar las simulaciones. En la segunda sección se presenta la formulación matemática de la trayectoria de referencia a seguir. Los resultados para la ley de control basada en backstepping se muestran en el tercer apartado. Después se establecen los resultados para la estrategia con saturaciones anidadas. Por último, se presentan dos resultados de la ley de control para sincronización, en primer

lugar, se desarrolla un ejemplo comparativo entre dos controladores, que permite observar los beneficios de la ley de control propuesta y finalmente, se exponen los resultados para la ley de control con una red de varios agentes de tipo cuadricóptero.

- En el cierre de esta tesis, se exhiben las conclusiones obtenidas a partir del presente trabajo y se indica el trabajo a futuro a realizar para continuar con la investigación realizada.

# Modelado matemático de sistemas multiagentes

El modelado matemático de sistemas dinámicos se utiliza ampliamente en el diseño de controladores y es una de las etapas más importantes en la implementación física de este tipo de sistemas. Obtener el modelo de un sistema ayuda a entender de mejor manera su funcionamiento, además, permite analizar el comportamiento del mismo bajo diferentes condiciones de trabajo, así como sus limitaciones.

Cuando se trata de robots aéreos, obtener un modelo dinámico correcto y fiable se vuelve de suma importancia, ya que el riesgo de daños graves al sistema debido a impactos o caídas es alto, es por esto que, es de gran ayuda poder analizar su comportamiento y realizar simulaciones del sistema controlado en lazo cerrado que permitan detectar errores, analizar el desempeño para la búsqueda de mejoras y lograr una buena sintonización antes de realizar la implementación en la plataforma física.

Derivado de lo anterior, en este capítulo se obtendrá el modelo dinámico para un robot aéreo de tipo cuadricóptero mediante la técnica de Euler-Lagrange. Primeramente se realizará el análisis cinemático del sistema en la sección 1.1. En segunda instancia, se aplicará el método de energías para desarrollar el modelo dinámico del sistema, incluyendo las entradas de control que serán utilizadas en la sección 1.2. Por último, en la sección 1.4 se establecen definiciones relativas al control de sistemas multiagentes y al modelo que permite trabajar con ellos.

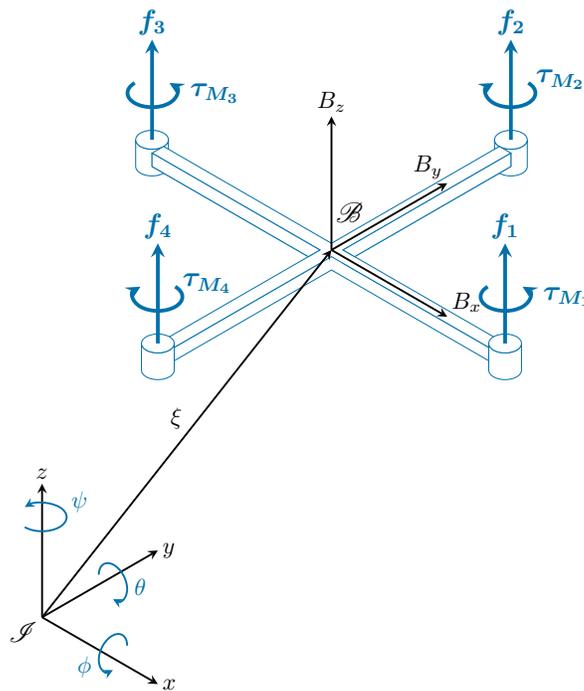
Para el desarrollo del modelo matemático y a fin de simplificar la obtención del modelo, se tomaron en cuenta las siguientes consideraciones:

- El cuadricóptero se comporta como un sólido rígido.

- La masa del cuadricóptero es constante y está simétricamente distribuida.
- El centro de gravedad del sistema y el origen del marco atado al cuadricóptero coinciden.
- El movimiento de la Tierra es despreciable, por lo que se puede considerar como un marco de referencia inercial o fijo.

## 1.1 Análisis cinemático

Para la obtención del modelo es necesario definir dos marcos de referencia, el marco inercial fijo a la tierra, denotado como  $\mathcal{I}$  y el marco de referencia móvil ubicado en el dron, denominado como  $\mathcal{B}$ . Ambos marcos se ilustran en la figura 1.1.



**Fig. 1.1:** Sistemas de coordenadas.

Con el objetivo de describir la posición y orientación del sistema físico se utiliza un conjunto de coordenadas generalizadas, las cuales pueden escribirse como:

$$q: = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^6 \quad (1.1)$$

donde  $\xi = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  y  $\eta = (\phi, \theta, \psi) \in \mathbb{R}^3$  son, la posición del centro de masa y los ángulos de Euler del cuadricóptero de acuerdo al marco de referencia inercial terrestre  $\mathcal{I}$ , respectivamente.

Para la formulación Euler-Lagrange es necesario conocer la matriz de rotación que transforma un vector tridimensional visto desde el marco de referencia  $\mathcal{B}$  atado al sistema, hasta marco de referencia  $\mathcal{I}$  fijado a la Tierra. Cualquier orientación del cuadricóptero se obtiene mediante tres rotaciones sucesivas desarrolladas a lo largo de cada uno de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Los ángulos derivados de estas rotaciones se denominan alabeo (roll), cabeceo (pitch) y guiñada (yaw) respectivamente [7]. Las matrices de rotación de cada una se representan por las siguientes matrices:

$$R(x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{bmatrix}, \quad (1.2a)$$

$$R(y, \theta) = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix}, \quad (1.2b)$$

$$R(z, \psi) = \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.2c)$$

donde  $R(x, \phi)$ ,  $R(y, \theta)$  y  $R(z, \psi) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , mientras que  $c_\phi$  y  $s_\phi$  representan las funciones trigonométricas coseno y seno del argumento ( $\phi$  en este caso),

respectivamente. Por tanto, cualquier orientación puede referenciarse del marco móvil  $\mathcal{B}$  al marco inercial  $\mathcal{I}$  mediante la matriz definida en (1.3):

$$R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{I}} = R(z, \psi)R(y, \theta)R(x, \phi),$$

$$R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{I}} = \begin{bmatrix} c_{\psi}c_{\theta} & c_{\psi}s_{\theta}s_{\phi} - s_{\psi}c_{\phi} & c_{\psi}s_{\theta}c_{\phi} + s_{\psi}s_{\phi} \\ s_{\psi}c_{\theta} & s_{\psi}s_{\theta}s_{\phi} + c_{\psi}c_{\phi} & s_{\psi}s_{\theta}c_{\phi} - c_{\psi}s_{\phi} \\ -s_{\theta} & c_{\theta}s_{\phi} & c_{\theta}c_{\phi} \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Se utiliza el hecho de que la matriz  $R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{I}}$  (denotada como  $R$  en lo sucesivo) es una matriz ortonormal, lo que permite conocer las velocidades del sistema

$$R^T R = I. \quad (1.4)$$

Para ello se deriva la expresión anterior:

$$\dot{R}^T R + R^T \dot{R} = 0, \quad (1.5)$$

después se despeja  $R^T \dot{R}$ :

$$-\dot{R}^T R = R^T \dot{R}, \quad (1.6)$$

en seguida se define  $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$  como:

$$R^T \dot{R} =: S, \quad (1.7)$$

posteriormente:

$$\dot{R} = RS. \quad (1.8)$$

De la ecuación (1.7) se observa que podemos obtener  $S$  por medio de (1.9):

$$S = R^T \frac{\partial R}{\partial \phi} \dot{\phi} + R^T \frac{\partial R}{\partial \theta} \dot{\theta} + R^T \frac{\partial R}{\partial \psi} \dot{\psi}. \quad (1.9)$$

Después se obtiene la matriz antisimétrica expresada en (1.10):

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -c_{\phi}c_{\theta}\dot{\psi} + s_{\phi}\dot{\theta} & c_{\phi}\dot{\theta} + c_{\theta}s_{\phi}\dot{\psi} \\ c_{\phi}c_{\theta}\dot{\psi} - s_{\phi}\dot{\theta} & 0 & -\dot{\phi} + s_{\theta}\dot{\psi} \\ -c_{\phi}\dot{\theta} - c_{\theta}s_{\phi}\dot{\psi} & \dot{\phi} - s_{\theta}\dot{\psi} & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Finalmente, simplificando la notación,  $S$  se puede reescribir como en (1.11):

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

donde  $a, b, c$  se utilizan para simplificar la escritura de la ecuación (1.10). Después, de acuerdo con [17] se utiliza la relación estándar cinemática  $W_n : \dot{\eta} \rightarrow \omega$ :

$$\omega = W_n \dot{\eta}. \quad (1.12)$$

se tiene la relación entre los componentes de la velocidad angular y las derivadas de los ángulos de Tait-Bryan, entonces la ecuación (1.12) se representa como [6]:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & s_\phi c_\theta \\ 0 & -s_\phi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

## 1.2 Análisis dinámico

Los modelos matemáticos de los sistemas físicos pueden derivarse de consideraciones de energía, siendo el método de Euler-Lagrange el más versátil, el modelo del cuadricóptero se obtiene por este método. En esta formulación, el objeto se considera como un cuerpo rígido en tres dimensiones, sobre el cual actúan una fuerza de empuje y tres momentos angulares. La fuerza de empuje actúa solamente sobre el eje  $Z$  del marco de referencia del dron y es la que permite que el vehículo se eleve. Es importante notar que esta fuerza no consigue realizar el movimiento del cuadricóptero en el plano  $X - Y$ . Los momentos angulares o pares son los que permiten la rotación del cuadricóptero y, por consiguiente, éstos hacen posible el movimiento del vehículo a lo largo de los ejes  $X$  y  $Y$ .

El Lagrangiano está definido como la diferencia entre la energía cinética y la potencial, es decir:

$$L = E_c - E_p, \quad (1.14)$$

donde la energía cinética se define como en (1.15):

$$E_c = E_{cTrasl} + E_{cRot}, \quad (1.15)$$

y por las ecuaciones de energía se sabe que:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2, \quad E_p = mgh. \quad (1.16)$$

En esta formulación se debe tener en cuenta la matriz de inercia definida en la ecuación (1.17):

$$D(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} mI & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

donde el Jacobiano está definido por (1.18):

$$J = W_n^T I_n W_n, \quad (1.18)$$

donde  $I_n$  es la matriz de inercia y toma los términos de los productos cruzados del tensor de inercia como nulos, por lo que  $I_n$  es una matriz diagonal definida en (1.19):

$$I_n = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad (1.19)$$

donde  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  son los momentos de inercia del sistema. De lo anterior, se tiene que  $J$  queda expresado como:

$$J = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xx}s_\theta \\ 0 & I_{yy}c_\phi^2 + I_{zz}s_\phi^2 & I_{yy}c_\theta c_\phi s_\phi - I_{zz}c_\theta c_\phi s_\phi \\ -I_{xx}s_\theta & I_{yy}c_\theta c_\phi s_\phi - I_{zz}c_\theta c_\phi s_\phi & I_{zz}c_\theta^2 c_\phi^2 + I_{xx}s_\theta^2 + I_{yy}c_\theta^2 s_\phi^2 \end{bmatrix}, \quad (1.20)$$

además, la energía cinética traslacional se define como:

$$E_{cTrasl}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{\xi}^T m I \dot{\xi}, \quad (1.21)$$

y la energía cinética rotacional:

$$E_{cRot}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T J \dot{\eta}, \quad (1.22)$$

asimismo, para la energía potencial, se tiene:

$$E_p(q) = m \begin{bmatrix} 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z & \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^T, \quad (1.23)$$

mientras que el vector de gravedad  $G$  adopta la siguiente forma:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (1.24)$$

Por otro lado, la ecuación de Euler-Lagrange se define como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \begin{bmatrix} F_\xi \\ \tau \end{bmatrix}. \quad (1.25)$$

La fuerza traslacional solamente actúa en el eje  $z$ , por lo que se puede expresar como:

$$F_\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

Los pares necesarios para lograr la rotación del cuadricóptero se obtienen a partir de las diferencias en las fuerzas  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  y  $f_4$  ejercidas por los motores frontal, derecho, trasero e izquierdo, respectivamente, y sobre el centro de masa del dron, como se muestra en (1.27):

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f_3 - f_1)l \\ (f_2 - f_4)l \\ \sum_{i=1}^4 \tau_{M_i} \end{bmatrix}. \quad (1.27)$$

Después se obtienen las derivadas del Lagrangiano definido en la ecuación (1.14):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2}[D(q)\dot{q} + \dot{q}^T D(q)], \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = D(q)\dot{q}. \quad (1.29)$$

Derivando con respecto del tiempo se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \dot{D}(q)\dot{q} + D(q)\ddot{q}, \quad (1.30)$$

y la derivada con respecto a las coordenadas generalizadas  $q$  es:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial E_c}{\partial q} - \frac{\partial E_p}{\partial q} = \frac{\partial E_c}{\partial q} - mG. \quad (1.31)$$

Con lo que se puede reescribir (1.25) como:

$$\dot{D}(q)\dot{q} + D(q)\ddot{q} - \frac{\partial E_c}{\partial q} - G = \begin{bmatrix} F_\xi \\ \tau \end{bmatrix}. \quad (1.32)$$

De (1.32), se define la matriz de Coriolis como:

$$C[q, \dot{q}]\dot{q} = \dot{D}(q)\dot{q} - \frac{\partial E_c}{\partial q}. \quad (1.33)$$

Como la matriz de Coriolis sólo interviene durante las rotaciones, se puede reescribir como:

$$C[q, \dot{q}] = \frac{d}{dt} \left( \omega^T I \frac{\partial \omega}{\partial \dot{\eta}} \right) - \omega^T I \frac{\partial \omega}{\partial \eta}. \quad (1.34)$$

Resolviendo la ecuación (1.34) se llega a la matriz de Coriolis definida en (1.35):

$$C[q, \dot{q}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}, \quad (1.35)$$

donde cada término está definido como:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= 0, \\
C_{12} &= -I_{xx}\dot{\psi}c_\theta + I_{yy}(\dot{\theta}s_\phi c_\phi + \dot{\psi}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\psi}c_\theta c_\phi^2) - I_{zz}(\dot{\psi}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\psi}c_\theta c_\phi^2 + \dot{\theta}s_\phi c_\phi), \\
C_{13} &= -I_{yy}\dot{\psi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi + I_{zz}\dot{\psi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi, \\
C_{21} &= I_{xx}\dot{\psi}c_\theta + I_{yy}(-\dot{\theta}s_\phi c_\phi + \dot{\psi}c_\theta c_\phi^2 - \dot{\psi}c_\theta s_\phi^2) + I_{zz}(\dot{\psi}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\psi}c_\theta c_\phi^2 + \dot{\theta}s_\phi c_\phi), \\
C_{22} &= -I_{yy}\dot{\phi}s_\phi c_\phi + I_{zz}\dot{\phi}s_\phi c_\phi, \\
C_{23} &= -I_{xx}\dot{\psi}s_\theta c_\theta + I_{yy}\dot{\psi}s_\theta c_\theta s_\phi^2 + I_{zz}\dot{\psi}s_\theta c_\theta c_\phi^2, \\
C_{31} &= -I_{xx}\dot{\theta}c_\theta + I_{yy}\dot{\psi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi - I_{zz}\dot{\psi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi, \\
C_{32} &= I_{xx}\dot{\psi}s_\theta c_\theta - I_{yy}(\dot{\theta}s_\theta s_\phi c_\phi + \dot{\phi}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\phi}c_\theta c_\phi^2 + \dot{\psi}s_\theta c_\theta s_\phi^2) \\
&\quad + I_{zz}(\dot{\phi}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\phi}c_\theta c_\phi^2 - \dot{\psi}s_\theta c_\theta c_\phi^2 + \dot{\theta}s_\theta s_\phi c_\phi), \\
C_{33} &= I_{xx}\dot{\theta}s_\theta c_\theta + I_{yy}(-\dot{\theta}s_\theta c_\theta s_\phi^2 + \dot{\phi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi) - I_{zz}(\dot{\theta}s_\theta c_\theta c_\phi^2 + \dot{\phi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi).
\end{aligned}$$

Por último, se define la matriz  $M$  como:

$$M(\eta) := J, \quad (1.36)$$

y se escribe el modelo en espacio de estados.

Debido a la estructura del propio sistema, éste se separa en dos subsistemas, uno para la traslación y otro para la rotación. Ambos modelos se presentan en las ecuaciones (1.37) y (1.38) respectivamente.

$$m\ddot{\xi} + mg \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{I}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \end{bmatrix}, \quad (1.37)$$

$$M(\eta)\ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} = \tau_\eta. \quad (1.38)$$

El vector de estado del modelo está definido como en la ecuación (1.39)

$$[\xi \ \dot{\xi} \ \eta \ \dot{\eta}]^T = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \phi \ \theta \ \psi \ \dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T, \quad (1.39)$$

de manera que las entradas de control del sistema son  $u_1$  y  $\tau_\eta$ , donde  $\tau_\eta$  queda definido como:

$$\tau_\eta = \begin{bmatrix} lu_2 \\ lu_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad (1.40)$$

donde  $l$  es la longitud de brazo del cuadricóptero.

En la ecuación (1.37),  $u_1$  denota al empuje total ejercido por el sistema de propulsión, mientras que en la ecuación (1.40),  $u_2$  es el par generado por la diferencia de empuje entre el motor frontal y trasero,  $u_3$  es el par generado por la diferencia de empuje entre el motor derecho e izquierdo y  $u_4$  es el par generado por la diferencia de empuje entre los motores que giran en sentido horario y los que giran en sentido antihorario. Debido a que existen 6 posibles coordenadas a controlar y solamente 4 entradas de control el sistema se considera subactuado.

Es importante mencionar que las matrices  $M$  y  $C$  mostradas en (1.38) no son totalmente independientes entre ellas, y cumplen las siguientes propiedades:

- La matriz  $M$  es simétrica, definida positiva y acotada.
- La matriz  $\dot{M}$  se puede escribir como  $\dot{M} := C + C^T$
- La matriz  $\dot{M} - 2C$  es una matriz antisimétrica de la que se cumple que

$$\dot{q}^T \left( \frac{1}{2} \dot{M} - 2C \right) \dot{q} = 0. \quad (1.41)$$

- El modelo dinámico establecido en la ecuación (1.38) es lineal con respecto a un conjunto de parámetros físicos  $\hat{\theta}$ , esto es,

$$M(\eta)\ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} = \Phi\hat{\theta}, \quad (1.42)$$

donde  $\Phi$  se denomina matriz de regresión del sistema.

Las propiedades anteriores aparecen reportadas en diversos trabajos, observe por ejemplo [18], [19] y [20].

Vale la pena recalcar que estas propiedades se cumplen para cualquier sistema modelado mediante la técnica Euler-Lagrange cuando tienen la siguiente estructura:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau. \quad (1.43)$$

## 1.3 Teoría de grafos

En la presente sección se mencionan las bases de la teoría de grafos que permiten un claro entendimiento del modelado realizado para sistemas multi-agentes. Para mayores detalles se puede referir a [21].

**Definición 1.** *Un grafo es un par de conjuntos  $\mathcal{G} = (V, E)$ , donde los elementos de  $V$  se denominan vértices (o nodos, o puntos) del grafo  $\mathcal{G}$  y los elementos de  $E$  se les nombra aristas (o líneas). Se le llama un grafo en  $V$  cuando este es su conjunto de vértices. Para referirse a los conjuntos de un determinado grafo  $\mathcal{G}$  se utilizan las expresiones  $V(\mathcal{G})$  para el conjunto de vértices y  $E(\mathcal{G})$  para el conjunto de aristas.*

Comúnmente los grafos se dibujan representando cada nodo como un punto, mientras que cada arista se representa con una línea, en la figura 1.2 se muestra un ejemplo de un grafo cuyos conjuntos de vértices y aristas son  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  y  $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (3, 4), (3, 6), (4, 7), (6, 7)\}$ , respectivamente.

**Definición 2.** *Se denomina orden de un grafo  $\mathcal{G}$  al número de vértices que contiene éste, y se denota como  $|\mathcal{G}|$ , mientras que el número de aristas se representa por  $\|\mathcal{G}\|$ .*

En el ejemplo de la figura 1.2 se puede apreciar que el grafo tiene orden  $|\mathcal{G}| = 7$  que son los nodos numerados, mientras que la cantidad de aristas con

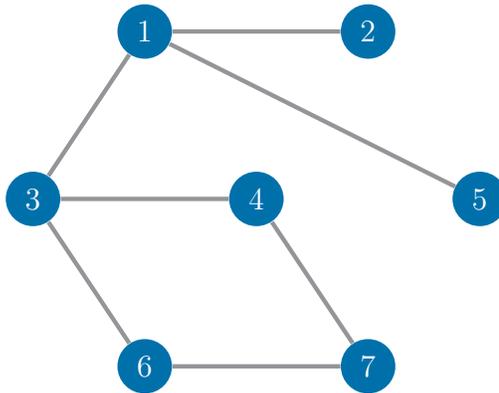


Fig. 1.2: Grafo

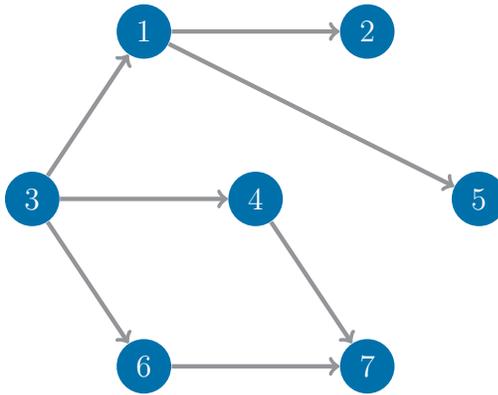
las que cuenta es  $\|\mathcal{G}\| = 7$ , esto se obtiene contando las líneas o los elementos del conjunto  $E$ .

**Definición 3.** Se dice que un vértice  $v$  es incidente con un arista  $e$  si  $v \in e$  y, por tanto,  $e$  es un arista en  $v$ . Los dos vértices que son incidentes con un arista se denominan sus terminaciones, un arista une sus terminaciones, es decir, los vértices que conecta. Una arista  $\{x, y\}$  usualmente se denota simplemente por  $xy$  o  $yx$ . El conjunto de todas las aristas en  $E$  en un determinado vértice  $v$  se representa como  $E(v)$ .

**Definición 4.** Dos vértices de  $\mathcal{G}$  denotados como  $x, y$ , son adyacentes o vecinos, si  $xy$  es una arista de  $\mathcal{G}$ . Dos aristas distintas  $e$  y  $f$  son adyacentes si comparten una terminación común. Si todos los vértices de  $\mathcal{G}$  son pares adyacentes, entonces el grafo  $\mathcal{G}$  se dice que es completo. A los pares de vértices o aristas no adyacentes se les denomina independientes.

**Definición 5.** El grado o valencia de un vértice  $v$  es el número de aristas en  $v$  y se denota por  $d_G(v) = d(v)$ .

**Definición 6.** Se dice que un grafo  $\mathcal{G}$  está conectado si cualesquiera dos de sus vértices están unidos mediante una trayectoria en  $G$ .



**Fig. 1.3:** Grafo dirigido (digrafo)

**Definición 7.** Un grafo dirigido (digrafo) es un par de conjuntos  $\mathcal{G} = (V, \mathcal{E}, \mathcal{A})$  donde  $V$  es el conjunto de vértices,  $\mathcal{E}$  corresponde al conjunto de aristas direccionadas que representa el flujo de información en el sentido de la arista y  $\mathcal{A}$  es la matriz de adyacencias del digrafo. En la figura 1.3 se muestra un ejemplo de un grafo dirigido.

## 1.4 Modelado de sistemas multiagentes

La investigación del control de sistemas multiagentes es muy popular en la actualidad. Poder controlar varios sistemas de manera coordinada permite realizar tareas complejas de manera más sencilla, así como lograr el ahorro de energía al disminuir el tiempo de funcionamiento de los agentes durante tareas complejas, además de hacer actividades que serían imposibles de lograr con un único sistema.

En cuestión de redes de sistemas, existen dos problemáticas de control definidas a continuación [20]:

- **Sincronización.** Considere una trayectoria deseada para todos los agentes tal que sea acotada definida como  $x_d(t) = \text{col} \left( q_d^T(t), \dot{q}_d^T(t) \right) \in \mathbb{R}^{2n}$ , con

$\ddot{q}_d \in \mathcal{L}_\infty$ , todos los estados de los agentes deben seguir dicha trayectoria, esto es,  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{x}_i(t)| = 0$  donde  $\tilde{x}_i := x_i - x_d$ .

- **Consensus.** Se denomina así cuando no existe una señal de referencia, esto es,  $q_d(t) \equiv 0$ , las posiciones de todos los agentes deben alcanzar un consenso, esto es,  $\lim_{t \rightarrow \infty} q_i(t) = q_c$ , para algún  $q_c \in \mathbb{R}^n$ . Además,  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{q}_i(t)| = 0$ .

En una red de sistemas Euler-Lagrange (EL), denotados como agentes, el intercambio de información entre los elementos a través de la red se describe por medio de un grafo de interconexión direccionado, donde cada nodo es un agente de la red. Para la presente tesis se trabajó con un sistema de 3 agentes descrito en la figura siguiente:

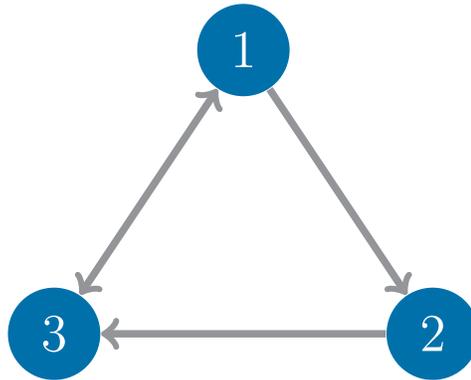


Fig. 1.4: Grafo direccionado.

El grafo presentado en la figura 1.4 es un grafo simplemente conectado, esto es, existe un nodo tal que todos los otros nodos del grafo están conectados a este nodo por medio de una trayectoria dirigida. Para realizar el modelado

del grafo se utiliza la matriz Laplaciana  $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , cuyos elementos se definen como:

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^N a_{ik} & i = j \\ -a_{ik} & i \neq j, \end{cases} \quad (1.44)$$

donde  $a_{ij} = 1$  si  $j \in \mathcal{N}_i$ , en caso contrario,  $a_{ij} = 0$  y  $\mathcal{N}_i$  es el conjunto de agentes que transmiten información al  $i$ -ésimo agente. Por tanto, para el grafo descrito en la figura 1.4, la matriz Laplaciana queda definida como:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (1.45)$$

La matriz Laplaciana tiene varias propiedades fundamentales, las cuales han sido abordadas en diversos trabajos. Los detalles de algunas de estas propiedades pueden encontrarse en [22, 23] y se explican a continuación.

## 1.5 Propiedades de la matriz Laplaciana

**Definición 8.** Sea  $G = (V, \mathcal{E}, \mathcal{A})$  un grafo dirigido con  $N$  nodos. El grado de entrada y salida de un nodo  $v_i$  se definen como sigue:

$$deg_{in}(v_i) = \sum_{k=1}^N a_{ki}, \quad deg_{out}(v_i) = \sum_{k=1}^N a_{ik} \quad (1.46)$$

Por la propia definición del Laplaciano mostrada en la ecuación (1.44), cualquier suma de renglón de la matriz es cero. Es por esta razón, que el Laplaciano del grafo siempre tiene un eigenvalor cero, o dicho de otra manera,  $rango(\mathcal{L}) \leq N - 1$ , y dicho eigenvalor corresponde al eigenvector por la derecha:

$$w_r = 1_N = (1, 1, \dots, 1)^T \quad (1.47)$$

con elementos idénticos y distintos de cero.

A un digrafo se le denomina “fuertemente conectado” si, y sólo si, cualesquiera dos de sus nodos del grafo pueden conectarse mediante una trayectoria que respeta la orientación de las aristas del digrafo. Los siguientes teoremas permiten establecer las dos propiedades básicas de un digrafo y su Laplaciano.

**Teorema 1.** *Sea  $G = (V, \mathcal{E}, \mathcal{A})$  un digrafo con Laplaciano  $\mathcal{L}$ . Entonces  $G$  es fuertemente conectado si y sólo si  $\text{rango}(\mathcal{L}) = N - 1$ .*

**Prueba.** *La demostración de este teorema implica términos y teoría más profunda de grafos y Laplaciano, refiérase a [23] para observar dicha prueba.*

**Teorema 2** (Teorema de Geršgorin [24]). *Para cualquier matriz  $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y cualquier eigenvalor  $\lambda \in \sigma(A)$ , donde  $\sigma(A)$  es el espectro de  $A$ , Entonces se cumple que:*

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (1.48)$$

En consecuencia,

$$\lambda \in \mathcal{D}_i(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \in \mathcal{I}, j \neq i} |a_{ij}|\},$$

donde  $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$  y por tanto,

$$\lambda \in \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{D}_i(A).$$

Esto es cierto para cada  $\lambda \in \sigma(A)$ , entonces

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{D}_i(A). \quad (1.49)$$

De manera que el teorema 2 es necesario para poder realizar la prueba del siguiente resultado.

**Teorema 3** (Localización espectral). Sea  $\mathcal{G} = (V, \mathcal{E}, \mathcal{A})$  un digrafo con Laplaciano  $\mathcal{L}$ . Denote el máximo grado de salida de los nodos de  $\mathcal{G}$  como  $d_{max}(\mathcal{G}) = \max_i deg_{out}(v_i)$ . Entonces, todos los eigenvalores de  $\mathcal{L}$  están localizados en el siguiente disco:

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}) = \{z \in \mathbb{C} : |z - d_{max}(\mathcal{G})| \leq d_{max}(\mathcal{G})\} \quad (1.50)$$

centrado en  $z = d_{max}(\mathcal{G}) + 0j$  en el plano complejo.

**Prueba.** Basado en el teorema del disco de Geršgorin mostrado en el teorema 2, todos los eigenvalores de  $\mathcal{L}$  están localizados en la unión de los siguientes  $N$  discos:

$$\mathcal{D}_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - l_{ii}| \leq \sum_{j \in \mathcal{I}, j \neq i} |l_{ij}|\}, \quad (1.51)$$

donde  $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$  es el conjunto de índices del grafo. Además, sabemos de la definición en la ecuación (1.44) y de la definición 8 que  $l_{ii} = deg_{out}(v_i)$ . Se define  $\Delta_{ii}$  como

$$\sum_{j \in \mathcal{I}, j \neq i} |l_{ij}| = deg_{out}(v_i) =: \Delta_{ii}. \quad (1.52)$$

Entonces,  $\mathcal{D}_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - \Delta_{ii}| \leq \Delta_{ii}\}$ . Por otro lado, todos estos discos están contenidos en el disco  $\mathcal{D}(\mathcal{G})$  más grande con radio  $d_{max}(\mathcal{G})$ . Por lo que, basado en el teorema 2, todos los eigenvalores de  $-\mathcal{L}$  están localizados en el disco  $\mathcal{D}'(\mathcal{G}) = \{z \in \mathbb{C} : |z + d_{max}(\mathcal{G})| \leq d_{max}(\mathcal{G})\}$ , este es la imagen reflejo de  $\mathcal{D}(\mathcal{G})$  con respecto al eje imaginario.  $\square$

**Nota.** Los dos teoremas anteriores se mantienen bajo una condición más débil de existencia de un árbol de expansión dirigido para  $\mathcal{G}$ . Se dice que  $\mathcal{G}$  tiene un árbol de expansión dirigido si existe un nodo  $r$  (una raíz) tal que todos los demás nodos pueden ser vinculados a  $r$  por medio de una trayectoria dirigida. Donde al nodo raíz se le denomina comúnmente líder, para mayores detalles véase [22] y las referencias de éste.

Estas dos propiedades de la matriz Laplaciana serán útiles para el desarrollo del control que se realizará posteriormente en la sección 3.7.

## 1.6 Ejemplo de aplicación

Con el objetivo de clarificar los conceptos y las propiedades mostradas en la sección anterior, se propone el siguiente ejemplo numérico.

Considere una red de cuatro manipuladores no lineales de dos grados de libertad con juntas de revoluta. La dinámica de cada uno de estos manipuladores se describe mediante un sistema E-L con la estructura de la ecuación siguiente:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau. \quad (1.53)$$

cuyas matrices  $M$ ,  $C$  y  $G$  están definidas como:

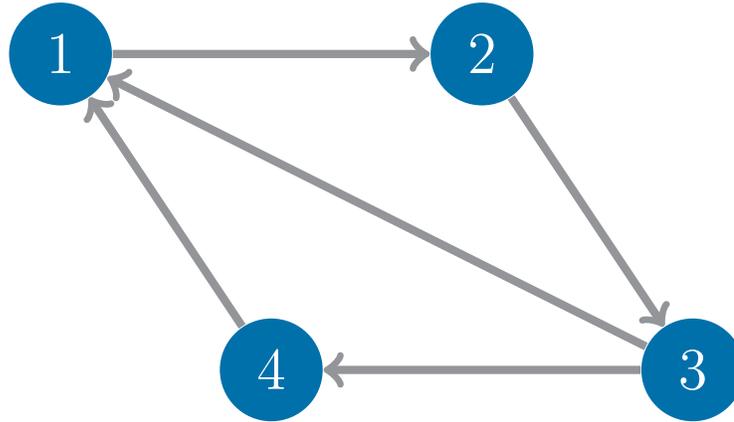
$$M(q) = \begin{bmatrix} \alpha + 2\beta c_2 & \delta + \beta c_2 \\ \delta + \beta c_2 & \delta \end{bmatrix}, \quad (1.54a)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -2\beta s_2 \dot{q}_2 & -\beta s_2 \dot{q}_2 \\ \beta s_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.54b)$$

$$G(q) = g \begin{bmatrix} \frac{1}{l_2} \delta c_{12} + \frac{1}{l_1} (\alpha - \delta) c_1 \\ \frac{1}{l_2} \delta c_{12} \end{bmatrix}. \quad (1.54c)$$

donde  $c_k$ ,  $s_k$  y  $c_{12}$  es la notación corta para  $\cos(q_k)$ ,  $\sin(q_k)$  y  $\cos(q_1 + q_2)$  respectivamente,  $q_k$  se refiere a la posición articular del eslabón  $k$  del manipulador. Además se definen  $\alpha := l_2^2 m_2 + l_1^2 (m_1 + m_2)$ ,  $\beta = l_1 l_2 m_2$  y  $\delta = l_2^2 m_2$ , por último se establece que  $l_k$  y  $m_k$  corresponden a la longitud y masa de cada eslabón respectivamente. Entonces el modelo queda expresado como:

$$\begin{bmatrix} \alpha + 2\beta c_2 & \delta + \beta c_2 \\ \delta + \beta c_2 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2\beta s_2 \dot{q}_2 & -\beta s_2 \dot{q}_2 \\ \beta s_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} \frac{1}{l_2} \delta c_{12} + \frac{1}{l_1} (\alpha - \delta) c_1 \\ \frac{1}{l_2} \delta c_{12} \end{bmatrix} = \tau = \Phi \hat{\theta}. \quad (1.55)$$



**Fig. 1.5:** Grafo de comunicación.

Aplicando una de las propiedades mencionadas en la sección 1.5 para el modelado de un sistema E-L, sabemos que dicho modelo es lineal con respecto a un conjunto de parámetros  $\hat{\theta}$ , para este caso, el vector de parámetros está definido como:

$$\hat{\theta} := [\hat{\alpha} \quad \hat{\beta} \quad \hat{\delta} \quad \frac{1}{l_2} \hat{\delta} \quad \frac{1}{l_1} (\hat{\alpha} - \hat{\delta})]^T. \quad (1.56)$$

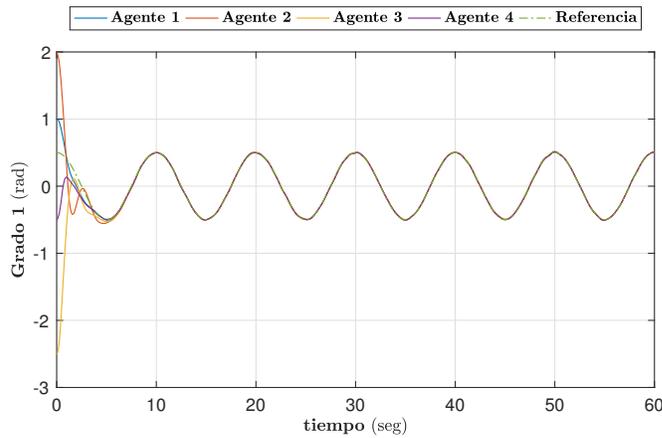
Una vez definido el vector de parámetros  $\hat{\theta}$  se obtiene la matriz  $\Phi$  a partir de las ecuaciones (1.55) y (1.56) como:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & 2c_2\ddot{q}_1 + c_2\ddot{q}_2 - 2s_2\dot{q}_1\dot{q}_2 - s_2\dot{q}_2^2 & \ddot{q}_2 & gc_{12} & gc_{11} \\ 0 & c_2\ddot{q}_1 + s_2\dot{q}_1^2 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & gc_{12} & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (1.57)$$

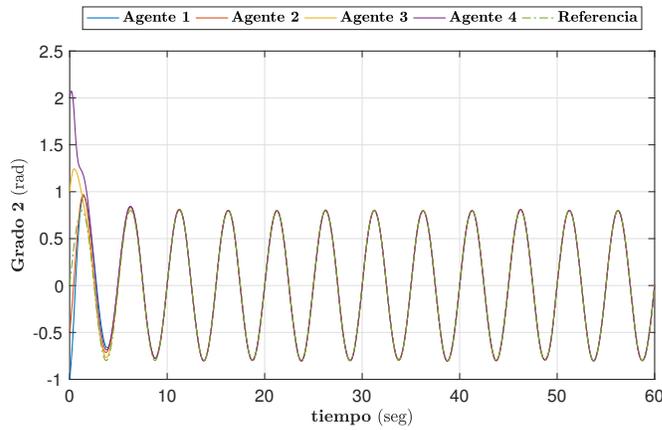
El flujo de información a través de la red de los manipuladores se describe por medio del grafo mostrado en la figura 1.5. A partir de dicho grafo se obtiene la siguiente matriz Laplaciana:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.58)$$

se puede observar que mediante una combinación lineal de los tres primeros renglones de  $\mathcal{L}$ , específicamente  $-r_1 - 2r_2 - 2r_3$ , podemos obtener el cuarto renglón, por lo que el rango de la matriz es 3, lo cual corresponde a  $N - 1$  siendo  $N = 4$ . Por último, en las siguientes gráficas se muestra el comportamiento de la red en sincronización.



**Fig. 1.6:** Sincronización de la junta 1.



**Fig. 1.7:** Sincronización de la junta 2.

# Fundamentos teóricos de control

Para poder abordar el diseño de leyes de control para un sistema es importante conocer el modelado con el que se cuenta, en la sección 2.1 se presentan los diferentes tipos de sistemas de acuerdo a si existen retardos, o no, en su comportamiento. Por otro lado, cuando se realiza el control de sistemas dinámicos, uno de los objetivos primordiales se refiere a lograr la estabilidad de los mismos, por esta razón, en la sección 2.2 se presentan algunas definiciones básicas sobre estabilidad de sistemas dinámicos mientras que algunos resultados preliminares importantes para el diseño de los controladores desarrollados en este trabajo de tesis se abordan en la sección 2.4.

## 2.1 Tipos de sistemas

**Definición 9.** *Se dice que un sistema dinámico es finito-dimensional si, para determinar una solución particular de éste, se requiere una cantidad finita de información, de lo contrario, se dice que el sistema es infinito-dimensional.*

Consideremos el siguiente sistema:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \quad (2.1)$$

donde  $h \geq 0$ ,  $t \geq t_0$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  y  $f(t, x, y)$  es una función bien definida en  $t, x, y$ , mas aún, se asume que  $f$  es continua con respecto a sus argumentos.

**Definición 10** (Condición inicial). Dado un  $t_0 \in \mathbb{R}$ , entonces el problema del valor inicial se puede establecer como: sea  $t_0 \in \mathbb{R}$  el tiempo inicial y una función inicial  $\varphi$ , se define una solución  $x(t)$  tal que satisface

$$x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \forall \theta \in [t_0 - h, t_0], \quad (2.2)$$

donde  $\varphi$  pertenece a un espacio funcional que puede ser  $\mathcal{C}([t_0 - h, t_0], \mathbb{R}^n)$ , o bien  $PC([t_0 - h, t_0], \mathbb{R}^n)$ .

**Definición 11** (Estado). Dado un instante inicial  $t_0 \in \mathbb{R}$  y sea  $t_1 \geq t_0$ , se define el estado como la información mínima requerida para continuar con la dinámica del sistema para  $t \geq t_1$ .

**Definición 12** (Sistemas sin retardo). Considere el sistema:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (t_0, x_0), \quad (2.3)$$

donde  $x_0$  es la condición inicial y es posible conocer el estado  $x$  del sistema dinámico de manera inmediata en cualquier tiempo  $t \geq t_0$ . Entonces, para continuar con la dinámica de dicho sistema para  $t \geq t_0$  se requiere conocer  $x_0 := x(t_0)$ .

**Definición 13** (Sistemas con retardo). En este caso el estado es toda la trayectoria en el intervalo  $[t - h, t]$ . El estado es un elemento del espacio funcional  $PC([t - h, t], \mathbb{R}^n)$  y se denota por:

$$x_t := \{x(t + \theta) : \theta \in [-h, 0]\}; \quad (2.4)$$

por consiguiente, un sistema dinámico con retardo se puede representar como:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t). \quad (2.5)$$

Para el caso de un retardo distribuido se tiene:

$$\dot{x}(t) = \int_{-h}^0 f(t, x(t + \theta)) d\theta. \quad (2.6)$$

## 2.2 Conceptos de estabilidad

Para poder establecer los siguientes conceptos es necesario definir, primeramente, las características de la ecuación que representa el sistema. Considérese la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad (2.7)$$

y sea  $\varphi(t)$  una solución de (2.7) definida en  $[0, +\infty)$ . En lo sucesivo supongámos que  $\exists a > 0$ , tal que:

$$f \in \mathcal{C}^1(\Delta_a, \mathbb{R}^n), \quad (2.8)$$

donde:

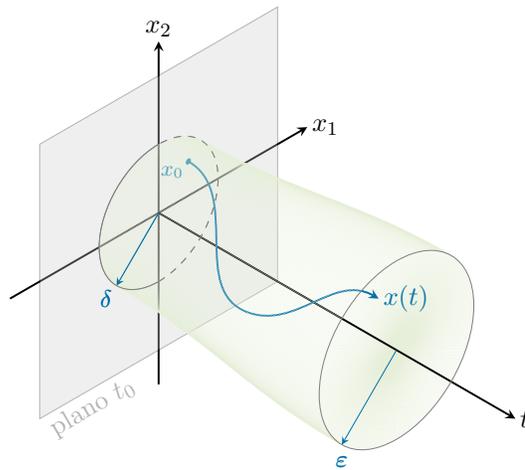
$$\Delta_a = \{(t, x) : t \geq 0 \wedge \|x(t) - \varphi(t)\| < a\} \quad (2.9)$$

**Definición 14** (Estabilidad [E]). *Se dice que una solución  $\varphi(t)$  es estable en  $[t_0, +\infty)$  si  $\forall \epsilon > 0$  y todo  $t_0 > 0 \exists \delta(\epsilon, t_0) =: \delta > 0$  tal que  $\forall x_0 \in B_\delta(\varphi(t_0))$  se tiene que la solución*

$$x(t; t_0, x_0) \quad (2.10)$$

*está definida en  $[t_0, +\infty)$  y satisface*

$$\sup_{t \geq t_0} \|x(t; t_0, x_0) - \varphi(t)\| < \epsilon. \quad (2.11)$$



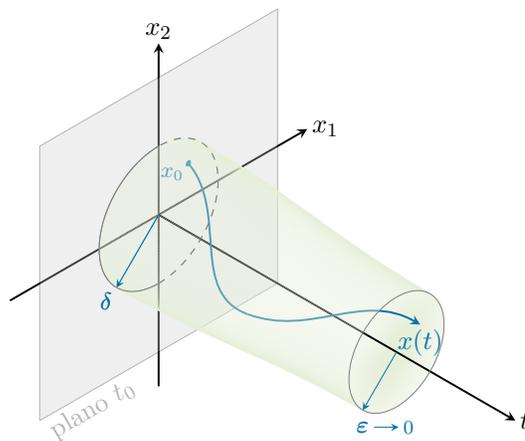
**Fig. 2.1:** Estabilidad.

**Definición 15** (Estabilidad Asintótica [AE]). *La solución  $\varphi(t)$  se dice asintóticamente estable en  $[t_0, +\infty)$  si  $\varphi(t)$  es estable y además,  $\forall t_0 \geq 0, \exists \gamma(t_0) =: \gamma > 0$  tal que*

$$\forall x_0 \in B_\gamma(\varphi(t_0))$$

*se cumple*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; t_0, x_0) - \varphi(t)\| \rightarrow 0. \quad (2.12)$$



**Fig. 2.2:** Estabilidad asintótica.

## 2.3 Estabilidad en el sentido de Lyapunov [25]

Cuando se estudian los sistemas dinámicos se presentan diversos tipos de problemas de estabilidad, la estabilidad en el sentido de Lyapunov nos permite analizar el comportamiento con respecto a los puntos de equilibrio del sistema. Se dice que un punto de equilibrio es estable, si todas las soluciones que inician en una vecindad cercana a dicho punto permanecen próximas al mismo. Mas aún, si dichas soluciones no sólo permanecen en la cercanía del punto de equilibrio sino que además tienden al mismo cuando el tiempo se aproxima a infinito, entonces se considera asintóticamente estable, de lo contrario el punto es inestable.

Para los conceptos establecidos en esta sección considere el sistema autónomo expresado como:

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.13)$$

se dice que un sistema es autónomo cuando la función  $f$  no depende explícitamente del tiempo  $t$ .

**Definición 16.** *El punto de equilibrio  $x = 0$  de (2.13) es*

- *estable si, para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.14)$$

- *inestable si no es estable.*
- *asintóticamente estable si es estable y  $\delta$  puede ser elegido tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (2.15)$$

El teorema de estabilidad de Lyapunov que se muestra a continuación proporciona condiciones de suficiencia para estabilidad y estabilidad asintótica

de sistemas dinámicos, sin embargo, no se establece si existen condiciones que sean igualmente necesarias.

**Teorema 4.** *Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio para (2.13) y sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contenga el punto  $x = 0$ . Considere una función continuamente diferenciable  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:*

$$V(0) = 0, V(x) > 0, \forall x \in D - \{0\}, \quad (2.16)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in D. \quad (2.17)$$

*Entonces,  $x = 0$  es estable. Mas aún, si*

$$\dot{V}(x) < 0, \forall x \in D, \quad (2.18)$$

*entonces  $x = 0$  es asintóticamente estable.*

Cuando se demuestra que el origen  $x = 0$  es asintóticamente estable, es importante conocer cuanto puede alejarse la solución del sistema con respecto al origen y mantener la convergencia hacia éste cuando  $t$  se aproxima a  $\infty$ . Es este análisis lo que nos lleva a la definición de región o dominio de atracción. Considere la solución del sistema (2.13)  $\phi(t; x)$ , con estado inicial  $x$  en  $t = 0$ . La región de atracción se define como el conjunto de todos los puntos  $x$  tales que  $\phi(t; x)$  se encuentra bien definida para  $t \geq 0$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t; x) = 0$ .

Encontrar dicha región de atracción de manera analítica puede ser difícil, e incluso, imposible en algunos casos. Sin embargo, las funciones de Lyapunov pueden ayudar a estimar esta región. Uno de los aspectos importantes cuando se aborda el tema de región de atracción implica que, si es posible demostrar que para cualquier estado inicial  $x$ , la trayectoria  $\phi(t; x)$  se aproxima al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ , sin importar la magnitud de  $\|x\|$  y, además, el punto de equilibrio es asintóticamente estable, entonces se dice que dicho punto es globalmente asin-

tóticamente estable ([26]) y su región de atracción es todo  $\mathbb{R}^n$ . Las condiciones se establecen en el siguiente teorema.

**Teorema 5** (Barbashin-Krasovskii). *Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio para (2.13). Considere una función continuamente diferenciable  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:*

$$V(0) = 0, V(x) > 0, \forall x \neq 0, \quad (2.19)$$

además, dicha función  $V$  es radialmente no acotada, esto es,

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty, \quad (2.20)$$

y se cumple que

$$\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0, \quad (2.21)$$

entonces  $x = 0$  es globalmente asintóticamente estable.

## 2.4 Resultados preliminares

A continuación se presentan teoremas conocidos y que son de vital importancia para poder establecer los resultados del presente trabajo. No se expondrán las pruebas de estos resultados dado que ya han sido abordadas en la literatura, veáse por ejemplo [25].

### 2.4.1 Backstepping

Considere el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\zeta, \\ \dot{\zeta} &= u, \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\zeta \in \mathbb{R}$  y  $f(0) = 0$ . Suponga que existe una función continuamente diferenciable  $\alpha(x)$  con  $\alpha(0)$ , tal que el origen del sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x) \quad (2.23)$$

es globalmente asintóticamente estable (GAS). Entonces, se busca encontrar una ley de control  $u(x, \zeta)$  tal que el origen  $(x, \zeta) = (0, 0)$  sea GAS.

**Teorema 6** (Backstepping [25]). *Sean  $f$  y  $g$  campos vectoriales suficientemente suaves con  $f(0) = 0$ . Supóngase que  $\exists \alpha(x) \in \mathcal{C}^1$  con  $\alpha(0) = 0$  y una función  $\mathcal{V}(x)$  definida positiva y radialmente no acotada tal que*

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, f(x) + g(x)\alpha(x) \right\rangle < 0, \forall x \neq 0. \quad (2.24)$$

Entonces, el origen  $(x, \zeta) = (0, 0)$  del sistema extendido:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\zeta, \\ \dot{\zeta} &= u, \end{aligned} \quad (2.25)$$

será GAS, con la ley de control:

$$u(x, \zeta) = -K(\zeta - \alpha(x)) + \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \dot{x} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, g(x) \right\rangle, \quad (2.26)$$

y la función:

$$\tilde{\mathcal{V}}(x, \zeta) := \mathcal{V}(x) + \frac{1}{2}(\zeta - \alpha(x))^2, \quad (2.27)$$

es su función de Lyapunov.

**Ejemplo 2.1.** *Sea el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + x^3 + \xi, \\ \dot{\xi} &= u, \end{aligned} \quad (2.28)$$

de acuerdo al teorema de backstepping considere un sistema inicial de la forma:

$$\dot{x} = x + x^3 + \tilde{u}, \quad (2.29)$$

donde  $\tilde{u}$  se considera una entrada de control virtual y cuya función de Lyapunov se selecciona como:

$$\mathcal{V}(x) = \frac{1}{2}x^2. \quad (2.30)$$

La derivada temporal de (2.30) está dada por:

$$\dot{\mathcal{V}}(x) = x\dot{x} = x(x + x^3 + \tilde{u}) = x^2 + x^4 + x\tilde{u}. \quad (2.31)$$

Proponiendo un control  $\tilde{u}$  de la forma:

$$\tilde{u} := -kx, \quad (2.32)$$

donde  $k > 0$  es la ganancia, la derivada de la función de Lyapunov mostrada en (2.31) se puede escribir como:

$$\dot{\mathcal{V}}(x) = x^2 + x^4 - kx^2 = -x^2 [(k - 1) - x^2]. \quad (2.33)$$

De la ecuación anterior podemos observar que, mientras la condición inicial se encuentre acotada mediante la desigualdad  $|x_0| < \sqrt{k - 1}$  y la ganancia sea elegida como  $k > 1$ , se cumple lo siguiente:

$$\dot{\mathcal{V}}(x) < 0, \quad (2.34)$$

por tanto, el origen del sistema (2.29) es asintóticamente estable. Entonces, eligiendo  $k = 2$  podemos definir:

$$\alpha(x) = -2x, \quad (2.35)$$

Ahora bien, para establecer el control  $u$  del sistema original establecido en (2.28) definido mediante la ecuación (2.26) primeramente se establece lo siguiente:

$$\begin{aligned} g(x) &= 1, \\ \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \dot{x} \right\rangle &= -2(x + x^3 + \xi), \\ \left\langle \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, g(x) \right\rangle &= x, \end{aligned} \quad (2.36)$$

entonces, el control  $u$  queda definido como:

$$u = -P(\xi + 2x) - 2(x + x^3 + \xi) - x. \quad (2.37)$$

Por otro lado, para analizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado se utiliza la función de Lyapunov mostrada en (2.27), dada por:

$$\tilde{V}(x, \xi) := \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(\xi + 2x)^2, \quad (2.38)$$

realizando el cambio de variable  $z = \xi - \alpha(x) = \xi + 2x$  podemos reescribir el sistema, la entrada de control y su función de Lyapunov de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + x^3 + (z - 2x), & \dot{z} &= u + 2[x + x^3 + (z - 2x)], \\ u &= -Pz - 2[x + x^3 + (z - 2x)] - x, & \tilde{V}(x, z) &:= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}z^2, \end{aligned} \quad (2.39)$$

entonces, la derivada temporal de la función  $\tilde{V}$  queda escrita como:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}} &= x\dot{x} + z\dot{z}, \\ &\Rightarrow x[x + x^3 + (z - 2x)] + z(-Pz - x), \\ &\Rightarrow -x^2 + x^4 + xz - Pz^2 - zx, \\ &\Rightarrow -x^2 + x^4 - Pz^2, \end{aligned} \quad (2.40)$$

por último, se sabe que  $|x| < 1$  de acuerdo a la desigualdad  $|x| < \sqrt{k-1}$  anteriormente establecida con la ganancia elegida  $k = 2$ , lo que implica que  $x^4 < x^2$ , entonces

$$\dot{\tilde{V}} < 0. \quad (2.41)$$

por lo que el control  $u$  estabiliza de manera asintótica el sistema.

## 2.4.2 Saturaciones anidadas

**Definición 17** (Saturación lineal [27]). *Dadas dos constantes positivas  $L, M$  con  $L \leq M$ , una función  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una saturación lineal para  $(L, M)$  si es una función continua y no decreciente que satisface las siguientes propiedades:*

- $s\sigma(s) > 0 \forall s \neq 0$ ;
- $\sigma(s) = s$  cuando  $|s| \leq L$ ;
- $|\sigma(s)| \leq M \forall s \in \mathbb{R}$

**Teorema 7.** [27] *Considere un sistema de la forma*

$$\dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_n = u. \quad (2.42)$$

*Existen funciones lineales  $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tales que, para cualquier conjunto de constantes positivas  $\{(L_i, M_i)\}$  donde  $L_i \leq M_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $M_i < \frac{1}{2}L_{i+1}$  para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , y cualquier conjunto de funciones saturaciones lineales  $\{\sigma_i\}$  para  $\{(L_i, M_i)\}$ , el control acotado de la forma*

$$u = -\sigma_n(h_n(x) + \sigma_{n-1}(h_{n-1}(x) + \dots + \sigma_1(h_1(x)) \dots)), \quad (2.43)$$

*resulta en estabilidad asintótica global para el sistema (2.42).*

**Corolario 2.44.** [27] *Considere un sistema de la forma*

$$\dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_n = \sigma_{n+1}(u), \quad y = x_1. \quad (2.45)$$

*Donde  $\sigma_{n+1}$  es una saturación lineal para  $(L_{n+1}, M_{n+1})$ . La tarea es lograr que  $y$  siga una trayectoria de referencia deseada  $y_d$  dada por  $y_d, \dot{y}_d, \ddot{y}_d, \dots, y_d^{(n)}$ . Si  $|y_d^{(n)}(t) - L_{n+1}| \leq \epsilon$  para todo  $t \geq t_0$  y para algún  $\epsilon > 0$  entonces, existen funciones lineales  $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tales que para cualquier conjunto de constantes positivas  $\{(L_i, M_i)\}$  se cumple que  $M_n < \epsilon$ ,  $L_i \leq M_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $M_i \leq \frac{1}{2}L_{i+1}$  para*

$i = 1, 2, \dots, n - 1$ , y para cualquier conjunto de funciones saturaciones lineales  $\{\sigma_i\}$  para  $\{(L_i, M_i)\}$  la retroalimentación

$$u = y_d^{(n)} - \sigma_n(h_n(\tilde{x}) + \sigma_{n-1}(h_{n-1}(\tilde{x}) + \dots + \sigma_1(h_1(\tilde{x}))) \dots), \quad (2.46)$$

donde  $\tilde{x}$  está definida como  $\tilde{x} = x_i - y_d^{(i-1)}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , resulta en seguimiento de trayectoria asintótica para el sistema (2.45).

**Ejemplo 2.2.** Considere un sistema de péndulo con entrada de control  $T$ . El modelo dinámico para dicho sistema está representado mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \text{sen}(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{ml^2} T, \end{aligned} \quad (2.47)$$

donde el estado  $x_1$  representa la posición angular  $\theta$  del péndulo, mientras que el estado  $x_2$  establece la velocidad angular  $\dot{\theta}$  del mismo,  $g$  es la aceleración gravitacional,  $m$  la masa del péndulo,  $l$  la longitud del brazo,  $k$  la constante de fricción y  $T$  es el par de entrada de control del sistema. Se define un primer control  $T$  de la forma:

$$T = (ml^2) \left( \frac{g}{l} \text{sen}(x_1) + \frac{k}{m} x_2 + v \right), \quad (2.48)$$

donde  $v$  es la nueva entrada de control. Sustituyendo el control establecido anteriormente, el modelo mostrado en (2.47) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= v. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Aplicando el teorema de saturaciones anidadas mostrado en el teorema 7, definimos el control  $v$  de la forma:

$$v = -\sigma_2(h_2(x) + \sigma_1(h_1(x))) \quad (2.50)$$

donde  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son funciones de saturación lineales, en tanto que  $h_1$  y  $h_2$  son funciones lineales definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h_1(x) &= x_1 + x_2, \\ h_2(x) &= x_2. \end{aligned} \tag{2.51}$$

por último, sustituyendo el control virtual  $v$  de (2.49) en la ecuación (2.48) se obtiene el control final para el sistema dado por:

$$T = \left( ml^2 \right) \left( \frac{g}{l} \text{sen}(x_1) + \frac{k}{m} x_2 - \sigma_2 (h_2(x) + \sigma_1 (h_1(x))) \right). \tag{2.52}$$

el cual estabiliza de manera asintótica el modelo del péndulo.

### 2.4.3 Sistemas con retardos y matrices

**Teorema 8** (Lyapunov-Krasovskii [28]). *Considere el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x_t), \\ x_{t_0} &= \varphi(t), \end{aligned} \tag{2.53}$$

donde  $f : \mathbb{R} \times PC([t_0 - h, t_0], \mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}^n$  es un mapeo acotado en  $\mathbb{R}^n$ .

Sean  $u, v, w : \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  funciones no decrecientes con  $u(0) = v(0) = 0$ . Si existe una funcional continuamente diferenciable  $\mathcal{V} : \mathbb{R} \times PC \mapsto \mathbb{R}$  tal que las siguientes propiedades se satisfacen:

1.  $u(\|\varphi(0)\|) \leq \mathcal{V}(t, \varphi) \leq v(\|\varphi\|_h)$ ,
2.  $\dot{\mathcal{V}}(t, x_t) \leq -w(\|\varphi(0)\|) \quad \forall t \geq t_0$

Entonces, la solución trivial de (2.53) es uniformemente estable. Mas aún, si  $w(s) > 0$  para  $s > 0$ , entonces la solución antes mencionada de (2.53) es uniformemente asintóticamente estable.

**Lema 1** ([29]). Sea  $N \in \mathbb{R}^{m \times m}$  una matriz constante definida positiva. Si existen, un escalar  $h > 0$ , y una función vectorial  $w : [-h, 0] \mapsto \mathbb{R}^m$ , tales que las integrales :

$$h \int_{t-h}^t \dot{w}^T(s) N \dot{w}(s) ds, \quad (2.54a)$$

$$\int_{t-h}^t \dot{w}^T(s) ds N \int_{t-h}^t \dot{w}(s) ds \quad (2.54b)$$

están bien definidas, entonces, se cumple que:

$$-h \int_{t-h}^t \dot{w}^T(s) N \dot{w}(s) ds \leq - \int_{t-h}^t \dot{w}^T(s) ds N \int_{t-h}^t \dot{w}(s) ds. \quad (2.55)$$

**Lema 2** ([30]). Considere una matriz a bloques simétrica de la forma:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

se cumple la siguiente desigualdad matricial:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} > 0, \quad (2.57)$$

si y sólo si los elementos de (2.56) satisfacen las siguientes desigualdades:

$$D > 0, \quad A - BD^{-1}B^T > 0. \quad (2.58)$$

**Teorema 9.** Considere un sistema lineal retardado de la forma:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bx(t - \tau), \quad (2.59)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado del sistema,  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son las matrices del modelo dinámico, y por último,  $\tau$  es un retardo fijo del sistema. Si se cumple que el sistema no retardado es estable, esto es,  $\tau = 0$ , dado por:

$$\dot{x} = (A + B)x(t) \quad (2.60)$$

y dado que las soluciones de un sistema son continuas, entonces existe un intervalo  $\tau \in [0, \tau_{max})$  para el cual el modelo (2.59) sigue siendo estable.

## 2.4.4 Control con parámetros desconocidos

Para poder realizar la linealización del sistema Euler-Lagrange con base en la ecuación (1.42) es necesario conocer como se puede obtener la matriz  $\Phi$ , dado que el sistema es linealizable, basado en el vector de parámetros desconocidos  $\hat{\theta}$ , entonces, aplicando el jacobiano sobre el sistema dado en la parte izquierda de la ecuación (1.42), se puede obtener  $\Phi$ , esto es,

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} [M(\eta)\ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}] = \Phi. \quad (2.61)$$

Los parámetros desconocidos que existen en un sistema de tipo E-L pueden dividirse en tres categorías diferentes [31]:

- Parámetros absolutamente identificables,
- Parámetros no identificables en combinación lineal con otros y,
- Parámetros no identificables.

Los parámetros identificables son aquellos que pueden separarse de los efectos de los demás de manera que es posible conocer su contribución en el sistema de manera individual, la segunda categoría implica aquellos parámetros que no es posible separar y solamente se puede conocer su contribución combinada con algunos otros parámetros pero no de forma aislada, por último, los

parámetros no identificables son aquellos que no tienen contribución directa en el sistema, por lo que no es posible realizar una identificación de los mismos.

La clasificación anterior nos permite analizar qué parámetros pueden ser identificados en el sistema y por tanto, seleccionar el vector  $\hat{\theta}$  adecuado con aquellos que es posible estimar mediante la estrategia mostrada en la ecuación (1.42), con el objetivo de dar robustez al controlador diseñado.

**Teorema 10.** [32] *Considere una red de  $N$  sistemas E-L denotados como:*

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \boldsymbol{\tau}_i, \quad (2.62)$$

*Asuma que los agentes en la red están interconectados a través de un grafo de comunicación simplemente conectado con retardos de tiempo constantes  $T_{i,j}$  entre cada par de agentes  $(i,j)$ . Sea un control definido por:*

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &:= \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [\tilde{\mathbf{q}}_i - \tilde{\mathbf{q}}_j(t - T_{i,j})] + \tilde{\mathbf{q}}_i, \\ \boldsymbol{\epsilon}_i &:= \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \lambda \mathbf{e}_i, \\ \boldsymbol{\tau}_i &= \boldsymbol{\Phi}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{e}_i, \dot{\mathbf{e}}_i) \hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \mathbf{D}_i \boldsymbol{\epsilon}_i - (1 - \alpha) b_i \dot{\mathbf{e}}_i, \end{aligned} \quad (2.63)$$

*donde  $\lambda, b_i > 0$ ,  $\boldsymbol{\Phi}_i \hat{\boldsymbol{\theta}}_i := \hat{\mathbf{M}}_i(\mathbf{q}_i) [\ddot{\mathbf{q}}_d - \lambda \dot{\mathbf{e}}_i] + \hat{\mathbf{C}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) [\dot{\mathbf{q}}_d - \lambda \mathbf{e}_i] + \hat{\mathbf{g}}_i(\mathbf{q}_i)$  y  $\mathbf{D}_i = \text{diag}\{d_{i1}, \dots, d_{in}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $d_{ij} > 0$ , junto con la ley de estimación*

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_i = -\boldsymbol{\Gamma}_i \boldsymbol{\Theta}_i^T \boldsymbol{\epsilon}_i, \quad (2.64)$$

*con  $\boldsymbol{\Gamma}_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $\boldsymbol{\Gamma}_i = \boldsymbol{\Gamma}_i^T > 0$ , el controlador resuelve el problema de seguimiento sincronizado.*

# Diseño de controladores para regulación, seguimiento y sincronización

El control de sistemas dinámicos no lineales mediante la retroalimentación representa retos de gran complejidad que nos llevan a buscar procedimientos sistemáticos de diseño para alcanzar los objetivos de control y las especificaciones de diseños establecidas en el problema. Es imposible encontrar un procedimiento que pueda aplicarse de manera directa para todos los sistemas no lineales. En el presente capítulo se presentan estrategias de control desarrolladas en este trabajo de tesis, basadas en distintas técnicas y teorías estipuladas en el capítulo 2.

## 3.1 Modelo de error

Para poder regular y seguir trayectorias es necesario llevar el modelo matemático presentado en el capítulo 1 al denominado modelo de error, ya que lo que se busca no es que el sistema vaya al origen de sus coordenadas, sino que el error entre las coordenadas reales del sistema y las coordenadas deseadas converja a cero. Dicho modelo de error se presenta en las ecuaciones (3.1)-(3.3),

correspondientes a los vectores de estado, subsistema de traslación y subsistema de rotación, respectivamente.

$$e_1 := \xi_r - \xi \quad e_2 := \dot{\xi}_r - \dot{\xi} \quad (3.1a)$$

$$e_3 := \eta_r - \eta, \quad e_4 := \dot{\eta}_r - \dot{\eta}, \quad (3.1b)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= \ddot{\xi}_r - \frac{1}{m} R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{I}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \end{bmatrix} - g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_3 &= e_4, \\ \dot{e}_4 &= \ddot{\eta}_r - M(\eta)^{-1}(\tau_\eta - C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

## 3.2 Cálculo de ángulos deseados

Dado que el sistema es subactuado, esto es, cuenta con 6 coordenadas posibles a controlar mientras que solamente se cuenta con 4 entradas de control, dos de las coordenadas deben controlarse de manera indirecta, en este caso, dichas coordenadas son el movimiento en  $x$  y en  $y$ . Para poder moverse en el plano  $xy$ , se utilizan los ángulos  $\phi$  y  $\theta$ , pues éstos generan la inclinación del cuadricóptero para poder desplazarse en el plano. Para obtener los ángulos  $\phi$

y  $\theta$  deseados para el movimiento en el plano  $xy$  se utilizan las fórmulas de la ecuación (3.4).

$$\begin{aligned}\phi_r &= \arcsin(u_x \sin \psi - u_y \cos \psi), \\ \theta_r &= \arcsin\left(\frac{u_x \cos \psi + u_y \sin \psi}{\cos \phi_r}\right).\end{aligned}\tag{3.4}$$

### 3.3 Trayectoria de referencia

Durante el desarrollo de esta tesis, se trabajó en el seguimiento de trayectorias de referencia y en la regulación del sistema a un punto fijo, en lo sucesivo, cuando se mencione la trayectoria de referencia del sistema, se considerará una referencia dada como  $(\xi_r, \eta_r)$  donde  $\xi_r := [x_r \ y_r \ z_r]^T$ ,  $\eta_r := [\phi_r \ \theta_r \ \psi_r]^T$  donde  $\xi_r$  y  $\psi_r$  pueden ser seleccionadas de manera libre, mientras que  $\phi_r$  y  $\theta_r$  deben ser obtenidas de manera indirecta por medio de las ecuaciones mostradas en (3.4), ya que como se mencionó en 3.2, el sistema aéreo de tipo cuadricóptero es un sistema subactuado, por lo que solamente podemos controlar 4 de las 6 coordenadas posibles.

### 3.4 Controlador Backstepping

La estrategia de backstepping es un procedimiento recursivo que entrelaza la selección de una función de Lyapunov con el diseño del control por retroalimentación. También separa el problema de diseño para todo el sistema completo en una secuencia de problemas de diseño para subsistemas de orden menor, e incluso escalares. Explotando la mayor flexibilidad que existe para los subsistemas de orden menor y escalares, la técnica de backstepping frecuentemente puede resolver problemas de estabilización, seguimiento, y control

robusto, bajo condiciones menos restrictivas que aquellas establecidas en otros métodos.[25]

### 3.4.1 Diseño del controlador para traslación

**Proposición 11.** *Considere un sistema de la forma (1.37). Sea una trayectoria de referencia definida en 3.3 y el modelo de error establecido en (3.2), entonces, se define un control de la forma:*

$$u_1 = \frac{m}{\cos \phi \cos \theta} \left( \ddot{\xi}_r + G + K (e_2 + P e_1) + P e_2 + e_1 \right). \quad (3.5)$$

donde  $m$  es la masa del sistema y  $|\phi|, |\theta| < \frac{\pi}{2}, \forall t > 0$  resuelve el problema de seguimiento de trayectoria para el modelo establecido.

**Prueba.** *Considere el modelo de error establecido en (3.1a) y (3.2). Para simplificar la estructura del modelo definamos la variable  $T$  como:*

$$T := R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{J}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

entonces el modelo de error se describe como:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= \ddot{\xi}_r - \frac{1}{m} T - G, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde  $\xi_r$  es la señal de referencia de posición para el sistema,  $\ddot{\xi}_r$  es la referencia en aceleración y  $G = g[0 \ 0 \ 1]^T$ . Seleccionando un primer control de la forma:

$$T = m \left( \ddot{\xi}_r + G - v \right), \quad (3.8)$$

$T$  nos permite cancelar la referencia en aceleración  $\ddot{\xi}_r$  y el vector de gravedad  $G$ , por lo que, el nuevo sistema simplificado puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= v,\end{aligned}\tag{3.9}$$

Aplicando el teorema 6 se define  $\alpha(e_1) = -Pe_1$ , por lo que de acuerdo a la ecuación (2.23) el primer paso de backstepping queda escrito como:

$$\dot{e}_1 = -Pe_1,\tag{3.10}$$

proponiendo una función de Lyapunov de la forma:

$$\mathcal{V}(e) = \frac{1}{2} \|e_1\|^2,\tag{3.11}$$

es fácil demostrar que (3.10) es GAS, por lo que se cumple con las condiciones para el teorema 6 y entonces, la ley de control establecida en la ecuación (2.26) se escribe como:

$$v = -K(e_2 + Pe_1) - Pe_2 - e_1,\tag{3.12}$$

ahora, sustituyendo (3.12) en (3.8) obtenemos el control  $T$  dado por:

$$T = m \left( \ddot{\xi}_r + G + K(e_2 + Pe_1) + Pe_2 + e_1 \right).\tag{3.13}$$

Finalmente, mediante las ecuaciones (3.13) y (3.6) se obtiene el control  $u_1$  para el subsistema de traslación escrito como:

$$u_1 = \frac{m}{\cos \phi \cos \theta} \left( \ddot{\xi}_r + G + K(e_2 + Pe_1) + Pe_2 + e_1 \right).\tag{3.14}$$

lo que concluye la prueba.  $\square$

### 3.4.2 Diseño del controlador para rotación

**Proposición 12.** *Sea un sistema cuyo modelo es de la forma dada por (1.38), considerando una trayectoria como la establecida anteriormente en 3.3, entonces, tomando en cuenta el modelo de error establecido en (3.3), un control de la forma:*

$$\tau_\eta = C\dot{\eta} + M[\ddot{\eta}_r + K(e_2 + Pe_1) + Pe_2 + e_1]. \quad (3.15)$$

*resuelve el problema de seguimiento de trayectoria para el modelo establecido.*

**Prueba.** *Considere el modelo de error establecido en (3.1b) y (3.3), entonces el modelo de error se describe como:*

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= \ddot{\eta}_r - M(\eta)^{-1}(\tau_\eta - C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}), \end{aligned} \quad (3.16)$$

*donde  $\eta_r$  es la señal de referencia de posición para el sistema, mientras que  $\ddot{\eta}_r$  es la referencia en aceleración para el mismo, por simplicidad, en la prueba los argumentos de las matrices se omiten. Seleccionando un primer control de la forma:*

$$\tau_\eta = C\dot{\eta} + M(\ddot{\eta}_r - v), \quad (3.17)$$

*$\tau_\eta$  permite cancelar la referencia en aceleración  $\ddot{\eta}_r$  y las matrices  $M$  y  $C$ , por lo que, el nuevo sistema simplificado puede escribirse como:*

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= v, \end{aligned} \quad (3.18)$$

*Aplicando el teorema 6 se define  $\alpha(e_1) = -Pe_1$ , por lo que, de acuerdo a la ecuación (2.23), el primer paso de backstepping se escribe como:*

$$\dot{e}_1 = -Pe_1. \quad (3.19)$$

Proponiendo una función de Lyapunov de la forma:

$$\mathcal{V}(e) = \frac{1}{2} \|e_1\|^2 \quad (3.20)$$

se puede demostrar de manera sencilla que (3.19) es GAS, por lo que se cumple con las condiciones para el teorema 6, por tanto, la ley de control establecida en la ecuación (2.26) se escribe como:

$$v = -K(e_2 + Pe_1) - Pe_2 - e_1, \quad (3.21)$$

Finalmente, sustituyendo (3.21) en (3.17) se obtiene el control  $\tau_\eta$  para el subsistema de traslación escrito como:

$$\tau_\eta = C\dot{\eta} + M(\ddot{\eta}_r + K(e_2 + Pe_1) + Pe_2 + e_1). \quad (3.22)$$

esto concluye la prueba. □

## 3.5 Controlador por saturaciones anidadas

Cuando se busca lograr la implementación de teorías de control en sistemas físicos, uno de los principales problemas se refiere a las propias limitaciones de energía que se presentan en los mismos sistemas. Por ejemplo: un motor no puede funcionar a una velocidad ilimitada, o un componente electrónico no puede funcionar con valores de corriente o voltaje ilimitados, entre otros. Con el objetivo de poder evitar esta problemática, se propone un control basado en saturaciones anidadas, el cual permite limitar los esfuerzos de control ejercidos sobre los componentes del sistema, de manera que sea posible lograr los objetivos de control de manera segura.

### 3.5.1 Diseño del controlador para traslación

**Proposición 13.** *Considere el modelo de error mostrado en la ecuación (3.2) para el sistema (1.37), considere además una trayectoria de referencia definida en 3.3. Si*

existen constantes  $L_i, M_i, \epsilon > 0$  tales que se cumplen las condiciones del corolario 2.44, entonces se puede proponer un control de la forma:

$$u_1 = \frac{m}{\cos \phi \cos \theta} \left( G + \sigma_3 \left( \ddot{\xi}_r - \sigma_2(K e_2 + \sigma_1(P e_1 + Q e_2)) \right) \right). \quad (3.23)$$

donde  $K, P, Q > 0$  son matrices de ganancias del controlador,  $m$  es la masa del sistema y  $|\phi|, |\theta| < \frac{\pi}{2}, \forall t > 0$  resuelve el problema de seguimiento de trayectoria para el modelo establecido.

**Prueba.** Sea el modelo mostrado en (3.1a) y (3.2). Para simplificar el trabajo con el sistema se define la variable  $T$  como:

$$T := R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{I}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

entonces el modelo de error se escribe como:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= \ddot{\xi}_r - \frac{1}{m}T - G, \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde  $\xi_r$  y  $\ddot{\xi}_r$  son las referencias en posición y aceleración del sistema respectivamente, mientras que  $G = g[0 \ 0 \ 1]^T$  es el vector de gravedad. Seleccionando un primer control de la forma:

$$T = m \left( \ddot{\xi}_r + G - \sigma_3(v) \right), \quad (3.26)$$

$T$  permite cancelar la referencia en aceleración  $\ddot{\xi}_r$  y el vector de gravedad  $G$ , el nuevo sistema simplificado puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= \sigma_3(v), \end{aligned} \quad (3.27)$$

el sistema mostrado en la ecuación (3.27) contiene la estructura establecida en la ecuación (2.45) y, por tanto, puede aplicarse la ley de control estipulada en el corolario 2.44 a la señal  $v$  como:

$$v = \ddot{\xi}_r - \sigma_2(K e_2 + \sigma_1(P e_1 + Q e_2)), \quad (3.28)$$

por tanto, sustituyendo (3.28) en (3.26) obtenemos el control  $T$  dado por:

$$T = m \left( \ddot{\xi}_r + G - \sigma_3(\ddot{\xi}_r - \sigma_2(K e_2 + \sigma_1(P e_1 + Q e_2))) \right). \quad (3.29)$$

Por último, combinando las ecuaciones (3.29) y (3.24) se logra obtener el control  $u_1$  para el subsistema de traslación como:

$$u_1 = \frac{m}{\cos \phi \cos \theta} \left( \ddot{\xi}_r + G - \sigma_3(\ddot{\xi}_r - \sigma_2(K e_2 + \sigma_1(P e_1 + Q e_2))) \right), \quad (3.30)$$

lo que concluye la prueba.  $\square$

### 3.5.2 Diseño del controlador para rotación

**Proposición 14.** Sea el sistema especificado en (1.38) y su respectivo modelo de error establecido en (3.3), si existen constantes  $L_i, M_i, \epsilon > 0$ , de modo que las condiciones del corolario 2.44 se satisfacen tomando en cuenta una trayectoria de referencia establecida en 3.3, entonces se propone un control de la forma:

$$\tau_\eta = C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + M(\eta) [\sigma_3(\ddot{\eta}_r - \sigma_2(R e_4 + \sigma_1(S e_3 + L e_4)))] . \quad (3.31)$$

Donde  $L, R, S > 0$  son matrices de ganancias, el controlador resuelve el problema de seguimiento de trayectoria para el modelo establecido.

**Prueba.** Sea el modelo de error dado por (3.1b) y (3.3), entonces se puede escribir el modelo de error como:

$$\begin{aligned} \dot{e}_3 &= e_4, \\ \dot{e}_4 &= \ddot{\eta}_r - M(\eta)^{-1} (\tau_\eta - C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}), \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde  $\eta_r$  es la señal de referencia de posición para el sistema mientras que  $\ddot{\eta}_r$  es la referencia en aceleración (por simplicidad en la prueba, se omite la dependencia de las matrices  $M$  y  $C$  de las coordenadas generalizadas del sistema  $\eta$  y  $\dot{\eta}$ ). Seleccionando un primer control de la forma:

$$\tau_\eta = C\dot{\eta} + M(\ddot{\eta}_r - \sigma_3(v)), \quad (3.33)$$

$\tau_\eta$  permite cancelar la referencia en aceleración para el sistema  $\ddot{\eta}_r$  y las matrices  $M$  y  $C$ , de esta manera, el sistema queda dado por:

$$\begin{aligned} \dot{e}_3 &= e_4, \\ \dot{e}_4 &= \sigma_3(v). \end{aligned} \quad (3.34)$$

El sistema de la ecuación (3.34) se encuentra con la estructura mostrada en la ecuación (2.45), por tanto, es posible aplicar de manera directa la ley de control establecida en el corolario 2.44 a la señal  $v$ , lo que da como resultado una señal dada por:

$$v = \ddot{\eta}_r - \sigma_2(Re_4 + \sigma_1(Se_3 + Le_4)), \quad (3.35)$$

Finalmente, utilizando la ecuación (3.35) y sustituyendola en (3.33) se obtiene el control  $\tau_\eta$ , que se puede escribir como:

$$\tau_\eta = C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + M(\eta) [\sigma_3(\ddot{\eta}_r - \sigma_2(Re_4 + \sigma_1(Se_3 + Le_4)))], \quad (3.36)$$

lo que concluye la prueba. □

## 3.6 Controlador con retardo variable a la entrada

El sistema utilizado responde de manera inmediata a las señales de control recibidas y actuando en consecuencia. Sin embargo, es importante mencionar que las variaciones en los estados no pueden obtenerse de manera inmediata debido a la propia latencia que existe en el procesamiento de los sensores, como

son: la unidad de medición inercial y el GPS. En particular, éste último tiene una frecuencia de actualización que oscila entre 5 y 10 Hertz, lo que induce un retardo de hasta 200ms en la actualización de la posición del sistema. Por lo anterior y con el objetivo de poder incluir la mayor cantidad de factores que intervienen en el vuelo, se desarrolla una ley de control que toma en consideración los retardos a la entrada, garantizando la estabilidad asintótica en la tarea de regulación.

**Proposición 15.**

Considere el sistema de la forma:

$$m\ddot{\xi} = R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{I}}u_1 - m\vec{g} \quad (3.37)$$

donde  $R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{I}}$  es la matriz de rotación del sistema entre el marco de referencia móvil y el marco de referencia inercial, mientras  $\vec{g} = [0 \ 0 \ g]^T$  es el vector de gravedad. Suponga que el sistema (3.37) puede escribirse en un espacio de estados si existen escalares  $h, m, n$ , matrices  $P > 0, Q > 0, R > 0 \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ ,  $K$  y  $H \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$  tales que la siguiente desigualdad matricial lineal (LMI por sus siglas en inglés) se satisface:

$$\Psi = \begin{bmatrix} PD + D^T P + Q & mD^T P & -PBK & PBH + nD^T P \\ * & h^2 R - 2mP & -mPBK & -nP \\ * & * & -R & -nK^T B^T P \\ * & * & * & -Q \end{bmatrix} < 0, \quad (3.38)$$

donde  $D := A + BK$ ,  $A$  y  $B$  son las matrices de la representación en espacio de estados de (3.37). Entonces, la ley de control:

$$u_1 = \frac{m}{\cos \phi \cos \theta} \left( [0 \ 0 \ 1] (\vec{g} + Kx(t - d(t)) + Hx(t - h)) \right), \quad (3.39)$$

$$0 < d(t) \leq h, \quad -\frac{\pi}{2} < \phi, \theta < \frac{\pi}{2}$$

estabiliza asintóticamente el origen de (3.37), siendo  $d(t)$  un retardo variable en la entrada del sistema.

**Prueba.** Definase  $\tilde{u} \in \mathbb{R}^3$  como:

$$\tilde{u} := R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{J}} u_1. \quad (3.40)$$

Reescribiendo (3.37) en espacio de estados, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 \\ I_3 \end{bmatrix} \tilde{u} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{g} \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

donde  $x_1 := \xi, x_2 := \dot{\xi} \in \mathbb{R}^3$ . Se propone un primer control de la forma:

$$\tilde{u} = m(\vec{g} + v), \quad (3.42)$$

donde  $v \in \mathbb{R}^3$  es la nueva señal de control. Por lo que (3.41) se expresa como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_3 \end{bmatrix} v. \quad (3.43)$$

Se propone un control  $v$  como:

$$\begin{aligned} v &:= Kx(t - d(t)) + Hx(t - h), \\ 0 &< d(t) \leq h, \end{aligned} \quad (3.44)$$

por lo que el sistema en lazo cerrado es:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BKx(t - d(t)) + BHx(t - h), \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 0 \\ I_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Para investigar la estabilidad de (3.45) consideremos la siguiente funcional candidata de Lyapunov:

$$\mathcal{V}(x_t) := x^T(t) Px(t) + \int_{t-h}^t x^T(s) Qx(s) ds + h \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R\dot{x}(s) dsd\theta, \quad (3.46)$$

cuya derivada está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2x^T(t) P\dot{x}(t) + x^T(t) Qx(t) - x^T(t-h) Qx(t-h) \\ &\quad + h^2 \dot{x}^T(t) R\dot{x}(t) - h \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s) R\dot{x}(s) ds,\end{aligned}\tag{3.47}$$

dado que:

$$x(t-d(t)) = x(t) - \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s) ds,\tag{3.48}$$

y considerando la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}-h \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s) R\dot{x}(s) ds &\leq - \int_{t-d(t)}^t \dot{x}^T(s) ds R \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s) ds \\ 0 &< d(t) < h,\end{aligned}\tag{3.49}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq 2x^T(t) PDx(t) - 2x^T(t) PBK \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s) ds + 2x^T(t) PBHx(t-h) \\ &\quad + x^T(t) Qx(t) - x^T(t-h) Qx(t-h) + h^2 \dot{x}^T(t) R\dot{x}(t) \\ &\quad - \int_{t-d(t)}^t \dot{x}^T(s) ds R \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s) ds + 2m\dot{x}^T(t) PDx(t) - 2m\dot{x}^T(t) P\dot{x}(t) \\ &\quad - 2m\dot{x}^T(t) PBK \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s) ds + 2nx^T(t-h) PDx(t) - 2nx^T(t-h) PD\dot{x}(t) \\ &\quad - 2nx^T(t-h) PBK \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s) ds\end{aligned}\tag{3.50}$$

donde  $D := A + BK$ .

La desigualdad (3.50) puede reescribirse como:

$$\dot{V} \leq \eta^T(t) \begin{bmatrix} PD + D^T P + Q & mD^T P & -PBK & PBH + nD^T P \\ * & h^2 R - 2mP & -mPBK & -nP \\ * & * & -R & -nK^T B^T P \\ * & * & * & -Q \end{bmatrix} \eta(t),\tag{3.51}$$

con  $\eta(t) := \left[ x(t) \quad \dot{x}(t) \quad \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s) ds \quad x(t-h) \right]^T$ .

Por la estructura de la expresión anterior, se observa que si la matriz (3.51) es definida negativa, entonces el sistema (3.45) es asintóticamente estable, o en otras palabras,  $v$  estabiliza asintóticamente a (3.43). Entonces, sustituyendo  $v$  en (3.42) se obtiene:

$$\tilde{u} = m(\vec{g} + Kx(t-d(t)) + Hx(t-h)), \quad (3.52)$$

y dado que:

$$R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \Rightarrow m(\vec{g} + Kx(t-d(t)) + Hx(t-h)) = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} u_1. \quad (3.53)$$

Por último, despejando  $u_1$  de (3.53) se obtiene:

$$u_1 = \frac{m}{\cos \phi \cos \theta} \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\vec{g} + Kx(t-d(t)) + Hx(t-h)) \right), \quad (3.54)$$

lo que concluye la prueba. □

## 3.7 Controlador con retardo para sincronización de sistemas multiagentes

### 3.7.1 Definición de error

Considere el error de posición generalizado definido como

$$e_i := \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left[ \tilde{\eta}_i - \tilde{\eta}_j(t - T_{i,j}) \right] + \tilde{\eta}_i. \quad (3.55)$$

Definase de igual manera la señal

$$\epsilon_i := \dot{\tilde{\eta}}_i + \lambda_1 e_i + \lambda_2 \int_0^t e_i(\theta) d\theta + \lambda_3 \int_{-T_{i,j}}^0 e_i(t + \theta) d\theta, \quad (3.56)$$

donde  $\tilde{\eta}_i := \eta_i - \eta_d$ ,  $\lambda_k, T_{i,j} \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_k > 0$  con  $k \in (1, 2, 3)$  son lsd ganancias del controlador,  $T_{i,j} > 0$  es el retardo de comunicación entre los agentes de la red,  $\mathcal{N}_i$  es el conjunto de todos los agentes que le transmiten información al agente  $i$  basados en un grafo conectado y dirigido, por último, se cumple que  $T_{i,j} \in [0, T_{max})$  donde  $T_{max}$  es el retardo máximo admitido para el sistema. Con las definiciones previas podemos establecer la proposición para la ley de control que se muestra a continuación.

**Proposición 16.** *Considere una red de  $N$  sistemas E-L, denotados como:*

$$M_i(\eta_i) \ddot{\eta}_i + C_i(\eta_i, \dot{\eta}_i) \dot{\eta}_i + g_i(\eta_i) = \tau_i, \quad (3.57)$$

*Asuma que los agentes en la red están interconectados a través de un grafo de comunicación simplemente conectado, entonces, un control definido como:*

$$\tau_i = \Phi_i(\eta_i, \dot{\eta}_i, e_i, \dot{e}_i) \hat{\theta}_i - D_i \epsilon_i, \quad (3.58)$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi_i \hat{\theta}_i := & \hat{M}_i(\eta_i) [\ddot{\eta}_d - \lambda_1 \dot{e}_i - \lambda_2 e_i - \lambda_3 (e_i(t) - e_i(t - T_{i,j}))] \\ & + \hat{C}_i(\eta_i, \dot{\eta}_i) \left[ \dot{\eta}_d - \lambda_1 e_i - \lambda_2 \int_0^t e_i(\theta) d\theta - \lambda_3 \int_{-T_{i,j}}^0 e_i(t + \theta) d\theta \right] \\ & + \hat{g}_i(\eta_i), \end{aligned} \quad (3.59)$$

siendo  $\Phi_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$  la matriz de regresión para la estimación paramétrica,  $\hat{\theta}_i \in \mathbb{R}^p$  el vector de parámetros a estimar,  $D_i = \text{diag}\{d_{i1}, \dots, d_{in}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $d_{ij} > 0$  la matriz de ganancias del controlador. Sean  $e_i$  y  $\epsilon_i$  los errores definidos en (3.55) y (3.56), respectivamente, y junto con la ley de estimación

$$\dot{\hat{\theta}}_i = -\Gamma_i \Phi_i^T \epsilon_i, \quad (3.60)$$

con  $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $\Gamma_i = \Gamma_i^T > 0$ , entonces, el controlador resuelve el problema de seguimiento sincronizado para la trayectoria de referencia establecida en 3.3.

**Prueba.** Tomando, por un lado la definición de la ley de control mostrada en (3.58) y sustituyéndola en la representación del sistema dado por la ecuación (3.57), se obtiene el modelo de la forma:

$$\mathbf{M}_i(\boldsymbol{\eta}_i) \ddot{\boldsymbol{\eta}}_i + \mathbf{C}_i(\boldsymbol{\eta}_i, \dot{\boldsymbol{\eta}}_i) \dot{\boldsymbol{\eta}}_i = \Phi_i \hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \mathbf{D}_i \boldsymbol{\epsilon}_i. \quad (3.61)$$

Por otro lado, dado que la estimación de parámetros tiene una dinámica estable mostrada en (3.60), se cumple que:

$$\begin{aligned} \Phi_i \boldsymbol{\theta}_i := & \mathbf{M}_i(\boldsymbol{\eta}_i) [\ddot{\boldsymbol{\eta}}_d - \lambda_1 \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i - \lambda_2 \boldsymbol{\epsilon}_i - \lambda_3 (\boldsymbol{\epsilon}_i(t) - \boldsymbol{\epsilon}_i(t - T_{i,j}))] \\ & + \mathbf{C}_i(\boldsymbol{\eta}_i, \dot{\boldsymbol{\eta}}_i) \left[ \dot{\boldsymbol{\eta}}_d - \lambda_1 \boldsymbol{\epsilon}_i - \lambda_2 \int_0^t \boldsymbol{\epsilon}_i(\theta) d\theta - \lambda_3 \int_{-T_{i,j}}^0 \boldsymbol{\epsilon}_i(t + \theta) d\theta \right] \\ & + \mathbf{g}_i(\boldsymbol{\eta}_i). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Entonces, restando la ecuación (3.62) a ambos lados del modelo en (3.61) obtenemos el siguiente modelo de error:

$$\mathbf{M}_i(\boldsymbol{\eta}_i) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i + [\mathbf{C}_i(\boldsymbol{\eta}_i, \dot{\boldsymbol{\eta}}_i) + \mathbf{D}_i] \boldsymbol{\epsilon}_i = \Phi_i \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i, \quad (3.63)$$

donde  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i := \hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \boldsymbol{\theta}_i$  es el error en la estimación de parámetros. El modelo completo para los  $N$  agentes puede escribirse de manera matricial como:

$$\mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + (\mathbf{C} + \mathbf{D}) \boldsymbol{\epsilon} = \Phi \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \quad (3.64)$$

donde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\Phi$  son matrices diagonales a bloques de dimensiones adecuadas. Nótese que, para simplificar la escritura, se han omitido los argumentos en el sistema descrito en (3.64).

Considere la función de Lyapunov mostrada a continuación:

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{\epsilon}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}. \quad (3.65)$$

Calculando la derivada temporal de (3.65) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\boldsymbol{\epsilon}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) &= \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \dot{\mathbf{M}} \boldsymbol{\epsilon}, \\
&\Rightarrow = \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} (-\boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\epsilon}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \dot{\mathbf{M}} \boldsymbol{\epsilon}, \\
&\Rightarrow = \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \dot{\mathbf{M}} \boldsymbol{\epsilon}, \\
&\Rightarrow = \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\Phi} \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \dot{\mathbf{M}} \boldsymbol{\epsilon}, \\
&\Rightarrow = \boldsymbol{\epsilon}^T \left[ \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \boldsymbol{\Phi} \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}} \boldsymbol{\epsilon} \right], \\
&\Rightarrow = \boldsymbol{\epsilon}^T \left[ \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - (\mathbf{C} + \mathbf{D}) \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}} \boldsymbol{\epsilon} \right], \\
\mathcal{V}(\boldsymbol{\epsilon}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) &= \boldsymbol{\epsilon}^T \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}} - \mathbf{C} - \mathbf{D} \right) \boldsymbol{\epsilon}.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Tomando en cuenta el hecho de que:

$$\boldsymbol{\epsilon}^T \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}} - \mathbf{C} \right) \boldsymbol{\epsilon} = 0, \tag{3.67}$$

por ser una matriz antisimétrica, entonces la derivada mostrada en (3.66) se simplifica y se escribe como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\boldsymbol{\epsilon}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) &= -\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}, \\
\mathcal{V}(\boldsymbol{\epsilon}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) &< 0,
\end{aligned} \tag{3.68}$$

entonces, el sistema (3.64) es asintóticamente estable.

Ahora bien, la señal de error definida en (3.55) puede reescribirse para los  $N$  agentes como:

$$\mathbf{e} = [(\mathbf{L} + \mathbf{I}_N) \otimes \mathbf{I}_n] \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{q}}, \tag{3.69}$$

donde  $\mathbf{A} := [(\mathbf{L} + \mathbf{I}_N) \otimes \mathbf{I}_n]$  es Hurwitz y  $\otimes$  denota el producto Kronecker estándar. De manera similar, la señal mostrada en (3.56) se redefine como:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \lambda_1 \mathbf{e} + \lambda_2 \int_0^t \mathbf{e}(\theta) d\theta + \lambda_3 \int_{-T_{i,j}}^0 \mathbf{e}(t + \theta) d\theta, \tag{3.70}$$

sustituyendo (3.69) en (3.70), se obtiene la dinámica para el error de posición  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$  dada por:

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = -\lambda_1 \tilde{\mathbf{q}} - \lambda_2 \int_0^t \tilde{\mathbf{q}}(\theta) d\theta - \lambda_3 \int_{-T_{i,j}}^0 \tilde{\mathbf{q}}(t + \theta) d\theta + \epsilon. \quad (3.71)$$

Para analizar la dinámica de  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$  se deriva la ecuación (3.71), de manera que se obtiene una ecuación diferencial, además, dado que  $\epsilon$  es asintóticamente estable, se puede tomar como una entrada acotada para el sistema, por lo que la estabilidad puede establecerse con el modelo siguiente:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) = -\lambda_1 \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) - \lambda_2 \tilde{\mathbf{q}}(t) - \lambda_3 [\tilde{\mathbf{q}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}(t - T_{i,j})], \quad (3.72)$$

el modelo mostrado en (3.72) puede reescribirse como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{x}(t - T_{i,j}), \quad (3.73)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{Nn} \\ -(\lambda_2 + \lambda_3)\mathbf{A} & -\lambda_1\mathbf{A} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_3\mathbf{A} & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

Para poder definir la estabilidad del sistema (3.73), consideremos primeramente el sistema sin retardo, esto es,  $T_{i,j} = 0$ , entonces este se expresa:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}})\mathbf{x}(t). \quad (3.75)$$

Es posible diagonalizar la matriz  $\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}}$ , permitiendo que sus eigenvalores correspondan a los eigenvalores de sus bloques en la diagonal principal, dicha diagonalización puede escribirse como:

$$\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{Nn} \\ -\lambda_2\mathbf{A} & -\lambda_1\mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{I}_{Nn} & 0 \\ 0 & -\lambda_1\mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad (3.76)$$

y, dado que  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$  y  $\mathbf{A}$  es Hurwitz, todos los eigenvalores de la matriz (3.76) tienen parte real negativa y, por tanto, el sistema es estable. De acuerdo al teorema descrito en 9, existe un intervalo  $T_{i,j} \in [0, T_{max})$  para el cual el sistema

mantiene su estabilidad. Aplicando un análisis similar al expuesto en [33], se buscan las soluciones del sistema retardado (3.73) de la forma:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{-\lambda t}. \quad (3.77)$$

Sustituyendo (3.77) en (3.73) y dividiendo por  $e^{\lambda t}$  se obtiene el siguiente modelo:

$$\lambda \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{v} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{v}e^{-\lambda T}. \quad (3.78)$$

Las soluciones no triviales de la ecuación anterior; esto es, para  $\mathbf{v} \neq 0$ , se pueden encontrar cuando se satisface que  $\det(\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}}e^{-\lambda T} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ . Esta condición se puede reescribir mediante su ecuación característica de la forma:

$$\mathbf{P}(\lambda) + e^{-\lambda T}\mathbf{Q}(\lambda) = 0 \quad (3.79)$$

Definiendo:

$$\mathbf{G}(\lambda) := -\frac{\mathbf{Q}(\lambda)}{\mathbf{P}(\lambda)}, \quad (3.80)$$

podemos escribir la ecuación característica establecida en (3.79) como:

$$\mathbf{G}(\lambda) = e^{\lambda T}. \quad (3.81)$$

El retardo máximo o crítico es el valor positivo de  $T$  para el cual la ecuación característica una raíz con parte real nula, pues en este punto la solución trivial pierde estabilidad. Las raíces puramente imaginarias existen cuando se satisface la ecuación (3.81) con  $\lambda = i\omega, \omega \in \mathbb{R}$ . Por tanto, es necesario encontrar el valor de  $\omega$  para el cual

$$|\mathbf{G}(i\omega)| = 1. \quad (3.82)$$

El valor de  $T$  correspondiente a dicho valor de  $\omega$  se define como  $T_{max}$  y se obtiene de la forma:

$$T_{max} = \frac{1}{\omega} \arg[\mathbf{G}(i\omega)]. \quad (3.83)$$

Por último, dado que el retardo del sistema cumple que  $T_{i,j} < T_{max}$ , se puede concluir que el sistema con retardo sigue siendo asintóticamente estable y, por tanto, el error de posición  $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \rightarrow 0$ . Esto concluye la prueba.  $\square$

# Resultados numéricos

Es de suma importancia en la teoría de control poder comprobar el funcionamiento adecuado de los controladores diseñados, pues permite validar, de manera experimental, el comportamiento real de los sistemas dinámicos en lazo cerrado. Sin embargo, en algunas ocasiones, puede ser riesgoso implementar los controladores de manera directa por el peligro que implica, tanto a los componentes de la máquina, como a la seguridad del personal que trabaja con el equipo, es por esto que, antes de realizar una implementación física, se recomienda realizar simulaciones por computadora que permitan analizar y preveer el funcionamiento del sistema dinámico en condiciones reales.

Por otro lado, la implementación física de controladores implica un tiempo considerable para poder seleccionar los componentes y sensores adecuados, lo que no siempre es una tarea sencilla, pero vital, ya que una mala selección puede generar un funcionamiento inadecuado durante las pruebas experimentales. En esta sección se presentan las simulaciones por computadora realizadas para los controladores diseñados en la sección 3.

## 4.1 Parámetros de simulación

Para poder verificar el funcionamiento de los controladores en simulación, es necesario conocer los parámetros del cuadricóptero tales como masa y momentos de inercia, estos se obtuvieron de un cuadricóptero marca DJI modelo F450. Dichos parámetros se muestran en la siguiente tabla:

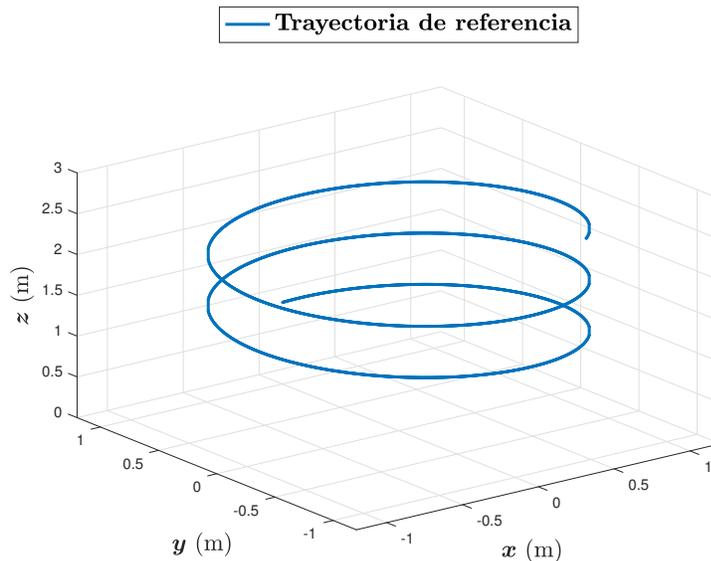
**Tab. 4.1:** Parámetros del cuadricóptero.

Parámetro	Valor
$m$	1.72kg
$l$	0,30m
$g$	$9.81 \frac{m}{s^2}$
$I_x, I_y$	$0.0148 \frac{kg}{m^2}$
$I_z$	$0.0295 \frac{kg}{m^2}$

## 4.2 Trayectoria de referencia

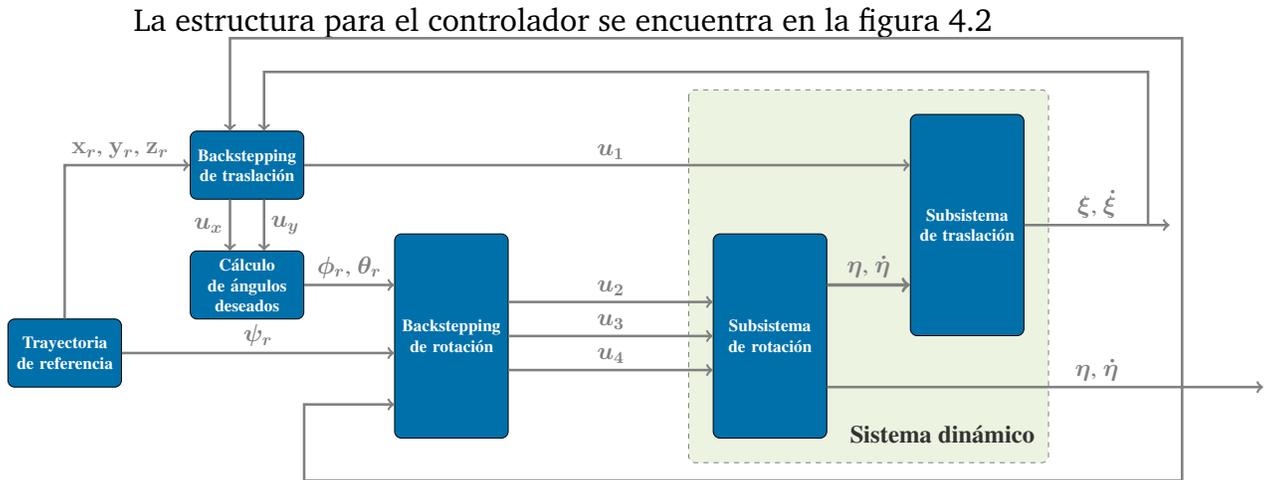
Para las simulaciones presentadas a lo largo de este capítulo se utiliza como trayectoria de referencia una señal helicoidal vertical, definida por las ecuaciones mostradas en (4.1), además, en la figura 4.1, se muestra la evolución de la trayectoria.

$$x = \text{sen}(0.5t); \quad y = \text{cos}(0.5t); \quad z = 1 + 0.05t; \quad \psi = \frac{\pi}{6}, \quad (4.1)$$



**Fig. 4.1:** Helicoidal vertical.

## 4.3 Resultados del controlador Backstepping



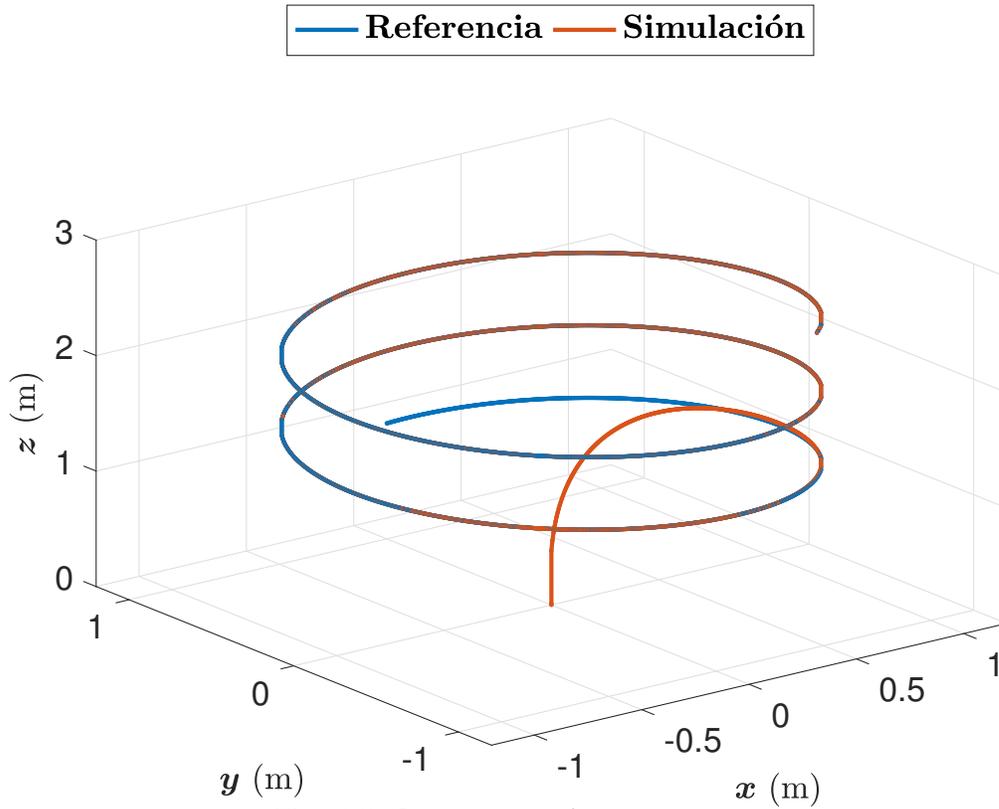
**Fig. 4.2:** Estructura del controlador.

Las ganancias utilizadas para el controlador se muestran en la siguiente tabla:

**Tab. 4.2:** Ganancias backstepping.

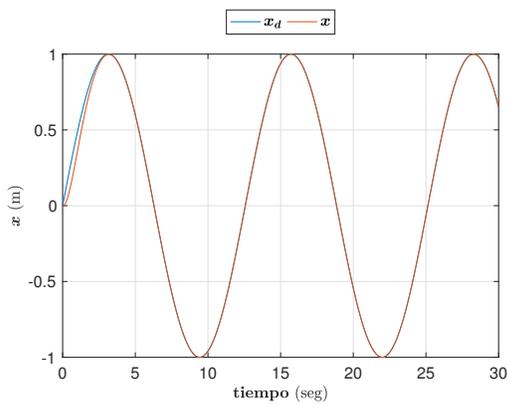
Ganancia	Valor
$K_T$	$1.5I_3$
$P_T$	$I_3$
$K_R$	$60I_3$
$P_R$	$40I_3$

En la figura 4.3 se muestra el seguimiento de la trayectoria por el cuadricóptero con el control por backstepping .

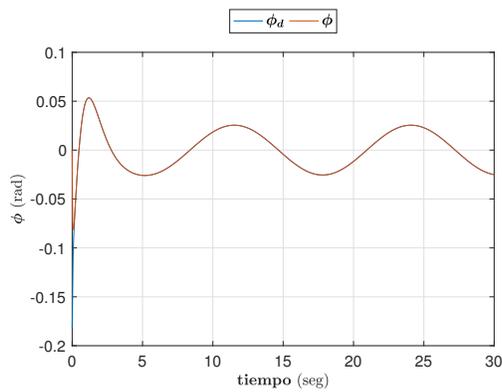


**Fig. 4.3:** Seguimiento de trayectoria.

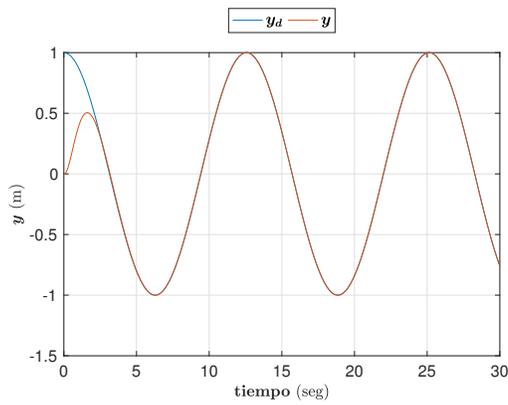
Los resultados de la simulación se muestran en las siguientes gráficas.



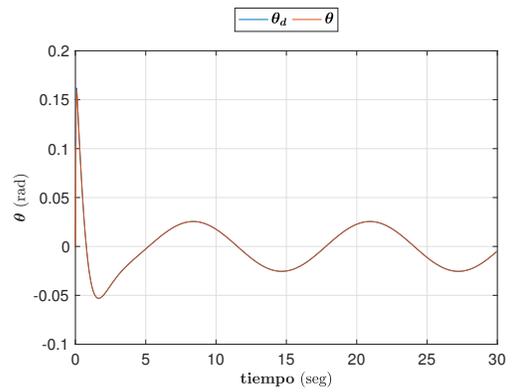
**(a)** Posición en  $x$



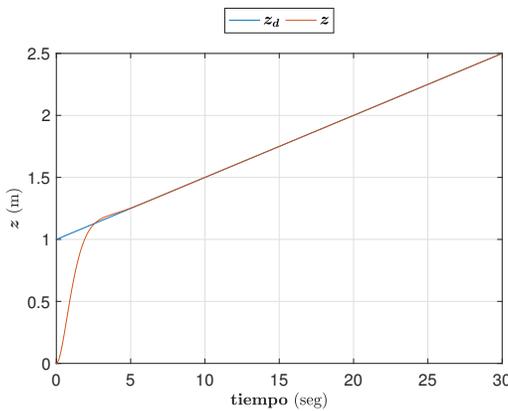
**(b)** Posición en  $\phi$



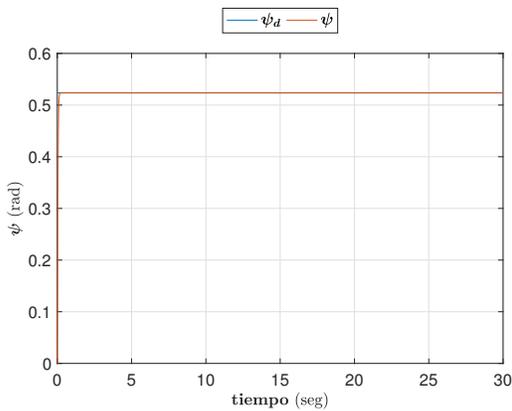
(c) Posición en  $y$



(d) Posición en  $\theta$



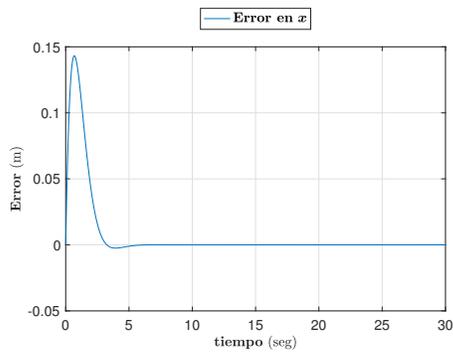
(e) Posición en  $z$



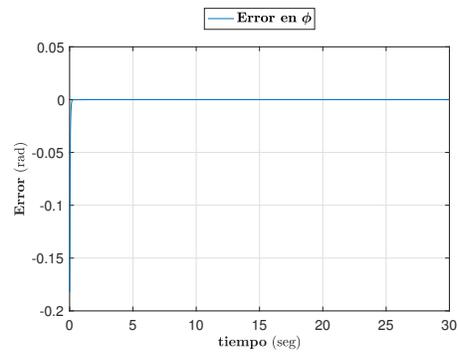
(f) Posición en  $\psi$

**Fig. 4.4:** Evolución del estado.

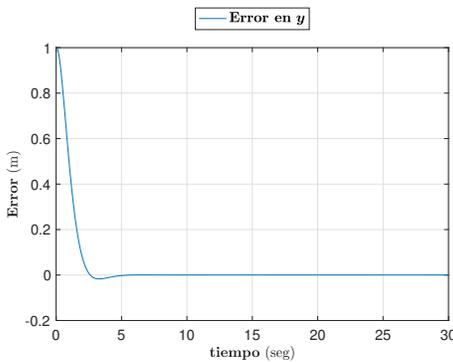
Como se puede observar en la imagen 4.4, los estados evolucionan hacia la trayectoria de referencia de manera rápida y suave, estabilizando antes de 5 segundos.



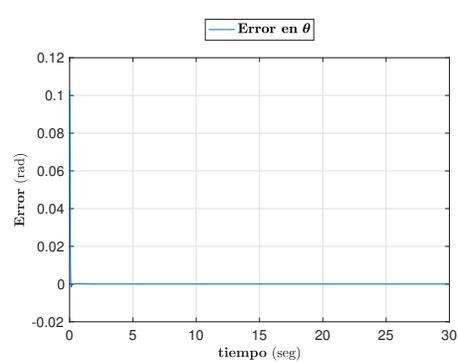
(a) Error en  $x$



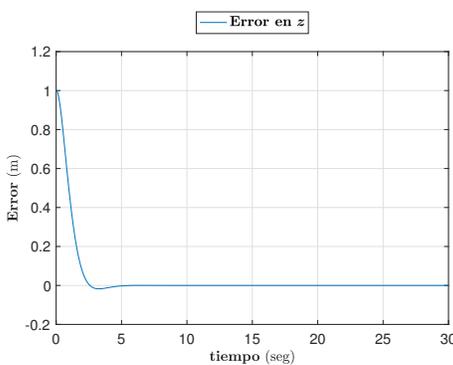
(b) Error en  $\phi$



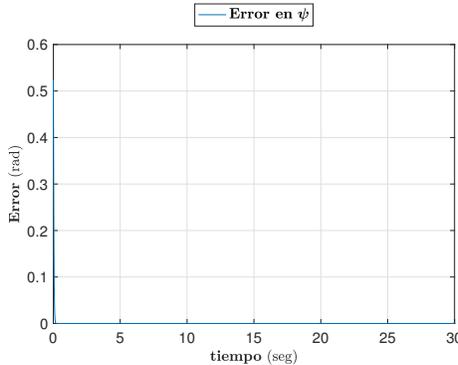
(c) Error en  $y$



(d) Error en  $\theta$



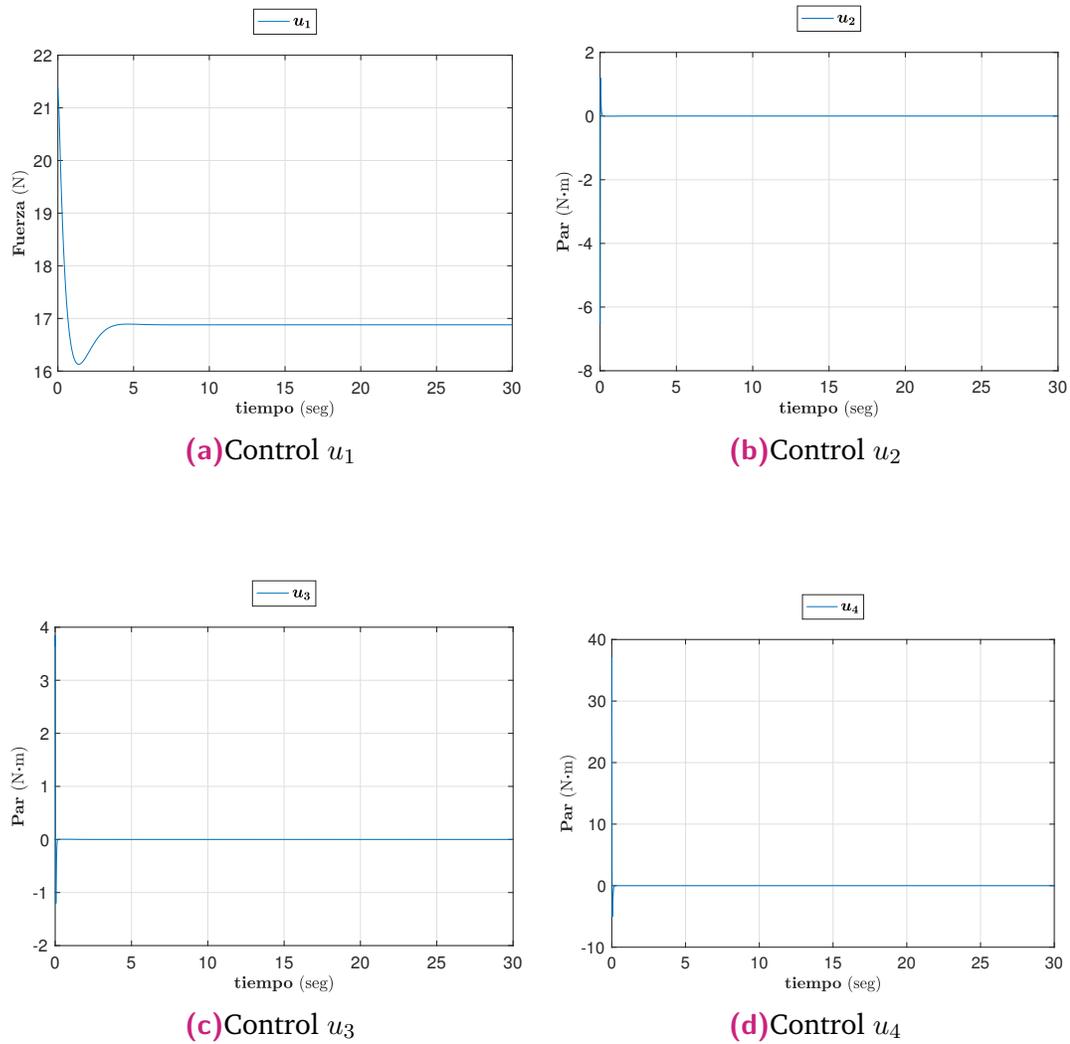
(e) Error en  $z$



(f) Error en  $\psi$

Fig. 4.5: Evolución de los errores en el estado.

De igual manera, se puede observar que los errores en el sistema convergen a cero en 5 segundos, y se mantienen en este valor.

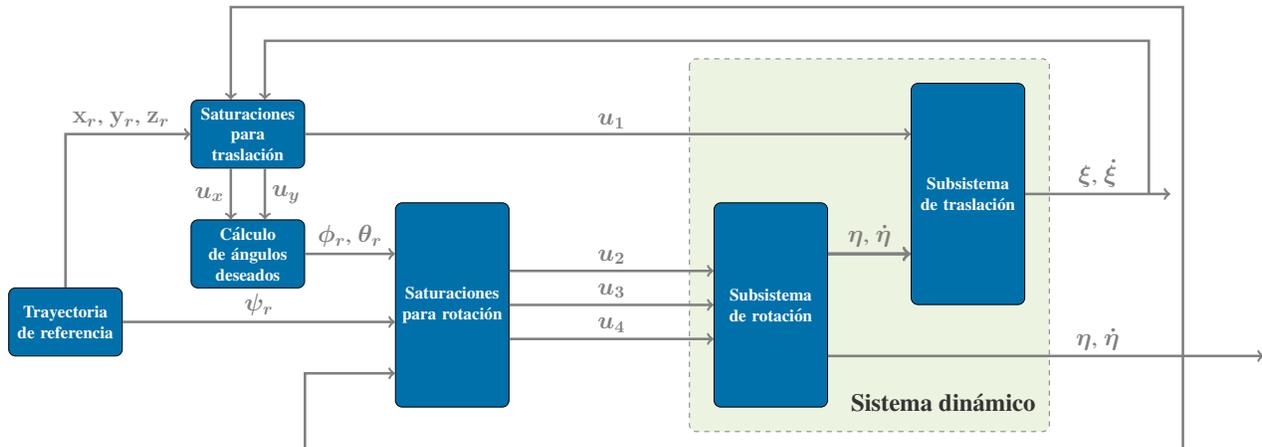


**Fig. 4.6:** Evolución de las señales de control.

En la figura 4.6 se muestran los controles para la simulación, también se puede observar que los controles se mantienen acotados, sin embargo, el control  $u_1$  inicia en un valor superior a 20 N.

## 4.4 Resultados del controlador por saturaciones anidadas

La estructura para el controlador se encuentra en la figura 4.7



**Fig. 4.7:** Estructura del controlador.

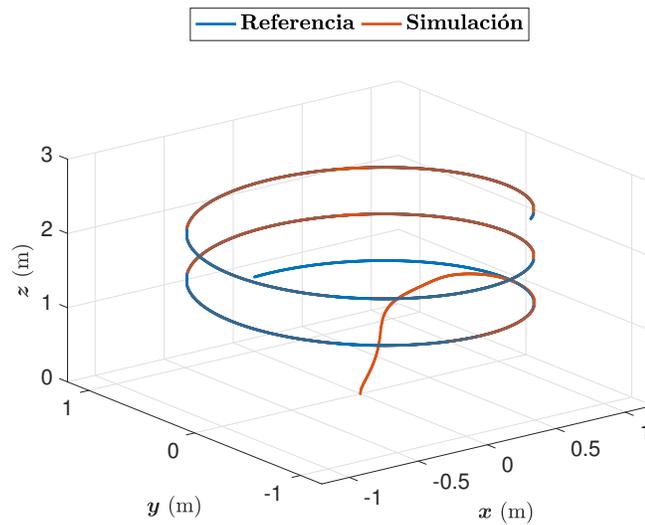
Las ganancias utilizadas para el controlador se muestran en la tabla y ecuación siguientes:

**Tab. 4.3:** Ganancias saturaciones anidadas.

Ganancia	Valor	Ganancia	Valor	Ganancia	Valor
$\sigma_{1x}$	6	$\sigma_{2x}$	12.4	$\sigma_{3x}$	16.8
$\sigma_{1y}$	6	$\sigma_{2y}$	12.4	$\sigma_{3y}$	16.8
$\sigma_{1z}$	1.5	$\sigma_{2z}$	3.4	$\sigma_{3z}$	5.8
$\sigma_{1\phi}$	1.66	$\sigma_{2\phi}$	3.85	$\sigma_{3\phi}$	4.69
$\sigma_{1\theta}$	1.66	$\sigma_{2\theta}$	3.85	$\sigma_{3\theta}$	4.69
$\sigma_{1\psi}$	1.66	$\sigma_{2\psi}$	3.85	$\sigma_{3\psi}$	4.69

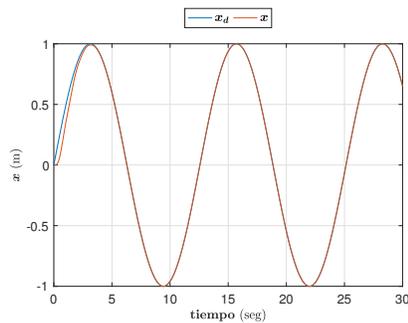
$$K_T = Q_T = \begin{bmatrix} 4.5 & 0 & 0 \\ 0 & 4.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}; P_T = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; K_R = Q_R = 3I_3; P_R = 10I_3. \quad (4.2)$$

El comportamiento del cuadricóptero para el seguimiento de trayectoria con el control por saturaciones anidadas se observa en la figura 4.8.

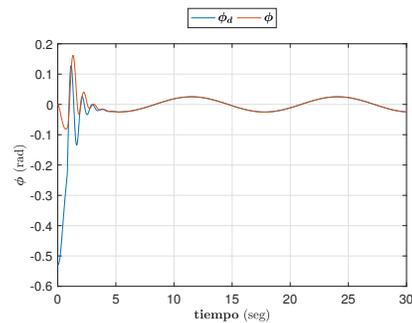


**Fig. 4.8:** Seguimiento de trayectoria.

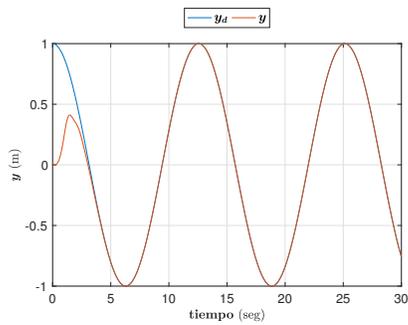
Los resultados de la simulación se muestran en las siguientes gráficas.



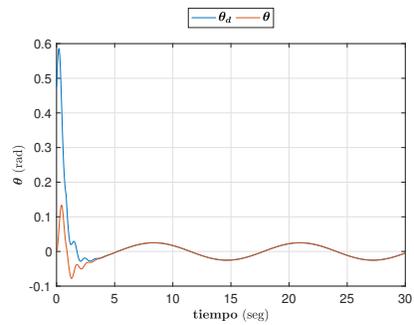
**(a)** Posición en  $x$



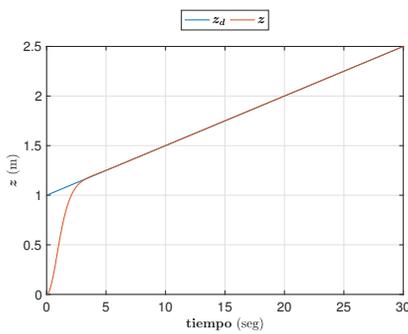
**(b)** Posición en  $\phi$



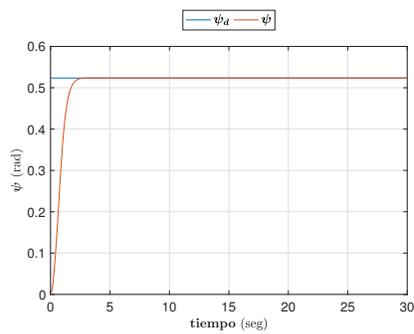
(c) Posición en  $y$



(d) Posición en  $\theta$



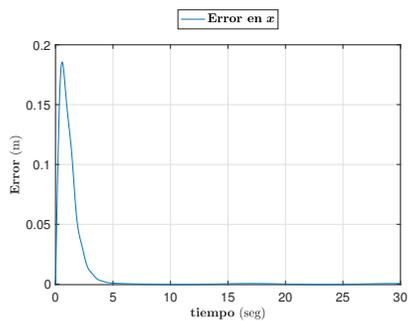
(e) Posición en  $z$



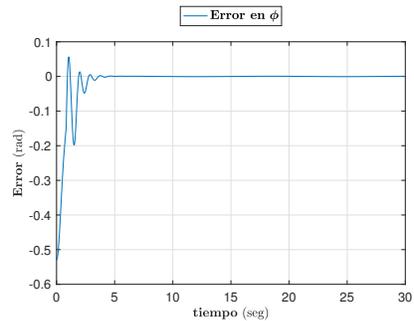
(f) Posición en  $\psi$

**Fig. 4.9:** Evolución del estado.

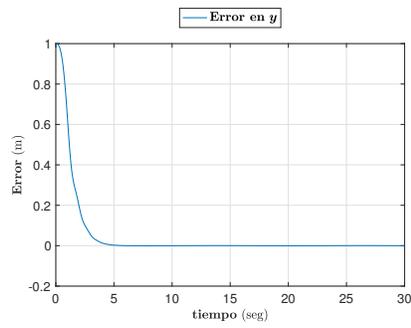
Como se puede observar en la imagen 4.9, los estados evolucionan hacia la trayectoria de referencia de manera más lenta que el control por backstepping, además de tener un inicio más oscilatorio que el controlador anterior.



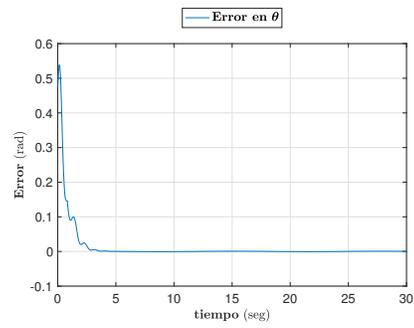
(a) Error en  $x$



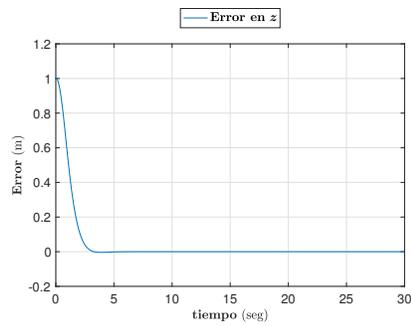
(b) Error en  $\phi$



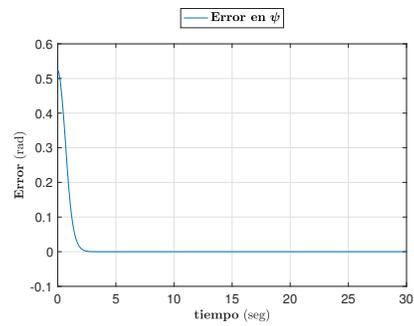
(c) Error en  $y$



(d) Error en  $\theta$



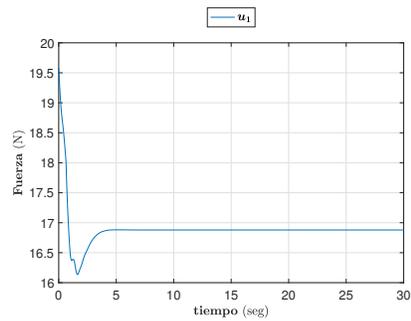
(e) Error en  $z$



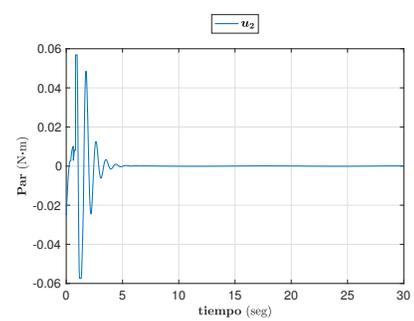
(f) Error en  $\psi$

Fig. 4.10: Evolución de los errores en el estado.

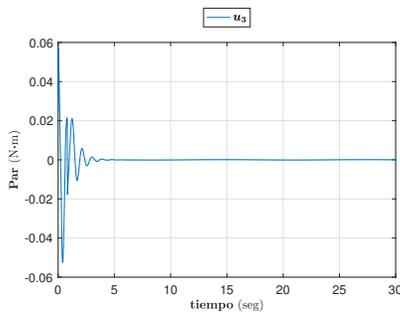
De igual manera, se puede observar que los errores en el sistema convergen a cero, y se mantienen en este estado por el resto de la simulación.



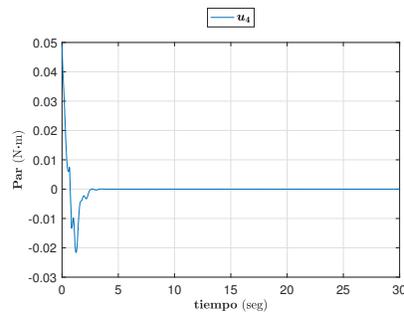
(a) Control  $u_1$



(b) Control  $u_2$



(c) Control  $u_3$



(d) Control  $u_4$

Fig. 4.11: Evolución de las señales de control.

En la figura 4.11 se muestran los controles para la simulación, se puede observar que los controles se mantienen en valores aceptables, además, cumpliendo con el diseño del controlador, el valor del control  $u_1$  se mantiene en valores seguros menores a  $20\text{ N}$  durante todo el tiempo, cumpliendo con el objetivo de este controlador.

## 4.5 Resultados del controlador con retardo variable a la entrada

La estructura para el controlador se encuentra en la figura 4.12

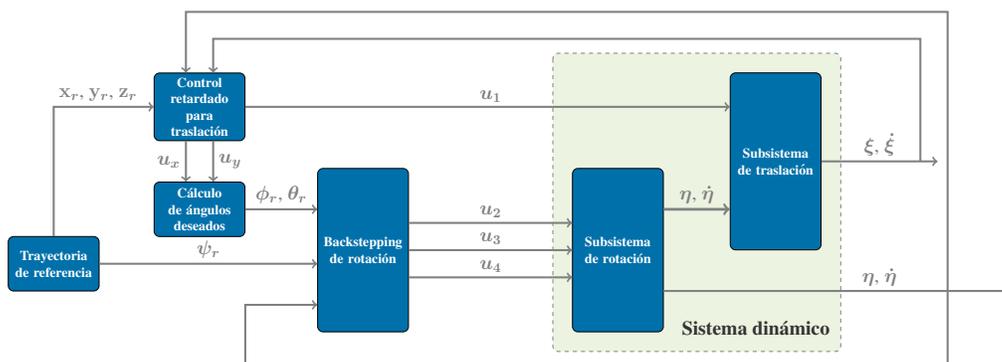
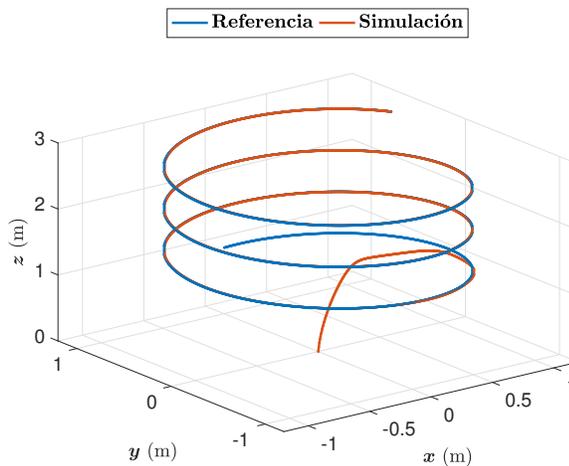


Fig. 4.12: Estructura del controlador.

Las ganancias para el controlador retardado para traslación obtenidas por medio de software especializado (MATLAB) se muestran a continuación. Para la etapa de rotación se emplea el controlador por backstepping, utilizando las mismas ganancias presentadas en la sección 4.3.

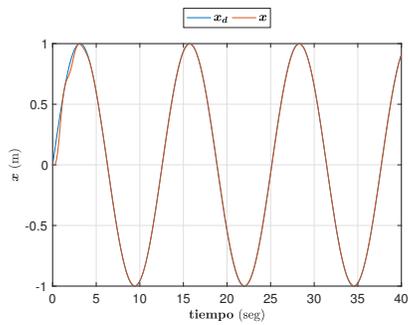
$$\begin{aligned}
 K &= \begin{bmatrix} -2.9217 & 0 & 0 & -3.6148 & 0 & 0 \\ 0 & -2.9217 & 0 & 0 & -3.6148 & 0 \\ 0 & 0 & -2.9217 & 0 & 0 & -3.6148 \end{bmatrix}; \\
 H &= \begin{bmatrix} 0.4916 & 0 & 0 & 0.2987 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4916 & 0 & 0 & 0.2987 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4916 & 0 & 0 & 0.2987 \end{bmatrix}; \\
 S &= \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}; \quad T = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}; \quad h = 0.2, \quad m = 0.7, \quad n = 0.9.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

La figura 4.13 muestra el funcionamiento del cuadricóptero para el seguimiento de trayectoria con un retardo a la entrada y el controlador basado en dicho retardo.

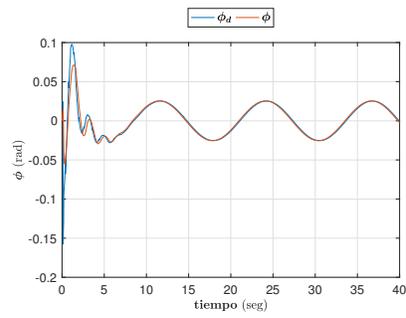


**Fig. 4.13:** Seguimiento de trayectoria.

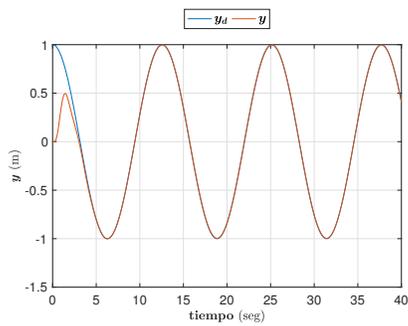
Los resultados de la simulación se muestran en las siguientes gráficas.



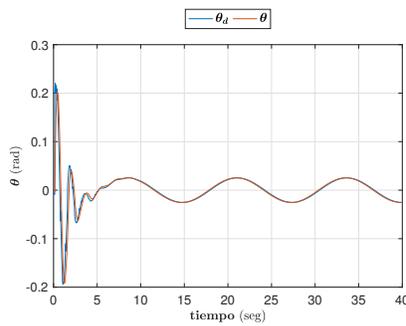
(a) Posición en  $x$



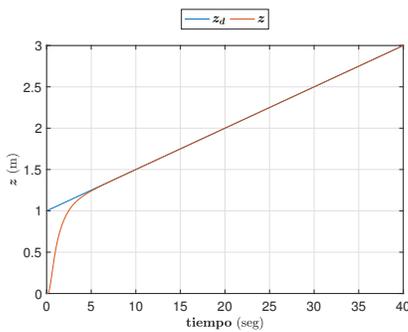
(b) Posición en  $\phi$



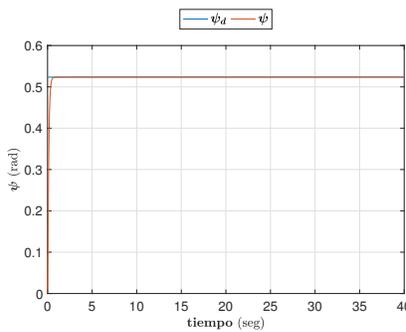
(c) Posición en  $y$



(d) Posición en  $\theta$



(e) Posición en  $z$

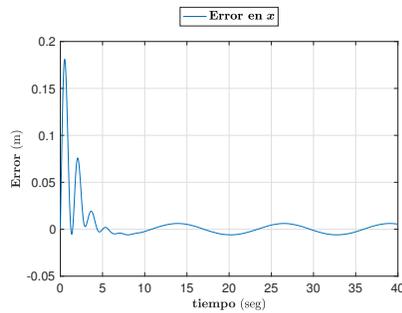


(f) Posición en  $\psi$

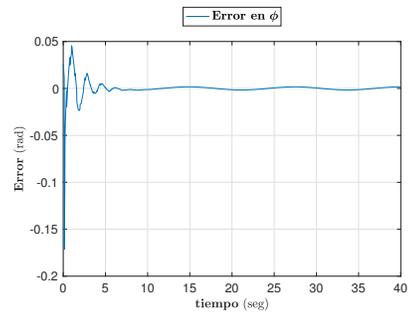
Fig. 4.14: Evolución del estado.

Como se puede observar en la imagen 4.14, los estados logran el seguimiento de trayectoria deseado, sin embargo, debido al retardo, afecta los estados

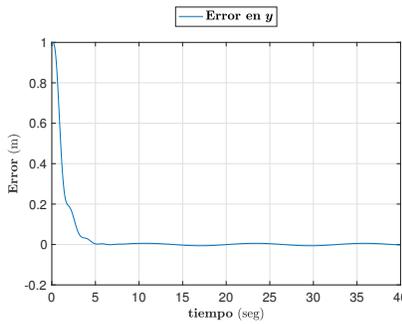
no controlables, además de provocar un movimiento errático al inicio de la simulación.



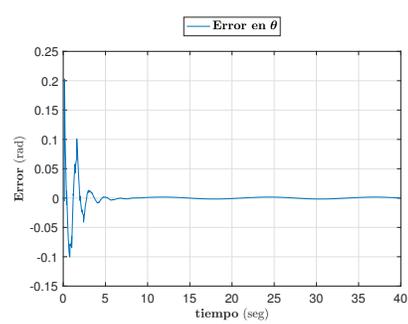
(a) Error en  $x$



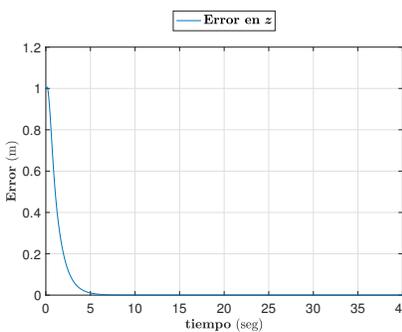
(b) Error en  $\phi$



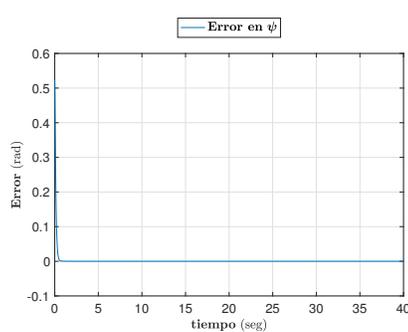
(c) Error en  $y$



(d) Error en  $\theta$



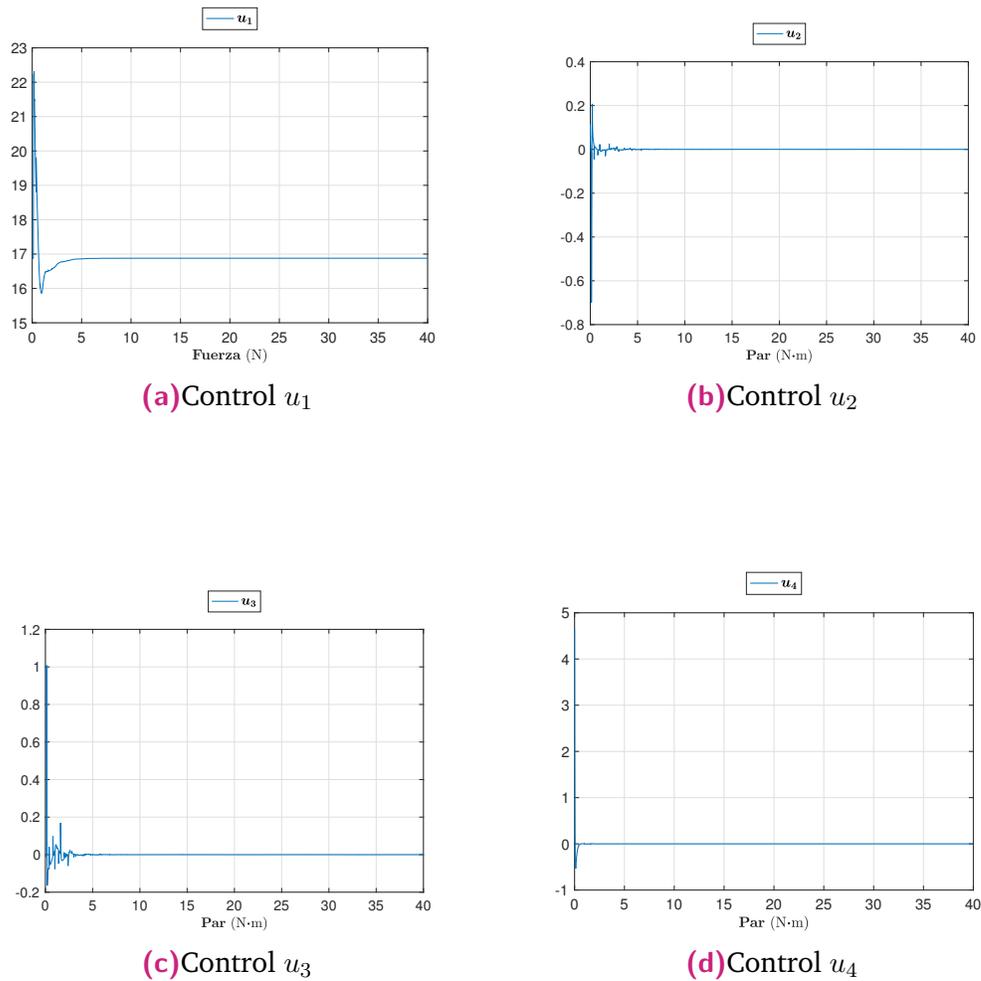
(e) Error en  $z$



(f) Error en  $\psi$

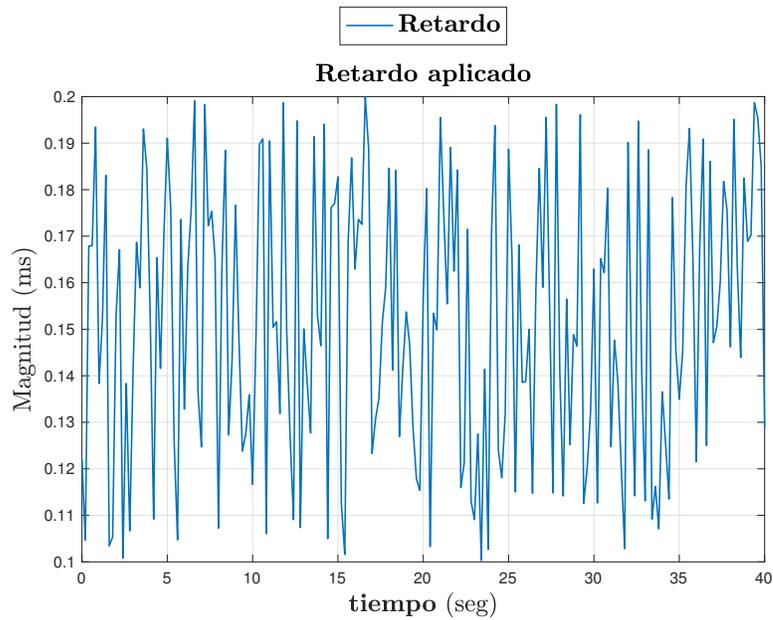
Fig. 4.15: Evolución de los errores en el estado.

Los errores del sistema no llegan de manera asintótica a cero, sin embargo, los valores de estos errores son de aproximadamente cuatro milímetros por lo que el controlador tiene un desempeño adecuado.



**Fig. 4.16:** Evolución de las señales de control.

Los controles se mantienen acotados, el valor del empuje total  $u_1$  inicia alrededor de  $23\text{ N}$ , lo que aún se considera aceptable para el sistema de propulsión.



**Fig. 4.17:** Retardo aplicado.

En la figura 4.17 se muestra el retardo aplicado en el sistema para el controlador, el valor es variable y oscila en el rango de  $0.1 - 0.2ms$ .

## 4.6 Ejemplo comparativo entre controladores para sistemas multiagentes

La estructura para el controlador se encuentra en la figura 4.18

Para el controlador mostrado en el teorema 10 se utiliza una ganancia  $\lambda = 1$ , mientras que para el control desarrollado en la proposición 16 se emplean las ganancias  $\lambda_1 = 0.001$ ,  $\lambda_2 = 0.001$  y  $\lambda_3 = 1$ , en ambos casos las matrices de ganancia utilizadas son  $\Gamma_i = 2I_n$  y  $D_i = 25I_n$ . El ejemplo de comparación se realiza para un sistema de 10 robots industriales de dos grados de libertad cuya dinámica se encuentra establecida en la ecuación (1.54) de la sección 1.6. La trayectoria de referencia a seguir en este ejemplo es  $q_d^T = [0.5\cos(0.2\pi t) \ 0.5\cos(0.2\pi t)]$ , mien-

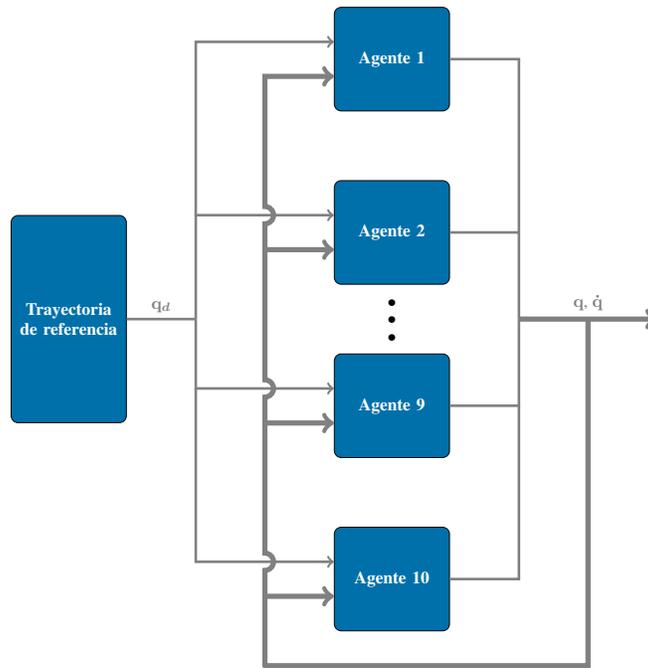
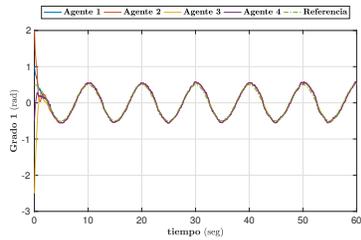


Fig. 4.18: Estructura del controlador.

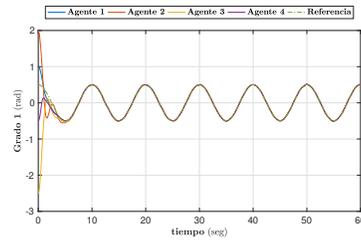
tras que el retardo impuesto es  $T_{i,j} = 0.5s$ . Por último, la matriz Laplaciana de comunicación está dada por la ecuación (4.4).

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

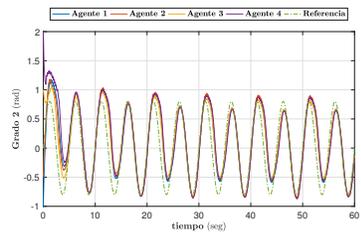
Los resultados comparativos con aplicación de ruido se muestran a continuación. Para poder observar los resultados de manera clara solamente se muestran los resultados de 4 robots manipuladores.



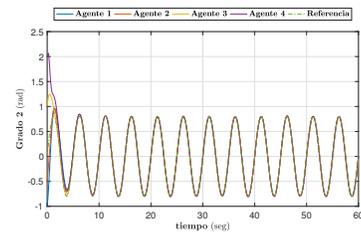
(a) Grado 1 no integral



(b) Grado 1 integral



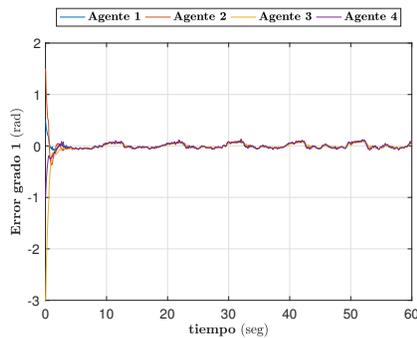
(c) Grado 2 no integral



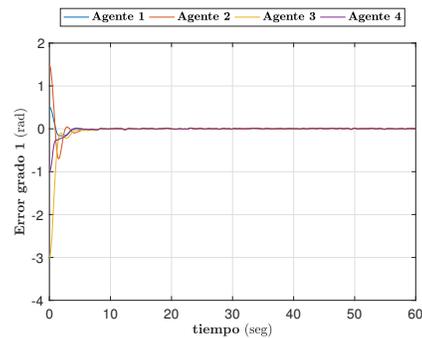
(d) Grado 2 integral

**Fig. 4.19:** Evolución de los estados para los agentes.

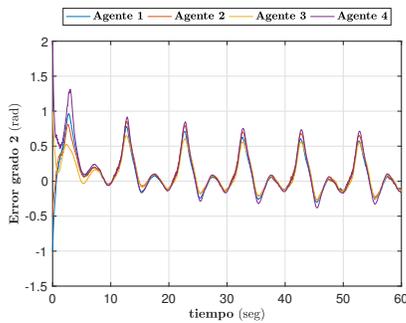
Se puede observar que los robots en el grado 2 no siguen la referencia de manera adecuada con el controlador del teorema 10 mientras que con el control propuesto se logra hacer el seguimiento de trayectorias.



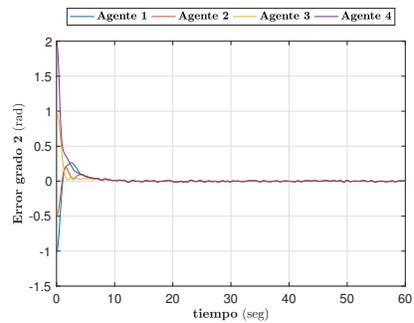
(a) Error grado 1 no integral



(b) Error grado 1 integral



(c) Error grado 2 no integral



(d) Error grado 2 integral

Fig. 4.20: Evolución de los errores para los agentes.

En la figura 4.20 se puede apreciar de manera clara la mejora que se obtiene al aplicar el controlador propuesto sobre el controlador originalmente analizado, donde, a pesar del ruido blanco aplicado, se logra hacer un seguimiento de trayectoria correcto mientras que el error en el segundo grado de libertad para el controlador original tiene un error periódico. Finalmente, el ruido aplicado se muestra en la siguiente figura.

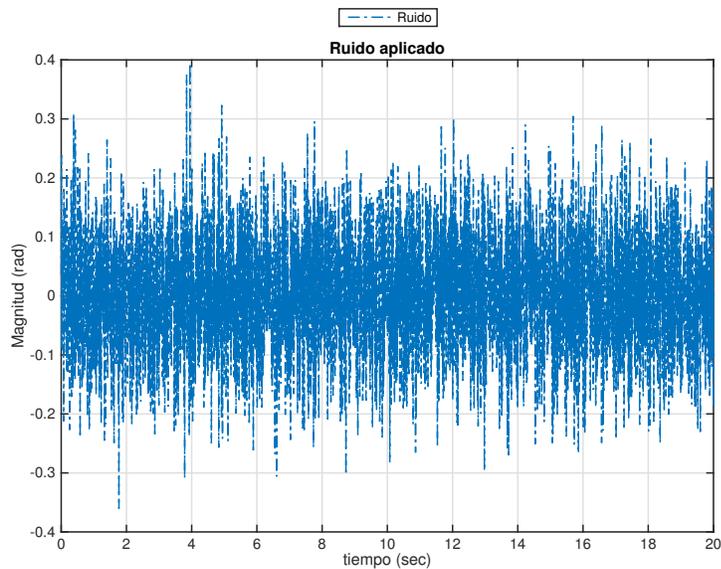


Fig. 4.21: Ruido aplicado.

## 4.7 Resultados del controlador con retardo para sincronización de sistemas multiagentes

La estructura para el controlador se encuentra en la figura 4.22

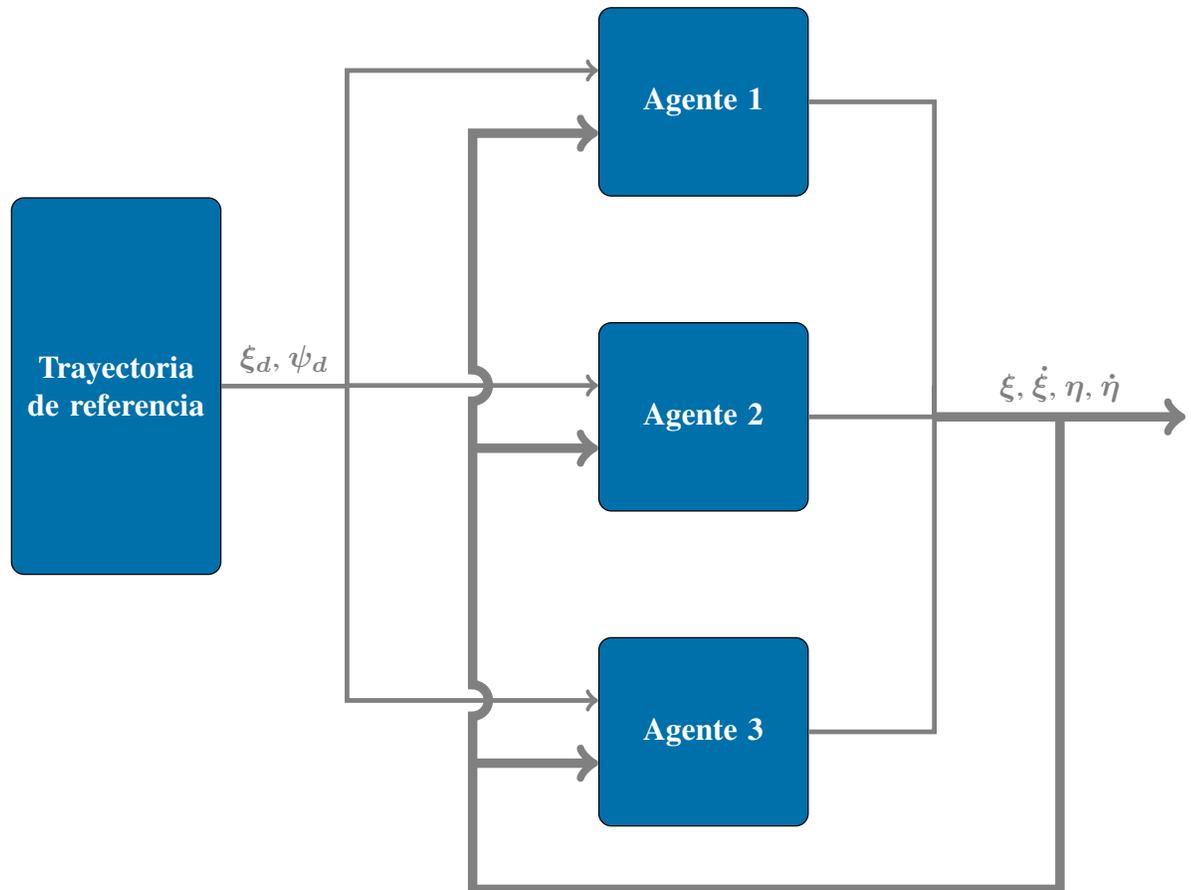


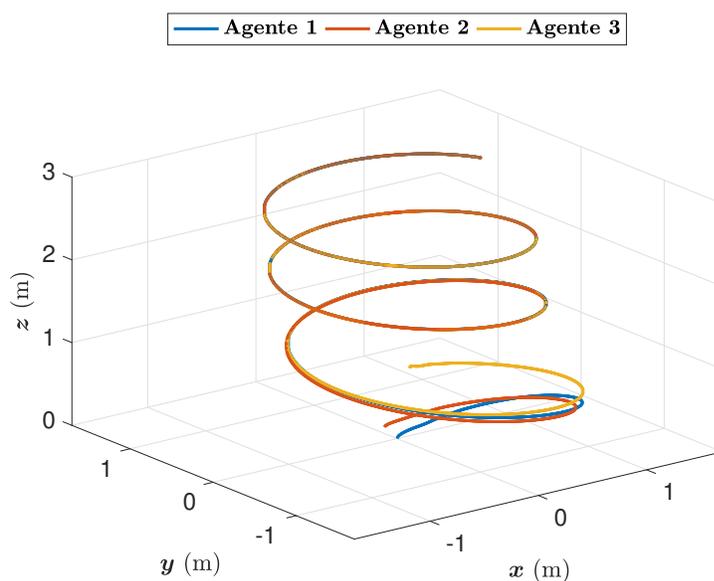
Fig. 4.22: Estructura del controlador.

Las ganancias utilizadas para el controlador y el retardo propuesto se muestran en la siguiente tabla:

**Tab. 4.4:** Ganancias multiagentes.

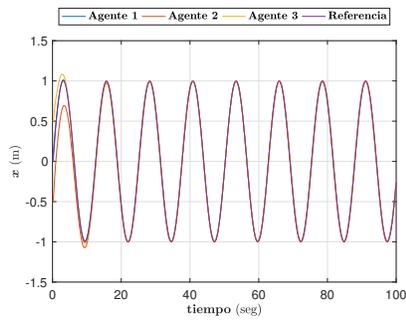
Ganancia	Valor
$\lambda_1$	0.001
$\lambda_2$	0.001
$\lambda_3$	1
$T_{i,j}$	0.5s

En la figura 4.23 se muestra el seguimiento de la trayectoria por el cuadricóptero con el control de multiagentes en la figura 4.23, es importante mencionar que, a pesar que parece que los sistemas colisionan al seguir todos la misma trayectoria, estos trabajan en un marco de sincronización y se posicionan a cierta distancia evitando colisiones.

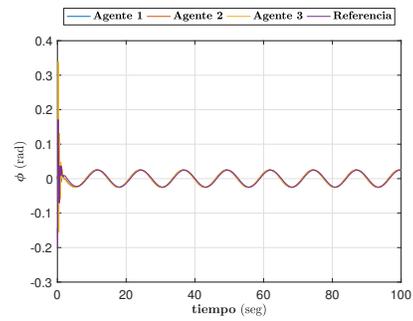


**Fig. 4.23:** Seguimiento de trayectoria.

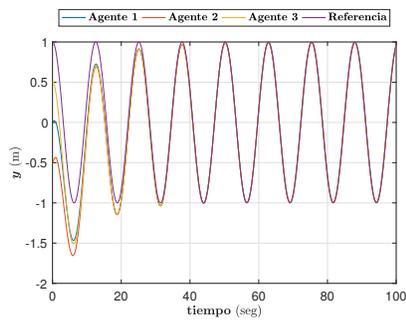
Los resultados de la simulación se muestran en las siguientes gráficas.



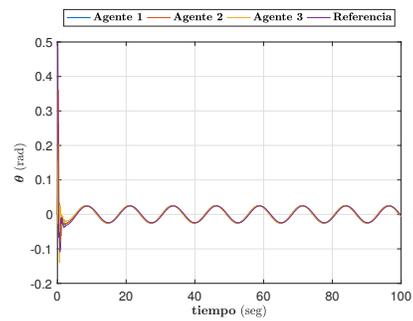
(a) Posición en  $x$



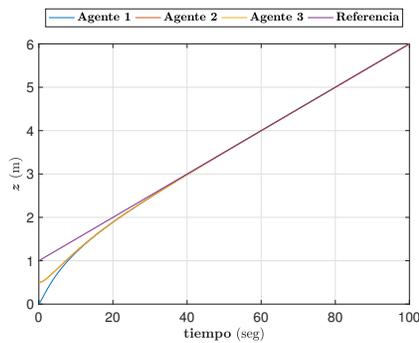
(b) Posición en  $\phi$



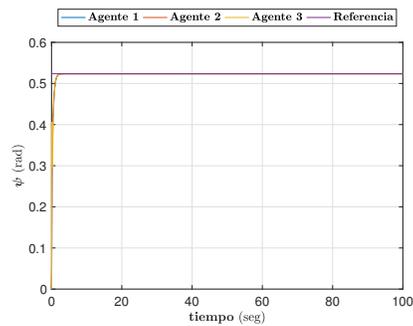
(c) Posición en  $y$



(d) Posición en  $\theta$



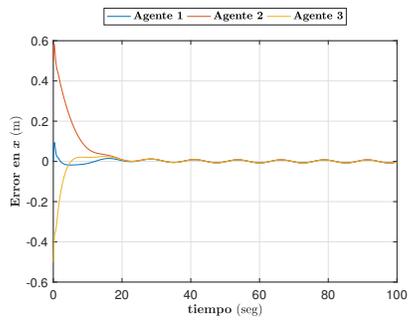
(e) Posición en  $z$



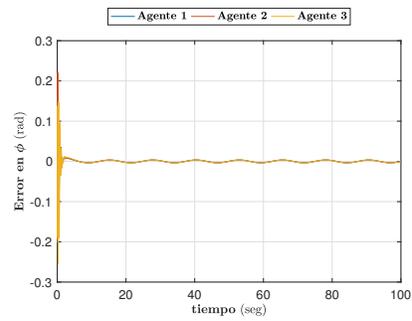
(f) Posición en  $\psi$

Fig. 4.24: Evolución del estado.

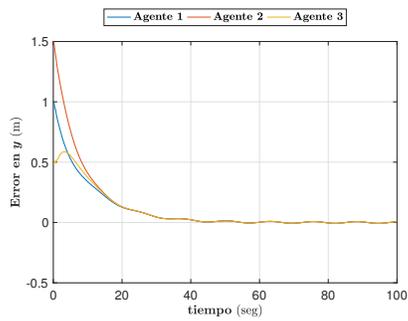
Como se puede observar en la figura 4.24, todos los estados se estabilizan de manera apropiada y rápida.



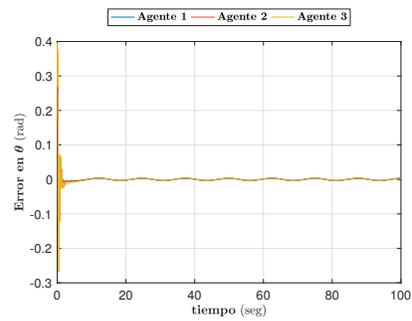
(a) Error en  $x$



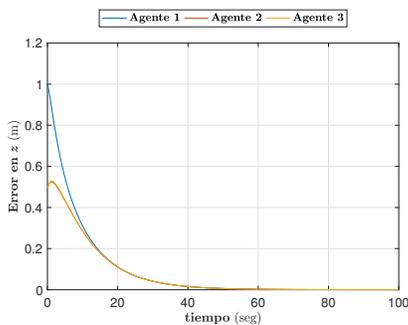
(b) Error en  $\phi$



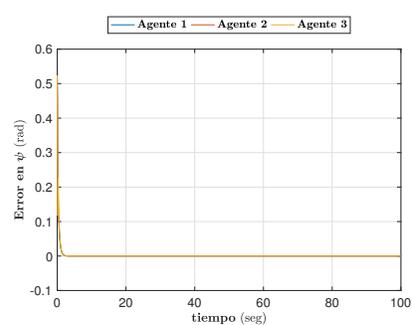
(c) Error en  $y$



(d) Error en  $\theta$



(e) Error en  $z$



(f) Error en  $\psi$

Fig. 4.25: Evolución de los errores en el estado.

A pesar que los errores en algunos estados no logra llegar a cero, estos son errores pequeños en el orden de milímetros.

# Conclusiones

En el presente trabajo de investigación se logró el diseño de un controlador para sistemas multiagentes que permitió lograr la sincronización de agentes modelados dinámicamente mediante las técnicas de Euler-Lagrange. Aunque para este trabajo el controlador diseñado se aplicó a un UAV de tipo quadrotor, es importante mencionar que el resultado obtenido no solamente fue útil para este tipo de sistemas, sino que se puede aplicar para cualquiera que cumpla con la estructura de modelado propuesta.

Como primera etapa en esta tesis, se obtuvo el modelo dinámico del robot aéreo tipo quadrotor usando las ecuaciones de energías de la técnica Euler-Lagranges. En segunda instancia, se desarrollaron dos controladores basados en técnicas ampliamente conocidas y estudiadas a lo largo de la literatura como son backstepping y saturaciones anidadas, con el objetivo de validar mediante simulaciones el modelado realizado y, en el segundo caso, lograr acotar los esfuerzos de control para los motores de la aeronave.

Posteriormente, se propusieron dos controladores que representan la aportación de esta tesis, en primer lugar, se desarrolló un controlador para un quadrotor que toma en consideración los retardos que existen en la actualización de la posición del sistema debido al GPS y logra hacer el seguimiento de trayectoria. Por otro lado, se obtuvo un controlador que es capaz de lograr la sincronización de múltiple agentes incluyendo el efecto que existe debido a los retardos en las comunicaciones entre estos y además, logra rechazar el ruido existente en las mediciones de los sensores involucrados en la retroalimentación de los estados de cada uno de los agentes.

Por último, todos los algoritmos de los controladores diseñados en este trabajo fueron simulados mediante herramientas computacionales, que permitieron validar su efectividad y desempeño en el cumplimiento de la tarea a realizar,

esto es, lograr el seguimiento de trayectorias, obteniendo resultados adecuados y que permiten motivar seguir trabajando con estos diseños. El quadrotor que se utilizó como base para los parámetros de simulación es un modelo F450 fabricado por la marca DJI.

## 4.8 Trabajo futuro

De acuerdo a los resultados obtenidos en este trabajo y con el objetivo de dar continuidad a esta tesis y poder validar completamente el funcionamiento de los controladores diseñados ante situaciones realistas, se propone el siguiente trabajo futuro:

- Validación experimental de las leyes de control propuestas en este trabajo.
- Análisis de la robustez del control retardado ante variaciones paramétricas.
- Selección del sistema de control adecuado que permita volar de manera autónoma.

# Referencias

- [1]G. Casadei, M. Furci, R. Naldi y L. Marconi. *Quadrotors Motion Coordination Using Consensus Principle*. American Control Conference, Palmer House Hilton, July 1-3, Chicago, IL, USA, 2015 (citado en la página 1).
- [2]Mohammad Mozaffari, Walid Saad, Mehdi Bennis, y Mérouane Debbah. *Mobile Unmanned Aerial Vehicles (UAVs) for Energy-Efficient Internet of Things Communications*. IEEE Transactions on Wireless Communications, Vol. 16, 2017 (citado en la página 1).
- [3]Jingxuan Sun, Boyang Li, Yifan Jiang y Chih-yung Wen. *A Camera-Based Target Detection and Positioning UAV System for Search and Rescue (SAR) Purposes*. Sensors 2016, 16, 1778, 2016 (citado en la página 1).
- [4]E. Sumano, R. Castro, R. Lozano y S. Salazar. *Synchronized Flight Formation of Quadrotors*. 2nd IFAC Workshop on Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems, 2013 (citado en la página 1).
- [5]Sonia Waharte, Niki Trigoni y Simon J. Julier. *Coordinated Search with a Swarm of UAVs*. Sensors 2016, 16, 1778, 2016 (citado en la página 1).
- [6]P. Castillo, R. Lozano y A. Dzul. *Modelling and control of mini-flying machines*. Springer-Verlag, 2005 (citado en las páginas 2, 13).
- [7]P. Castillo, P. García, R. Lozano, y P. Albertos. *Modelado y Estabilización de un Helicóptero con Cuatro Rotores*. RIAI Revista Iberoamericana de Automtica e Informtica Industrial, vol. 4, no. 1, pp. 41–57, 2007 (citado en las páginas 2, 3, 11).
- [8]Reza Olfati-Saber. *Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles*. MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, 2001 (citado en la página 2).
- [9]K. U. Lee, Y. H. Yun, W. Chang, J. B. Park, y Y. H. Choi. *Modeling and Altitude Control of Quad-rotor UAV, in 11th International Conference on Control*. Automation and Systems, KINTEX, Gyeonggi-do, Korea, pp. 1897-1902, 2011 (citado en la página 3).

- [10]S. Salazar, J. Escareno, D. Lara y R. Lozano. *Embedded control system for a four rotor UAV*. Proceedings of the 2006 American Control Conference, pp 3936-3941, 2006 (citado en la página 3).
- [11]Sun, D. *Synchronization and control of multiagent systems*. CRC PressI L1c, 2010 (citado en la página 3).
- [12]García, L., Dzul, A., y Espinoza, T. *Control de formación de helicópteros cuadrirotor con evasión de colisiones*. 1er Congreso Nacional de Ingeniería Electrónica y Electromecánica, 2012 (citado en la página 3).
- [13]Guerrero, J.A. and Lozano, R. *Flight formation of multiple mini rotorcraft based on nested saturations*. The 2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2010 (citado en la página 4).
- [14]Guerrero, J.A., Castillo, P., Salazar, S., and Lozano, R. *Mini rotorcraft flight formation control using bounded inputs*. Springer J Intell Robot Syst, 65, 175– 186, 2012 (citado en la página 4).
- [15]Davidi, A., Berman, N., y Arogeti, S. *Formation flight using multiple integral backstepping controllers*. IEEE 5th International Conference on Cybernetics and Intelligent Systems (CIS), 2011 (citado en la página 4).
- [16]Igarashi, Y., Hatanaka, T., Fujita, M., and Spong, M. W. *Passivity-based attitude synchronization in SE(3)*. Control Systems Technology, IEEE Transactions on, Vol. 17, No. 5, pp. 1119-1134., 2009 (citado en la página 4).
- [17]Goldstein, H. *Classical Mechanics*. Addison Wesley Series in Physics, Adison-Wesley, U.S.A., second edition, 1980 (citado en la página 13).
- [18]J. J. E. Slotine y W. Li. *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, 1991 (citado en la página 19).
- [19]J. J. E. Slotine y W. Li. *On the adaptive control of robot manipulators*. Int. J. Robotics Research, 1987 (citado en la página 19).
- [20]Emmanuel Nuño, Romeo Ortega, Luis Basañez y David Hill. *Synchornization of Networks of Nonidentical Euler-Lagrange Systems With Uncertain Parameters and Communication Delays*. IEEE Transactions on Automatic Control, 1987 (citado en las páginas 19, 21).
- [21]R. Diestel. *Graph Theory*. volume 173 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2000 (citado en la página 19).

- [22]R. Olfati-Saber, J. A. Fax y R. M. Murray. *Consensus and cooperation in networked multi-agent systems*. Proc. IEEE vol. 95, no. 1, pp. 215-233, 2007 (citado en las páginas 23, 25).
- [23]R. Olfati-Saber y R. M. Murray. *Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays*. IEEE Trans. Autom. Control, vol. 49, no. 9, pp. 1520–1533, 2004 (citado en las páginas 23, 24).
- [24]R. S. Varga. *Gersgorin and his circles*. Springer, 2004 (citado en la página 24).
- [25]H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002 (citado en las páginas 33, 35, 36, 48).
- [26]H. Sira-Ramírez, R. Márquez, F. Rivas-Echeverría y O. Llanes-Santiago. *Control de sistemas no lineales*. Pearson Prentice Hall, 2005 (citado en la página 35).
- [27]A. R. Teel. *Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls*. Systems & Control Letters 18 pp. 165-171, 1992 (citado en la página 39).
- [28]N. N. Krasovskii. *Stability of Motion*. Stanford, CA: Stanford Univ. Press, 1963 (citado en la página 41).
- [29]K. Gu. *An integral inequality in the stability problem of time-delay systems*. Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control pp 2805-2810, 2000 (citado en la página 42).
- [30]S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron y V. Balakrishnan. *Linear Matrix inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: SIAM, 1994 (citado en la página 42).
- [31]M. Gautier y W. Khalil. *Direct calculation of minimum set of inertial parameters of serial robots*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 6, pp. 368–373, 1990 (citado en la página 43).
- [32]E. Nuño, R. Ortega, L. Basañez y D. Hill. *Synchronization of Networks of Nonidentical Euler-Lagrange Systems With Uncertain Parameters and Communication Delays*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 56, No. 4, pp. 935–941, 2011 (citado en la página 44).
- [33]M. Landry, S. A. Campbell, K. Morris y C. O. Aguilar. *Dynamics of an Inverted Pendulum with Delayed Feedback Control*. Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM J. APPLIED DYNAMICAL SYSTEMS, vol.4 No.2, 2005 (citado en la página 63).

