



Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Facultad de Ingeniería
Centro de Investigación y Estudios de Posgrado

**“Determinación de tamaño crítico de partícula del molino
SAG planta Velardeña mediante curva de velocidad de
rompimiento”**

T E S I S

Que para obtener el grado de:

Maestría en Ingeniería de Minerales

Presenta:

Susana Margarita García Delgado

Asesor:

Dr. José Ángel Delgadillo Gómez

Co-Asesor:

M.C. J. Francisco García Suárez

San Luis Potosí, S. L. P.

Noviembre 2021





Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Facultad de Ingeniería
Centro de Investigación y Estudios de Posgrado

**“Determinación de tamaño crítico de partícula del molino SAG
planta Velardeña mediante curva de velocidad de rompimiento”**

T E S I S

Que para obtener el grado de:
Maestría en Ingeniería de Minerales

Presenta:

Susana Margarita García Delgado

Asesor:

Dr. José Ángel Delgadillo Gómez

Co-Asesor:

M.C. J. Francisco García Suárez

Sinodales:

1.-Dr. José Ángel Delgadillo Gómez (A).

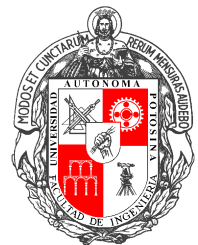
2.-M.C. J. Francisco García Suárez (C).

3.-Dr. Mario Moscosa Santillán.

4.-Dr. Antonio Aragón Piña.

San Luis Potosí, S. L. P.

Noviembre 2021





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS
DIRECCIÓN DE BIBLIOTECA VIRTUAL
Zona Universitaria s/n C.P. 78290 Tel. 834 25 42 Fax 828-23-06
San Luis Potosí, S.L.P. México



El que suscribe: Susana Margarita García Delgado, con domicilio en Andador Bruno Martínez 175, colonia FOVISSSTE, C.P. 35057 de Gómez Palacio, Durango, con teléfono 8714109301. En mi carácter de autor y titular de la tesis que lleva por nombre: “Determinación de tamaño crítico de partícula del molino SAG planta Velardeña mediante curva de velocidad de rompimiento”, en lo sucesivo “LA OBRA” y por ende, cedo y autorizo a la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, para que lleve a cabo la divulgación, publicación, reproducción, así como la digitalización de la obra, en formato electrónico y sin fines de lucro.

La Universidad Autónoma de San Luis Potosí, se compromete a respetar en todo momento mi autoría y a otorgarme el crédito correspondiente.

San Luis Potosí, S.L.P., a 3 de noviembre de 2021

Atentamente:


Susana Margarita García Delgado



18 de febrero de 2021

**ING. SUSANA MARGARITA GARCÍA DELGADO
P R E S E N T E.**

En atención a su solicitud de Temario, presentada por el **Dr. José Ángel Delgadillo Gómez** y el **M.C. J. Francisco García Suárez**, Asesor y Coasesor de la Tesis que desarrollará Usted con el objeto de obtener el Grado de **Maestra en Ingeniería de Minerales**, me es grato comunicarle que en la sesión del H. Consejo Técnico Consultivo celebrada el día 18 de febrero del presente año, fue aprobado el Temario propuesto:

TEMARIO:

***"Determinación de tamaño crítico de partícula de molino SAG
planta Velardeña mediante curva de velocidad de rompimiento"***

Resumen

Introducción

- I. Antecedentes sobre modelos matemáticos de la descripción de la molienda SAG
- II. Desarrollo experimental para determinar el tamaño crítico de la molienda SAG en la planta Velardeña
- III. Resultados de la metodología para determinar el tamaño crítico en la molienda SAG en planta Velardeña

Conclusiones

Referencias

Anexos

"MODOS ET CUNCTARUM RERUM MENSURAS AUDEBO"

A T E N T A M E N T E


DR. EMILIO JORGE GONZÁLEZ GALVÁN
DIRECTOR

DIRECCION

www.uaslp.mx

Av. Manuel Nava 8
Zona Universitaria • CP 78290
San Luis Potosí, S.L.P.
tel. (444) 826 2330 al39
fax (444) 826 2336

Copia. Archivo.
*etn

AGRADECIMIENTOS

A Dios, quien un día me pensó como parte de su maravillosa creación, que es para mí un Padre amoroso y que me deja colaborar humildemente en su obra.

Dedico esta tesis a mis padres (Luis Manuel y Margarita), que siempre me demostraron tanto amor, dedicación, que sembraron en mí el ejemplo de bondad, nobleza, inteligencia y empuje que hasta ahora me mantiene a flote. Porque fuiste tú, mamá, quien desde los 3 años me escuchó y llevó a la escuela, tus lágrimas de emoción cuando ganaba concursos académicos y tu orgullo por mí. Tú, papá, noble, callado y trabajador, tu esencia seguirá por siempre conmigo. Ahora los dos desde el cielo, siempre me acompañan.

A mi director de tesis, el Doctor José Ángel Delgadillo, por su gran conocimiento y humanidad, su disposición a través del tiempo.

A mi Co-asesor J. Francisco García Suárez, por todas las facilidades y apoyos técnicos proporcionados para el desarrollo de esta tesis.

Al Doctor Antonio Aragón Piña (excelente como investigador y todavía más como ser humano).

A los doctores Roel Cruz y Mario Moscota por sus valiosas observaciones.

A Jenny Zertuche, una persona buena, amable y súper servicial, una gran amiga que me llevo de San Luis

A mis maestros de la maestría en Ingeniería de Minerales, fue gratificante refrescarme como estudiante otra vez con personas tan preparadas.

A mis hijos (Eliás, Lupita y David Miranda García) que son la más grande fuente de amor e inspiración de mi vida, que esperaban días por mí mientras yo viajaba a San Luis, Potosí a estudiar la maestría. Por quienes vivo. Sepan que ustedes son mi mejor aportación a este mundo y el motivo por el que me levanto.

A mi tío Juan, la persona más sencilla y noble que llevaré por siempre en el corazón. Quien nos cuidó como un papá.

A mi abuelita Margarita, quien formó en mí el carácter, orgullo, alegría y amor al aprendizaje.

Al ingeniero Juan Carlos Granillo Moreno, quien es para mi la persona que más me ha apoyado en todo sentido para terminar esta maestría. Quien me comparte tantas enseñanzas en la vida. Eres un verdadero compañero y maestro para mi, es un honor conocerte.

A mi suegra (señora Esperanza), pues sin ella yo no hubiera podido estar estudiando en otra ciudad, siempre cuidó a mis hijos y ahora ya está en el cielo.

A mi hermano, el Doctor Luis Arturo García Delgado, que siempre estuvo colaborando conmigo mediante consejos y disertaciones. Hermano, ver a donde has llegado, me anima a seguir tus pasos. Siempre te lo he dicho, el mejor hermano del mundo.

A mi hermana Mily, por su cariño y alegría, porque siempre tiene un momento agradable, porque con sus bromas y presión, me animaba a terminar mi tesis. Ya no podrás mandarme memes de la tesis

A mi querida amiga Adriana Gamboa por su apoyo en todo momento.

A mi ahora colega Luis Maldonado por su apoyo.

DEDICATORIA

***A Dios, a la Virgen de Guadalupe, a mis papás (Luis Manuel y Margarita),
mis hermanos (Luis y Mily García Delgado), mis hijos
(Elías, David y Lupita Miranda García), a mi tío Juan y a mi abue, al
ingeniero Juan Carlos Granillo y a mi suegra Esperanza Blanco***

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS	IV
DEDICATORIA	VI
RESUMEN	I
NOMENCLATURA POR TEMA	II
INTRODUCCIÓN	1
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	5
JUSTIFICACIÓN	5
OBJETIVO GENERAL	6
OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	6
HIPÓTESIS	7
I. ANTECEDENTES SOBRE MODELOS MATEMÁTICOS DE LA DESCRIPCIÓN DE LA MOLIENDA SAG	8
1.1 GENERALIDADES DE MOLIENDA SAG	8
1.1.1 FENÓMENOS DE ROMPIMIENTO DENTRO DE UN MOLINO SAG.....	11
1.2 MODELOS PARA MOLIENDA “SAG”	14
1.2.1 MODELO POBLACIONAL EN MOLIENDA SAG	14
1.2.2 MODELO ENERGÉTICO PARA MOLINOS SAG.....	30
1.3 MODELO MATEMÁTICO DE BALANCES METALÚRGICO EN CIRCUITO DE MOLIENDA.....	44
II. DESARROLLO EXPERIMENTAL PARA DETERMINAR EL TAMAÑO CRÍTICO DE LA MOLIENDA SAG EN LA PLANTA VELARDEÑA	48
2.1 METODOLOGÍA PARA RESOLUCIÓN DE OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	50
2.1.1 OBJETIVO 1: METODOLOGÍA PARA DETERMINAR LAS CARACTERÍSTICAS OPERACIONALES Y DATOS DE DISEÑO DEL MOLINO DEL CIRCUITO DE MOLIENDA DE UNIDAD VELARDEÑA	50
2.1.2 OBJETIVO 2: OBTENER EL BALANCE METALÚRGICO DEL CIRCUITO DE MOLIENDA VELARDEÑA MEDIANTE ALGORITMO MATRICIAL	56
2.1.3 OBJETIVO 3: DETERMINAR LA CURVA DE VELOCIDAD DE ROMPIMIENTO DE MOLIENDA SAG .	72
2.1.4. OBJETIVO 4: DETERMINAR EL TAMAÑO CRÍTICO DE PARTÍCULA EN BASE A LA CURVA DE VELOCIDAD DE ROMPIMIENTO	74
2.1.5. OBJETIVO 5: EVALUAR LAS VARIACIONES EN EL RENDIMIENTO DEL MOLINO EN BASE AL TAMAÑO CRÍTICO DE PARTÍCULA DETERMINADO	76
III. RESULTADOS DE LA METODOLOGÍA PARA DETERMINAR EL TAMAÑO CRÍTICO EN LA MOLIENDA SAG EN PLANTA VELARDEÑA	77
3.1 GENERALIDADES DE UNIDAD MINERA VELARDEÑA, GRUPO PEÑOLES (CASO DE ESTUDIO)	77
3.2 CARACTERIZACIÓN DE CIRCUITO DE MOLIENDA VELARDEÑA.....	79
3.2.1 PARÁMETROS DE MOLINO SAG (DIMENSIONES Y CONDICIONES DE OPERACIÓN) Y PORCENTAJE DE SÓLIDOS DE CORRIENTES MUESTREADAS.....	84
3.2.2 DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑO DE PARTÍCULAS DE CORRIENTES DE MUESTREO CIRCUITO DE MOLIENDA VELARDEÑA	86
3.3 BALANCE METALÚRGICO DEL CIRCUITO DE MOLIENDA.....	88
3.3.1. PLANTEAMIENTO DE SISTEMA DE ECUACIONES.....	88
3.3.2 COMPARACIÓN DE RESOLUCIÓN OBTENIDA POR MÉTODO DETERMINADO POR EL USUARIO (“SEMIMANUAL”) Y MÉTODO PROGRAMADO (OCTAVE 5.1.0).....	89
3.4 RESULTADOS DE OBTENCIÓN DE CURVA DE ROMPIMIENTO Y TAMAÑO CRÍTICO DE MOLIENDA SAG UNIDAD VELARDEÑA.....	99

3.5 EVALUACIÓN DE LAS VARIACIONES EN EL RENDIMIENTO DEL MOLINO EN BASE AL TAMAÑO CRÍTICO DE PARTÍCULA DETERMINADO.....	104
CONCLUSIONES.....	108
REFERENCIAS	110
ANEXOS	112
ANEXO A.-FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA MATRICIAL	113
A.1 VECTORES.....	113
A.2 MATRICES.....	113
A.3 ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES (Chen, 1999)	114
A.4 DETERMINANTE E INVERSA DE MATRICES CUADRADAS.....	115
ANEXO B.- PROCEDIMIENTO DEL MUESTREO DE CORRIENTES DE MOLIENDA SAG	117
ANEXO C.- DETERMINACIÓN DE PORCENTAJE DE SÓLIDOS SECOS DE ALIMENTACIÓN FRESCA DEL MOLINO SAG	119
ANEXO D.- DETERMINACIÓN DE PORCENTAJE DE SÓLIDOS SECOS EN PULPAS.....	120
ANEXO E.- PROCEDIMIENTO PARA DETERMINACIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑO DE PARTÍCULA DE CORRIENTES DE MUESTREO.....	121
ANEXO F.- RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE BALANCE METALÚRGICO DE CIRCUITO DE MOLIENDA UNIDAD VELARDEÑA, DGO.; GRUPO PEÑOLES MEDIANTE ALGORITMO “SEMIMANUAL” ..	123
ANEXO G.- RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE BALANCE METALÚRGICO DE CIRCUITO DE MOLIENDA UNIDAD VELARDEÑA, DGO.; GRUPO PEÑOLES, MEDIANTE PROGRAMA COMPUTACIONAL (OCTAVE 5.1.0).....	142
ANEXO H.- REPORTE DE HOJA DE CÁLCULO SAG_PARAMOPEN DE MOLYCOP TOOLS.....	156

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1.-MOLINO SAG DE ALTO ASPECTO (RELACIÓN D/L=1.5-3).....	9
FIGURA 2.-MOLINO SAG CUADRADO (RELACIÓN D/L=1)	10
FIGURA 3.-COMPONENTES DE UN MOLINO SAG.....	10
FIGURA 4.-FENÓMENOS DE ROMPIMIENTO DENTRO DE UN MOLINO SAG	11
FIGURA 5.-REPRESENTACIÓN DE MOLINO SAG CON CLASIFICACIÓN POR PARRILLA INTERNA Y CLASIFICACIÓN PORCRIBA EXTERNA CON RECIRCULACIÓN	18
FIGURA 6.-REPRESENTACIÓN DE BALANCE POBLACIONAL EN EL INTERIOR DEL MOLINO SAG CON FUNCIONES DE SELECCIÓN, QUEBRADO Y DESCARGA	20
FIGURA 7.-REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA DE MODELO MATRICIAL.....	22
FIGURA 8.-GRÁFICA DE FUNCIÓN DE PRIMER ORDEN PARA DETERMINACIÓN DE S_1	26
FIGURA 9.-OBTENCIÓN DE PARÁMETROS PARA FUNCIÓN DE ROMPIMIENTO B_{ij} (KING 2001).....	30
FIGURA 10.-REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE CURVA DE FUNCIÓN DE SELECCIÓN Y PARÁMETROS.....	34
FIGURA 11.-GRÁFICA DE CURVA DE ROMPIMIENTO DONDE SE INDICAN LAS ZONAS DE LOS DIFERENTES TIPOS DE ROMPIMIENTO Y LA ZONA DE TAMAÑO CRÍTICO DE PARTÍCULA.....	35
FIGURA 12.-REPRESENTACIÓN DE TIPOS DE ROMPIMIENTO EN MOLIENDA SAG Y MÉTODOS DE CUANTIFICACIÓN DE PARÁMETROS DE BALANCE POBLACIONAL	36
FIGURA 13.-DIAGRAMA DE PROCESO DE CIRCUITO DE MOLIENDA SAG-BOLAS UNIDAD VELARDEÑA.....	53
FIGURA 14.-DIAGRAMA DE FLUJO DEL ALGORITMO PARA RESOLUCIÓN MANUAL O SEMIMANUAL.....	68
FIGURA 15.-DIAGRAMA DE FLUJO DEL ALGORITMO DE RESOLUCIÓN POR MEDIO DE PROGRAMA OCTAVE 5.1.0.....	71
FIGURA 16.-UBICACIÓN GEOGRÁFICA VELARDEÑA, DGO.....	77
FIGURA 17.-VISTA, UNIDAD MINERA VELARDEÑA, DGO.	78
FIGURA 18.-DIAGRAMA DE CIRCUITO DE MOLIENDA SAG-BOLAS UNIDAD VELARDEÑA	80

FIGURA 19.- VISTAS DE MOLINO SAG Y MOLINO DE BOLAS UNIDAD VELARDEÑA, DGO.	82
FIGURA 20.- VENTANA DE LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN OCTAVE 5.1.0, DONDE SE OBSERVAN LOS RESULTADOS DEL BALANCE METALÚRGICO	97
FIGURA 21.- CURVA DE VELOCIDAD DE ROMPIMIENTO ANTES DE INSTALACIÓN DE QUEBRADORA AUXILIAR (QUEBRADORA DE PEBBLES)	102
FIGURA 22.- CURVA DE VELOCIDAD DE ROMPIMIENTO DEL MOLINO SAG CON QUEBRADORA AUXILIAR (PEBBLES) DE UNIDAD MINERA VELARDEÑA. TAMAÑO CRÍTICO Y CURVAS DE CADA TIPO DE FRACTURA.....	103

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 1.- CARACTERÍSTICAS DE MOLINOS SAG	13
TABLA 2.- TÉRMINOS COMUNES EN BALANCE POBLACIONAL DE MOLIENDA	16
TABLA 3.- METODOLOGÍA POR OBJETIVO ESPECÍFICO	49
TABLA 4.- CORRIENTES A MUESTREAR DE CIRCUITO DE MOLIENDA SAG-BOLAS UNIDAD VELARDEÑA.....	51
TABLA 5.- METODOLOGÍA DE BALANCE METALÚRGICO DE CIRCUITO DE MOLIENDA SAG-BOLAS.....	57
TABLA 6.- METODOLOGÍA PARA DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS DE POTENCIA DEL MOLINO SAG	72
TABLA 7.- METODOLOGÍA PARA DETERMINACIÓN Y AJUSTE DE CURVA DE VELOCIDAD DE ROMPIMIENTO	75
TABLA 8.- PRODUCCIÓN MINERA UNIDAD VELARDEÑA, DGO. (PEÑALES 2013-PRIMER TETRAESTRE 2021)	78
TABLA 9.- COMPOSICIÓN MINERALÓGICA DE CABEZA GENERAL, CONCENTRADO DE Pb, CONCENTRADO DE Cu, CONCENTRADO DE Zn Y COLA FINAL DE PLANTA VELARDEÑA, DGO.	83
TABLA 10.- VARIABLES DE DISEÑO Y OPERACIÓN Y FLUJOS MÁSCOS DE CIRCUITO DE MOLIENDA.....	85
TABLA 11.- DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑO DE PARTÍCULA DE CORRIENTES DE MUESTREO CIRCUITO DE MOLIENDA UNIDAD VELARDEÑA	87
TABLA 12.- SISTEMA DE ECUACIONES DE BALANCE DE MASA CIRCUITO DE MOLIENDA VELARDEÑA, DGO.	88
TABLA 13.- MATRIZ INICIAL DE MÉTODO "SEMIMANUAL"	91
TABLA 14.- MATRIZ INICIAL DE MÉTODO DE LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN (OCTAVE 5.1.0)	92
TABLA 15.- SECUENCIA DE RESOLUCIÓN DE PROCEDIMIENTO "SEMIMANUAL" DE BALANCE DE MASA DE CIRCUITO DE MOLIENDA VELARDEÑA	93
TABLA 16.- SECUENCIA DE RESOLUCIÓN DE BALANCE METALÚRGICO DE CIRCUITO DE MOLIENDA SAG-BOLAS MEDIANTE LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN (OCTAVE 5.1.0)	94
TABLA 17.- RESULTADOS DE BALANCE METALÚRGICO DE CIRCUITO DE MOLIENDA SAG-BOLAS MEDIANTE MÉTODO "SEMIMANUAL"	96
TABLA 18.- RESULTADOS DE BALANCE METALÚRGICO DE CIRCUITO DE MOLIENDA SAG-BOLAS UNIDAD VELARDEÑA MEDIANTE MÉTODO DE LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN (OCTAVE 5.1.0)	98
TABLA 19.- PARÁMETROS DE FUNCIÓN DE SELECCIÓN Y RUPTURA OBTENIDOS POR RETROCÁLCULO CON HOJA DE MLYCOP TOOLS	100
TABLA 20.- TAMAÑO CRÍTICO DE CURVAS DE VELOCIDAD DE ROMPIMIENTO ANTES Y DESPUÉS DE LA INSTALACIÓN DE QUEBRADORA AUXILIAR	105

ÍNDICE DE TABLAS DE ANEXOS

TABLA ANEXO 1.- DETERMINACIÓN DE PORCENTAJE DE SÓLIDOS DE ALIMENTACIÓN FRESCA DEL MOLINO SAG.....	119
TABLA ANEXO 2.- DETERMINACIÓN DE PORCENTAJE DE SÓLIDOS SECOS EN PULPAS	120
TABLA ANEXO 3.- PROCEDIMIENTO PARA DETERMINACIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑO DE PARTÍCULA DE CORRIENTES DE MUESTREO.....	121
TABLA ANEXO 4.- MATRIZ INICIAL MO	124

TABLA ANEXO 5.- MATRIZ 1 (M1).....	125
TABLA ANEXO 6.- MATRIZ 2 (M2).....	126
TABLA ANEXO 7.- MATRIZ 3 (M3).....	127
TABLA ANEXO 8.- MATRIZ 4 (M4).....	128
TABLA ANEXO 9.- MATRIZ 5 (M5).....	129
TABLA ANEXO 10.- MATRIZ 6 (M6).....	130
TABLA ANEXO 11.- MATRIZ 7 (M7).....	131
TABLA ANEXO 12.- MATRIZ 8 (M8).....	132
TABLA ANEXO 13.- MATRIZ 9 (M9).....	133
TABLA ANEXO 14.-MATRIZ 10 (M10)	134
TABLA ANEXO 15.-MATRIZ 11 (M11)	135
TABLA ANEXO 16.-MATRIZ 12 (M12)	136
TABLA ANEXO 17.-MATRIZ 13 (M13)	137
TABLA ANEXO 18.-MATRIZ 14 (M14)	138
TABLA ANEXO 19.-MATRIZ 15 (M15)	139
TABLA ANEXO 20.-MATRIZ 16 (M16)	140
TABLA ANEXO 21.-MATRIZ A0.....	143
TABLA ANEXO 22.-MATRIZ M0	144
TABLA ANEXO 23.-MATRIZ M1	145
TABLA ANEXO 24.-MATRIZ M2	146
TABLA ANEXO 25.-MATRIZ M3	148
TABLA ANEXO 26.-MATRIZ M4	149
TABLA ANEXO 27.-MATRIZ M5	150
TABLA ANEXO 28.-MATRIZ M6	151
TABLA ANEXO 29.-MATRIZ M7	152
TABLA ANEXO 30.-MATRIZ M8	153
TABLA ANEXO 31.-MATRIZ M9	154
TABLA ANEXO 32.-MATRIZ M10	155
TABLA ANEXO 33.-REPORTE DE HOJA DE CÁLCULO SAG_PARAMOPEN DE MOLY COP TOOLS	156

RESUMEN

En esta tesis se propone la utilización de la curva de velocidad de rompimiento como una herramienta de determinación del tamaño crítico del material que se produce dentro de un molino SAG. El tamaño crítico se define como aquél en que el mineral es relativamente pequeño por lo que no tiene poder de autoruptura, y relativamente grande para ser quebrado por los elementos auxiliares de molienda (bolas). Así mismo, mediante la curva de velocidad de rompimiento, se analiza el impacto de la instalación de una quebradora auxiliar en la recirculación de los guijarros (cuyo tecnicismo en inglés es “pebbles”) del circuito de molienda semiautógena en la variación de este tamaño crítico.

La obtención de la curva de velocidad de rompimiento se basa en la integración del balance poblacional y el consumo de potencia debido a la conminución debido a los diferentes tipos de rompimiento que coexisten dentro del molino. La curva se obtiene por el método de retrocálculo de las funciones de selección específica (S_i^E) y de quebrado (B_{II}) mediante la hoja de cálculo de *Moly Cop Tools* denominada *SAGParam_Open*. Es así que utilizando los datos molino SAG de la planta Velardeña como caso de estudio, fue posible determinar, mediante la curva de velocidad de rompimiento, el tamaño crítico de molienda en un tamaño de 44.5 mm. Se encontró una diferencia significativa al compararlo contra la curva de velocidad de rompimiento de la operación antes de la instalación de la quebradora auxiliar, pues en ésta, el valle de la curva, es decir el tamaño en que la energía de conminución tuvo el punto más bajo, se ubicó en 62.5 mm. Por lo que se comprueba la utilidad de la curva de velocidad de rompimiento en el análisis del comportamiento de la molienda SAG.

NOMENCLATURA POR TEMA

Nota: no se ordenó alfabéticamente, el orden está más relacionado con la aparición y la correlación entre términos

Literales utilizadas en modelos de balance poblacional molino SAG		
Literal	Descripción	Dimensiones
$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$	Parámetros de función de selección del mineral	l
$m_i(t)$	Fracción de masa del material a un tamaño i en un tiempo t	$M_i M_{Total}^{-1}$
S_i	Función de selección o velocidad de fractura	t^{-1}
b_{ij}	Función de distribución de tamaño o función de quebrado de la clase "i" que proviene de "j"	$M_i M_{Total}^{-1}$
de_i	Función de descarga de la clase "i"	$M \cdot t^{-1}$
de	Función de descarga total	$M \cdot t^{-1}$
C_i	Función de probabilidad de descarga de la clase "i"	l
X_p	Tamaño de la partícula al tamaño de la parrilla	L
X_m	Tamaño límite en que la descarga es libre	L
B_{ij}	Función de distribución acumulada	$M_i M_{Total}^{-1}$
DTR	Distribución de tiempo de residencia	t
I	Matriz Identidad	
F	Matriz de las fracciones másicas de cada clase	
S	Matriz de la función de selección de cada clase	
B	Matriz de función de quebrado de cada clase	
P	Matriz de producto del molino	
M	Masa total del material del molino	M
d_{crit}, d_{j+1}, Y	Tamaño original de partícula	L
d_i^*, X	Tamaño medio de partícula de rango i , obtenido de la razón geométrica	L
S_i^E	Función de selección específica	$L^2 \cdot t^{-2}$
F_{80}, P_{80}, K_{80}	Se refiere al tamaño de partícula que corresponde al 80% pasante (también conocido como diámetro de Bond)	L
AG, SAG	Abreviatura de autógeno y semiautógeno, se refiere a molinos en los que el mineral es el único o principal medio de molienda	
D, L	Dimensiones de diámetro y largo del molino	L
τ	Tiempo de residencia en un molino de carga y descarga continua	t

P_{neta}	Potencia neta de la conminución, sin considerar la potencia del molino sin carga	$M \cdot L^2 \cdot t^{-3}$
$\frac{P}{M} \text{ ó } \frac{P_{netatotal}}{Q_{alim}}$	Potencia neta específica del molino	$L^2 \cdot t^{-2}$
$\frac{P_{bolas}}{P_{neta}}, P_{netabolas}$	Fracción de la potencia neta que se consume en la ruptura bolas de acero-mineral	$M \cdot L^2 \cdot t^{-3}$
$\frac{P_{min-min}}{P_{neta}}, P_{netamini}$	Fracción de la potencia neta que se consume en la ruptura mineral-mineral	$M \cdot L^2 \cdot t^{-3}$
$\frac{P_{autoromp}}{P_{neta}}$	Fracción de la potencia neta que se consume el auto rompimiento	$M \cdot L^2 \cdot t^{-3}$
S_{ibolas}^E	Fracción de la función de selección específica utilizada en el rompimiento bolas-mineral	$L^2 \cdot t^{-2}$
$S_{imin-min}^E$	Fracción de la función de selección específica utilizada en la ruptura mineral-mineral	$L^2 \cdot t^{-2}$
$S_{iautoromp}^E$	Fracción de la función de selección específica utilizada en el auto rompimiento	$L^2 \cdot t^{-2}$
β_0	Representa la fracción de partículas generadas por estallamiento	1
β_1, β_2	En la función de quebrado, β_1 representa el valor de n producido por ruptura por exceso de tensión o estallamiento (tamaños finos); β_2 representa el exponente de los tamaños gruesos.	1
$(1 - \beta_0)$	fracción de partículas generada por abrasión.	1
n_1 y n_2	Pendiente de líneas usadas en gráfico de determinación de función de rompimiento	1
k	Intersección de la línea de zona de finos con eje de función de rompimiento en $X/Y=1$	1
W_i	Índice de trabajo del mineral	$L^2 \cdot t^{-2}$
V_{carga}	Suma del volumen de bolas, más el volumen de mineral y hay un espacio intersticial entre estos elementos, el cual será ocupado posteriormente por la pulpa	L^3
V_{molino}	Volumen interno del molino calculado de acuerdo a su forma geométrica relacionando diámetro y longitud del molino	L^3
%carga	Porcentaje ocupado por la carga corresponde a la suma del volumen de bolas, más el volumen de mineral y hay un espacio intersticial entre estos elementos, el cual será ocupado posteriormente por la pulpa	1
%bolas	Porcentaje de volumen ocupado por las bolas	1

$\% \text{ huecos}$	<i>Porcentaje de huecos en el contacto de bola-bola</i>	1
V_{mineral}	<i>Volumen ocupado por el mineral dentro del molino</i>	L^3
V_{pulpa}	<i>Volumen ocupado por la pulpa dentro del molino</i>	L^3
C_{bolas}	<i>La carga de bolas es la masa de bolas de acero dentro del molino</i>	M
C_{mineral}	<i>Masa de mineral dentro del molino</i>	M
C_{pulpa}	<i>Masa de pulpa dentro del molino</i>	M
ρ_{bolas}	<i>Densidad de bolas de acero</i>	ML^{-3}
ρ_{mineral}	<i>Densidad del mineral</i>	ML^{-3}
ρ_{pulpa}	<i>Densidad de la pulpa</i>	ML^{-3}
P_{bruta}	<i>Potencia utilizada en el rompimiento más pérdidas de energía</i>	$M \cdot L^2 \cdot t^{-3}$
$P_{\text{netapulpa}}$	<i>Potencia utilizada para el movimiento de la pulpa en el interior del molino</i>	$M \cdot L^2 \cdot t^{-3}$
N_{crit}	<i>Velocidad en la que centrifuga la carga del molino</i>	t^{-1}
N	<i>Velocidad de operación en rpm</i>	t^{-1}
N_c	<i>Fracción de la velocidad crítica que en molino SAG e</i>	t^{-1}
ρ_{ap}	<i>Densidad aparente de la carga</i>	ML^{-3}
f	<i>Nivel fraccional aparente de llenado</i>	1
α	<i>Ángulo de inclinación de la carga con respecto a la horizontal</i>	$^{\circ}$
Literales para balance de materia		
<i>Literal</i>	<i>Descripción</i>	<i>Dimensiones</i>
x	<i>valor de variable diferencial, en este caso, porcentaje de sólidos o fracción de sólidos</i>	1
Q	<i>Flujo másico de la corriente</i>	$M \cdot t^{-1}$
W	<i>Flujo másico de la corriente de agua</i>	$M \cdot t^{-1}$
i	<i>Número de corriente</i>	
n	<i>Número total de corrientes</i>	
$k_1 <> k_2 < > k_3$	<i>Cualquier número máximo n</i>	
Literales utilizadas en álgebra matricial		
<i>Literal</i>	<i>Descripción</i>	<i>Dimensiones</i>
\mathbb{R}	<i>Conjunto de números reales</i>	

\mathbb{R}^n	<i>Vector de n elementos reales</i>	
a, b, x, y	<i>Variables escalares en \mathbb{R}</i>	
\mathbf{x}, \mathbf{q}	<i>En negritas, \mathbf{x}, \mathbf{q}, denotan vectores en \mathbb{R}^n</i>	
T	<i>El superíndice T representa la transpuesta</i>	
A, M	Una matriz $A = (a_{ij})$ de $n \times m$ es un arreglo ordenado de números reales con n vectores renglón $[a_{i1}, \dots, a_{im}]$, para $i = 1, \dots, n$ y a su vez m vectores columna $[a_{1j}, \dots, a_{nj}]^T$, para $j = 1, \dots, m$.	
I	La <i>matriz identidad</i> es una matriz cuadrada, es decir de $n \times n$, donde los elementos de la diagonal principal son 1 y el resto de los elementos son 0, es decir	
A^{-1}	<i>Inversa de una matriz cuadrada no singular</i>	
A^T	<i>El superíndice T representa la transpuesta</i>	

INTRODUCCIÓN

La molienda autógena (AG) es aquella en que el mineral se considera “competente”, es decir, tiene poder de autorompimiento por estallamiento, por abrasión y por fractura del mismo, sobre otros elementos minerales. En la práctica, un mineral “competente” tiene un valor de índice de trabajo de Bond (Wi) de mínimo 12 kWh/t. En la molienda semiautógena (SAG), el mineral se acompaña de elementos externos de molienda, que no representan un volumen mayor al 15% del volumen del molino. Los molinos autógenos y semiautógenos se introdujeron en el procesamiento de minerales en la década de los 50’s del siglo XX y rápidamente dominaron la escena de la trituración primaria (Napier-Munn et al., 1992). La molienda SAG ha tenido un importante desarrollo y aplicación, como la alternativa a los circuitos de trituración secundaria y terciaria. Pues proporciona beneficios importantes como, disminución de espacio en planta, disminución de emisión de polvos, disminución de tiempo de mantenimiento, entre otras.

Es bien sabido, que el proceso de conminución de tamaño conlleva un alto consumo de energía, se estima que un 2% del consumo mundial de energía eléctrica está relacionado con este proceso y en una planta de procesamiento, representan más del 50% del mismo (Furstenau et al., 2003). Es así que, a lo largo de todas estas décadas, los esfuerzos se han encaminado a encontrar formas de mejorar la eficiencia de los procesos de conminución. Estos esfuerzos se han encaminado en la década de los 70’s, 80’s y 90’s del siglo XX a producir modelos que describan el comportamiento de la conminución y la utilización de la energía. Se puede clasificar estos modelos como empíricos, fundamentales y fenomenológicos. Según Herbst et al., sus características son:

- Modelos empíricos: Son frecuentemente una serie de ecuaciones algebraicas de regresión lineal, multivarianza, redes neuronales, necesitan una gran cantidad de datos. Corresponde al concepto de “caja negra” de Morrell. Por ejemplo, la ley de Bond (Bond, 1952)
- Modelos fenomenológicos: Consisten en una serie de ecuaciones algebraicas o

diferenciales basadas en principios físicos, químicos o matemáticos. Requieren calibración en los equipos. Ejemplo, el modelo del balance poblacional (Herbst&Furstenau, 1980) (Morrell, 1996).

- Modelos fundamentales: Basadas comúnmente en leyes fundamentales de la física o la química, requieren mínima calibración ,por ejemplo, modelos de elementos discretos o dinámica computacional de fluidos aplicados a molinos (Mishra,1992; Rajamani, 1994).

A partir de los años 90's la introducción de herramientas computacionales para la simulación y optimización de los procesos, en los que ha prevalecido el modelo del balance poblacional como la técnica más poderosa para la molienda SAG (Herbs et al., 2002), aunque actualmente se han desarrollado modelos más robustos que conllevan también modelos empíricos y fundamentales (Yu et al., 2017).

En los últimos años se ha avanzado claramente en la simulación matemática de la molienda. En molienda SAG el modelo que más predice el comportamiento del sistema es el fenomenológico, que como menciona Yu (2017), tiene ventajas de simplicidad, capacidad computacional requerida baja, y buena predicción para un equipo específico.

Esta tesis toma como caso de estudio el circuito de molienda semiautógena (SAG) de la planta de beneficio de la Unidad Minera Velardeña de grupo Peñoles. El objetivo de la misma, es demostrar que la curva de velocidad de rompimiento (Morrell, 2004) es una herramienta adecuada para predecir el tamaño “crítico” dentro del molino SAG. Se pretende lograr mediante técnicas de retrocálculo basados en el modelo del balance poblacional (Herbst&Furstenau, 1980; Morrell, 1996) para obtener la curva de velocidad de rompimiento, que describa la utilización de la energía, así como el comportamiento de los diferentes tipos de rompimiento dentro del molino y su correlación con el tamaño de partícula. El tamaño “crítico” del material dentro del molino SAG, es aquél en el que se considera que no hay ruptura efectiva de las partículas (no tienen poder de autorompimiento y no son quebradas hacia tamaños más finos). La principal desventaja de la molienda SAG, es la variación tan amplia en la distribución granulométrica del producto. Es así, que gran

parte del producto, debe recircularse al molino, hasta alcanzar el tamaño de salida del circuito de molienda SAG, el cual es controlado mediante una criba. Los gruesos de la criba SAG de la Unidad Velardeña, eran originalmente recirculados, sin pasar por quebradora auxiliar. Una quebradora auxiliar, es aquella por la que pasan los gruesos de la criba externa clasificadora del molino SAG, antes de ser recirculados a la alimentación del mismo, con la finalidad de quebrar a un tamaño más fino los “pebbles” y así sacarlos del tamaño “crítico”, con la finalidad de disminuir la fracción másica de este tamaño, al interior del molino, que pueda ser introducida desde la alimentación. Durante el desarrollo de esta tesis se agregó a la recirculación de gruesos, la acción de una quebradora auxiliar, por lo que se buscará demostrar que:

Se puede considerar la curva de velocidad de rompimiento como una herramienta para determinar el tamaño crítico de partícula de un circuito de molienda SAG, tomando como caso de estudio en particular la Unidad Minera Velardeña. Además, determinar si hubo alguna variación del tamaño crítico con la introducción de la quebradora auxiliar respecto al comportamiento anterior del molino. Si el resultado de las anteriores hipótesis es positivo, se puede determinar si son adecuados los tamaños de la parrilla y de la criba del circuito de molienda SAG, y analizar si es posible tomar decisiones de mejora de operación o diseño en base a la determinación del tamaño crítico.

Paul King, citado por Powell y Morrison (2006), indica que..."todavía falta una comprensión fundamental de los microprocesos básicos asociados con la dinámica de los sistemas de partículas, su transporte y fractura". Continúa diciendo "... los avances realmente significativos en la tecnología... solo vendrán de la explotación de la comprensión fundamental básica del proceso de fractura para mejorar los procesos de trituración industrial", lo cual será posible con la enorme disminución de costo de las técnicas computacionales actuales que conduzcan a modelos cada vez más complejos y mejores.

El segundo aporte de esta tesis, se desarrolló como una necesidad de resolver el balance metalúrgico del circuito de molienda del caso de estudio. Consiste en una metodología de

análisis para la secuencia de resolución del balance metalúrgico en forma matricial, de un sistema de molienda, que puede constar de una o más decenas de ecuaciones. El enfoque expuesto de resolución, facilita el planteamiento de la secuencia de resolución.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El concepto de tamaño crítico de partícula en molienda SAG está relacionado con el diámetro de partícula en el que el material no alcanza la energía suficiente para la conminución, ya sea por impacto bola-mineral, mineral-mineral o estallamiento por caída. Cada tipo de rompimiento, tiene un rango de tamaño de partícula, en que es predominante. Por ejemplo, en tamaños gruesos, predomina el estallamiento por caída, y en tamaños finos, el rompimiento bola-mineral. Es así, que el valle formado en la curva de velocidad de rompimiento, es en realidad, la combinación de la pendiente de caída de las curvas de rompimiento bola-mineral y mineral-mineral, y la muy reciente aparición de la recta de autoestallamiento. La estancia en el molino del material de tamaño crítico, representa un problema, porque no ejerce un papel activo en la conminución, pero si ocupa volumen útil para el material nuevo. La incorrecta determinación del tamaño crítico de partícula, se deriva en problemas de disminución de la eficiencia de la molienda SAG, pues es posible que se esté retirando mineral que todavía tenga potencial activo de conminución (con el respectivo aumento de la carga circulante), o que al no conocerlo, el diseño del balance del circuito de molienda no sea el óptimo.

En la actualidad, en las plantas de procesamiento de minerales no se determina el tamaño crítico de partícula en base a la velocidad de rompimiento del mineral y se desconoce el alcance en la optimización de la operación del molino SAG, que esta determinación puede proporcionar.

JUSTIFICACIÓN

Al no conocer con certidumbre el tamaño crítico de partícula dentro de los molinos SAG, la operación es poco eficiente, ya que se retiene material sin capacidad de molienda, o se desaloja material de tamaño incorrecto, suponiendo que es el de tamaño crítico. Entonces, la optimización de la molienda, basada en el desalojo del material sin poder de ruptura, no tiene un sustento numérico. La propuesta consiste en demostrar que es posible utilizar la curva de velocidad de rompimiento, como un método sencillo y fiable, para determinar el

tamaño crítico de partícula. Esto es posible de una forma práctica mediante un método numérico computacional del balance poblacional de las partículas al interior del molino SAG.

Esta tesis se justifica bajo la premisa de mejorar la comprensión de la molienda SAG, tomando como caso de estudio el circuito SAG de la unidad Velardeña, Dgo., pues conocer el tamaño crítico de partícula, apoyaría en forma importante las decisiones de posible variación de los parámetros de operación y diseño del molino (por ejemplo, velocidad de giro, tamaño de elementos de molienda, adición de quebradoras auxiliares, cambio de tamaño de parrilla, criba de pebbles o cargas circulantes). A partir del conocimiento del tamaño crítico, se estima un aumento en la capacidad de procesamiento de los molinos SAG, parte fundamental de los circuitos de molienda de la mayoría de las plantas de procesamiento en el mundo.

OBJETIVO GENERAL

Determinar el tamaño crítico de molienda para molinos SAG utilizando la velocidad de rompimiento de las partículas calculado del balance poblacional en caso de estudio de Unidad Minera Velardeña, Dgo.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Caracterizar el circuito de molienda de planta Velardeña
- Realizar el balance metalúrgico del circuito de molienda Velardeña
- Determinar la curva de velocidad de rompimiento de molienda SAG de Unidad Minera Velardeña, resolviendo el balance poblacional del sistema.
- Determinar el tamaño crítico de partícula en base a la curva de velocidad de rompimiento
- Evaluar las variaciones en el rendimiento del molino SAG de Unidad Minera Velardeña, en base al tamaño de partícula crítico determinado.

HIPÓTESIS

Mediante la obtención de la curva de velocidad de rompimiento es posible determinar el tamaño crítico de partícula de los molinos SAG. Lo anterior se pretende demostrar con el caso de estudio del molino SAG de la Unidad Minera Velardeña, Grupo Peñoles.

La introducción de una quebradora auxiliar, para el procesamiento del material de recirculación del molino SAG (gujarros), es capaz de modificar el tamaño crítico de partícula dentro del molino SAG, y lo anterior es demostrable mediante la curva de velocidad de rompimiento.

I. ANTECEDENTES SOBRE MODELOS MATEMÁTICOS DE LA DESCRIPCIÓN DE LA MOLIENDA SAG

1.1 GENERALIDADES DE MOLIENDA SAG

Se llama molinos autógenos (AG) a aquellos en los que la reducción de tamaño en molinos que involucran tambores que giran en un eje horizontal, se lleva a cabo sin la ayuda de ningún otro elemento de molienda más que el propio mineral. Mientras que en los molinos semiautógenos (SAG), el mineral se carga con una pequeña cantidad de elementos de molienda, ya que no tiene la capacidad de fracturarse a si mismo por completo. Los molinos semiautógenos tienen cierta “ayuda” por parte de elementos de molienda distintos del mineral, específicamente bolas de hierro o acero que facilitan la acción moledora, pero cuyo volumen dentro del cuerpo es del orden del 11-15% contra el 30% del molino de bolas.

La desintegración de las partículas en este tipo de molinos (AG/SAG), se lleva a cabo por una combinación de impacto, atrición y abrasión durante el giro del mineral dentro del molino.

La operación de este tipo de molinos es más económica, pues no es necesario reemplazar un gran volumen de elementos de molienda, como en los molinos de bolas convencionales, y hay menos desgaste del recubrimiento interno del molino.

Para utilizar este tipo de molinos, es necesario que el mineral sea “competente”, es decir, que las rocas de la alimentación, funcionen como elementos de molienda un tiempo razonable, y no que se desintegren como terrones inmediatamente. El índice de trabajo de Bond de estos minerales, debe estar en un valor mínimo de 12 a 14 kW-h/t.

En la actualidad, la trituración secundaria y terciaria ha seguido la tendencia de ser sustituida por elementos de molienda autógena y semiautógena. Las cuales proporcionan entre otras ventajas, las siguientes:

- ✓ Disminución en la generación de polvos
- ✓ Disminución en la pérdida de energía por ruido y calor, ya que el proceso es en vía húmeda y no seca
- ✓ Se evita la obstrucción y desgaste de los medios de cribas clasificadoras en trituración

En la molienda autógena (AG) y semiautógena (SAG) se aprovecha la energía potencial del propio material elevado a gran altura debido al diseño de este tipo de equipos en los que es mayor a 1 la relación entre diámetro del molino, sobre largo. Aunque esto no siempre es así. Los diseños de un molino AG/SAG pueden ser:

- Molinos de alto aspecto, con una relación diámetro/largo $D/L=1.5-3$
- Molinos de aspecto cuadrado con una relación $D/L=1$
- Molinos de bajo aspecto. Relación $L/D=1.5-3$

En la figura 1, se puede observar un molino de alto aspecto

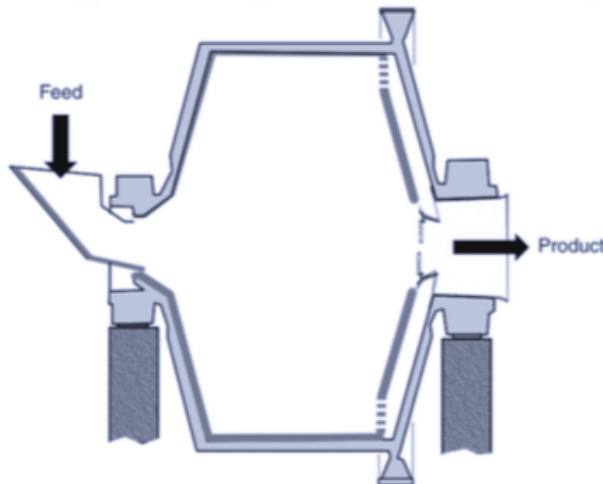


Figura 1.-Molino SAG de alto aspecto (relación $D/L=1.5-3$)

En la figura 2, se puede observar un molino cuadrado

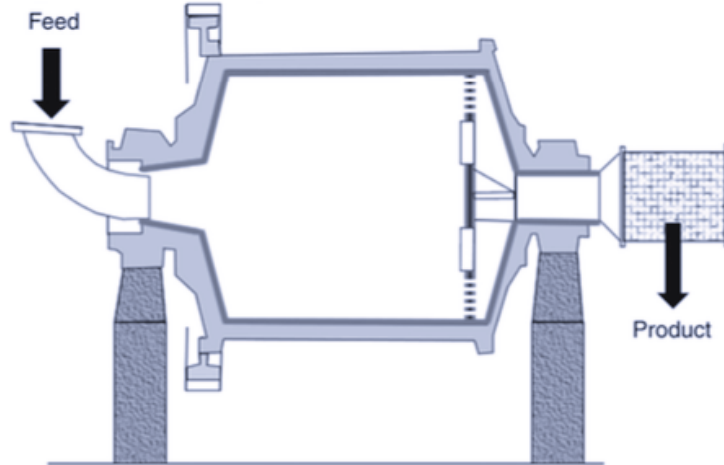


Figura 2.-Molino SAG cuadrado (relación D/L=1)

El diseño tradicional de un molino AG/SAG se observa en la figura 3:

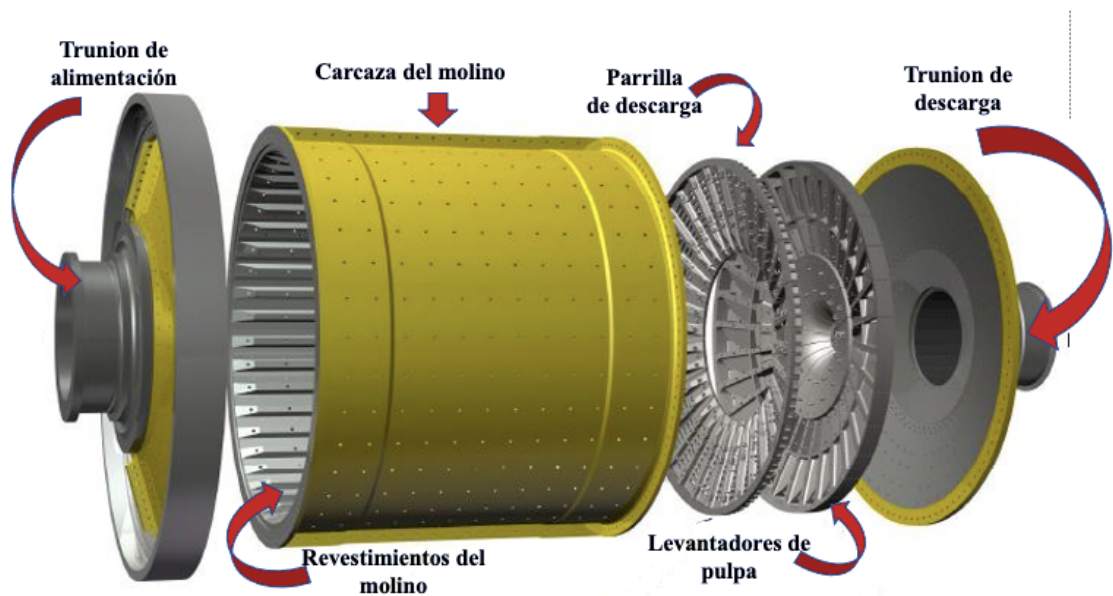


Figura 3.-Componentes de un molino SAG

En los circuitos de molienda, los molinos AG-SAG, cumplen la función de sustituir una o varias etapas de trituración. Y normalmente son configurados en circuitos abiertos o cerrados, acompañados de equipos auxiliares como quebradoras, clasificadores (cribas o hidrociclones). Para lograr la molienda fina, normalmente están en serie con uno o varios molinos de bolas.

1.1.1 FENÓMENOS DE ROMPIMIENTO DENTRO DE UN MOLINO SAG

La siguiente figura (figura 4), considera los fenómenos que ocurren en un circuito de molienda SAG. Los mecanismos de conminución separados que ocurren en el molino, a saber, atrición, astillado, fractura por impacto y auto ruptura. La atrición ocurre en la superficie de la partícula y el núcleo interno de la partícula no se ve afectada. Las partículas están sujetas a desgaste por fricción entre partículas y también entre partículas y las paredes del molino. Las partículas se fracturan por impacto contra otras partículas o contra las paredes de los molinos. El otro mecanismo que se presenta es la ruptura de mineral por impacto bola-mineral.

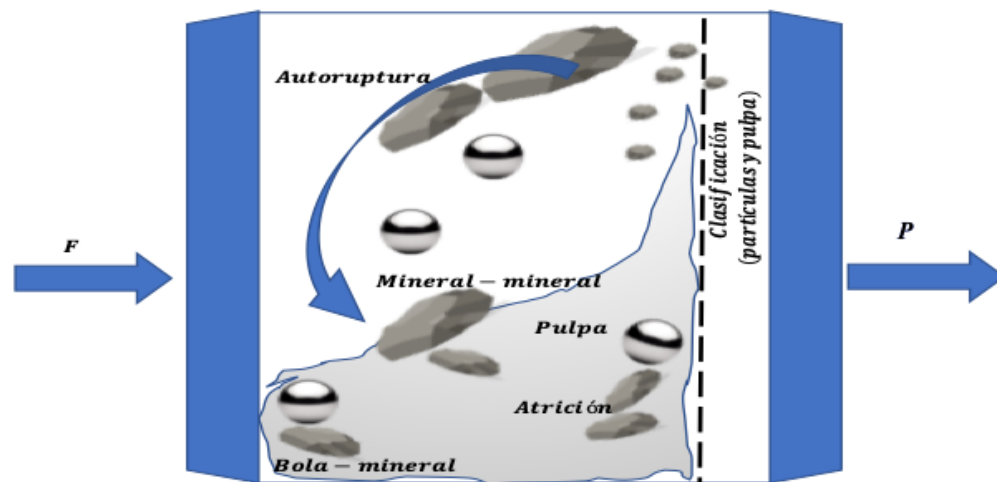
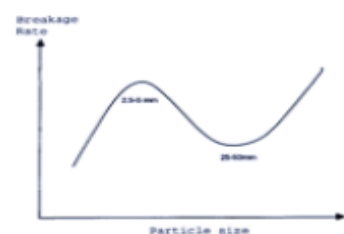


Figura 4.-Fenómenos de rompimiento dentro de un molino SAG

En la tabla 1, se resumen las características de los molinos semiautógenos, se tomó como base para la misma, información de Yu et al. (2017).

Tabla 1.-Características de molinos SAG

Características de molinos semiautógenos (Adaptación Yu, 2017)	
Característica	Descripción
Forma externa	Relación D/L entre 1.5 a 3 (sin embargo 1/3 a 2/3 pueden encontrarse (T. J. Napier-Munn et al., 1996) en molinos de una etapa en Sudáfrica
Forma interna	Tiene rejilla interna y elevadores de pulpa para controlar el máximo tamaño de partícula que sale del molino
Carga de bolas	Comúnmente en el rango de 8-21% (Mular, 2002, Strohmayer y Valery, 2001)
Tamaño	Molienda gruesa, alimentación < 300 mm
Circuito	Se usa como etapa primaria de molienda (comúnmente en sustitución de la trituración secundaria y terciaria). Frecuentemente forma un circuito cerrado con recirculación y quebradora auxiliar, en ocasiones con clasificación por hidrociclón para proporcionar un producto final o alimentar un molino de bolas.
Velocidad	La velocidad promedio es 75% de la velocidad crítica. Maneja rangos de 68 a 80%
Capacidad	500 a 3500 th ⁻¹
Potencia	Comúnmente de 8 a 24 MW
Costo operativo	Altos costos de medios de molienda, revestimientos de molino y potencia
Rango de tamaño de alimentación del mineral	Amplio rango de distribución de tamaño de alimentación, acepta alimentación arcillosa
Medios de molienda	El medio de molienda son las rocas grandes y un porcentaje de menos del 20% en volumen de bolas de acero. La carga de molienda es determinada por la distribución de tamaño de la alimentación y la dureza del mineral. La variación de la carga de molienda aumenta la dificultad de la predicción del comportamiento
Variación de potencia	Cambia con la carga del molino y la variación no es proporcional a la alimentación, dureza y otras influencias externas (Napier-Munn et al., 1996)
Curva de velocidad de rompimiento	La curva de velocidad de rompimiento de los molinos AG/SAG presenta la forma típica de la figura (Morrell 1996) 
Modelo	Se aplica el método del balance poblacional, con condiciones de mezclado perfecto y estado estacionario. Existen diferentes formas de calcular la función de selección, función de quebrado, función de descarga y consumo de potencia (T.J. Napier-Munn et al., 1996)

1.2 MODELOS PARA MOLIENDA “SAG”

1.2.1 MODELO POBLACIONAL EN MOLIENDA SAG

El modelo AG/ SAG desarrollado por Leung y refinado por Morrell (1996) y Morrison (2004), se basa en el modelo de mezcla perfecta y estado estacionario. Es el modelo fenomenológico de balance poblacional, en el que para cualquier fracción de tamaño i :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Material} & & & & & & \\ \text{alimentado} & + & \text{Material} & = & \text{Material} & + & \text{Material} \\ & & \text{que} & & \text{que se} & & \text{que se} \\ & & \text{proviene de} & & \text{desintegra} & & \text{descarga} \\ & & \text{tamaños} & & \text{a tamaños} & & \\ & & \text{más} & & \text{más} & & \\ & & \text{grandes} & & \text{pequeños} & & \end{array}$$

La ecuación del balance poblacional proporciona un modelo para la descripción de equipos de conminución. Permite el desarrollo de un modelo uniforme que describe el comportamiento operativo de molinos de barras, de bolas, autógenos y semiautógenos. Se puede obtener la distribución del tamaño en la carga de un molino SAG utilizando el modelo de balance poblacional.

Morrell (1996), propuso una estructura simplificada para los molinos autógenos y semiautógenos, en el cual se utilizan estos componentes principales para describir la dinámica de la molienda:

- Frecuencia de colisión (función de selección)
- Distribución de tamaño de partícula después del evento de fractura (función de rompimiento)
- Transporte de partículas hacia el exterior del molino (función de transporte)
- Probabilidad de descarga en función del tamaño de la parrilla de descarga (función de descarga)

A continuación se describe el concepto general de cada una de estos términos:

1. **Función de selección (S_i):** Cuando una muestra de mineral se alimenta a un sistema de conminución y contiene partículas en varios rangos de tamaño, la probabilidad de romper los tamaños más grandes dentro de una fracción de tamaño es considerablemente mayor en comparación con los tamaños más pequeños. Es decir, una cierta proporción de las partículas dentro de cada rango de tamaño se reducen de forma preferencial. Por lo tanto, ruptura selectiva ocurre dentro de un rango de tamaño. La proporción de partículas dentro de cada rango de tamaño que se rompe es representada por S_i . Por lo tanto, $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ será la fracción de material en cada fracción de tamaño que se seleccionaría para la reducción de tamaño con las partículas restantes que pasan sin cambiar de tamaño. Esto se conoce como la función de selección (o la tasa específica de ruptura).
2. **Función de rompimiento (B_{ij}):** La función de ruptura B_{ij} representa la distribución de tamaño de partículas generado después de un evento de fractura. Así, el término b_{ij} , incorpora la fracción de partículas de tamaño j que se molieron y terminaron siendo partículas de tamaño i . Conociendo esta distribución, es posible predecir la distribución de tamaño de partícula en cualquier proceso de molienda.
3. **Función de transporte de masa (DTR):** La función de transporte es utilizada para describir como se traslada el mineral a través del molino, también se conoce como distribución de tiempo de residencia (DTR) y se define como la razón entre el material dentro del molino y la alimentación al mismo.
4. **Función de probabilidad de descarga (c_j):** La función de descarga describe la probabilidad de salida del molino de las partículas y la pulpa. En general, el comportamiento consiste en un fenómeno de clasificación por tamaño a través de la parrilla, el material de tamaño muy pequeño, que está integrado al líquido de

molienda como pulpa, saldrá sin ningún problema a través de la parrilla de descarga, solamente condicionado por la densidad y viscosidad de la pulpa. Aquí la probabilidad de quedar retenido en el interior del molino es cero, es decir, la probabilidad de descarga es del 100%. Conforme va aumentando el tamaño de las partículas y se acercan al tamaño de la abertura de la parrilla de descarga, la probabilidad de quedar retenido aumenta, o si se quiere considerar así, la probabilidad de ser descargado va disminuyendo gradualmente, hasta ser cero, para el tamaño de abertura de la parrilla de descarga.

Se resumen estos conceptos en la tabla 2:

Tabla 2.-Términos comunes en balance poblacional de molienda

Término utilizado en esta tesis	Definición	Otros términos equivalentes, similares o vinculados
Velocidad de rompimiento	Frecuencia de colisión, probabilidad de rompimiento	Función de selección, probabilidad de rompimiento, tasa específica de rompimiento
Función de rompimiento	Distribución de tamaño de partícula después del evento de fractura	Función de quebrado, función de rompimiento, función de distribución, función de aparición
Función de descarga	Transporte de partículas fuera del molino, probabilidad de descarga del producto	Función de velocidad de descarga, tasa específica de descarga
Función de transporte	Describe como se transporta el mineral a través del molino	Tiempo de residencia

El siguiente diagrama (figura 5), sirve para explicar el comportamiento en lo general del circuito de molienda SAG con recirculación. El recuadro grande relleno de azul, representa al molino SAG. Como se puede apreciar, la alimentación al molino SAG, está formada por una corriente de alimentación fresca (F), que se une a la recirculación (expresado como tasa de recirculación se representa como C_2) de la criba externa que sirve como clasificador de “pebbles”. El producto del molino (P_i^*), se clasifica en la criba de “pebbles”, los finos de esta criba, son el producto final (P). Tanto la alimentación como el producto final, pueden ser clasificados por tamaño desde $i=1$ hasta N . Dentro del molino, se dibuja un cuadrado azul más pequeño, que representa la zona donde están ocurriendo los fenómenos de selección de material para rompimiento y aparición de nuevas partículas en tamaños menores (S_i y B_{ij}), y que se describirán más adelante a detalle. El extremo derecho del molino, visto de frente, representa la parrilla de descarga, a la cual le corresponde cierto porcentaje de área abierta, tamaño y forma de abertura. Debido a la existencia de la parrilla, se presenta un fenómeno de clasificación interna, que se describe con una tasa de recirculación aparente ($C1$) y una probabilidad de permanencia dentro del molino (c_i), por lo cual, existe una diferencia entre el material alimentado (F_i^*) y el que está realmente dentro del molino (F_i^{**}). Lo mismo pasa con el producto interno generado dentro del molino (P_i^{**}), con respecto al descargado (P_i^*).

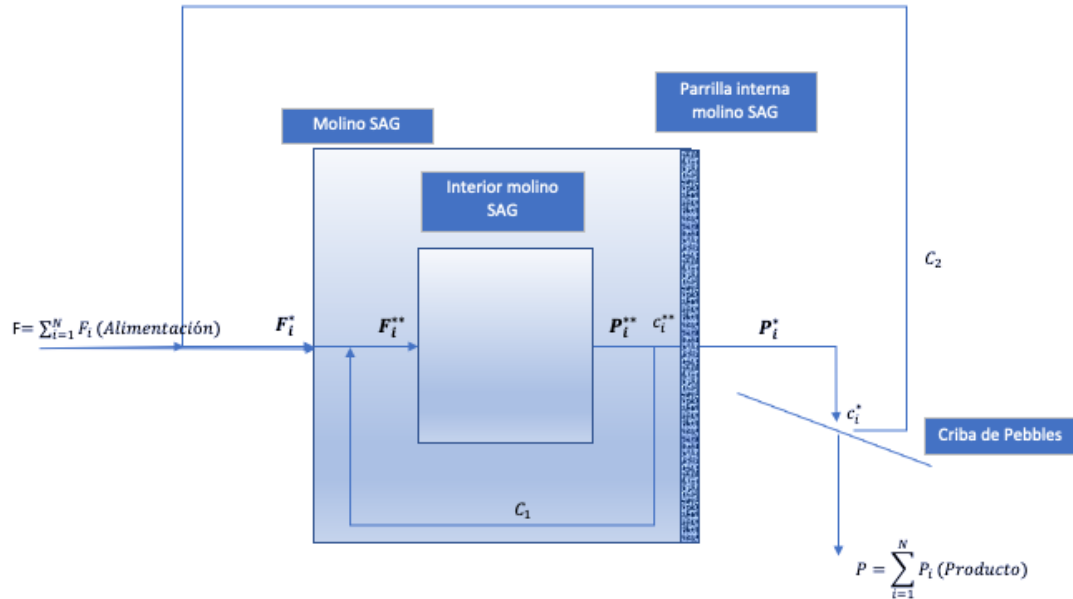


Figura 5.-Representación de molino SAG con clasificación por parrilla interna y clasificación por criba externa con recirculación

Mediante las siguientes ecuaciones, se describen estas relaciones:

$$P_i = P_i^* (1 + C_2)(1 - c_i^*) \quad (1)$$

$$P_i^* = P_i^{**} (1 + C_1)(1 - c_i^{**}) \quad (2)$$

$$(1 + C_1)F_i^{**} = F_i^* + (1 + C_1)P_i^{**} c_i^{**} \quad (3)$$

$$(1 + C_2)F_i^* = F_i + (1 + C_2)P_i^* c_i^* \quad (4)$$

$$P_i^{**} = F_i^{**} + \frac{M_H}{M_F} \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} S_j m_j - \left[\frac{M_H}{M_F} \right] S_i m_i \quad (5)$$

Donde:

F_i = Material de tamaño i , en alimentación fresca

F_i^* = Material de tamaño i en alimentación total al molino

F_i^{**} = Material de tamaño i en interior del molino, antes de desaparición o generación de nuevos tamaños

P_i = Material de tamaño i , en finos de criba

P_i^* = Material de tamaño i en descarga del molino

P_i^{**} = Material de tamaño i en interior del molino, después de desaparición o generación de nuevos tamaños

C_1 = Relación de recirculación aparente en interior del molino

C_2 = Relación de recirculación de criba de "pebbles"

c_i^* = fracción de tamaño i que es recirculado al molino

c_i^{**} = fracción de tamaño i que no pudo ser descargado por la parrilla interna

M_H = Masa total de alimentación fresca

M_F = Masa total de alimentación al molino

$m_{j,i}(t)$ = Fracción de masa del material a un tamaño i en un tiempo t

$S_{j,i}$ = Función de selección o velocidad de fractura (t^{-1} , minutos $^{-1}$)

b_{ij} = Función de distribución de tamaño o función de quebrado

Para usar estas ecuaciones, es necesario calcular las funciones de selección ($S_{j,i}$) y la función de ruptura (b_{ij}). Para calcular estos parámetros, se puede recurrir al modelo cinético o al modelo matricial. En la figura se expresa lo que sucede al interior del molino, sin considerar la función de clasificación de la parrilla interna y criba externa. Una vez que ha ingresado material de diferentes tamaños (desde $i=1$ hasta n), por cada tamaño se puede establecer la ecuación de balance poblacional, utilizando las funciones de selección y ruptura. En la figura 6, del tamaño inicial m_1 , una fracción S_i se romperá a tamaños más pequeños, generando una nueva distribución de tamaños de partícula, ejemplificada con la curva de la flecha morada, que es la distribución b_{ij} , en esta curva, el origen j , será igual a 1, ya que proviene de m_1 y caerá en tamaños más pequeños. Lo mismo para cada tamaño m_2 , m_3 hasta m_{n-1} .

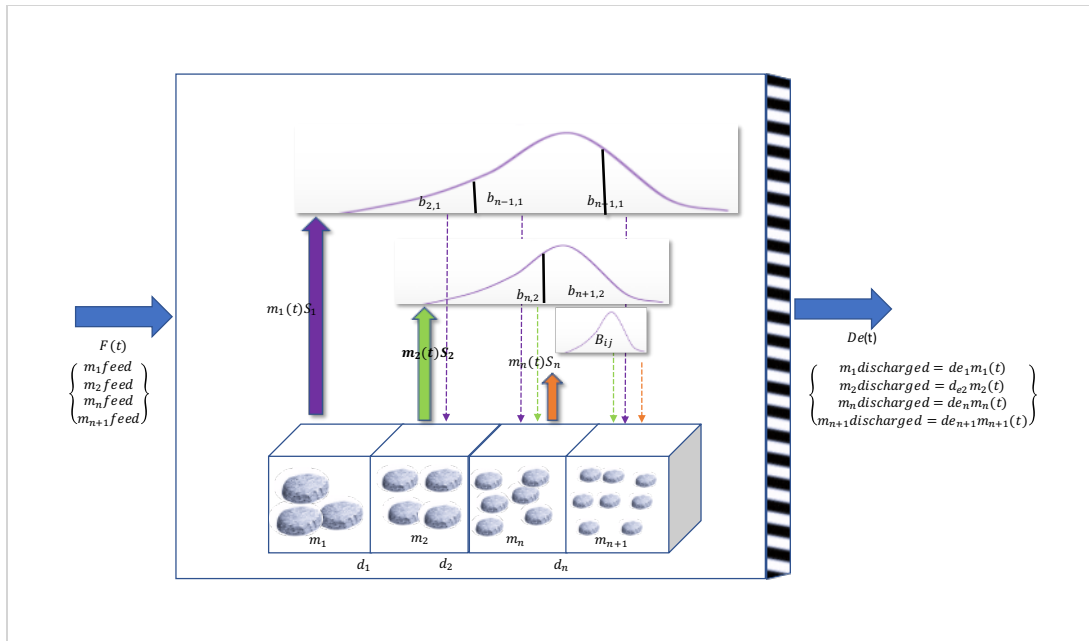


Figura 6.-Representación de balance poblacional en el interior del molino SAG con funciones de selección, quebrado y descarga

1.2.1.2 MODELO CINÉTICO

La cinética de molienda expresa la velocidad de producción de cada tamaño representada en términos de una función de selección (S_i) y función de quebrado (b_{ij}). S_i es una constante de proporcionalidad que recibe el nombre de función de selección de tamaño o velocidad específica de fractura, la cual indica la fracción de rompimiento de la partícula en cada intervalo de tamaño y b_{ij} muestra la información acerca de la distribución de tamaños que resulta del rompimiento del material dentro del molino.

Con base en los parámetros de fractura S_i y b_{ij} , se puede establecer un balance de masa por tamaños para las moliendas a diferentes tiempos y a distintas condiciones de operación con la siguiente ecuación:

$$\frac{dm_i}{dt} = -S_i m_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ i>j}}^{i-1} b_{ij} S_j m_j(t) \quad n \geq i \geq j \geq 1 \quad (6)$$

Donde:

$m_i(t)$ = Fracción de masa del material a un tamaño i en un tiempo t

S_i = Función de selección o velocidad de fractura ($1/t$, minutos⁻¹)

b_{ij} = Función de distribución de tamaño o función de quebrado

La función S_i indica la velocidad a la cual ocurre la fractura del mineral dentro del molino. Para la determinación de los valores de S_i , es necesario determinar solamente la fracción de mineral que queda del mismo tamaño después de cada molienda, de tal modo que basta con utilizar sólo un mismo tamiz. Los valores determinados de S_i y b_{ij} son utilizados para obtener una predicción de la distribución granulométrica que se espera, para ser comparada con los datos experimentales.

La función de ruptura b_{ij} representa la distribución de tamaño de partículas generado después de un evento de fractura. Así, el término b_{ij} , incorpora la fracción de partículas de tamaño j que se molieron y terminaron siendo partículas de tamaño i . Conociendo esta distribución, es posible predecir la distribución de tamaño de partícula en cualquier proceso de molienda.

En términos de manejo de datos, es común utilizar la función acumulada de b_{ij} que se representa como B_{ij} , que indica las partículas menores al tamaño j que después de la molienda son menores al tamaño i .

En la Figura 7, se representa un esquema del balance poblacional donde se calcula la producción de partículas con un incremento de tiempo (Δt). La sumatoria de los productos, que utilizan S_i y b_{ij} , representa el balance

poblacional del sistema. En la siguiente sección se explican las funciones S_i y b_{ij} .

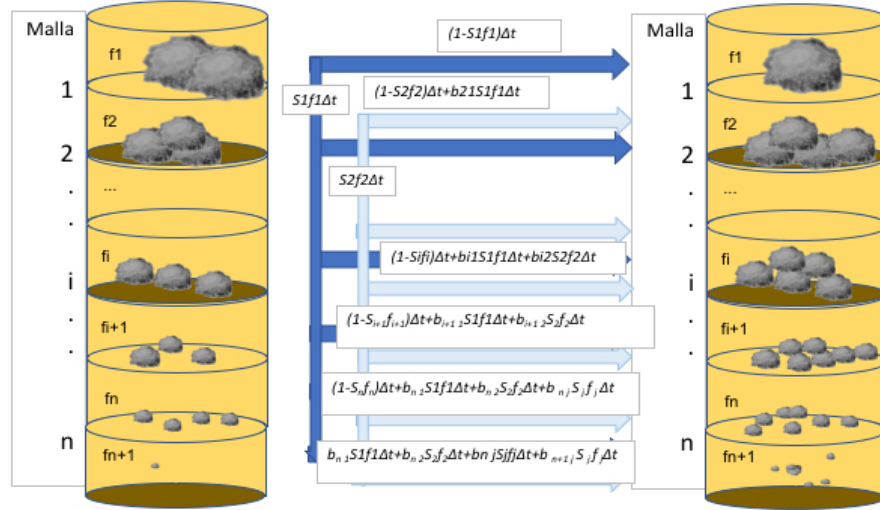


Figura 7.-Representación esquemática de balance poblacional

1.2.1.3 MODELO MATRICIAL

El método matricial expresa la relación entre la función de selección (S_i) y el análisis granulométrico de la alimentación y el producto del molino. Representando la distribución de la alimentación por la matriz M , la fracción que sufre rompimiento sería SM , entonces de acuerdo con Lynch (2016), el proceso de rompimiento en forma matricial quedaría expresado como:

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{matrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 S_1 \\ f_2 S_2 \\ \vdots \\ f_i S_i \\ \vdots \\ f_n S_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

La masa de partículas no quebradas sería $(I - S)F$ donde I representa la matriz identidad.

Las partículas quebradas tendrían una distribución matricial B (la función de quebrado)

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_2 & B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & B_2 & B_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_i & \dots & B_2 & B_1 & 0 & 0 \\ \vdots & B_i & \dots & B_2 & 0 & 0 \\ B_n & \dots & B_i & \dots & B_2 & B_1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

y el producto del molino (del cual ya se conoce la distribución granulométrica), sería:

$$P = B.S.F + (I - S)F \quad (9)$$

Esta ecuación está sujeta a consideraciones de que el producto que sale finalmente del molino, no es el que se generó, dado que hay un proceso de clasificación (por la parrilla) y recirculación (por los elevadores de pulpa), por lo que también se involucran factores de probabilidad de acuerdo al tamaño de partícula.

$$P = (1 - C)(B.S + I - S)[1 - C(B.S + I - S)]^{-1}.F \quad (10)$$

Donde:

$P =$ Producto del molino

$B =$ Función matricial de quebrado

$S =$ Función matricial de S_i

$C =$ Función matricial de clasificación, que representa la fracción que recircula al molino, debido a la parrilla interna

1.2.1.4 FUNCIÓN DE SELECCIÓN (S_i)

La función de selección se obtiene a partir de pruebas de molienda de partículas de un solo tamaño. En esta prueba se pretende caracterizar, a partir de una sola partícula o varias, pero del mismo tamaño, la distribución granulométrica generada después de un evento controlado de fractura, en el que todo el tiempo es posible determinar la energía aplicada.

Estos experimentos consideran la probabilidad de ocurrencia de varios tipos de fenómenos, entre ellos, la colisión bola-mineral con la respectiva fractura del mismo, el rompimiento que se genera al impactar mineral-mineral y el auto rompimiento que se produce por estallamiento al superar los límites de tensión generados.

1.2.1.4.1 DETERMINACIÓN DE LA FUNCIÓN DE SELECCIÓN (S_i)

Cuando una muestra de mineral se alimenta a un sistema de conminución y contiene partículas en varios rangos de tamaño, la probabilidad de romper los tamaños más grandes dentro de una fracción de tamaño es considerablemente mayor en comparación con los tamaños más pequeños. Es decir, una cierta proporción de las partículas dentro de cada rango de tamaño se reducen de forma preferencial. Por lo tanto, ruptura selectiva ocurre dentro de un rango de tamaño. La proporción de partículas dentro de cada rango de tamaño que se rompe es representada por S_i . Por lo tanto, $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ será la fracción de material en cada fracción de tamaño que se seleccionaría para la reducción de tamaño con las partículas restantes que pasan sin cambiar de tamaño. Esto se conoce como la función de selección (o la tasa específica de ruptura), que se puede expresar matemáticamente como una matriz diagonal donde cada elemento de la matriz representa la proporción de partículas que tienen la probabilidad de romperse. En un proceso de molienda por lotes, si la carga total en el molino se designa como M , la masa fracción de tamaño i en la carga del molino se expresa como m_i y la tasa específica de ruptura (o la tasa fraccional de ruptura o la masa del tamaño i reducido por unidad de tiempo por unidad de masa de tamaño i) es S_i , luego para un proceso de ruptura de primer orden:

$$\frac{-d[m_i(t)M]}{dt} = -S_i m_i(t)M$$

Donde:

S_i = Constante de proporcionalidad (fraccionalidad) (h^{-1})

$m_i(t)$ = fracción de masa de tamaño i después de un tiempo de molienda t

M = Masa total de material en el molino (toneladas)

Dado que la masa total es constante y asumiendo que S_i se mantiene constante a través del tiempo, la ecuación integrada se convierte en:

$$m_i(t) = m_i(0) \exp(-S_i t) \quad (12)$$

Y aplicando logaritmos:

$$\log m_i(t) = \log m_i(0) - \frac{S_i \cdot t}{2.303} \quad (13)$$

De esta manera, graficando logarítmicamente la masa de la fracción i que varía respecto al tiempo, se puede conocer de la pendiente, el valor de S_i , se muestra una gráfica ejemplo (Figura 8).

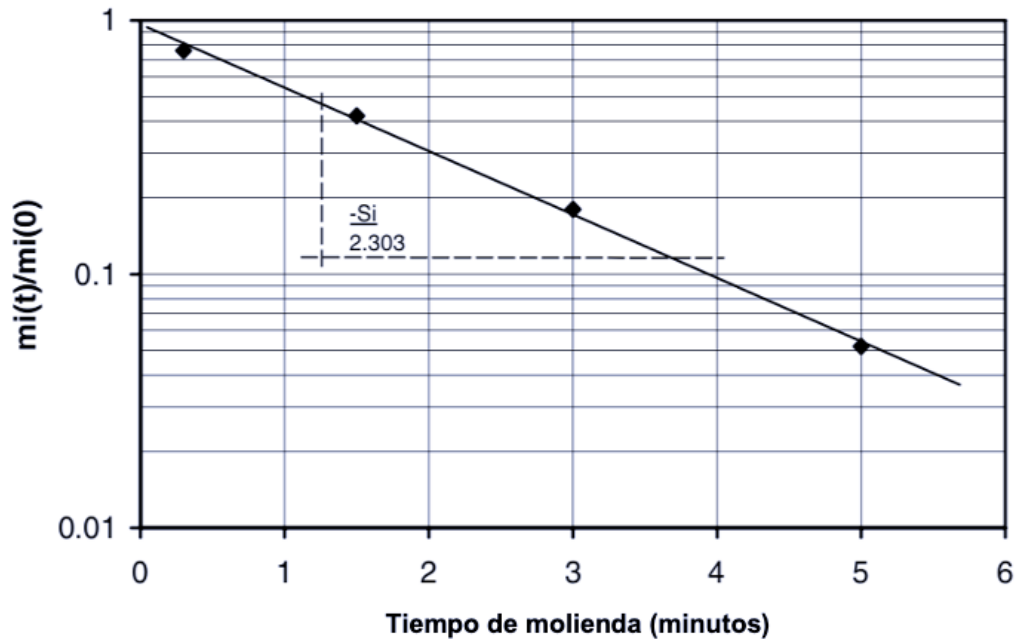


Figura 8.-Gráfica de función de primer orden para determinación de S_i

1.2.1.5 FUNCIÓN DE ROMPIMIENTO (B_{ij})

La fractura de una sola partícula producirá un espectro completo de tamaños nuevos. La distribución de tamaños del producto debe considerarse en varios niveles.

(a) Fractura de una única partícula específica solo una vez generando algunos fragmentos. Esto se conoce como fractura primaria de una sola partícula.

(b) Rompimiento de una sola partícula seguida de ruptura secuencial de las nuevas partículas durante un solo evento de ruptura. Esto se conoce como fractura de evento individual de una sola partícula. Toda la energía de impacto se disipa en un solo evento de impacto. Parte de la energía es consumida por la fractura de la partícula madre y por algunos miembros de generaciones sucesivas de partículas, parte es absorbida por partículas nuevas que no llegan a fracturarse y el resto se disipa por impacto.

(c) La fractura de muchas partículas individuales del mismo tamaño en una sola partícula, eventos de impacto único que producen estadísticamente muchas partículas “hijas” En otras palabras, eventos repetidos de tipo (b).

(d) La fractura de muchas partículas y la generación de nuevas partículas inmediatamente durante un solo impacto en un lecho de partículas. Las partículas en la cama sufren impacto de una sola partícula, cada uno usando solo una fracción de la energía de impacto total que está disponible para el evento. Esto es referido como un evento de impacto único de lecho de partículas.

(e) Rompimiento concurrente de muchas partículas por eventos de impacto único de lecho de partículas. La progenie de estos eventos estará inmediatamente disponible para fractura en eventos de impacto posterior.

La función de quebrado predice en función de pruebas efectuadas a mono tamaños de quebrado con energía específica conocida, la distribución de tamaños que se generará. B_{ij} , representa la fracción acumulada de material quebrado proveniente del tamaño $J+1$ (es decir, mayor que el tamaño J), que después del evento de fractura pasa una malla de tamaño i . El método más popular es representado por la función acumulada de b_{ij} que es B_{ij} , mostrada en la ecuación 16.

$$B_{IJ} = \beta_0 \left(\frac{d_i}{d_{j+1}} \right)^{\beta_1} + (1 - \beta_0) \left(\frac{d_i}{d_{j+1}} \right)^{\beta_2} \quad (14)$$

Que consiste en suponer que el material fracturado tiene dos orígenes, uno de ellos es la ruptura por esfuerzos de tensión, y la otra es la generada por compresión localizada del material. Se asume que la primera genera una mayor cantidad de medios y finos, y la segunda una mayor cantidad de gruesos. Así si se considera Y como el tamaño inicial original y X , como el tamaño medio geométrico de partícula de cada rango de distribución

de tamaños, (X/Y) representa un tamaño relativo de partícula respecto al original. Y la distribución acumulada del bajo flujo será proporcional a:

$$B_{ij} = B(X; Y) = \left(\frac{X}{Y}\right)^n \quad (15)$$

Donde:

$X = d_i^*$ = Tamaño geométrico del rango de distribución de tamaño i (mm)

$Y = d_{crit} = d_{j+1}$ = Tamaño geométrico medio de la partícula de origen (mm)

$n = \beta_1, \beta_2$

Diferentes valores de n describen los productos más grandes producidos por la ruptura por tensión y los productos más pequeños producidos por el intenso esfuerzo de compresión en puntos localizados.

En la función de quebrado, β_1 representa el valor de n producido por ruptura por exceso de tensión o estallamiento (tamaños finos); y β_2 representa el exponente de los tamaños gruesos.

β_0 = Las dos distribuciones se agregan usando un factor de ponderación fraccional. Es decir, β_0 , representa la fracción de partículas generadas por estallamiento y $1 - \beta_0$, la fracción de partículas generada por abrasión.

1.2.1.5.1 DETERMINACIÓN DE LA FUNCIÓN DE ROMPIMIENTO (B_{IJ})

Como se explicó en el apartado 1.2.1.5 y la figura 6, la función de rompimiento b_{ij} , representa la distribución granulométrica del material recién fracturado, que se distribuye en los diferentes tamaños de partícula i , proveniente del tamaño $J+1$, la sumatoria de estas distribuciones de tamaño es B_{IJ} . Es así que, para determinar la ecuación de la función de rompimiento, y sus respectivos parámetros, se puede usar el siguiente método, citado por King (2001).

Se genera una gráfica de tamaño relativo de partícula (X/Y), contra porcentaje pasante (que es la función de quebrado B_{IJ}) de ese rango X y el resultante será una curva (a) como la mostrada en la figura (Figura 9). En lugar de utilizar el diámetro de partícula directamente, se genera un tamaño relativo (X/Y), para que el valor máximo de esta razón, sea 1 y no un tamaño X de partícula. Se traza una línea recta (b), que inicia en la parte de la curva que corresponde a los tamaños finos, y se prolonga hasta el cruce con la ordenada donde $X/Y=1$. La pendiente de esta recta, será el valor de $n_1=\beta_1$, y su prolongación hasta el eje Y donde X/Y es igual a 1, proporcionará el valor de β_0 (K), es decir, la fracción de contribución de finos de las partículas generadas. Entonces, si β_0 son los finos, $(1 - \beta_0)$ será la contribución de los gruesos. Es en la parte de los gruesos, donde la curva comienza a pronunciarse, y para encontrar la ecuación, es necesario calcular el parámetro β_2 . Se despeja la función y queda de la siguiente forma:

$$(1 - \beta_0) \left(\frac{d_i}{d_{j+1}} \right)^{\beta_2} = B_{IJ} - \beta_0 \left(\frac{d_i}{d_{j+1}} \right)^{\beta_1} \quad (16)$$

Dado que ya se conocen los valores de la distribución granulométrica del porcentaje pasante (B_{IJ}), el valor de β_0 , el valor de β_1 , se calcula la parte derecha de la ecuación, donde $\left(\frac{d_i}{d_{j+1}} \right)$ es el valor de X/Y . Con los valores obtenidos graficados, se obtiene la recta de la derecha

de la gráfica (c) y su pendiente es $n_2 = \beta_2$ como se muestra en la figura 9. La intersección $1-K$ representa la contribución de la fracción de gruesos ($1 - \beta_0$).

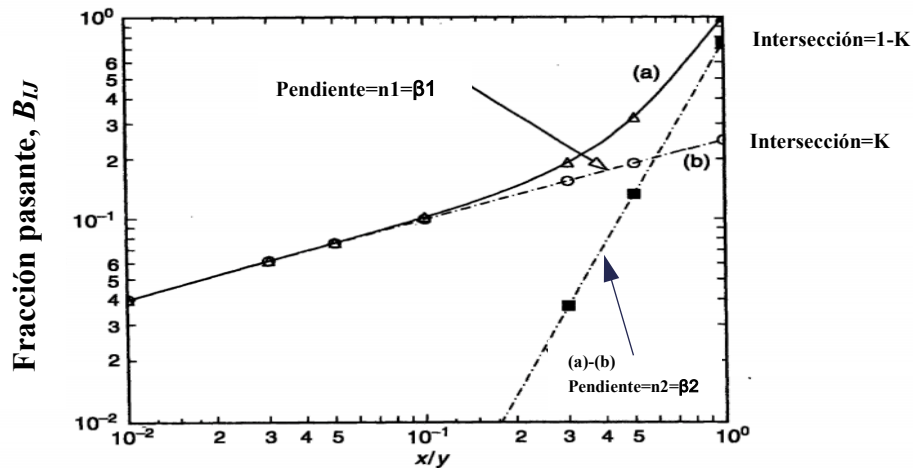


Figura 9.-Obtención de parámetros para función de rompimiento B_{ij} (King 2001)

Son estas ecuaciones, las que permiten efectuar simulaciones de predicción de granulometrías de producto, pues con datos de energía específica de entrada calculan que fracción se romperá y en que nuevos tamaños se acomodará.

La respuesta cinética del modelo es función de solo dos conjuntos distintivos de parámetros: la función selección específica S_i^E y la función fractura B_{ij} .

1.2.2 MODELO ENERGÉTICO PARA MOLINOS SAG

1.2.2.1 INTEGRACIÓN DE BALANCE DE ENERGÍA Y BALANCE POBLACIONAL MEDIANTE LA FUNCIÓN DE SELECCIÓN ESPECÍFICA (S_i^E) Y POTENCIA DEL MOLINO

La dependencia de los parámetros de la función de selección y fractura es representada por se correlaciona el concepto de la utilización de la energía en el rompimiento, el balance de energía del sistema se expresa en la siguiente ecuación:

$$\text{Energía} = \left(\begin{array}{c} \text{Energía para mover} \\ \text{el molino vacío} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Energía transmitida a las partículas} \\ \text{para el rompimiento} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Energía disipada en forma} \\ \text{de ruido y calor} \end{array} \right) \quad (17)$$

La energía se integra con la función de selección mediante el procedimiento de escalamiento específico de energía.

La variación de la tasa específica de rompimiento y de la función de rompimiento con las condiciones de molienda se pueden explicar sustancialmente describiendo la variación de estas funciones con la entrada de potencia específica en la molienda y examinar cómo la entrada de potencia específica varía con el tamaño del molino y con el diseño y condiciones de operación.

La tasa específica de ruptura de la clase de tamaño i es proporcional a la entrada de potencia específica a la carga del molino

$$S_i \tau = S_i^E \cdot \frac{P_{neta}}{W} \quad (18)$$

Donde

P_{neta} = Potencia neta de la conminución, sin considerar la potencia del molino sin carga (kw)

W = Flujo másico ($t h^{-1}$) de carga en el molino excluyendo las bolas

τ = Tiempo medio de residencia dentro del molino

El éxito de esta integración depende de la aplicación de un modelo robusto que describa la función de selección específica. Existen dos modelos para la obtención de la función de selección específica, el desarrollado por Herbst y Fuerstenau (1980) y el desarrollado por Austin (1984). La metodología de Austin, considera parámetros que son altamente dependientes de el tamaño del molino y el número de impactos dentro del mismo, lo que hace que el escalamiento entre pruebas de laboratorio, pruebas piloto y molinos ya en

operación, sea complicado. En cambio, el modelo de Herbst y Fuerstenau (1980), permite un escalamiento más sencillo. La característica esencial del modelo de Herbst-Fuerstenau (1980) es que la función de selección específica depende sólo del material y no varía con las condiciones de molienda ni con el tamaño del molino. Esta suposición es equivalente al postulado de que la cantidad de ruptura que ocurre dentro del molino es proporcional a la cantidad de energía que ha sido absorbida por el material. Lo anterior se debe a que la utilización de la razón de potencia neta específica (P/W), absorbe la escalabilidad, ya que mientras aumente el tamaño del molino y por lo tanto la potencia, pero al mismo tiempo el flujo másico, esta razón se mantendrá constante. Por lo tanto, el método se puede usar para ampliar las tasas de ruptura en amplios rangos de operación. S_i^E se debe determinar en pruebas de laboratorio usando la misma distribución de tamaño de la bola que tiene el molino que se modelará o simulará, ya que se ha encontrado que la función de selección es ampliamente dependiente del tamaño de bola; es decir, aunque sea hagan pruebas de laboratorio o piloto, es necesario mantener el mismo tamaño de bola. Además, se debe encontrar la función de cada tipo de rompimiento (bolas-mineral, mineral-mineral y autorompimiento). No es necesario conocer explícitamente el producto $S_i\tau$ puede inferirse a partir de la ecuación de función de selección específica y la potencia neta específica del molino (P/M).

Función de selección:

$$S_i^E = \alpha_0 (d_i^*)^{\alpha_1} * \frac{W}{P_{neta}} \quad (19)$$

Donde:

$$S_i^E = \text{Función de selección específica} (t)(kW - h)^{-1}$$

d_i^* = tamaño medio de partícula de rango i obtenido de la razón geométrica(mm)

$$d_i^* = (d_i \cdot d_{i+1})^{0.5} \quad (20)$$

α_0, α_1 = parámetros de función de selección del mineral

En los casos en que la razón “diámetro de bola/diámetro de partícula” no es suficientemente alta, se usa la ecuación:

$$S_i^E = \frac{\alpha_0 (d_i)^{\alpha_1}}{\left[1 + \left(\frac{d_i^*}{d_{crit}} \right)^{\alpha_2} \right]} * \frac{W}{P_{neta}} \quad (21)$$

Donde:

S_i^E = Función de selección específica ((t)(kw - h)⁻¹)

d_i^* = tamaño medio de partícula de rango i (mm ó μ m)

d_{crit} = tamaño original de partícula (mm ó μ m)

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ = parámetros de función de selección del mineral

En esta ecuación, el $\ln(S_i^E)$ aumenta linealmente con la pendiente α_1 , en la medida en que el $\ln(d_i)$ también aumenta, hasta alcanzar un máximo, que disminuye en forma lineal con la pendiente $(\alpha_2 - \alpha_1)$, lo que se puede observar en la figura 10, en donde se observa que la pendiente de la recta 1, que corresponde a la ecuación 19, es α_1 . En esta tendencia creciente de la curva, las partículas se rompen más conforme aumenta su tamaño. Esto se adjudica a que internamente aumenta el número de fracturas y zonas de tensión internas en la partícula. En el valor de d_{crit} , comienza a decrecer la función de selección específica, la tendencia a la baja se explica con el aumento de masa de las partículas, en las cuales el radio masa/zonas internas de fragilidad, aumenta; las partículas no reciben el impacto suficiente para romper esa masa. La pendiente de la tendencia de caída es $(\alpha_2 - \alpha_1)$

$$d_{max} = d_{crit} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^{\frac{1}{\alpha_2}} \quad (22)$$

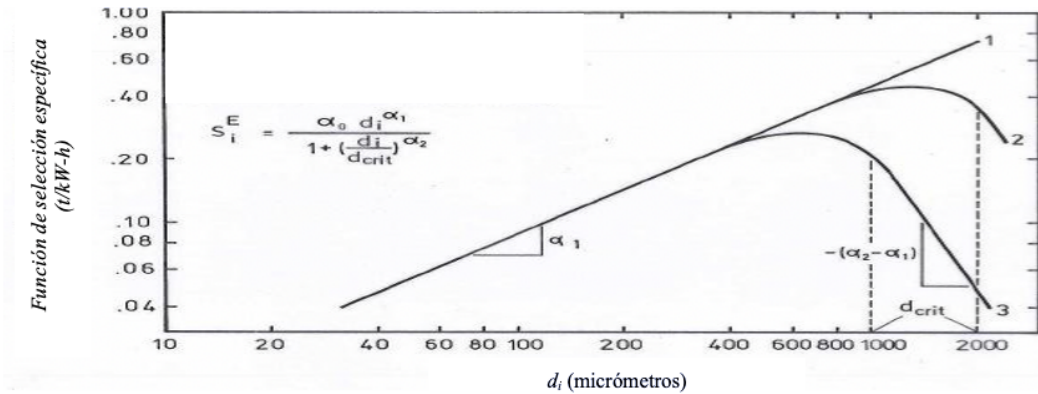


Figura 10.-Representación gráfica de curva de función de selección y parámetros

La función de selección específica es definida como la velocidad de producción de finos con respecto a la potencia neta específica. Esta función depende fundamentalmente de las características propias del mineral y muy poco de las condiciones operacionales de la molienda, como ya se explicó anteriormente, para el modelo de Herbst-Furstenau contra el de Austin.

En el molino SAG se presentan principalmente tres tipos de rompimiento, el debido al contacto bola-mineral, el debido al contacto mineral-mineral con los tamaños grandes de partícula y el autorompimiento producido por estallamiento del mineral. Es necesario determinar la función de selección en pruebas para cada tipo de rompimiento. Y obtener su función con los parámetros específicos. Cuando se obtiene el valor de la función de selección específica para cada rompimiento, se calcula la función de selección total para cada rango de tamaño, mediante una sumatoria ponderada, considerada en base a la ponderación de la potencia total de cada elemento (bolas y mineral). De esta forma, la función de selección específica total será:

$$S_i^E total = S_{ibolas}^E \left(\frac{P_{bolas}}{P_{neta}} \right) + S_{imin-min}^E \left(\frac{P_{min-min}}{P_{neta}} \right) + S_{iautoromp}^E \left(\frac{P_{autoromp}}{P_{neta}} \right) \quad (23)$$

1.2.2.2 CURVA DE VELOCIDAD DE ROMPIMIENTO COMO REPRESENTACIÓN DEL CONSUMO DE ENERGÍA GENERADO POR LOS DIFERENTES FENÓMENOS DE ROMPIMIENTO

La curva de velocidad de rompimiento se obtiene al graficar S_i^E para cada tamaño d_i^* . La forma típica de esta curva para una molienda SAG, es la que se observa en la figura 11:

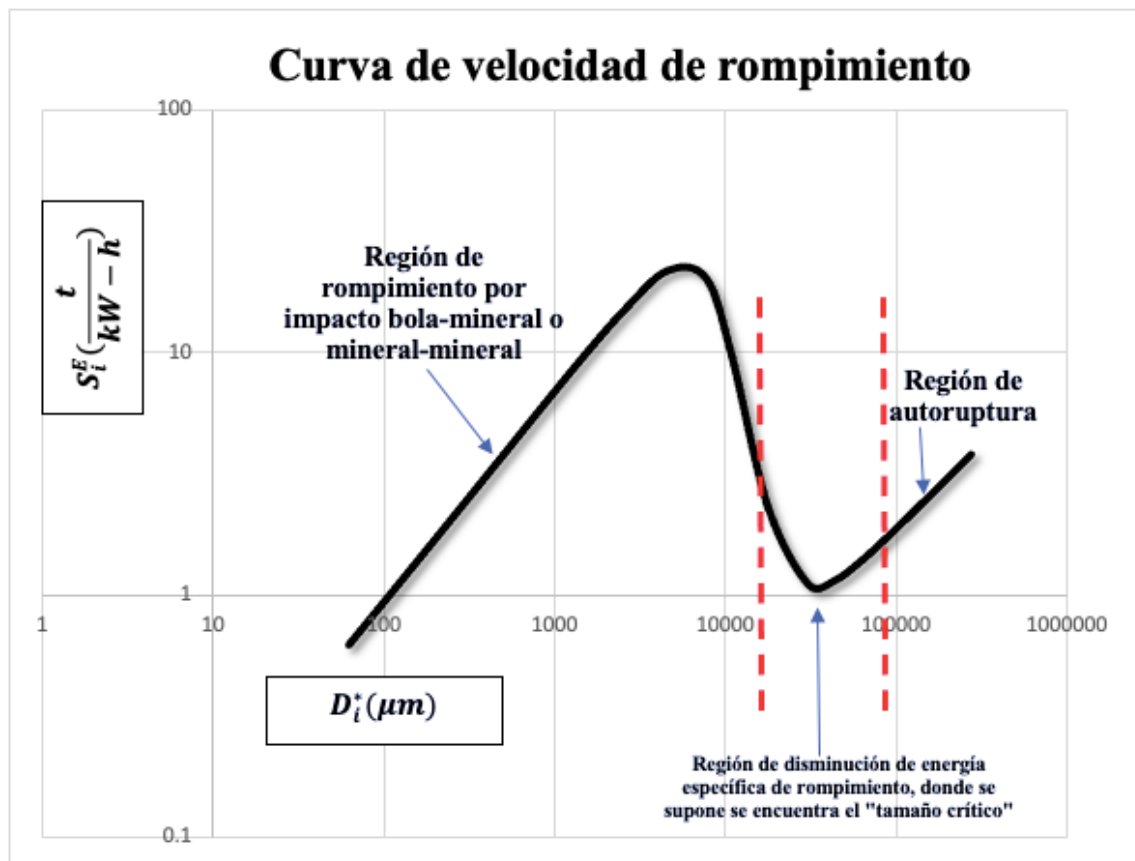


Figura 11.-Gráfica de curva de rompimiento donde se indican las zonas de los diferentes tipos de rompimiento y la zona de tamaño crítico de partícula

La curva es el resultado de la integración del consumo de energía debido a los diferentes tipos de conminución que se presentan en el molino, a saber, atrición, astillado, fractura por impacto y autoruptura. La atrición ocurre en la superficie de la partícula y el núcleo interno de la partícula no se ve afectada. Las partículas están sujetas a desgaste por fricción entre partículas y también entre partículas y las paredes del molino. Las partículas se

fracturan por impacto contra otras partículas o contra las paredes de los molinos. El otro mecanismo que se presenta es la ruptura de mineral por impacto bola-mineral. En la figura 12, se observa, además de los distintos tipos de rompimiento, la representación de la cuantificación de:

- La función de selección (mediante la curva de velocidad de rompimiento)
- La función de fractura (mediante el análisis granulométrico de las partículas generadas por el rompimiento de el material de tamaño i)
- La función de probabilidad de descarga (mediante la gráfica de c_i vs. tamaño de abertura de la parrilla interna)

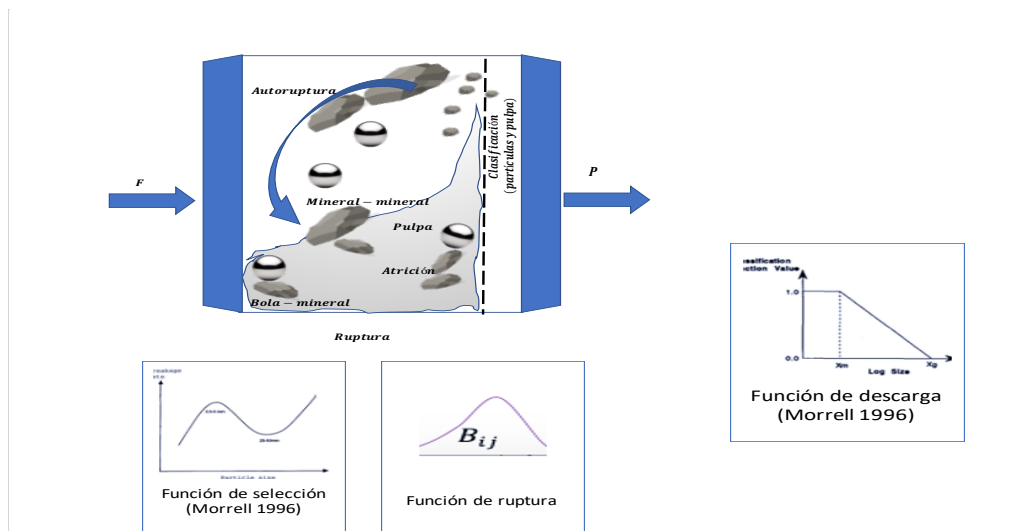


Figura 12.-Representación de tipos de rompimiento en molienda SAG y métodos de cuantificación de parámetros de balance poblacional

Existe una gran disminución en la tasa específica de ruptura dentro del molino semiautógeno, en un rango de tamaño intermedio en el que las partículas son demasiado grandes para sufrir fractura por impacto, pero son demasiado pequeños para sufrir autorruptura. Partículas en este rango de tamaño pueden acumularse en el interior del molino porque no se rompen ni se descargan a menos que se proporcionen puertos apropiados en

la rejilla de descarga. Este es el fenómeno de acumulación de “tamaño crítico”, que se puede observar en la figura 11, en el valle delimitado entre las líneas segmentadas rojas.

El fenómeno de autoruptura juega un papel importante en la molienda semiautógena. Cuanto mayor es la partícula y cuanto mayor es la altura de caída en el molino, mayor es la probabilidad de autoruptura.

1.2.2.2.1 OBTENCIÓN DE CURVA DE VELOCIDAD DE ROMPIMIENTO

La curva de velocidad de fractura se obtiene al graficar S_i^F para cada tamaño d_i^* , como se mostró en la figura 11. Con datos de entrada de flujos máxicos, distribución de tamaño de alimentación y producto y datos de potencia, nivel de llenado del molino entre otros, la curva se puede obtener por retrocálculo (Morrell, 2004). Existen diversos softwares con los cuales se puede facilitar la obtención.

En el modelo de *JKMRC*, se usa la metodología de splines cúbicos y se propone una correlación de 5 puntos de la curva ubicados en 0.25, 4, 16, 45 y 128 mm, con variables como la velocidad crítica, el nivel de llenado, diámetro de bolas, entre otros (Morrell, 2004). En esta tesis se utiliza la metodología de retrocálculo programada en el software Molycop Tools, para calcular la curva de velocidad de rompimiento. Se utiliza el método matricial y se obtiene la curva general y datos para obtener las curvas relacionadas con los diferentes tipos de rompimiento. La curva muestra que el rompimiento es dependiente de la energía específica de rompimiento. La energía específica de rompimiento está relacionada con las dimensiones del molino, el tamaño de los elementos de molienda que en el caso de un molino SAG son las bolas y las rocas (partículas grandes que no forman parte de la pulpa). La relación entre la energía específica de rompimiento y la distribución de tamaños del producto se obtienen por medio de distintas pruebas de laboratorio relacionadas con el rompimiento bola-mineral, mineral-mineral y auto rompimiento, además de pruebas de abrasión. Como resultado de estas pruebas existen distintos modelos matemáticos que derivan en la generación de parámetros de rompimiento propios del

mineral de estudio y se relacionan con eventos de ruptura por impacto (alta energía) y abrasión (baja energía).

Muchos de estos métodos, construyen la curva a partir de procedimientos iterativos en los que se busca minimizar una función objetivo a partir del criterio de mínimos cuadrados entre la distribución de tamaño de producto real y ajustada. Lo cual puede conducir a que un ajuste matemático corresponda a diferentes parámetros de función de selección y rompimiento, dando una precisión media al método. Por lo anterior, se sugiere hacer este procedimiento combinando la mayor cantidad de datos con baja desviación estándar, incluyendo el criterio del analista. Es entonces que se sugieren las pruebas piloto, donde es más fácil obtener distribuciones granulométricas, pero entonces la cuestión radica en el grado de escalabilidad de estas pruebas al molino real.

1.2.2.2.2 Variación de curva de velocidad de rompimiento respecto a variación de parámetros de diseño u operación del molino SAG

En general, se pueden observar las siguientes tendencias de variación de la curva de rompimiento con respecto a las variables propuestas como se describe a continuación (Morrell 1996):

- ✓ Efecto de la carga de bolas: En general, se espera que al incrementar la carga de bolas, se incremente la tasa de rompimiento de los tamaños grandes, pero se reduzca la de tamaños finos.
- ✓ Efecto del tamaño de alimentación (F_{80}): El efecto de la variabilidad en la tasa de ruptura por el F_{80} es el más difícil de evaluar, ya que interactúa directamente con el nivel de carga de las bolas. La evidencia indica que a una carga de bolas relativamente alta (arriba del 10%), un F_{80} alto disminuye la tasa de fractura. Una explicación puede ser que al aumentar el F_{80} , en realidad se aumenta el volumen de material grande que debe ser llevado a un tamaño fino, que en algún momento

pasará por la zona de la depresión en la tasa de rompimiento y el aumento de carga de material en el tamaño crítico. Un parámetro más acorde a la descripción del comportamiento de la tasa de fractura que el F_{80} , es la fracción de material que desde la alimentación se encuentra en el tamaño crítico de partícula.

- ✓ Efecto del incremento en la carga recirculante: La recirculación al molino de finos de un hidrociclón, no tiene un efecto considerable en la tasa de rompimiento, no ocurre lo mismo con la recirculación de tamaños gruesos de la criba de pebbles que pueden incrementar la fracción de material en el rango de tamaño crítico de partícula, por lo que se traduce en una caída de la tasa de rompimiento.
- ✓ Efecto de la velocidad del molino: Para una fracción dada de velocidad crítica, las revoluciones por minuto disminuyen conforme aumenta el diámetro del molino. Un molino de diámetro mayor tendrá una tasa de rompimiento más baja que un molino de diámetro menor, pero tendrá una energía de rompimiento mayor. Típicamente, al aumentar la fracción de velocidad crítica, la carga incrementa la elevación y por lo tanto aumenta la tasa de fractura por impacto, en detrimento de la disminución de fractura por abrasión, que se asocia con un movimiento de cascada y que prevalece a bajas velocidades.
- ✓ Efecto del tamaño de bola: Aunque al incrementar el tamaño de bola, la energía específica de rompimiento se incrementa para un evento dado y se produce una mayor cantidad de finos, el número de elementos de molienda por tonelada de carga disminuye, lo que se traduce en un menor número total de eventos de fractura. Entonces se espera una disminución en la tasa de fractura.
- ✓ Efecto de índice de trabajo del mineral (W_i): La facilidad de rompimiento del mineral que ingresa al molino (estimada por el índice de trabajo de Bond), es una variable sobre la que no se tiene control alguno, ya que es una propiedad intrínseca

del mineral. Mientras más alto sea el W_i , mayor será el tiempo que tomará su reducción de tamaño, aunque en molienda SAG, esto conducirá a una mayor competencia de las rocas como elementos de molienda. Si el molino está siendo operado con un flujo menor a su capacidad máxima, la dificultad de molienda aumentará el volumen de carga y a su vez consumirá más potencia.

- ✓ Efecto de tamaño de parrilla de descarga: Los molinos SAG se caracterizan por el uso de una parrilla de descarga, que retiene los medios de molienda y rocas. La parrilla varía en tamaño de abertura y configuración de la misma. En un inicio, las parrillas recién instaladas que corresponden al diseño original del molino, generan una reducción de flujo que pasa a través de ellas. Posteriormente y debido al desgaste, la abertura efectiva de la parrilla comienza a aumentar. La parrilla interna del molino, es un elemento muy importante en el circuito de molienda SAG, y debe ser del tamaño justo que permita evacuar el material de tamaño crítico.

1.2.2.3 PARÁMETROS DE POTENCIA DEL MOLINO SAG

Siendo la reducción de tamaño, un proceso que requiere un consumo importante de energía, es necesario considerar dentro de la molienda SAG, el desempeño energético de la materia en el interior del molino. Tanto de los elementos de molienda auxiliares, como son las bolas, como el mineral que proyecta otra partícula, o que se quiebra solo por impacto o compresión, como el de la pulpa, que está formada por partículas que ya pueden permanecer en suspensión y por lo tanto modifican la actuación de las bolas y el mineral grande por el amortiguamiento que genera, que en realidad es energía absorbida utilizada en el mismo rompimiento del mineral pequeño. Es la suma de todas estas energías, la que determina el consumo total de potencia.

El sistema de ecuaciones que representa dicho cálculo es el siguiente:

El molino cuenta con determinadas dimensiones de diámetro y longitud internas, lo que determina el volumen del mismo.

$$V_{molino} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot L \quad (24)$$

El volumen de carga se determina con:

$$V_{carga} = \frac{\%carga}{100} \cdot V_{molino} \quad (25)$$

El volumen ocupado por la carga corresponde a la suma del volumen de bolas, más el volumen de mineral y hay un espacio intersticial entre estos elementos, el cual será ocupado posteriormente por la pulpa. Por esta razón, del porcentaje de volumen ocupado por las bolas, se debe considerar que quedan huecos en el contacto de bola-bola. Esto es relevante posteriormente cuando se calcula la carga de bolas. Mientras tanto, el volumen de bolas aparente es:

$$V_{bolas} = \frac{\%bolas}{100} \cdot V_{molino} * (1 - \%huecos) \quad (26)$$

El volumen de mineral es:

$$V_{mineral} = \left(1 - \frac{\%bolas}{100}\right) \cdot V_{molino} * (1 - \%huecos) \quad (27)$$

El volumen de pulpa queda entonces inferido como:

$$V_{pulpa} = V_{carga} - V_{bolas} - V_{mineral} \quad (28)$$

La carga de bolas se calcula con:

$$C_{bolas} = V_{bolas} \cdot \rho_{bolas} \quad (29)$$

La carga de mineral es:

$$C_{mineral} = V_{mineral} \cdot \rho_{mineral} \quad (30)$$

Y la carga de pulpa corresponde a:

$$C_{pulpa} = V_{pulpa} \cdot \rho_{pulpa} \quad (31)$$

La potencia consumida por el molino es la que se requiere para poner en movimiento el molino y todos los elementos dentro de él y llevar a cabo la conminución. Cuando se calibra la medición y se establece el cero con el movimiento del molino vacío, entonces el resto es utilizado en el movimiento de las bolas, la pulpa y el mineral. En un balance general de energía, la energía potencial y cinética del mineral y las bolas por la elevación debido al movimiento rotatorio del molino, se transmite a otras partículas y es absorbida por la generación de nuevas superficies, es decir, la entrada de energía se transporta por los elementos moledores y se redistribuye en toda la masa interna. Las siguientes ecuaciones especifican el cálculo de la potencia neta total y unitaria a partir del dato de potencia de operación y la contribución que se le adjudica a las bolas, el mineral y la pulpa.

$$P_{neta} = P_{bruta} * \left(1 - \frac{\%pérdidas}{100} \right) \quad (32)$$

$$P_{netaunitaria} = \frac{P_{netatotal}}{Q_{alim}} \quad (33)$$

$$P_{netabolas} = P_{neta} \frac{V_{bolas}}{V_{carga}} \quad (34)$$

$$P_{netamineral} = P_{neta} \frac{V_{mineral}}{V_{carga}} \quad (35)$$

$$P_{netapulpa} = P_{neta} \frac{V_{pulpa}}{V_{carga}} \quad (36)$$

La velocidad de rotación puede definirse como una fracción de la velocidad crítica de centrifugación y se definen por las siguientes ecuaciones:

$$N_{crit} = \frac{76.6}{\sqrt{D}} \quad (37)$$

Donde:

N_{crit} = Velocidad en la que centrifuga la carga del molino (rpm)

D = Diámetro interno del molino expresado en pies (ft)

$$N = N_C \cdot N_{crit} \quad (38)$$

Donde:

N_C = Fracción de la velocidad crítica que en molino SAG está entre 0.7 y 0.85

N = Velocidad de operación en rpm

De esta manera, la potencia neta demandada por el molino se obtiene por:

$$P_{neta} = 0.238D^{3.5} \left(\frac{L}{F} \right) N_C \rho_{ap} (f - 1.065f^2) \sin(\alpha) \quad (39)$$

Donde:

P = Potencia neta demandada por el molino (kw)

D = Diámetro interior del molino (ft)

L = Largo interior del molino (ft)

N_C = Fracción de la velocidad crítica que en molino SAG está entre 0.7 y 0.85

ρ_{ap} = Densidad aparente de la carga ($t.m^{-3}$)

f = Nivel fraccional aparente de llenado

α = Ángulo de inclinación de la carga con respecto a la horizontal($^{\circ}$)

1.3 MODELO MATEMÁTICO DE BALANCES METALÚRGICO EN CIRCUITO DE MOLIENDA

Dado que no existen reacciones químicas significativas, el procedimiento de balance metalúrgico del circuito de molienda SAG-Bolas con clasificación es un procedimiento fundamental, en donde el aseguramiento de la calidad de los datos en un periodo estable de tiempo es más significativo que la dificultad del mismo.

Incluso los datos de muestreo de plantas más cuidadosamente recopilados están sujetos a muchas fuentes de variación. Algunos de estos errores se generan dentro de:

- Variación natural en los flujos de proceso, ensayos, etc.
- Procedimientos de muestreo o diseño
- Procedimientos de ensayo
- Procedimientos de dimensionamiento
- Fluctuaciones en las tasas de flujo de la planta, variables de operación, parámetros de alimentación, etc.

El balance de masa en una planta metalúrgica (también conocido como balance metalúrgico), es la base de los modelos que posteriormente simularán y optimizarán el comportamiento del proceso. Los objetivos principales de una planta de beneficio son, la liberación del mineral de valor mediante la reducción de tamaño por etapas con su respectiva clasificación para la posterior separación del elemento o elementos de interés por algún proceso de concentración y el posterior secado y manejo de los productos y

residuos. Y aunque los procesos básicamente son físicos, e involucran solo el mineral y el agua (sin considerar los reactivos químicos), se manejan altas variabilidades en los contenidos iniciales de cabeza pues los yacimientos van cambiando. Aunado a esto, es posible que no haya solamente un mineral valor, sino varios. Y dado que la venta del concentrado depende mucho del contenido valor, el correcto cálculo del mismo nos remite a reafirmar la idea de la importancia del balance metalúrgico.

Las variables importantes a considerar en un sistema de balance son entre otras, el porcentaje de sólidos, el contenido de elementos valor o principales (esto incluye las impurezas), el tamaño de partícula, la densidad del mineral, la densidad de la pulpa, entre otras.

Según la parte del sistema a analizar, unas cobran más relevancia para poder realizar el balance que otras, por ejemplo: en los sistemas de reducción de tamaño, más que el contenido de mineral valor, interesa el porcentaje de sólidos de la pulpa y la granulometría del mismo, por ejemplo, en los clasificadores. Mientras que en los circuitos de concentración se utiliza más el concepto de grado (que es la concentración del mineral valor) y la recuperación, que está relacionada con la eficiencia del proceso, y la dificultad el balance se incrementa al involucrar varios elementos valor.

Existen varias herramientas de resolución de balance metalúrgico, aunque todos se basan en el mismo principio matemático, que es relativamente sencillo, que es la resolución algebraica, expresada más adelante. Estas herramientas de software, varían en mayor o menor complejidad. Entre ellas podemos mencionar algunas como: Excel (como hoja de cálculo) o con el complemento iterativo que maneja (SOLVER), cualquier otro software de hoja de cálculo, y más recientemente, paquetes de simulación como JKSimMet o MinProSim, entre otros. Aunque los avances en las herramientas computacionales son enormes, por el hecho de estar basados en métodos numéricos iterativos, es necesario alimentarlos con valores iniciales acotados a rangos con menor desviación estándar que

deriven en una mejor convergencia del sistema. Allí radica la importancia del balance inicial por métodos algebraicos.

Básicamente el sistema se delimita y se subdivide en subsistemas representados por cada equipo mezclador, divisor o modificador. El establecimiento de dichas fronteras puede ser por global, por subsistemas (circuito SAG-circuito bolas), por equipos, según convenga a la información obtenida del muestreo del circuito.

Según el sistema que se esté delimitando, se seleccionará la variable de interés, ya sea porcentaje de sólidos o granulometría, por ejemplo, los molinos son transformadores, ya que aunque solo tienen una entrada y una salida y no hay cambio en la composición química, hay una transformación del tamaño de la materia. Un equipo divisor serían la criba o los hidrociclones y un mezclador, los cajones antes y después del molino en los que hay mezcla de bajoflujos de hidrociclones y/o agua. En el procedimiento convencional, para cada sistema y subsistema se reconocen entradas y salidas, así como flujos de corriente, porcentajes de sólidos y tamaño. Las secuencias variarán ligeramente conforme cambien los datos disponibles y más confiables para el balance.

La base de los algoritmos de balance de masa son las diferencias en la variable de interés seleccionada (ya se mencionó anteriormente que para reducción de tamaño aplica porcentaje de sólidos y granulometría y para concentración, es más común el ensaye del elemento o elementos valor) de varias corrientes; es decir, las diferencias generadas por el equipo de proceso.

La ecuación que aplica es la de estado estacionario, donde entradas son iguales a salidas, así de cada sistema se pueden obtener dos ecuaciones, que es la general y la de sólidos.

Balance general

$$Q_i + Q_{i\pm k1} = Q_{i\pm k2} + Q_{i\pm k3} \quad (40)$$

Balance de sólidos

$$x_i Q_i + x_{i\pm k1} Q_{i\pm k1} = x_{i\pm k2} Q_{i\pm k2} + x_{i\pm k3} Q_{i\pm k3} \quad (41)$$

Donde:

$$x_{i..n}, Q_{i..n}$$

x = valor de variable diferencial, en este caso, porcentaje de sólidos o ...

... fracción de sólidos

Q = Flujo másico de la corriente ($t \cdot h^{-1}$)

i = número de corriente

n = número total de corrientes

k1 <> *k2* <> *k3*, cualquier número máximo *n*

Pudiendo aparecer o desaparecer términos de ambos lados según el sistema analizado según las corrientes de entrada o salida. En molino SAG y bolas solamente se plantea la general porque cambia la granulometría, pero no el contenido de sólidos.

II. DESARROLLO EXPERIMENTAL PARA DETERMINAR EL TAMAÑO CRÍTICO DE LA MOLIENDA SAG EN LA PLANTA VELARDEÑA

La metodología propuesta está enfocada al cumplimiento de los objetivos específicos de la tesis, como se muestra en la tabla 3. Son 5 objetivos específicos que guardan un orden entre sí, pues sin el anterior no procede el inmediato. Básicamente es la caracterización del circuito de molienda mediante el muestreo de corrientes del circuito completo de molienda SAG-Bolas y el posterior análisis de laboratorio para determinar porcentajes de sólidos secos y granulometría de cada etapa y corriente muestreada. Es necesario recopilar los datos de dimensiones del molino como diámetro, largo, abertura de la parrilla, abertura de criba de “pebbles”, así como datos operativos de flujo másico de alimentación al SAG, porcentaje de llenado de bolas, porcentaje de llenado de molino, densidad de pulpa, velocidad crítica, porcentaje de velocidad crítica de operación, potencia del molino, entre otras. A continuación, se obtiene la curva de rompimiento, alimentando los datos de diseño y operación del molino, así como las granulometrías de la alimentación y el producto del molino SAG. De esta forma se determinan los distintos parámetros de las funciones de selección y rompimiento. De la curva de velocidad de rompimiento se determina el tamaño crítico en el valle de la misma. En la Tabla 3 se muestra un resumen de las actividades encaminadas a alcanzar el objetivo general de esta tesis.

Tabla 3.-Metodología por objetivo específico

Objetivo Específico	Metodología	Resultados esperados
1.- Caracterizar el circuito de molienda de planta Velardeña	Muestreo de corrientes en planta, recolección de datos operativos y de diseño, generación de datos experimentales,	Flujo másico de entrada al circuito, porcentaje de sólido de todas las corrientes muestreadas, granulometría de todos los flujos, datos de potencia de operación y dimensiones del molino SAG. Datos de porcentaje de área abierta de parrila SAG, ensayos de cabeza en línea en momento del muestreo, datos de energía de conminución en SAG
2.-Realizar el balance metaúrgico del circuito de molienda Velardeña	Desarrollo de modelo algebraico, obtención de secuencia de resolución, desarrollo de algoritmo en lenguaje de programación Octave 5.0	Valor de flujos másicos y composición de todas las corrientes del circuito de molienda
3.- Determinar la curva de velocidad de rompimiento de molienda SAG	Con datos operativos, de diseño y de energía de conminución, y análisis granulométricos de alimentación y producto de molino SAG encontrar curva de rompimiento del molino SAG.	Curva de rompimiento molino SAG y tamaño crítico de partícula

4.- Determinar el tamaño crítico de partícula en base a la curva de velocidad de rompimiento	Localizar el valle en curva de rompimiento del molino SAG	Tamaño Crítico de Partícula
5.-Evaluar las variaciones en el rendimiento del molino en base al tamaño de partícula crítico determinado	Analizar si el tamaño de abertura de la parrilla y la criba son adecuados de acuerdo a los resultados obtenidos	Conclusiones, sugerencias y posibles líneas de investigación

2.1 METODOLOGÍA PARA RESOLUCIÓN DE OBJETIVOS ESPECÍFICOS

A continuación, se desglosan los objetivos específicos por tareas y procedimientos.

Abarca desde la toma de muestras y datos de diseño y operación, hasta el análisis de los resultados.

2.1.1 OBJETIVO 1: METODOLOGÍA PARA DETERMINAR LAS CARACTERÍSTICAS OPERACIONALES Y DATOS DE DISEÑO DEL MOLINO DEL CIRCUITO DE MOLIENDA DE UNIDAD VELARDEÑA

Este objetivo está relacionado con la recopilación de datos para realizar el balance metalúrgico del circuito de molienda, así como los datos de diseño del molino SAG y condiciones de operación en el momento del muestreo, que se requerirán posteriormente para el retro cálculo de las funciones de selección y quebrado. Adicionalmente, se realizará

una investigación sobre los antecedentes de Unidad Minera Velardeña, Grupo Peñoles, como parte de la descripción y contexto del caso de estudio de esta tesis.

2.1.1.1 METODOLOGÍA PARA MUESTREO DE CORRIENTES DE CIRCUITO DE MOLIENDA SAG-BOLAS CON CLASIFICACIÓN Y RECOPIACIÓN DE DATOS DE DISEÑO Y OPERACIÓN

El primer paso para obtener los datos necesarios para el análisis numérico es precisamente obtener datos reales de una planta de beneficio en un tiempo suficiente para considerar el estado estacionario al promediar los resultados. Dicho muestreo se llevará a cabo en la unidad minera Velardeña, Dgo. Grupo Peñoles. Específicamente en el circuito de molienda SAG-Bolas con clasificación.

El tiempo de muestreo es en total de una hora, realizándose simultáneamente en cada uno de estos puntos cada 15 minutos.

Se determinó que se muestrearían los siguientes puntos señalados en la Tabla 4 el diagrama de la figura 13:

Tabla 4.-Corrientes a muestrear de circuito de molienda SAG-Bolas Unidad Velardeña

Número de corriente	Descripción
1	Alimentación fresca
2	Recirculación criba de pebbles a quebradora auxiliar
3	Recirculación de criba de pebbles que sale de quebradora auxiliar
4	Alimentación molino SAG
5	Salida molino SAG
6	Finos de criba pebbles
7	Alimentación a batería de hidrociclones previa a molino de bolas
8	Finos de batería de hidrociclones previa a molino de bolas

9	Gruesos de batería de hidrociclones previa a molino de bolas
10	Entrada a molino de bolas
11	Salida de molino de bolas
12	Alimentación a batería de hidrociclones posterior a molino de bolas
13	Finos de batería de hidrociclones posterior a molino de bolas
14	Gruesos de batería de hidrociclones posterior a molino de bolas
15	Producto a flotación
W1	Agua de dilución de cajón de alimentación de molino SAG
W2	Agua a criba de pebbles
W3	Agua de dilución a cajón de alimentación de batería de hidrociclones previa a molino de bolas
W4	Agua de dilución a cajón de alimentación de cajón de alimentación a molino de bolas
W5	Agua de dilución a cajón de alimentación de batería de hidrociclones posterior a molino de bolas

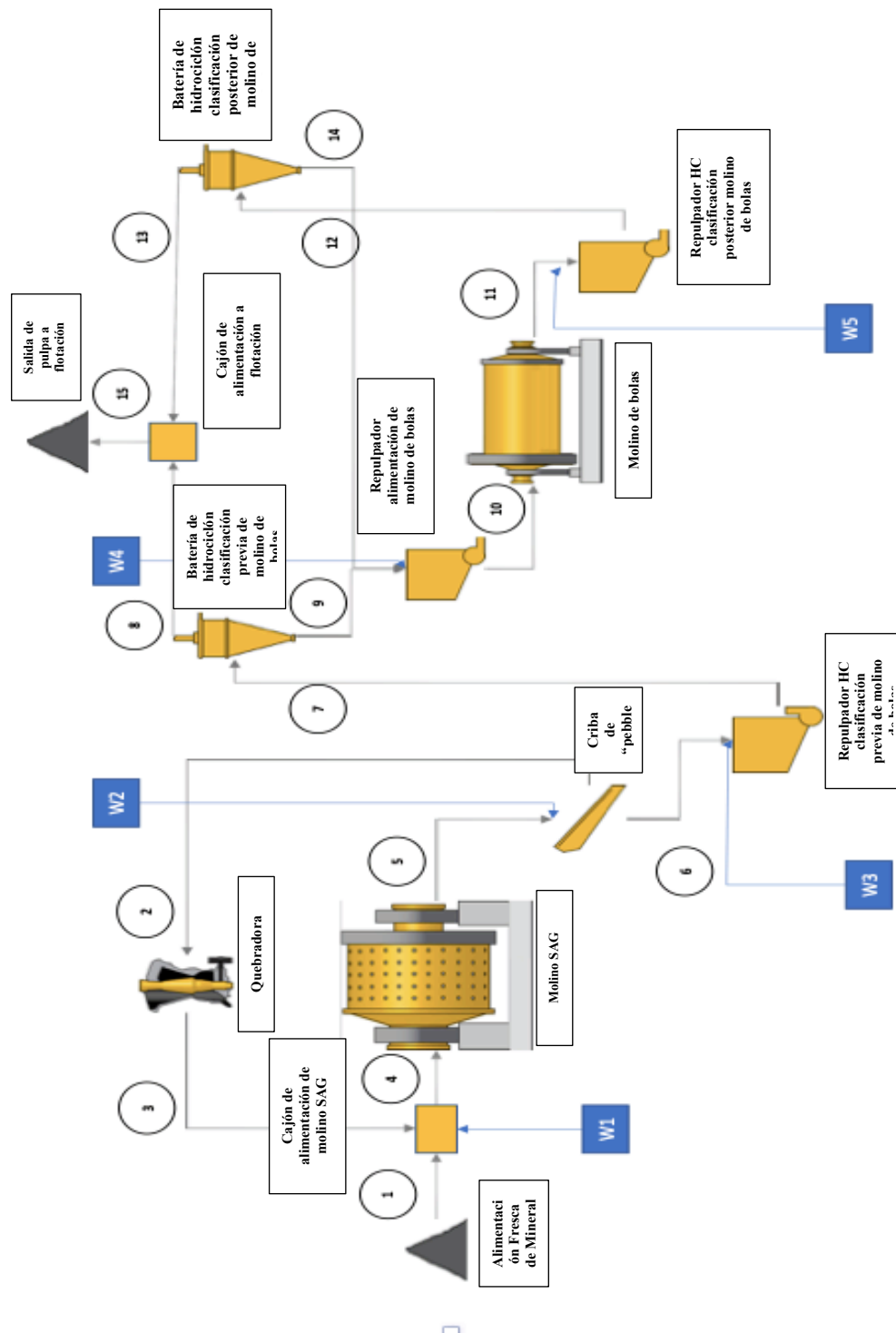


Figura 13.-Diagrama de proceso de circuito de molienda SAG-Bolas Unidad Velardeña

Adicionalmente, se solicitará al cuarto de control del circuito, la siguiente información con el fin de asegurar la estabilidad del proceso durante el muestreo:

- Agua de alimentación
- Agua criba
- Agua dilución
- Peso alimentación (t/h)
- Peso pebble (t/h)
- Potencia (Kw)
- Velocidad (%)
- Porcentaje de carga del molino (%)
- Porcentaje de carga de bolas (%)
- Porcentaje de huecos intersticiales (%)
- Diámetro y longitud del molino (m)
- Tamaño de bola (in)
- Tamaño de parrilla (mm)
- Porcentaje de área abierta de parrilla(%)
- Nivel de carga total (%)
- Dimensiones de la abertura de la criba de pebbles (mm)

El procedimiento detallado se encuentra en el anexo B.

2.1.1.2 METODOLOGÍA PARA DETERMINACIÓN DE PORCENTAJE DE SÓLIDOS SECOS DE CORRIENTES DE MUESTREO

Como parte de la caracterización de las corrientes muestreadas, es necesario determinar el porcentaje de sólidos secos de las mismas, ya que al momento de tomar las muestras, se encontraban en forma de pulpa (mezcla de sólidos de mineral y agua, que se comportan como un fluido). La corriente de alimentación fresca y de “pebbles”, no se comportan completamente como una pulpa, ya que si bien pueden tener humedad, el tamaño de partícula de los sólidos, no permite que la mezcla esté bien integrada. Por lo mismo el

transporte es por medio de bandas y no de tuberías y bombas. El balance metalúrgico se hace en base a flujos máxicos de sólidos secos. El procedimiento general consiste en realizar una filtración en filtro de presión a un tamaño de 53 micrómetros, para posteriormente secar la torta obtenida en una estufa de secado a 105°C por 24 horas. Se hace una relación de peso inicial de muestra húmeda y final de muestra seca para obtener el porcentaje de sólidos secos.

También se debe considerar la determinación de humedad de la alimentación fresca al molino SAG, sus características es que esta “seca”, tiene una distribución granulométrica amplia, esta operación a diferencia de con la pulpa, procede después de determinar la distribución granulométrica de la muestra.

Los procedimientos para llevar a cabo la cuantificación de porcentaje de sólidos se encuentran en el anexo C y el anexo D.

2.1.1.3 METODOLOGÍA PARA DETERMINACIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑO DE PARTÍCULA (GRANULOMETRÍA) DE CORRIENTES DE MUESTREO

El tamaño de partícula, es el parámetro de control de los circuitos de molienda. Es controlado mediante clasificadores (cribas e hidrociclones). El análisis granulométrico o por tamizado, es la técnica que cuantifica la distribución de tamaño de partícula. Se realiza en juegos de tamices patrón. Debe realizarse la cuantificación de distribución granulométrica a todas las corrientes muestreadas. Es de particular importancia homogeneizar la muestra perfectamente, ya que una de las características de los circuitos de molienda SAG, es la amplia distribución de tamaño de partícula (Desde 6” hasta tamaños menores a 38 micrómetros aproximadamente). Para que la muestra sea representativa, debe ser preparada cuidadosamente de acuerdo a las técnicas de homogeneización y cuarteo. Además de realizar el análisis granulométrico por etapas, pues habrá que separar tamaños gruesos, medios y finos previamente. Es importante que la muestra esté perfectamente seca para llevar a cabo este procedimiento. Estos resultados son parte importante de los datos

de alimentación del método de retrocálculo para obtener la función de selección, la función de quebrado y la curva de velocidad de rompimiento. Específicamente se requieren las distribuciones granulométricas de la alimentación y el producto del molino SAG. El procedimiento para realizarlo se encuentra en el anexo E.

2.1.2 OBJETIVO 2: OBTENER EL BALANCE METALÚRGICO DEL CIRCUITO DE MOLIENDA VELARDEÑA MEDIANTE ALGORITMO MATRICIAL

En esta sección se muestra la secuencia de ecuaciones necesarias para resolver el balance metalúrgico del circuito de molienda basados en el principio de conservación de materia donde las entradas son igual a las salidas en estado estacionario.

La tabla 5 muestra la metodología global de resolución del balance metalúrgico del circuito de molienda SAG-bolas de unidad minera Velardeña. Incluye el enfoque de resolución “semimanual” y por lenguaje de programación que se desglosa paso a paso en la metodología.

Tabla 5.-Metodología de balance metalúrgico de circuito de molienda SAG-Bolas

Metodología de balance metalúrgico circuito molienda SAG-bolas		
Procedimiento	Datos requeridos	Variable a determinar
1.-Obtención de modelo matemático de balance de materia	nomenclatura x_i , Q_i	Sistemas de ecuaciones (modelo algebraico)
2.-Secuencia de resolución de modelo matemático	Variables desconocidas (flujos másicos y % de sólidos) sistema de ecuaciones y algoritmo de secuencia	Secuencia de resolución
3.-Resolución de balance de masa	Porcentaje de sólidos de cada corriente, alimentación fresca del proceso y secuencia de resolución	Flujos másicos de proceso de molienda (resultados manual)
4.-Validación de balance metalúrgico con algoritmo en lenguaje de programación Octave 5.1.0	Programa en lenguaje Octave 5.1.0, datos conocidos de flujos másicos y % de sólidos	Flujos másicos y % de procesos de molienda (resultados Octave 5.1.0)
5.-Validación de resultados mediante comparación de resolución manual y por lenguaje de programación Octave 5.1.0	Flujos másicos de proceso de molienda (resultados manual) y flujos másicos y % de procesos de molienda (resultados Octave 5.1.0)	

2.1.2.1 MODELO ALGEBRAICO PARA BALANCE DE MOLIENDA DE UNIDAD VELARDEÑA

La figura 13, muestra el arreglo del circuito de molienda SAG-Bolas de la Planta Velardeña. Se han numerado los flujos muestreados y en base a esa numeración, se propone esta nomenclatura:

$$x_i, \dots, x_n \quad Q_i, \dots, Q_n \quad W_i, \dots, W_n \quad (42)$$

Donde:

x_i = valor de variable diferencial, en este caso, porcentaje de sólidos o fracción de sólidos

Q_i = Flujo másico de la corriente

W_i = Flujo másico de la corriente de agua

i = número de corriente

n = número total de corrientes

Para cada sistema, nodo o equipo, se generará una ecuación de balance general y una ecuación de balance de sólidos. Dado que se considera un sistema en estado estacionario y sin reacción química, la ecuación de balance de materia se expresa como:

$$\text{Entradas} = \text{Salidas} \quad (43)$$

Para sistemas (global, SAG, Bolas), la ecuación general se expresa como:

$$\sum_{i=1}^n Q_{i_{ent}} + \sum_{i=1}^n W_{i_{ent}} = \sum_{i=1}^n Q_{i_{sal}} \quad (44)$$

Y la de sólidos como:

$$\sum_{i=1}^n x_i Q_{i_{ent}} = \sum_{i=1}^n x_i Q_{i_{sal}} \quad (45)$$

Para molinos (SAG, Bolas), la ecuación general se expresa como:

$$Q_{i_{ent}} = Q_{i_{sal}} \quad (46)$$

Y la de sólidos como:

$$x_i Q_{i_{ent}} = x_i Q_{i_{sal}} \quad (47)$$

Para clasificadores (cribas e hidrociclones), la ecuación general se expresa como:

$$Q_{i_{ent}} + W_{ent} = Q_{i+1_{gruesos}} + Q_{i+2_{finos}} \quad (48)$$

Y la de sólidos como:

$$x_i Q_{i_{ent}} = x_{i+1} Q_{i+1_{gruesos}} + x_{i+2} Q_{i+2_{finos}} \quad (49)$$

Para cajones de alimentación y repuladores, la ecuación general se expresa como:

$$\sum_{i=1}^n Q_{i_{ent}} + \sum_{i=1}^n W_{i_{ent}} = \sum_{i=1}^n Q_{i_{sal}} \quad (50)$$

Y la de sólidos como:

$$\sum_{i=1}^n x_i Q_{i_{ent}} = \sum_{i=1}^n x_i Q_{i_{sal}} \quad (51)$$

Los siguientes modelos se plantean para el balance

Balance global

Ecuación general

$$Q_1 + W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 = Q_{15} \quad (52)$$

Ecuación de sólidos

$$x_1 Q_1 = x_{15} Q_{15} \quad (53)$$

Balance de molienda SAG

Ecuación general

$$Q_1 + W_1 + W_2 = Q_6 \quad (54)$$

Ecuación de sólidos

$$x_1 Q_1 = x_6 Q_6 \quad (55)$$

Balance de nodo antes de molino SAG

Ecuación general

$$Q_1 + Q_3 + W_1 = Q_4 \quad (56)$$

Ecuación de sólidos

$$x_1 Q_1 + x_3 Q_3 = x_4 Q_4 \quad (57)$$

Balance Quebradora Auxiliar SAG

Ecuación general

$$Q_2 = Q_3 \quad (58)$$

Ecuación de sólidos

$$x_2 Q_2 = x_3 Q_3 \quad (59)$$

Balance Molino SAG

Ecuación general

$$Q_4 = Q_5 \quad (60)$$

Ecuación de sólidos

$$x_4 Q_4 = x_5 Q_5 \quad (61)$$

Balance criba “pebbles”

Ecuación general

$$Q_5 + W_2 = Q_2 + Q_6 \quad (62)$$

Ecuación de sólidos

$$x_5 Q_5 = x_2 Q_2 + x_6 Q_6 \quad (63)$$

Balance de circuito de molienda de bolas

Ecuación general

$$Q_6 + W_3 + W_4 + W_5 = Q_{15} \quad (64)$$

Ecuación de sólidos

$$x_6 Q_6 = x_{15} Q_{15} \quad (65)$$

Balance de cajón de alimentación de batería de ciclones 1 (salida de circuito SAG)

Ecuación general

$$Q_6 + W_3 = Q_7 \quad (66)$$

Ecuación de sólidos

$$x_6 Q_6 = x_7 Q_7 \quad (67)$$

Balance de batería de ciclones 1

Ecuación general

$$Q_7 = Q_8 + Q_9 \quad (68)$$

Ecuación de sólidos

$$x_7 Q_7 = x_8 Q_8 + x_9 Q_9 \quad (69)$$

Balance de cajón previo a molino de bolas

Ecuación general

$$Q_9 + Q_{14} + W_4 = Q_{10} \quad (70)$$

Ecuación de sólidos

$$x_9 Q_9 + x_{14} Q_{14} = x_{10} Q_{10} \quad (71)$$

Balance del molino de bolas

Ecuación general

$$Q_{10} = Q_{11} \quad (72)$$

Ecuación de sólidos

$$x_{10} Q_{10} = x_{11} Q_{11} \quad (73)$$

Balance del cajón posterior al molino de bolas (previo a batería de ciclones 2)

Ecuación general

$$Q_{11} + W_5 = Q_{12} \quad (74)$$

Ecuación de sólidos

$$x_{11}Q_{11} = x_{12}Q_{12} \quad (75)$$

Balance de batería de ciclones 2

Ecuación general

$$Q_{12} = Q_{13} + Q_{14} \quad (76)$$

Ecuación de sólidos

$$x_{12}Q_{12} = x_{13}Q_{13} + x_{14}Q_{14} \quad (77)$$

Balance de la unión de sobreflujos de las baterías de ciclones (salida a flotación)

Ecuación general

$$Q_8 + Q_{13} = Q_{15} \quad (78)$$

Ecuación de sólidos

$$x_8Q_8 + x_{13}Q_{13} = x_{15}Q_{15} \quad (79)$$

2.1.2.2 ALGORITMOS PARA SECUENCIA DE RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES

El algoritmo desarrollado se centra en la búsqueda de la secuencia de resolución del sistema de ecuaciones del proceso de molienda, pero aplica para cualquier sistema. La utilidad radica en que minimiza la dependencia de la resolución del sistema de ecuaciones con respecto a la habilidad del sujeto que resuelve el sistema. Está hecho para abarcar la solución de forma manual, semi manual o automático (con un algoritmo para lenguaje de programación). Se presenta los pasos del procedimiento mediante diagramas de flujo:

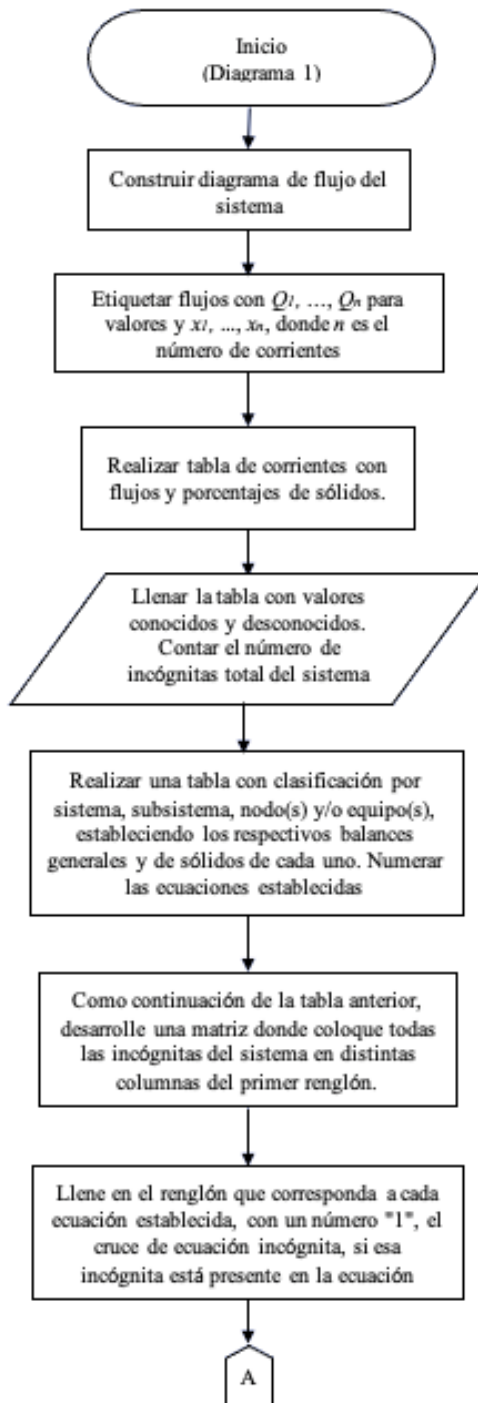
Los diagramas de flujo 1 y 2 (figura 14) muestran los pasos necesarios para resolver el sistema de balance de molienda, mediante un sistema de ecuaciones algebraicas, de forma manual o semi manual, partiendo desde el paso de construir el diagrama de flujo. Con semimanual, se hace referencia a que, si bien se usó una hoja de cálculo para la resolución de las ecuaciones, el despeje de las mismas y la secuencia debe ser establecida por el usuario. En la resolución por el algoritmo de lenguaje de programación, no se necesita que el usuario participe más que en la introducción de datos iniciales, pues la secuencia se encuentra por la programación, en la secuencia y resolución del lenguaje de programación (Octave 5.1.0). Se genera un archivo en excel donde se pueden ver las matrices generadas ecuación-incógnita, que muestra las opciones de resolución.

En el caso de que haya una sola incógnita o dos ecuaciones con las mismas dos incógnitas, se resuelve. En el caso de que llegara a un sistema de más incógnitas que ecuaciones, muestra el mensaje de que el sistema está indeterminado y se necesitan más datos de entrada. Como ya se explicó en el diagrama de flujo incluido en la sección de metodología, a partir del planteamiento de las ecuaciones por sistema y subsistema, se hace una matriz donde las columnas son las variables desconocidas del sistema y los renglones son las ecuaciones planteadas. Después se llena con el número 1 el cruce de incógnita-ecuación, si es que está presente como una variable desconocida, se hace la sumatoria por renglones y por columnas. El usuario, detecta aquellas celdas de sumatoria de renglones en donde

haya una sola incógnita o un sistema de 2 incógnitas y 2 ecuaciones correlacionadas y resuelve según el caso.

Una vez que se resolvió esa ecuación y se conoce el valor de la incógnita, se pone “0”, en lugar de “1” y así la sumatoria actualizada en los renglones de la matriz, disminuye y se vuelve a detectar el que tenga una incógnita o un sistema de 2 incógnitas y ecuaciones correlacionadas, repitiendo el proceso hasta completar la resolución de todo el sistema o en su defecto, detectar algún punto en donde haya un grado de libertad que no permita seguir la resolución.

Los diagramas de flujo 3, 4 y 5 (figura 15) representan los pasos para poder resolver el sistema de balance de molienda, mediante un programa computacional, donde los pasos requeridos por el usuario son crear el sistema de ecuaciones a partir del diagrama de bloques del sistema, se crea una matriz A_0 con los coeficientes de las ecuaciones del sistema, se introducen valores conocidos inicialmente, y el resto lo realiza el programa creado. En la resolución por el lenguaje de programación, se alimentan datos de entrada, pero la secuencia de resolución y la resolución misma, ya sea en un paso o secuenciada, ya está implícita en la programación. La salida del lenguaje de programación incluye un libro de excel donde se crean matrices para ver la secuencia de manera similar a las del método “semimanual”. Esto se hace en un solo paso, e incluye un texto explicativo, que se genera automáticamente, donde se explican las incógnitas que se resuelven en cada matriz y mediante cuál ecuación se hizo.



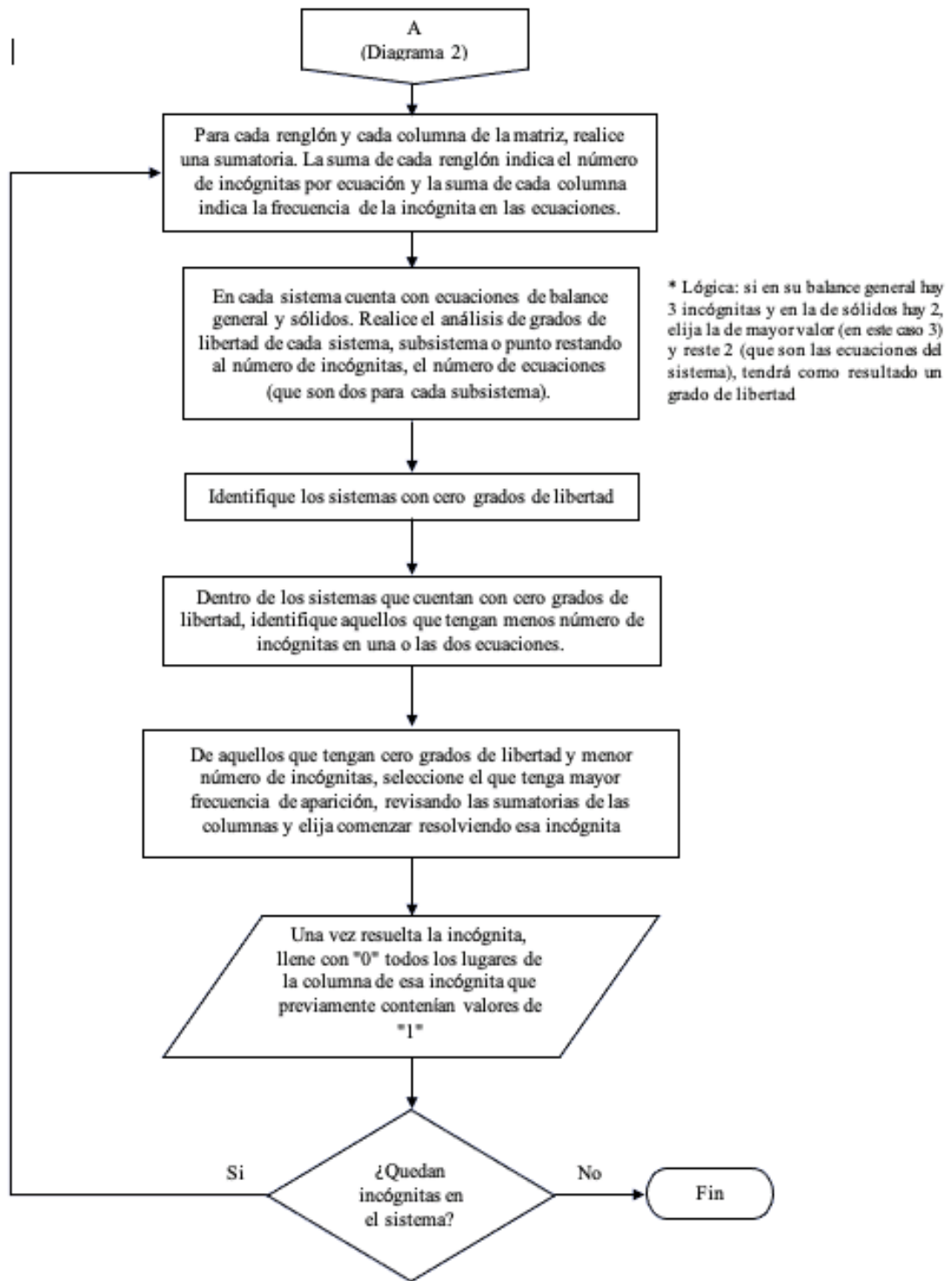
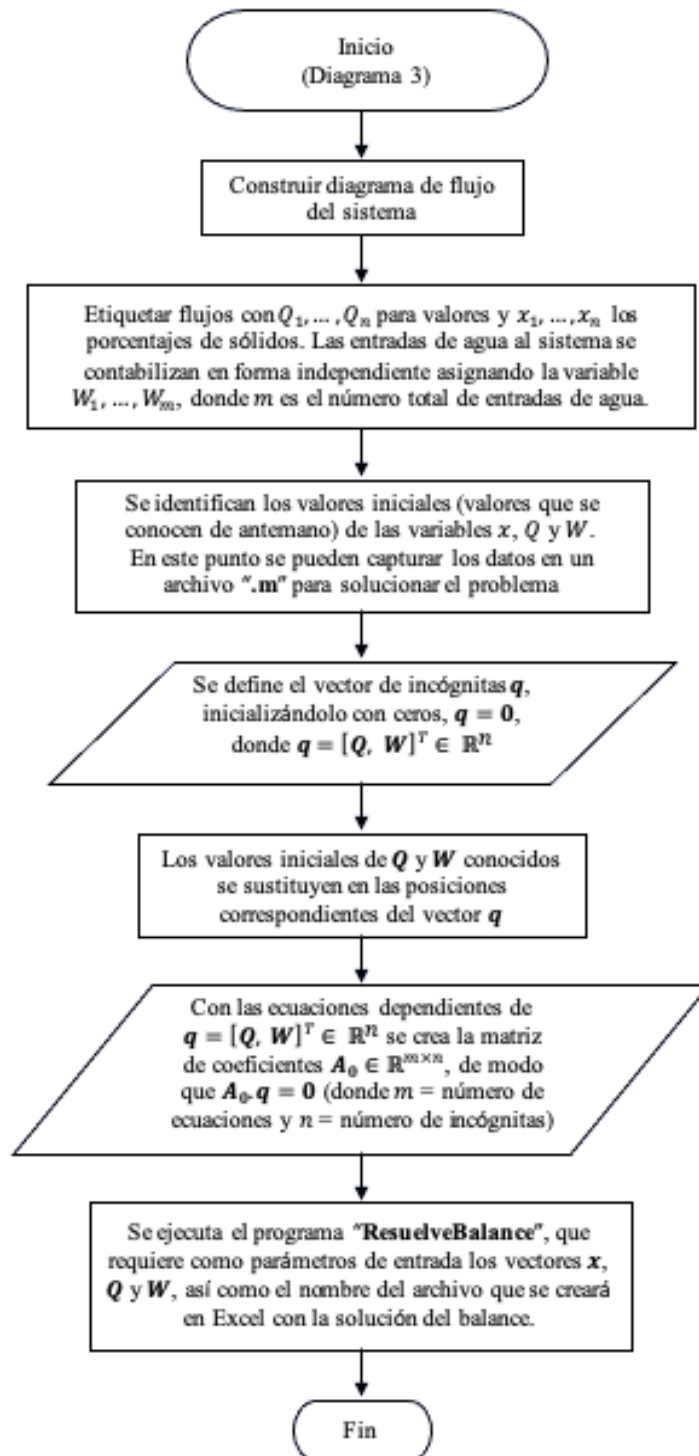
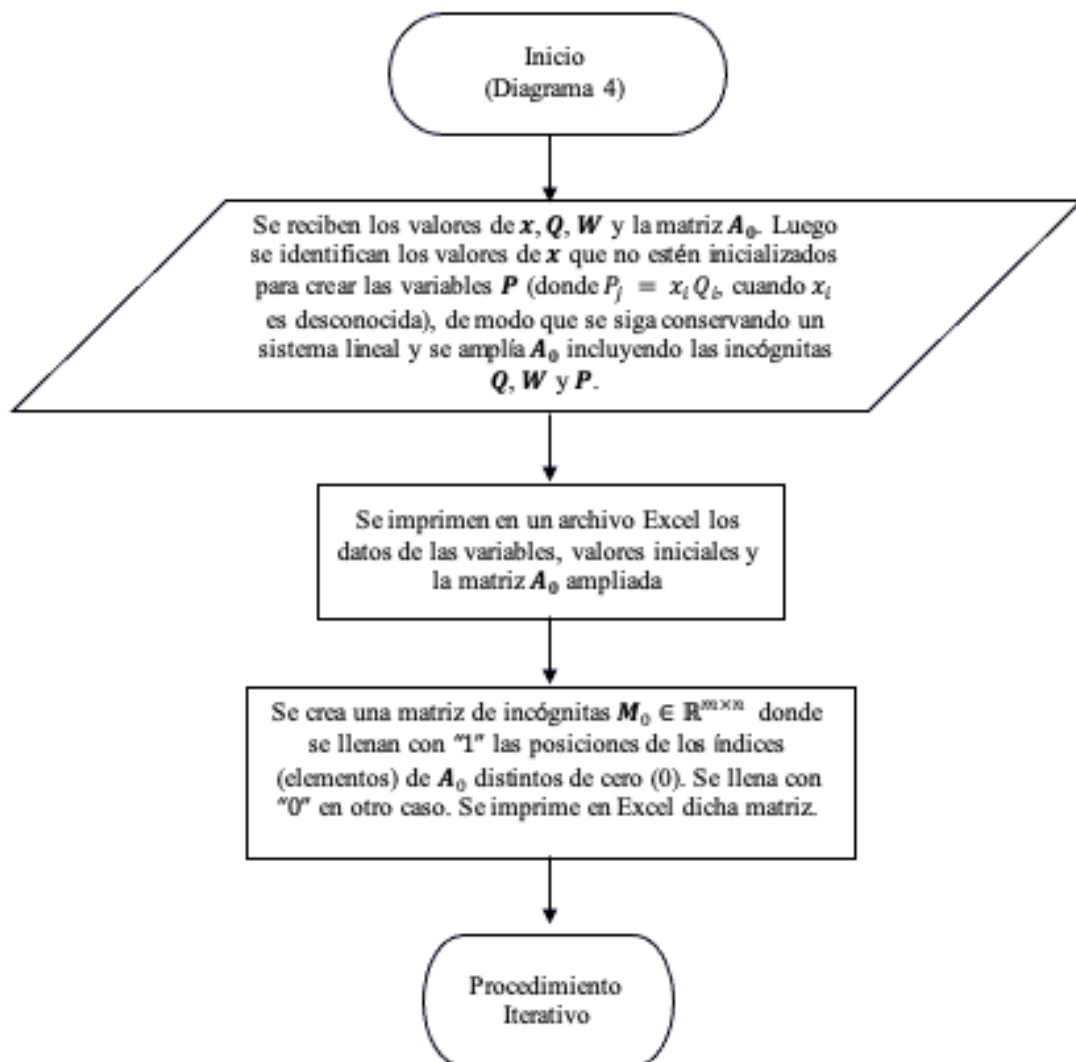


Figura 14.-Diagrama de flujo del algoritmo para resolución manual o semimanual





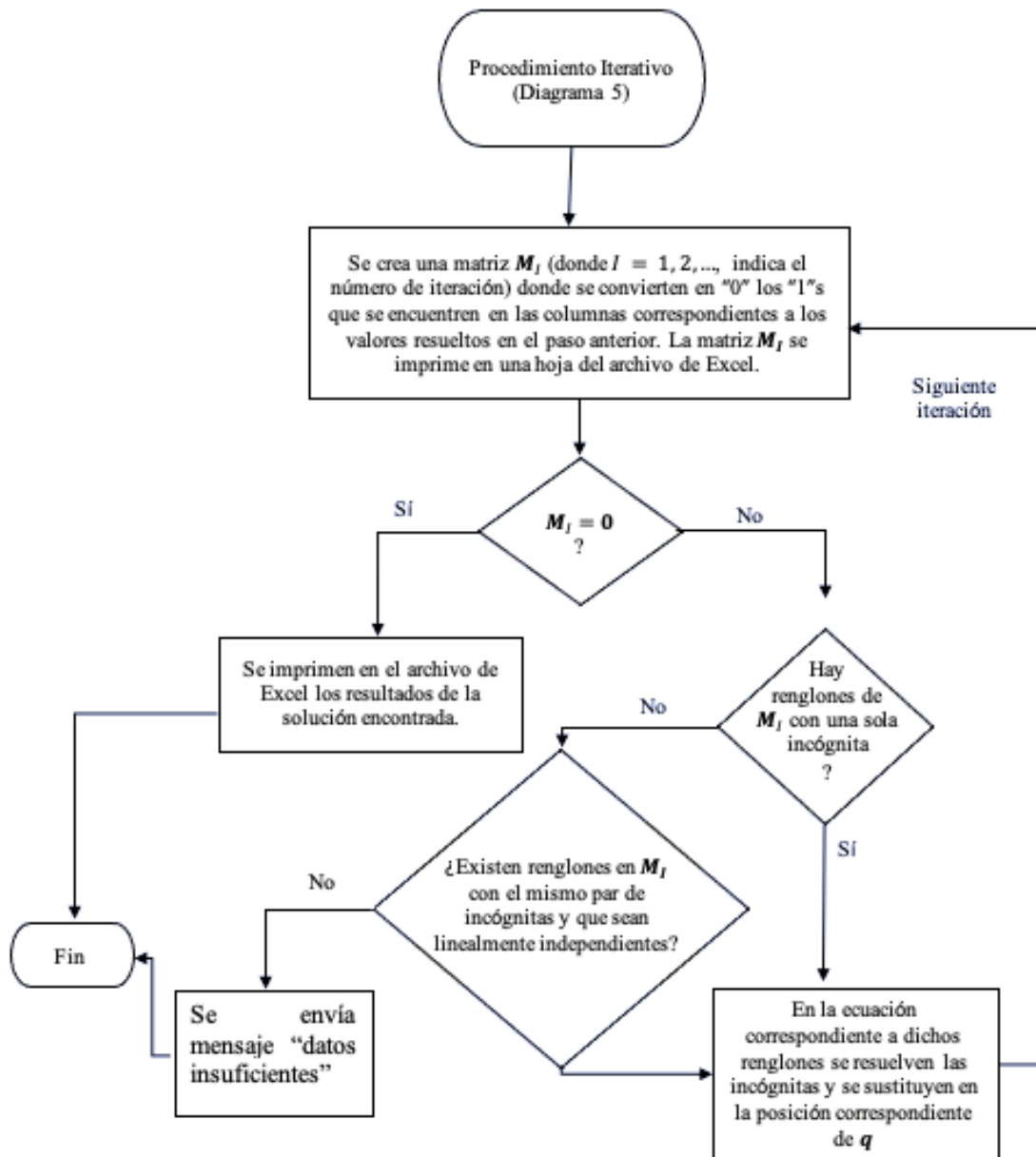


Figura 15.-Diagrama de flujo del algoritmo de resolución por medio de programa Octave 5.1.0

2.1.3 OBJETIVO 3: DETERMINAR LA CURVA DE VELOCIDAD DE ROMPIMIENTO DE MOLIENDA SAG

Mediante los siguientes procedimientos, se describe la metodología para determinar el método de iteración matricial para encontrar las funciones de selección específica y de ruptura al interior del molino SAG.

2.1.3.1 METODOLOGÍA PARA DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS MOLINO SAG

En la tabla 6, se muestra el procedimiento para determinar los parámetros de potencia del molino SAG. Los datos de dimensiones del molino, densidad, volumen y carga de mineral, pulpa y bolas, (entre otros) se requieren para determinar la potencia requerida del molino y la que corresponde parcialmente a cada elemento. Aunado a estos, los perfiles granulométricos de la alimentación y el producto del molino, son necesarios para el cálculo de los parámetros de las funciones de selección específica y ruptura (S_i^E y B_{ij}).

Tabla 6.-Metodología para determinación de parámetros de potencia del molino SAG

Parámetros de potencia del molino SAG		
Procedimiento	Datos requeridos	Variable a determinar
1.-Calcular el volumen del molino	D, L	V_{molino}
2.-Calcular volumen de carga	%carga, V_{molino}	V_{carga}
3.-Calcular volumen de bolas	%bolas, %carga,%huecos, V_{molino}	V_{bolas}
4.-Calcular volumen de mineral	V_{carga} , V_{bolas} , %huecos	V_{mineral}
5.-Calcular volumen de pulpa	V_{carga} , V_{bolas} , V_{mineral}	V_{pulpa}
6.-Calcular carga de bolas	V_{bolas} , ρ_{bolas}	C_{bolas}
7.-Calcular carga de mineral	V_{mineral} , ρ_{mineral}	C_{mineral}
8.-Calcular carga de pulpa	V_{pulpa} , ρ_{pulpa}	C_{pulpa}
9.-Calcular densidad aparente	C_{bolas} , C_{mineral} , C_{pulpa} , V_{carga}	ρ_{aparente}
10.-Calcular potencia neta	P_{bruta} , %pérdida	P_{neta}

11.-Calcular potencia de bolas (se utiliza en S_i^E bolas)	$P_{neta}, V_{bolas}, V_{carga}$	P_{bolas}
12.-Calcular potencia de mineral (se utiliza en S_i^E mineral)	$P_{neta}, V_{mineral}, V_{carga}$	$P_{mineral}$
13.-Calcular potencia de pulpa(se utiliza en S_i^E pulpa)	$P_{neta}, V_{bolas}, V_{pulpa}$	P_{pulpa}
14.-Calcular potencia unitaria	P_{unit}, Q_4	P_{unit}

2.1.3.2 METODOLOGÍA PARA DETERMINACIÓN DE CURVA DE VELOCIDAD DE ROMPIMIENTO

Se describe a continuación el procedimiento realizado para la obtención de los parámetros de la función de Selección Específica de Molienda SAG, mediante hoja de cálculo de Moly-Cop Tools.

El archivo “*SAGParam_Open de Moly-Cop Tools*” permite la estimación de parámetros de molienda SAG a partir de información de datos obtenidos del muestreo por medio de un algoritmo en base a un criterio de mínimos cuadrados no lineales que proporcionan las diez hojas de cálculo adjuntas. De esta forma, permite calcular condiciones de operación del molino SAG, obtener la *función de Selección Específica (S_i)* y la función de *Fractura (B_{ij})*.

En la hoja *Data_File* se ingresan los datos de dimensiones del molino y condiciones de operación obtenidas durante el muestreo y los resultados de análisis granulométricos de las diferentes corrientes (alimentación, producto, pebbles, etc.). En la hoja *Control_Panel* se proponen valores iniciales para los parámetros de las funciones de Selección Específica y fractura, y a través de la herramienta *Solver* se minimiza la función objetivo.

Se llevan a cabo diversas iteraciones para encontrar el mejor valor de ajuste para cada parámetro y después se promedian, ingresando como nuevo valor inicial de iteración, el promedio de los anteriores.

Como resultado, esta hoja entregó un gráfico con los análisis granulométricos de alimentación molino y de descarga molino (operacional y simulada), además de los parámetros y la curva de la función de selección específica.

Adicionalmente a los cálculos hechos por las hojas de Moly Cop Tools, se tomaron los datos de S_i^E individuales de rompimiento bolas-mineral, mineral-mineral y autorompimiento, para analizar más a fondo la contribución de cada uno en la curva de rompimiento.

2.1.4. OBJETIVO 4: DETERMINAR EL TAMAÑO CRÍTICO DE PARTÍCULA EN BASE A LA CURVA DE VELOCIDAD DE ROMPIMIENTO

Como penúltimo objetivo y tema de esta tesis, se localiza en la curva de velocidad de ruptura, el valle que se genera en la interacción de las curvas debidas a los diferentes fenómenos de ruptura (mineral-mineral, bola-mineral y autoruptura) y de las cuales en el procedimiento anterior, se obtuvo dicha curva. La lectura del tamaño de partícula en que se produce la disminución drástica de la fractura, se analizará con datos de la operación previa a la instalación de la quebradora auxiliar, contra los obtenidos ya con este equipo funcionando.

La metodología para la obtención de la curva de rompimiento se basa en el retrocálculo de los parámetros S_i^E y b_{ij} . Mediante el modelo matricial abordado en el apartado 1.2.1.3. En éste, se relaciona la distribución granulométrica de la alimentación y del producto del molino con los parámetros de función de selección específica (S_i^E) y de quebrado (b_{ij}).

Para ello es necesario hacer el ajuste de las distribuciones granulométricas de la alimentación y el producto mediante iteraciones que conduzcan a un valor mínimo de la función objetivo. La función objetivo se establece en la sumatoria del cuadrado de la diferencia de valores fraccionarios de cada rango de la distribución de tamaño entre el valor

experimental y el ajustado. El valor ajustado se calcula precisamente mediante el algoritmo matricial, el cual requiere que se alimenten valores iniciales de α_{mineral} , α_{bolas} y $\alpha_{\text{autorruptura}}$, así como β_0, β_1 y β_2 . Dichos parámetros son factibles de modificarse en cada iteración. Se llevan a cabo n iteraciones, las cuales conduzcan al valor mínimo de la función objetivo. Con los datos alimentados de diseño, operación y potencia del molino, explicados en la sección 1.2.2.3 y 2.1.3.1, se puede calcular la contribución específica de cada tipo de ruptura a la función de selección específica total (S_i^E) y construir las gráficas de S_i^E vs. D_i^* . La gráfica tendrá mayor validez entre mejor ajuste haya entre la distribución granulométrica experimental y ajustada tanto de la alimentación como del producto del molino. Es interesante además obtener las gráficas individuales $S_i^E_{\text{bolas}}$ vs. D_i^* , $S_i^E_{\text{mineral}}$ vs. D_i^* y $S_i^E_{\text{autorruptura}}$ vs. D_i^* , pues es un buen indicativo de en qué tamaño de partícula deja de ser significativo un tipo de rompimiento u otro. Es precisamente esta interacción de las gráficas individuales, quien da lugar a la formación del valle de energía, que nos indica el tamaño crítico (aquel en que desciende al mínimo la ruptura del mineral). Un resumen de los procedimientos mencionados se observa en la tabla 7.

Tabla 7.-Metodología para determinación y ajuste de curva de velocidad de rompimiento

Curva de velocidad de rompimiento, tamaño crítico de partícula		
Variable a determinar	Datos requeridos	Proceso
d_i, F_{80}, P_{80}	Análisis granulométricos de alimentación y producto de molino SAG	1.-Obtener curvas de distribución de tamaño de partícula, F_{80} y P_{80} molino SAG
$S_i^E_{\text{bolas}}, S_i^E_{\text{mineral}}, S_i^E_{\text{autorrompimiento}}, S_i^E_{\text{total}}$	$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ de las bolas, del mineral y de autorrompimiento, $\beta_0, \beta_1, \beta_2$	2.-Obtener curva de velocidad de fractura al graficar S_i^E vs. D_i
Tamaño crítico de partícula	Curva de velocidad de rompimiento	3.Determinar el tamaño crítico de partícula en el valle que se forma en la curva de velocidad de rompimiento

2.1.5. OBJETIVO 5: EVALUAR LAS VARIACIONES EN EL RENDIMIENTO DEL MOLINO EN BASE AL TAMAÑO CRÍTICO DE PARTÍCULA DETERMINADO

En este objetivo específico, que es el final, habiendo demostrado que es posible obtener el tamaño crítico de la partícula, se buscará analizar las repercusiones de conocer el valor del mismo, como criterio para evaluación de la parrilla interna de clasificación del molino (tamaño, forma de aberturas o porcentaje de área abierta), así como de la criba de pebbles. Ya que durante la realización de esta tesis, hubo una modificación del proceso al agregarse una quebradora auxiliar para la recirculación al molino SAG, se sugiere también determinar si la quebradora modificó el tamaño crítico del sistema.

III. RESULTADOS DE LA METODOLOGÍA PARA DETERMINAR EL TAMAÑO CRÍTICO EN LA MOLIENDA SAG EN PLANTA VELARDEÑA

3.1 GENERALIDADES DE UNIDAD MINERA VELARDEÑA, GRUPO PEÑOLES (CASO DE ESTUDIO)

Minera Roble SA de CV, conocida como Unidad Minera Velardeña, inicia el desarrollo de Proyectos de exploración, explotación, beneficio y venta de minerales metálicos en el 2007, es una empresa subsidiaria del grupo Industrias Peñoles. En 2013 inicia los trabajos de extracción de plata, plomo y zinc.

El Distrito Minero de Velardeña se localiza en la porción oriental del Estado Durango, en el municipio de Cuencamé, Durango, a 120 kilómetros. de la ciudad de Torreón Coahuila, México (figura 16).

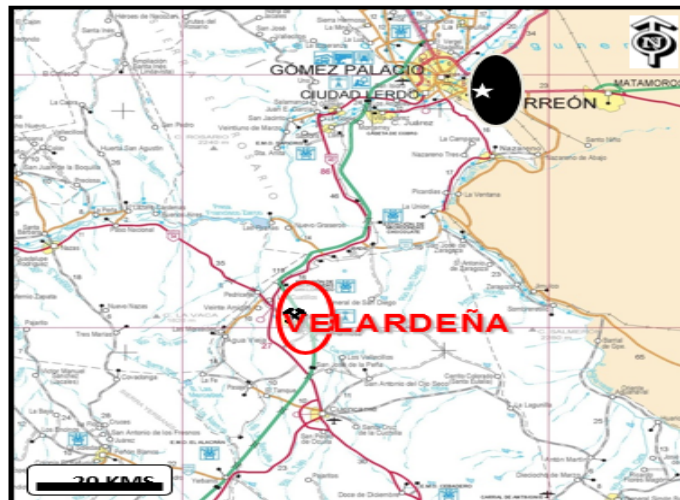


Figura 16.-Ubicación geográfica Velardeña, Dgo.

Como la segunda productora de zinc más importante del país, se ubica la minera Roble de la Unidad Velardeña de Grupo Peñoles, la cual además se destaca por contar con el 80 por ciento de automatización en su operación. La tabla 8 muestra la producción de la Unidad Velardeña desde su reapertura en 2013 al primer trimestre de 2021 Producción Minera Velardeña, Dgo. (Peñoles 2013-primer trimestre 2021).

Tabla 8.-Producción minera Unidad Velardeña, Dgo. (Peñoles 2013-primer trimestre 2021)

MINERA VELARDEÑA, S.A. DE C.V. Production-Producción		2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	1Q 2021
Ore Milled-Mineral Molido	Mton	1,159,645	2,002,864	2,023,650	2,048,534	2,106,589	2,176,068	2,440,516	2,687,688	686,727
Metal Contents-Contenidos metálicos										
Gold-Oro	kg	59	169	162	139	126	160	155	148	53
Silver-Plata	kg	11,391	25,855	22,885	18,021	21,484	26,130	27,694	25,297	6,423
Lead-Plomo	Ton	1,761	4,144	3,170	3,568	4,217	5,118	5,257	4,450	1,166
Zinc	Ton	41,197	83,968	80,538	85,810	80,728	78,345	82,482	85,902	21,676
Copper-Cobre	Ton	687	1,573	1,862	1,517	1,706	2,310	2,498	3,042	753

Cuenta con instalaciones de vanguardia en materia de tecnología y sustentabilidad, ya que utiliza celdas solares, iluminación LED, además de plantas tratadoras de agua. Consta de una mina subterránea y planta de beneficio (Figura 17).



Figura 17.-Vista, Unidad Minera Velardeña, Dgo.

3.2 CARACTERIZACIÓN DE CIRCUITO DE MOLIENDA VELARDEÑA

En la figura 18 se puede observar la configuración del circuito de molienda de Unidad Minera Velardeña.

Se mencionará el número de flujo de la corriente en cuestión, entre paréntesis, para hacer referencia al diagrama de la figura 18. El circuito es alimentado por la salida de una quebradora primaria de quijadas a través de una banda transportadora (1). Consta de un molino SAG que es alimentado por un cajón donde se unen la alimentación fresca proveniente de la quebradora primaria, la recirculación de una criba de “pebbles” y agua de dilución. La criba de pebbles es el control de salida del circuito de molienda SAG, los pebbles se recirculan al molino SAG (2), pasando antes por una quebradora auxiliar, cuya finalidad es reducir el tamaño de partícula a un tamaño menor que el valor “crítico”. Los finos de la criba pebbles pasan a un cajón de dilución donde se bombean a una batería de hidrociclones(7). Los finos de la batería de hidrociclones SAG pasan al circuito de flotación y los gruesos (9), se mezclan en el cajón de alimentación con la carga circulante de la batería de hidrociclones del molino de bolas (14), para entrar al molino de bolas. A la salida, un cajón repulpador alimenta la batería de hidrociclones del molino de bolas (12). Los finos de esta batería se unen a los finos de los hidrociclones SAG y forman la alimentación del circuito de flotación (15). Las corrientes del circuito se enlistaron previamente en la tabla 4.

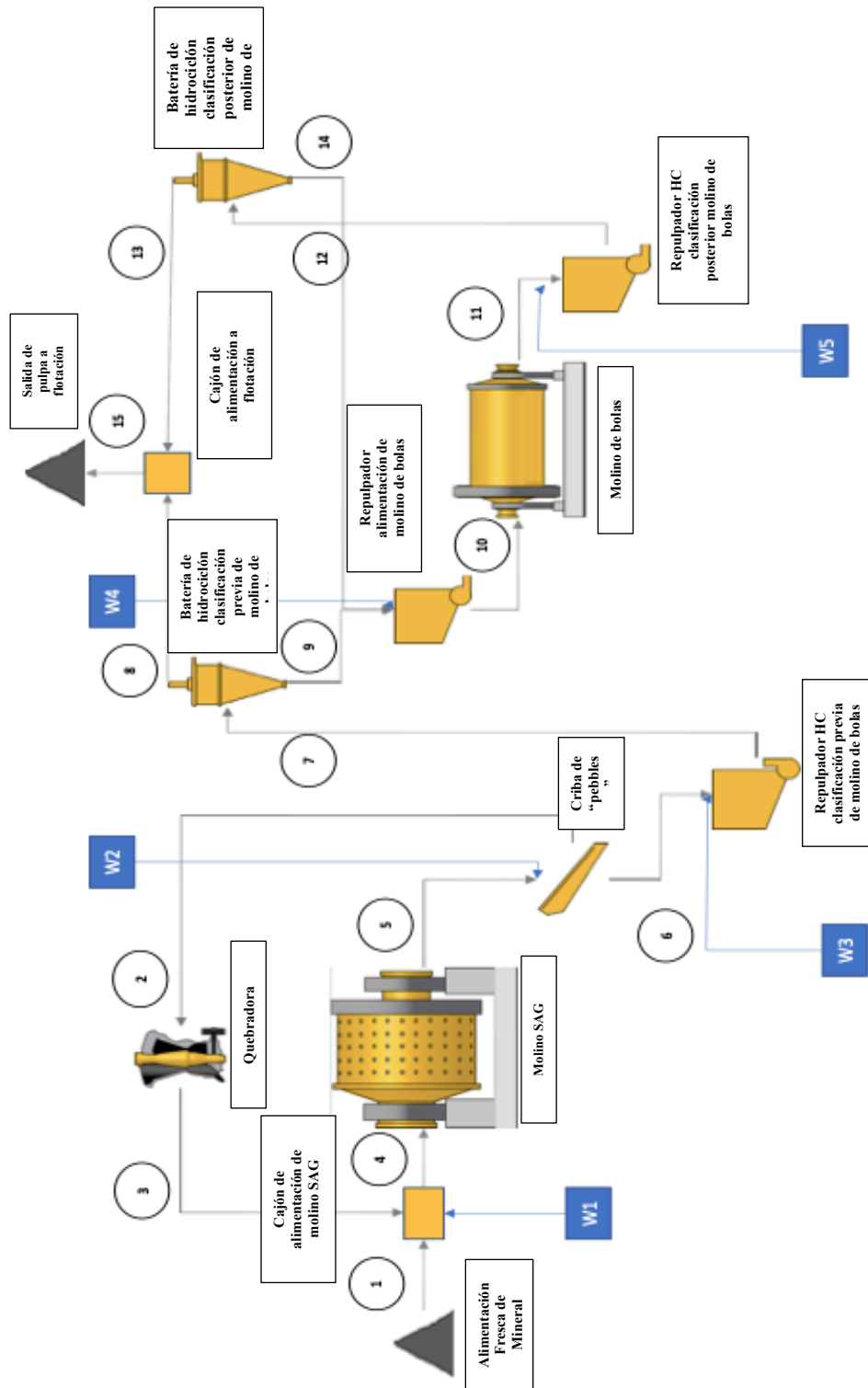


Figura 18.-Diagrama de circuito de molienda SAG-Bolas Unidad Velardeña

La planta cuenta con una capacidad de procesamiento de 6000 toneladas por día. Se beneficia mineral polimetálico con contenidos de sulfuros de zinc, plomo, cobre y plata mediante un proceso de concentración por flotación. El circuito de reducción de tamaño tiene como objetivo la liberación de contenidos valor mediante molienda en serie SAG-bolas en circuito cerrado. El F_{80} a la entrada del circuito es de 125 mm aproximadamente y el P_{80} a la salida del circuito de molienda para flotación (15), es de 45 a 50 micrómetros. La clasificación de la molienda SAG es gradual, se presenta una primera clasificación mediante la parrilla interna del molino, después hay una criba de pebbles, los cuales recirculan al molino SAG (2), en tiempo reciente, se instaló una quebradora auxiliar para tratar los pebbles, mientras que la pulpa que salió del circuito SAG (6 y 7), se clasifica en una batería de hidrociclones. El material retenido en la criba de pebbles tiene un K_{80} de 20 mm (2).

La pulpa que sale del molino SAG (5) tiene un d_{80} de 500 micrómetros. Pasa por la criba de pebbles y cae en un cajón de alimentación, donde si es necesario se diluye y homogeneiza, para alimentar una batería de hidrociclones que es la entrada al circuito de molienda de bolas. El sobreflujo de esta batería de hidrociclones (8), sale del proceso hacia flotación; el bajoflujo del hidrociclón (9), se combina en un cajón con el bajoflujo del clasificador del efluente del molino de bolas (14). Este flujo combinado es la alimentación del molino de bolas. El F_{80} del molino de bolas es de 212 micrómetros. El efluente del molino de bolas se clasifica finalmente en otra batería de hidrociclones y el sobreflujo sale del proceso (13), como se muestra en la figura 18.

El molino SAG es de 26' de diámetro por 12' de largo, la potencia operativa es de 3700 Kw, trabaja generalmente a una fracción de velocidad crítica del 80%. Procesa un promedio de 285 ton h^{-1} . La parrilla clasifica a $\pm 2''$ de tamaño. (Figura 19).



Figura 19.- Vistas de molino SAG y molino de bolas Unidad Velardeña, Dgo.

El mineral de cabeza tiene una ley aproximada de 6.29% de Zn, 0.41% de Pb, 0.54% de Cu, 14% de Fe y 1.64% de As, y tiene diferentes especies minerales como se muestran en la Tabla 9.

Tabla 9.-Composición mineralógica de cabeza general, concentrado de Pb, concentrado de Cu, concentrado de Zn y cola final de planta Velardeña, Dgo.

Grupo	Mineral	Densidad	Fórmula	Composición Mineralógica (%Peso)				
				Cab Gral	Conc Pb	Conc Cu	Conc Zn	Cola Final
Sulfuros	Galena	7.4	PbS	0.41	68.01	2.87	0.43	0.08
	Boulangerita	6.0	Pb ₅ Sb ₄ S ₁₃	0.00	0.73	0.02	0.00	0.00
	Esfalerita	4.0	Zn _{0.82} Fe _{0.18} S *	6.29	3.56	10.96	85.74	0.98
	Calcopirita	4.2	CuFeS ₂	0.54	8.53	74.29	1.91	0.10
	Calcocita	5.6	Cu ₂ S	< 0.01	0.02	0.04	-	< 0.01
	Tenantita	4.6	(Cu _{0.8} Fe _{0.1} Zn _{0.1}) ₁₂ (Sb _{0.8} As _{0.2}) ₄ S ₁₃ *	< 0.01	< 0.01	0.02	-	-
	Tetradimita	8.1	Bi ₂ Te ₂ S	< 0.01	2.16	0.09	0.02	< 0.01
	Pirita	4.9	FeS ₂	5.87	5.95	2.29	0.70	6.61
	Pirrotita	5.0	FeS	6.19	0.97	2.27	2.63	9.24
Arsenopirita	4.6	FeAsS	1.64	2.82	0.91	0.42	1.75	
Especies de Ag	Freibergita	4.9	(Ag _{0.3} Cu _{0.6} Fe _{0.1}) ₁₂ (Sb _{0.8} As _{0.2}) ₄ S ₁₃ *	< 0.01	0.79	0.05	-	-
	Pirargirita	5.9	Ag ₃ SbS ₃	< 0.01	0.06	0.02	-	-
	Argentita	6.0	Ag ₂ S	< 0.01	0.04	< 0.01	-	-
Gangas y especies de óxidos	Grosularita	3.6	Ca ₃ Al ₂ Si ₃ O ₁₂	22.33	0.65	1.28	2.36	22.62
	Andradita	3.9	Ca ₃ Fe ₂ Al(SiO ₄) ₃	20.77	0.45	1.25	1.79	21.82
	Calcita	2.7	Ca(CO ₃)	8.61	1.11	0.62	0.25	9.27
	Ortoclasa	2.7	K(AlSi ₃ O ₈)	5.89	0.52	0.38	0.35	5.55
	Cuarzo	2.7	SiO ₂	4.60	0.62	0.33	0.62	4.77
	Diopsido	3.4	CaMgSi ₂ O ₆	7.82	0.29	0.56	0.64	7.85
	Augita	3.4	(Ca,Mg,Fe) ₂ (Si,Al)2O ₆	3.49	0.09	0.59	0.97	3.65
	Ox_Fe	5.2	Fe _x O _y	1.22	0.80	0.22	0.21	1.21
	Albita	2.7	Na(AlSi ₃ O ₈)	0.77	0.02	0.19	0.12	0.98
	Biotita	3.1	K(Mg, Fe) ₃ AlSi ₃ O ₁₀ (OH,F) ₂	0.97	0.30	0.26	0.33	0.94
	Muscovita	2.8	KAl ₂ (Si ₂ Al)O ₁₀ (OH) ₂	0.48	0.18	0.03	0.14	0.54
	Wollastonita	2.8	CaSiO ₃	0.22	0.00	0.01	0.01	0.20
	Fluorita	3.1	CaF ₂	0.53	0.10	0.03	0.01	0.44
	Titanita	3.6	CaTiSiO ₅	0.20	0.01	0.04	0.03	0.17
	Ankerita	3.0	Ca(Mg,Fe)(CO ₃) ₂	0.16	0.07	0.00	0.00	0.19
	Dolomita	2.8	CaMg(CO ₃) ₂	0.16	0.05	0.02	0.00	0.20
	Apatito	3.1	Ca ₅ (PO ₄) ₃ (OH)	0.20	0.03	0.03	0.02	0.21
	Willemita	4.0	Zn ₂ SiO ₄	0.01	0.00	0.00	0.04	0.009
Otros	-	-	0.63	0.96	0.34	0.26	0.58	

* Fórmula aproximada

3.2.1 PARÁMETROS DE MOLINO SAG (DIMENSIONES Y CONDICIONES DE OPERACIÓN) Y PORCENTAJE DE SÓLIDOS DE CORRIENTES MUESTREADAS

La tabla 10 muestra las condiciones existentes en el momento del muestreo. El diagrama de flujo del circuito de molienda que se muestra en la figura 18 muestra los puntos de muestreo numerados que aparecen en la tabla 10, para referenciar las corrientes muestreadas y su porcentaje de sólidos. Conocer dichas condiciones es necesario para la determinación de la curva de rompimiento. Las variables de operación se tomaron directamente del cuarto de control. La única corriente conocida es la alimentación fresca al molino SAG, el resto de los flujos se determinarán mediante el balance del sistema. Los porcentajes de sólidos se determinaron mediante la marcha de determinación de sólidos que se explica en los anexos C y D.

Tabla 10.-Variables de diseño y operación y flujos másicos de circuito de molienda

Tabla de datos obtenidos de muestreo					
Unidad de muestreo:	Velardeña Grupo Peñoles				
Fecha:	19 de abril de 2019				
Molino:	SAG				
Dimensiones			Operación		
Diámetro de molino	26	ft	Potencia instalada:	3700	Kw
Longitud de molino	12	ft	Potencia de operación	3291	Kw
Abertura de la parrilla:	50.3	mm	% de velocidad crítica	80	%
Abertura de la criba	3	mm	% de carga	28	%
			% de llenado de bolas	11	%

Punto	Descripción	Corriente (t/h)		% sólidos	
1	Alimentación fresca molino SAG	Q1	300	x1	98.6
2	Pebbles	Q2	?	x2	99.0
3	Descarga quebradora pebbles	Q3	?	x3	99.0
4	Alimentación Total SAG	Q4	?	x4	?
5	Descarga molino SAG	Q5	?	x5	78.8
6	Finos criba SAG	Q6	?	x6	?
7	Alimentación ciclones SAG	Q7	?	x7	57.0
8	Finos ciclones SAG	Q8	?	x8	25.6
9	Gruesos ciclones SAG	Q9	?	x9	77.8
10	Alimentación MB	Q10	?	x10	?
11	Descarga molino de bolas	Q11	?	x11	76.8
12	Alimentación ciclones MB	Q12	?	x12	66.3
13	Finos ciclones MB	Q13	?	x13	43.0
14	Gruesos ciclones MB	Q14	?	x14	78.7
15	Finos a flotación	Q15	?	x15	?
	Agua cajón de alimentación SAG	W1	?		
	Agua criba SAG	W2	?		
	Agua cajón ciclón SAG	W3	?		
	Agua cajón de alimentación MB	W4	?		
	Agua cajón de alimentación ciclón S.	W5	?		

3.2.2 DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑO DE PARTÍCULAS DE CORRIENTES DE MUESTREO CIRCUITO DE MOLIENDA VELARDEÑA

Realizando el análisis granulométrico de cada punto de muestreo se obtienen los resultados que se muestran en la tabla 11. Los datos aquí recopilados se analizaron mediante la técnica explicada en el anexo E. La distribución de tamaño de partícula de la alimentación al molino SAG y descarga del mismo, son datos fundamentales para la construcción de la curva de rompimiento.

Tabla 11.- Distribución de tamaño de partícula de corrientes de muestreo circuito de molienda Unidad Velardeña

MUESTREO CIRCUITO MOLIENDA SAG-VELARDEÑA 4 ABRIL 2019														
Tamaño (malla)		CIRCUITO MOLINO SAG							CIRCUITO MOLINO DE BOLAS					
		Q4. Alim molino SAG	Q2 Pebbles molino SAG	Q3 Desc queb pebbles	Q5. Descarga molino SAG	Q7 Alim ciclón SAG	Q9 Gruesos ciclón SAG	Q8 Finos ciclón SAG	Q10 Alim molino bolas	Q11 Descarga molino bolas	Q12. Alim ciclón MB	Q14 Gruesos ciclón MB	Q15 Finos ciclón MB	
		% Acumulado (-)							% Acumulado (-)					
-6"	152,400	97.25	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
-4"	101,600	82.16	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
-3"	76,200	71.92	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
-2"	50,800	54.53	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
-1 1/2"	38,100	46.01	96.33	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
-1"	25,400	35.06	69.61	100.00	96.36	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
-3/4"	19,050	30.21	54.89	100.00	94.13	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
-1/2"	12,700	23.87	37.55	100.00	90.49	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
-3/8"	9,525	20.82	28.83	100.00	87.86	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
-1/4"	6,350	15.48	4.83	100.00	80.77	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
-4	4,699	15.22	3.95	93.90	79.84	99.77	99.81	100.00	100.00	99.81	99.69	99.71	99.78	100.00
-6	3,327	13.05	0.46	66.61	75.58	97.72	97.25	100.00	100.00	97.25	98.78	98.87	98.70	99.94
-8	2,360	11.32	0.27	51.27	71.52	94.56	93.60	100.00	100.00	93.60	97.65	97.73	97.24	99.83
-14	1,400	9.16	0.17	35.16	65.17	88.69	86.77	99.94	99.94	86.77	96.16	96.13	95.11	99.64
-20	850	7.66	0.11	25.42	59.21	81.72	78.94	99.85	99.85	78.94	94.82	94.44	92.96	99.49
-30	595	6.83	0.09	20.17	54.39	75.92	72.26	99.79	99.79	72.26	93.30	92.74	90.86	99.41
-40	425	6.15	0.07	16.53	49.68	69.61	64.88	99.75	99.75	64.88	91.42	90.55	88.25	99.35
-50	300	5.54	0.06	13.64	44.82	62.76	56.57	99.71	99.71	56.57	88.51	87.69	85.03	99.29
-70	212	4.99	0.04	11.16	39.50	55.67	47.95	99.68	99.68	47.95	84.09	83.48	79.76	99.17
-100	150	4.48	0.04	9.39	35.03	49.05	39.79	99.65	99.65	39.79	78.16	77.08	71.76	98.50
-150	106	3.98	0.03	7.79	30.67	42.77	31.99	99.55	99.55	31.99	68.59	66.92	59.76	95.12
-200	75	3.59	0.02	6.35	26.48	37.46	24.98	99.08	99.08	24.98	54.08	53.06	45.53	87.86
-270	53	3.02	0.00	5.12	22.56	31.50	17.89	97.20	97.20	17.89	40.73	37.19	28.41	75.89
-325	45	2.80	0.00	4.34	21.05	29.04	15.32	95.17	95.17	15.32	35.95	31.56	22.28	69.50
-400	38	2.56	0.00	3.15	19.50	26.46	12.75	91.21	91.21	12.75	31.01	25.19	16.46	60.50
-450	32	2.42	0.00	1.05	17.03	25.08	11.04	86.30	86.30	11.04	23.61	22.22	13.07	54.49
-500	25	2.10	0.00	0.51	15.38	21.23	8.55	79.66	79.66	8.55	19.36	16.38	9.39	46.74

3.3 BALANCE METALÚRGICO DEL CIRCUITO DE MOLIENDA

3.3.1. PLANTEAMIENTO DE SISTEMA DE ECUACIONES

La tabla 12 muestra el sistema de ecuaciones algebraicas representativas del circuito de molienda Velardeña, de acuerdo a la nomenclatura especificada en la metodología.

Tabla 12.-Sistema de ecuaciones de balance de masa circuito de molienda Velardeña, Dgo.

Sistema	Subsistema	Nodo(s) y/o equipo(s)	Número de ecuación	Balance
Molienda			1	$Q_1 + W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 = Q_{15}$
			2	$x_1 Q_1 = x_{15} Q_{15} = P_{15}$
Molienda	Molienda SAG	Nodo de alimentación a SAG, molino SAG y criba	3	$Q_1 + W_1 + W_2 = Q_6$
			4	$x_1 Q_1 = x_6 Q_6$
	Molienda de Bolas	Ciclón SAG, molino de bolas, ciclón de molino de bolas, celda flash, cajones de alimentación y nodo de salida de finos de ciclones	5	$Q_6 + W_3 + W_4 + W_5 = Q_{15}$
			6	$x_6 Q_6 = x_{15} Q_{15}$
	Molienda SAG	Nodo de alimentación a SAG	7	$Q_1 + Q_3 + W_1 = Q_4$
			8	$x_1 Q_1 + x_3 Q_3 = x_4 Q_4$
		Quebradora auxiliar SAG	9	$Q_2 = Q_3$
			10	$x_2 Q_2 = x_3 Q_3$
		Molino SAG	11	$Q_4 = Q_5$
			12	$x_4 Q_4 = x_5 Q_5$
	Molienda de Bolas	Criba SAG	13	$Q_5 + W_2 = Q_2 + Q_6$
			14	$x_5 Q_5 = x_2 Q_2 + x_6 Q_6$
		Nodo antes de alimentación ciclón SAG	15	$Q_6 + W_3 = Q_7$
			16	$x_6 Q_6 = x_7 Q_7$
		Ciclón SAG	17	$Q_7 = Q_8 + Q_9$
			18	$x_7 Q_7 = x_8 Q_8 + x_9 Q_9$
		Cajón de alimentación a molino de bolas	19	$Q_9 + Q_{14} + W_4 = Q_{10}$
			20	$x_9 Q_9 + x_{14} Q_{14} = x_{10} Q_{10}$
		Molino de bolas	21	$Q_{10} = Q_{11}$
			22	$x_{10} Q_{10} = x_{11} Q_{11}$

	Nodo antes de alimentación ciclón de molino de bolas	23	$Q_{11}+W_5=Q_{12}$
		24	$x_{11}Q_{11}=x_{12}Q_{12}$
	Ciclón de molino de bolas	25	$Q_{12}=Q_{13}+Q_{14}$
		26	$x_{12}Q_{12}=x_{13}Q_{13}+x_{14}Q_{14}$
	Nodo de finos de ciclones	27	$Q_8+Q_{13}=Q_{15}$
		28	$x_8Q_8+x_{13}Q_{13}=x_{15}Q_{15}=P_{15}$

3.3.2 COMPARACIÓN DE RESOLUCIÓN OBTENIDA POR MÉTODO DETERMINADO POR EL USUARIO (“SEMIMANUAL”) Y MÉTODO PROGRAMADO (OCTAVE 5.1.0)

El término “semimanual” se refiere al proceso de resolución de balance en que la persona a cargo interviene en gran parte del mismo, ayudado por herramientas que facilitan las operaciones matemáticas en una hoja de cálculo programada por el mismo, pero el planteamiento de las ecuaciones, la determinación de grados de libertad del sistema, el despeje y resolución de los sistemas y la creación de la tabla que apoya la construcción de la secuencia de la resolución, la tiene que hacer el mismo. Podría decirse que solo es apoyado en la parte matemática, por la hoja de cálculo. A diferencia de la resolución por el lenguaje de programación en el que, si bien se alimentan datos de entrada, la secuencia de resolución y la resolución misma, ya sea en un paso o secuenciada, ya está implícita en la programación.

Ambos procedimientos se deben validar al momento de obtener los mismos resultados para los valores a calcular de las corrientes de sólidos, pulpa o agua. La ventaja del método “semimanual” es que el usuario es más consciente en la selección de la secuencia, pues en ciertos momentos de la misma, debe tomar la decisión de que ecuación es la siguiente a resolver, e ir haciendo los despejes de las ecuaciones y los cálculos matemáticos, aunque en este paso, se puede apoyar de alguna herramienta como calculadora u hoja de cálculo. La desventaja de este método, es el tiempo empleado en la resolución y el posible error introducido por el proceso humano. Por otra parte, el método del lenguaje de programación, ofrece ventajas de tiempos menores de resolución, confiabilidad en los resultados; la

desventaja, es solamente no tener tanta intervención en las decisiones de secuencia, si así se quisiera.

3.3.2.1 COMPARACIÓN DE MATRICES INICIALES DE ALGORITMO “SEMIMANUAL” Y ALGORITMO POR LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN (OCTAVE 5.1.0)

Las matrices formadas para la obtención de la secuencia son similares, en el método “semimanual”, el usuario debe ir creando las matrices. La matriz inicial contiene en la primera columna del lado izquierdo, todas las ecuaciones, agrupadas por sistema y numeradas. El primer renglón es el listado de incógnitas y la última columna es la sumatoria del número de incógnitas por ecuación. El último renglón es la sumatoria de cuántas veces aparece la incógnita en todo el sistema de ecuaciones. La matriz se llena con el cruce del renglón de ecuación con la columna de incógnita. Es decir, si esa incógnita aparece en esa ecuación, en la intersección renglón-columna, se pone el número “1”. Es así que en la última columna se puede hacer la sumatoria de incógnitas por ecuación. En la Tabla 13, se puede observar la matriz inicial M_0 . La desventaja es que el usuario, debe estar replicando las matrices, borrando en las matrices subsecuentes las incógnitas ya resueltas y marcando en cada matriz, la combinación incógnita(s)-ecuación(es) seleccionada. Estas matrices se pueden ver en el anexo F

Tabla 13.-Matriz inicial de método "semimanual"

Número de ecuación	Balance	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	X15	w1	w2	w3	w4	w5	Suma	
1	$Q1+W1+W2+W3+W4+W5=Q15$													1		1	1	1	1	1	6
2	$x1Q1=x15Q15$													1	1						2
3	$Q1+W1+W2=Q6$			1												1	1				3
4	$x1Q1=x6Q6$			1																	1
5	$Q6+W3+W4+W5=Q15$			1									1					1	1	1	5
6	$x6Q6=x15Q15$			1									1	1							3
7	$Q1+Q3+W1=Q4$	1														1					2
8	$x1Q1+x3Q3=x4Q4$	1																			1
9	$Q2=Q3$																				0
10	$x2Q2=x3Q3$																				0
11	$Q4=Q5$	1	1																		2
12	$x4Q4=x5Q5$	1	1																		2
13	$Q5+W2=Q2+Q6$			1	1												1				3
14	$x5Q5=x2Q2+x6Q6$			1	1																2
15	$Q6+W3=Q7$			1	1													1			3
16	$x6Q6=x7Q7$			1	1																2
17	$Q7=Q8+Q9$					1	1	1													3
18	$x7Q7=x8Q8+x9Q9$					1	1	1													3
19	$Q9+Q14+W4=Q10$							1	1				1						1		4
20	$x9Q9+x14Q14=x10Q10$							1	1				1								3
21	$Q10=Q11$								1	1											2
22	$x10Q10=x11Q11$								1	1											2
23	$Q11+W5=Q12$									1	1										3
24	$x11Q11=x12Q12$									1	1										2
25	$Q12=Q13+Q14$										1	1	1								3
26	$x12Q12=x13Q13+x14Q14$										1	1	1								3
27	$Q8+Q13=Q15$					1							1								3
28	$x8Q8+x13Q13=x15Q15$					1							1	1							4
	Sumatoria	4	4	8	4	4	4	4	4	4	4	4	6	3	3	3	3	3	3	3	

Las matrices generadas por el lenguaje de programación, no tienen la primera columna con el sistema de ecuaciones. Éste se presenta en un libro de excel, que se crea automáticamente por la programación. Allí al lado de cada matriz, se ven las ecuaciones y la incógnita resuelta. Incluso el texto de salida que indica que incógnitas se resuelven en cada matriz, es generado automáticamente. Tan solo corriendo el programa, se obtienen las matrices, la secuencia y la resolución, sin que el usuario tenga que intervenir. En la Tabla 14, se presenta un ejemplo de la matriz inicial, y la secuencia completa de matrices se puede revisar en el anexo G.

Tabla 14.-Matriz inicial de método de lenguaje de programación (Octave 5.1.0)

Tabla de datos de la matriz M0																						
Ec	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	W1	W2	W3	W4	W5	P1	Incog.
1	1														1	1	1	1	1	1		7
2	1																				1	2
3	1					1										1	1					4
4	1					1																2
5						1									1			1	1	1		5
6						1															1	2
7	1		1	1												1						4
8	1		1	1																		3
9		1	1																			2
10		1	1																			2
11				1	1																	2
12				1	1																	2
13		1			1	1											1					4
14		1			1	1																3
15						1	1											1				3
16						1	1															2
17							1	1	1													3
18							1	1	1													3
19									1	1				1					1			4
20									1	1				1								3
21										1	1											2
22										1	1											2
23											1	1								1		3
24											1	1										2
25												1	1	1								3
26												1	1	1								3
27								1					1		1							3
28								1					1								1	3

3.3.2.2 COMPARACIÓN DE SECUENCIA DE RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES POR MÉTODO “SEMIMANUAL” Y POR LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN (OCTAVE 5.1.0)

A continuación (Tabla 15), se presenta la secuencia de resolución obtenida mediante la metodología propuesta en el diagrama de flujo del algoritmo “semimanual” y el algoritmo por lenguaje de programación. Las matrices completas generadas, así como la explicación de la secuencia, se pueden consultar en el anexo F.

*Tabla 15.-Secuencia de resolución de procedimiento “semimanual” de balance de masa de circuito de molienda
Velardeña*

Secuencia de resolución de procedimiento semimanual		
Matriz	Incógnita	Ecuación
M ₀	Matriz inicial	
M ₁	Q ₄	8
M ₂	W ₁	7
M ₃	Q ₆	4
M ₄	W ₂	3
M ₅	Q ₅	11, 12, 13 ó 14
M ₆	Q ₇	16
M ₇	W ₃	15
M ₈	Q ₈ y Q ₉	Simultáneas entre 17 y 18
M ₉	Q ₁₃	28
M ₁₀	Q ₁₅	27
M ₁₁	X ₁₅	2
M ₁₂	Q ₁₂ , Q ₁₄	Simultáneas entre 25 y 26
M ₁₃	Q ₁₁ que es lo mismo que Q ₁₀	24
M ₁₄	W ₅	23
M ₁₅	W ₄	1
M ₁₆	Todas las incógnitas resueltas	Todas las ecuaciones resueltas

En la Tabla 16, se puede observar la secuencia obtenida automáticamente por el lenguaje de programación. Las matrices generadas, así como el texto explicativo de cada una, se pueden consultar en el anexo G.

Tabla 16.-Secuencia de resolución de balance metalúrgico de Circuito de molienda SAG-Bolas mediante lenguaje de programación (Octave 5.1.0)

Secuencia de resolución de lenguaje de programación Octave 5.1.0		
Matriz	Incógnita	Ecuación
A ₀	Matriz inicial	Aún contiene las literales de xi (porcentaje de sólidos) y no contabiliza las incógnitas de cada ecuación
M ₀	Matriz inicial	Solo contiene "1" en donde converge la incógnita de cada ecuación y se contabilizan en la última columna las incógnitas de cada renglón (que representa cada ecuación)
M ₁	Q ₄ , Q ₆ y P ₁ =x ₁₅ Q ₁₅	8, 4 y 2
M ₂	Q ₅ , Q ₇ y W ₁	7, 11, 12, 14 y 16
M ₃	W ₂ y W ₃	3, 13 y 15
M ₄	Q ₈ y Q ₉	Simultáneas entre 17 y 18
M ₅	Q ₁₃	28
M ₆	Q ₁₅	27
M ₇	Q ₁₂ , Q ₁₄	Simultáneas entre 25 y 26
M ₈	Q ₁₀ y Q ₁₁	20 y 24
M ₉	W ₄ y W ₅	19 y 23
M ₁₀	Todas las incógnitas resueltas	Todas las ecuaciones resueltas

Como se puede observar, hubo una variación en el número de matrices totales. Fueron 16 por el método "semimanual" y sólo 10 en el método de lenguaje de programación. Esto es atribuible a que el lenguaje de programación resolvía en un solo paso, todas las ecuaciones con una sola incógnita. Pero por lo demás, la secuencia es muy parecida.

3.3.2.3 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE ALGORITMO “SEMIMANUAL” Y ALGORITMO POR LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN (OCTAVE 5.1.0) DEL BALANCE METALÚRGICO DE UNIDAD VELARDEÑA, GRUPO PEÑOLES

Los resultados del balance metalúrgico del circuito de molienda SAG-Bolas mediante el método “semimanual”, se presentan en la Tabla 17. Los resultados obtenidos mediante el lenguaje de programación, se presentan en la Tabla 18. La figura 20, es una captura de la interfaz de Octave 5.1.0, donde se corrobora que efectivamente son los resultados del lenguaje de programación. La diferencia en la obtención, fue que en el método “semimanual” el despeje de las ecuaciones de acuerdo a la secuencia obtenida, se realizó por el usuario en una hoja de cálculo de excel. Al terminar el mismo, se corrió el lenguaje de programación. Los resultados coincidieron por ambos métodos, lo que los validó entre sí.

Tabla 17.-Resultados de balance metalúrgico de circuito de molienda SAG-Bolas mediante método “semimanual”

Corriente	Nomenclatura	Pulpa o agua (t/h)	Nomenclatura	% sólidos
Alimentación SAG	Q ₁	300	x ₁	98.6
Pebbles antes de quebradora	Q ₂	66.67	x ₂	99
Pebbles después de quebradora	Q ₃	66.67	x ₃	99
Agua cajón SAG	W ₁	92.47		0
Alimentación total SAG	Q ₄	459.14	x ₄	78.8
Salida SAG	Q ₅	459.14	x ₅	78.8
Agua a criba	W ₂	71.02		0
Finos de criba	Q ₆	463.5	x ₆	63.82
Agua a ciclón SAG	W ₃	55.46		0
Alimentación ciclón SAG	Q ₇	518.95	x ₇	57
Finos ciclón de SAG	Q ₈	206.78	x ₈	25.6
Gruesos ciclón de SAG	Q ₉	312.16	x ₉	77.8
Agua a cajón de alimentación de molino de bolas	W ₄	31.06		0
Alimentación al molino de Bolas	Q ₁₀	1434.28	x ₁₀	76.8
Salida de molino de bolas	Q ₁₁	1434.28	x ₁₁	76.8
Agua a ciclón de molino de bolas	W ₅	227.15		0
Alimentación ciclón molino de bolas	Q ₁₂	1661.43	x ₁₂	66.3
Finos ciclón molino de bolas	Q ₁₃	570.37	x ₁₃	42.58
Gruesos ciclón de molino de bolas	Q ₁₄	1091.06	x ₁₄	78.7
Finos a flotación	Q ₁₅	777.15	x ₁₅	38.06

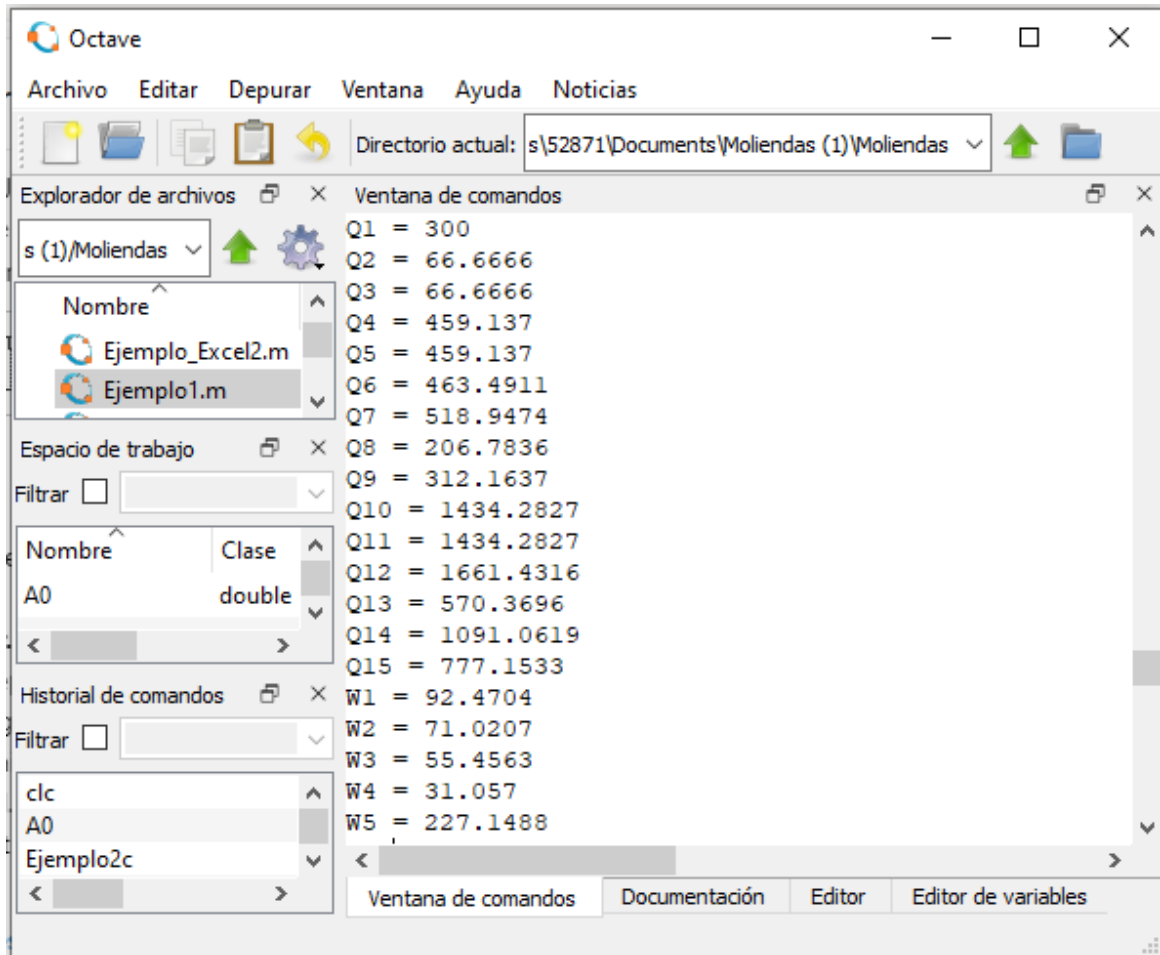


Figura 20.-Ventana de lenguaje de programación Octave 5.1.0, donde se observan los resultados del balance metalúrgico

Tabla 18.-Resultados de balance metalúrgico de circuito de molienda SAG-Bolas Unidad Velardeña mediante método de lenguaje de programación (Octave 5.1.0)

Q1 = 300 t/h
Q2 = 66.6666 t/h
Q3 = 66.6666 t/h
Q4 = 459.137 t/h
Q5 = 459.137 t/h
Q6 = 463.4911 t/h
Q7 = 518.9474 t/h
Q8 = 206.7836 t/h
Q9 = 312.1637 t/h
Q10 = 1434.2827 t/h
Q11 = 1434.2827 t/h
Q12 = 1661.4316 t/h
Q13 = 570.3696 t/h
Q14 = 1091.0619 t/h
Q15 = 777.1533 t/h
W1 = 92.4704 t/h
W2 = 71.0207 t/h
W3 = 55.4563 t/h
W4 = 31.057 t/h
W5 = 227.1488 t/h

3.4 RESULTADOS DE OBTENCIÓN DE CURVA DE ROMPIMIENTO Y TAMAÑO CRÍTICO DE MOLIENDA SAG UNIDAD VELARDEÑA

La curva de rompimiento del molino SAG se obtuvo mediante la solución del balance poblacional en el molino SAG. Se hizo uso de las hojas de cálculo para cálculo de parámetros de molienda SAG de *MolyCop Tools* (que es un software de apoyo a la molienda en procesamiento de minerales creado por la compañía MolyCop, que ofrece ventajas de fácil instalación y operación, dado que usa excel como interfaz), de acuerdo a la metodología explicada en el apartado 2.1.3.2.

Como se menciona en el marco teórico y la metodología, la curva de rompimiento es el resultado de la integración del balance poblacional y el consumo de potencia del molino SAG. Es así que integrando en este software los datos de potencia, tamaño del molino, entre otros, es posible obtener los valores de función de selección específica, función de quebrado, así como los parámetros para describir la ecuación de cada tipo de rompimiento. Por medio de un retrocálculo que utiliza las distribuciones granulométricas de alimentación y producto del molino, es que se obtienen los valores de estas funciones. De esta forma, se obtiene la ecuación del modelo de distribución granulométrica, que mejor ajusta con los datos experimentales. El retrocálculo se basa en realizar n iteraciones con los valores de α_0 , α_1 , α_2 , β_0 , β_1 y β_2 , hasta minimizar la función objetivo, que se basa en el valor mínimo del cuadrado de las diferencias entre la granulometría experimental del producto contra la ajustada. Basándose en el método matricial explicado en el marco teórico. En el anexo H, se puede consultar el reporte de resultados de la hoja de cálculo SAGParam_Open de MolyCop Tools.

Los resultados obtenidos para un valor mínimo de la función objetivo de 1.214, para el ajuste de los parámetros de la función de selección y fractura, se muestran en la tabla 19.

Tabla 19.-Parámetros de función de selección y ruptura obtenidos por retrocálculo con hoja de MolyCop Tools

Función objetivo		1.214	
Función de selección			
Bolas-partícula :		Autorompimiento :	
alpha0	0.003104	alpha0	0.000068
alpha1	0.721	alpha1	0.711
alpha2	3.50		
Dcrit	6432.8458		
Roca-partícula :			
alpha0	0.033516		
alpha1	0.598		
alpha2	3.50		
Dcrit	6676.4415		
Función de ruptura			
beta00	1.4834		
beta01	0.050		
beta1	0.739		
beta2	2.50		
beta30	0.1270		
beta31	0.000		

Esto se traduce en las siguientes ecuaciones de función de selección específica para cada tipo de rompimiento:

$$S_{i \text{ bolas-part}}^E = \frac{0.003104(d_i^*)^{0.721}}{1 + \left(\frac{d_i^*}{6432.8458}\right)^{3.5}} \quad (80)$$

(81)

$$S_{i\text{ roca-part}}^E = \frac{0.033516(d_i^*)^{0.598}}{1 + \left(\frac{d_i^*}{6676.4415}\right)^{3.5}}$$

$$S_{i\text{ autorompimiento}}^E = 0.000068(d_i^*)^{0.711} \quad (82)$$

La función de rompimiento B_{ij} , como se recordará, describe la granulometría generada por el rompimiento de la fracción s_i en el tamaño m_i y relacionará el tamaño de partícula d_i con el tamaño de los “pebbles” generados de un tamaño mayor “j” y los finos $(1 - \beta_{0j})$. De acuerdo a los parámetros obtenidos, la ecuación es:

$$d_{\text{pebbles},j} = 0.1270(d_{j+1}) \quad (83)$$

$$\beta_{0j} = 1.4834 \left(\frac{d_{j+1}}{100,000}\right)^{-0.05} \quad (84)$$

$$B_{ij} = \beta_{0j} \left(\frac{d_i}{d_{\text{pebbles},j}}\right)^{0.739} + (1 - \beta_{0j}) \left(\frac{d_i}{d_{j+1}}\right)^{2.5} \quad (85)$$

Generalmente las rocas grandes (mayores a 2 pulgadas) que se autofracturan, generan partículas grandes y astillas finas, casi nada de partículas intermedias. A estas astillas se les conoce como pebbles.

La curva de velocidad de rompimiento del molino SAG antes de la instalación de la quebradora de pebbles, se muestra a continuación en la figura 21:

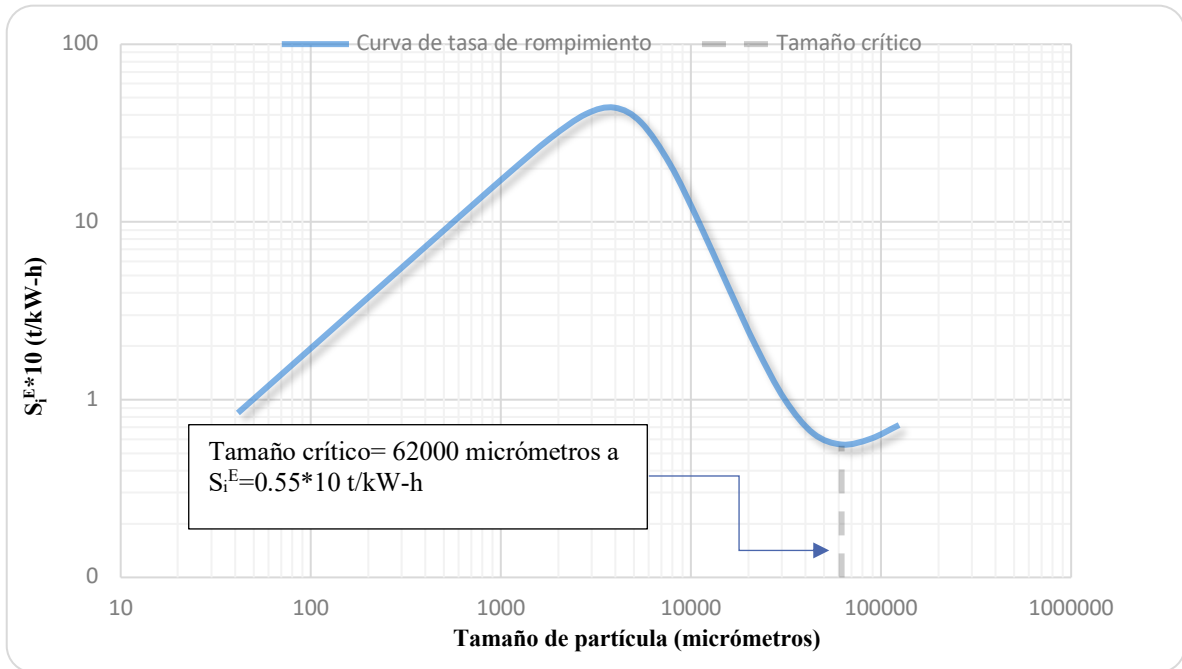


Figura 21.-Curva de velocidad de rompimiento antes de instalación de quebradora auxiliar (quebradora de pebbles)

En la figura 21, se obtuvo la curva de velocidad de rompimiento antes de la instalación de la quebradora auxiliar y se indicó el tamaño crítico en 62 000 micrómetros.

En la figura 22, se presenta la curva de rompimiento general, que se genera mediante la interacción de todos los tipos de fractura (bolas-partícula, rocas-partícula y autorompimiento). También se puede observar la gráfica individual de cada tipo de rompimiento, así como su ecuación.

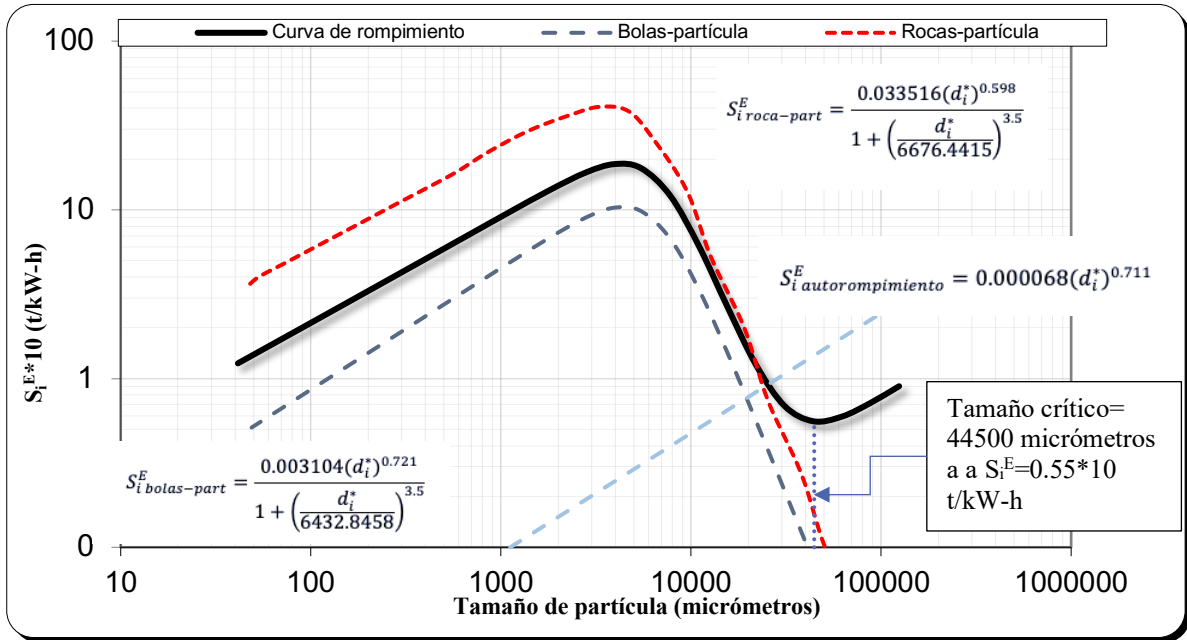


Figura 22.-Curva de velocidad de rompimiento del molino SAG con quebradora auxiliar (pebbles) de Unidad Minera Velardeña. Tamaño crítico y curvas de cada tipo de fractura

En la figura 22, se señala el valle de la curva en 44 500 micrómetros, que se indica como el tamaño crítico del proceso. En ese punto la velocidad de rompimiento desciende a $0.55*10$ t/(kW-h) y según se pueden observar las curvas individuales, la aportación a la ruptura es principalmente hecha por el fenómeno de autorompimiento, y la ruptura roca-partícula y bolas-partícula tienen baja efectividad. El valor de tamaño crítico es de 44 500 micrómetros (figura 22), lo que equivale a 1 3/4 pulgadas. Cuando el molino no contaba con quebradora de pebble (figura 21) el tamaño crítico era de 62,000 micrómetros, lo que equivale a 2 1/2 pulgadas, aproximadamente. La reducción de 3/4 de pulgada en el tamaño crítico indica que esta variable es fuertemente dependiente de la granulometría de entrada al molino.

3.5 EVALUACIÓN DE LAS VARIACIONES EN EL RENDIMIENTO DEL MOLINO EN BASE AL TAMAÑO CRÍTICO DE PARTÍCULA DETERMINADO

Una vez que se caracterizó este tamaño es posible tomar decisiones en planta del tamaño de cribas y parrillas del sistema, que permitan desalojar este tamaño de partícula del circuito de molienda o reducirlo en el sistema de trituración auxiliar utilizado para triturar los pebbles.

La tabla 20, contiene los valores de tamaño crítico obtenidos en la curva de rompimiento con quebradora y sin quebradora, es evidente que la instalación de la quebradora disminuyó significativamente el valor del tamaño crítico, la reducción fue del 28.22%. La parrilla de salida del molino debe tener un tamaño mayor al tamaño crítico aquí determinado para poder sacar este material que no tiene poder de rompimiento o autoruptura y la criba de pebbles debe tener un tamaño menor a dicho tamaño crítico para poder retenerlos y recircularlos a la quebradora auxiliar. En el momento de este estudio, las aberturas de la parrilla y la criba eran 50.8 mm y 3 mm respectivamente. Cuando no se cuenta con la quebradora auxiliar, el tamaño crítico está por arriba del tamaño de la parrilla lo que ocasiona que se mantengan al interior del molino. Sin embargo, con la instalación de la quebradora de pebbles, el tamaño crítico disminuyó a 44.5 mm, lo que permitió que pudiera descargar el pebble a través de la parrilla de 50.8 mm, lo que representa un incremento en la capacidad del molino.

En las curvas obtenidas de los fenómenos de rompimiento mineral-mineral y bola-mineral, se observa que a partir de los valores de diámetro crítico (d_{crit}) que son 6432.8458 y 6676.4415 micrómetros, comienza a decaer la efectividad de estos dos fenómenos, es así que el material que pasa la criba (3 mm), redujo su tamaño de esta manera. A tamaños mayores, el aporte de la función de autorompimiento es mayor. Por lo que se puede deducir que el valle de la curva se forma cuando, se combina la tendencia decreciente de las curvas

de rompimiento mineral-mineral y bola-mineral y surge la recta de autorompimiento. Es así que bajo la correcta interpretación del significado de los parámetros de la función de selección y quebrado, del como se modifican las pendientes de las curvas individuales de energía específica según el fenómeno o variable de diseño o de proceso a modificar, será posible una mayor comprensión de la molienda semiautógena.

Por otra parte, conocer el tamaño crítico, puede ayudar a tomar decisiones también en lo concerniente al tamaño de la criba auxiliar, actualmente es de 3 mm, pero si todo el material se retorna a la quebradora auxiliar sin estar en el tamaño crítico, puede también tender a una sobrecarga. Es posible que solo el material más cercano al tamaño crítico se desvíe a la quebradora y los medios entre el tamaño crítico y la abertura de 3 mm se retornen directamente al molino SAG. Se sugiere que esta metodología se puede integrar a la serie de estudios comunes que se llevan a cabo al realizar muestreos en la planta de beneficio de Velardeña y en cualquier planta.

Tabla 20.-Tamaño crítico de curvas de velocidad de rompimiento antes y después de la instalación de quebradora auxiliar

Curva	Tamaño Crítico (mm)
Curva de rompimiento con quebradora auxiliar	44.5
Curva de rompimiento sin quebradora auxiliar	62.0

Se puede determinar por las figuras 21 y 22, que la función de selección específica se puede utilizar para determinar el tamaño crítico de molienda en el interior del molino SAG. Este

valor puede ser utilizado para compararlo con el tamaño de apertura de la parrilla. En este caso la parrilla es de 50.8 mm y el tamaño crítico sin quebradora auxiliar es de 62.0 mm lo que indica que las partículas no van a salir del molino haciendo que la molienda sea muy ineficiente. En cambio, cuando se opera la quebradora auxiliar el tamaño crítico disminuye hasta 44.5 mm lo que permite que estas partículas sean descargadas a través de la parrilla sin afectar la capacidad de molienda. Estas observaciones se corroboran con el comportamiento en planta, al tener la quebradora funcionando la capacidad de molienda aumenta en un 5%.

Existen actualmente muchos parámetros cuantificables para medir la efectividad del proceso de molienda. Respecto a la molienda en molino de bolas, la cuantificación de la energía consumida y el diámetro de Bond del producto son algunas de las más recurrentes, ya que en este tipo de molinos, la molienda recae principalmente en la acción de los elementos de molienda, no en el propio mineral. Sin embargo, en la molienda semiautógena, dada la variabilidad de tamaños en la alimentación, el que la molienda dependa más del tamaño y tipo de las rocas que de las bolas, es importante incorporar elementos de criterio que consideren los diferentes tipos de rompimiento, el como contribuye cada uno a la utilización de la energía y en qué punto deja cada uno de ser efectivo.

En este sentido, la curva de velocidad de rompimiento, no había sido considerada como un elemento importante de criterio para la cuantificación del desempeño de la molienda SAG. De ella se obtienen criterios numéricos para observar la variación o dependencia de los distintos fenómenos de rompimiento (mineral-mineral, bola-mineral, autorompimiento) que ocurren en este tipo de equipos. Puede ser una práctica más recurrida, la frecuencia puede relacionarse con la frecuencia con la que se lleve a cabo el control de tamaño de la alimentación y producto, ya que los datos de operación se pueden obtener fácilmente del cuarto de control, para así ir creando una base de datos con un volumen tal que se pueda empezar a correlacionar la curva con las variación en las condiciones expresadas en el

apartado “Curva de velocidad de rompimiento”. La estimación de reducción del tamaño de partícula crítico no es trivial, ya que esto permitiría a la planta estimar el tamaño de abertura de la parrilla de molino.

CONCLUSIONES

Los resultados acerca de que es posible determinar el tamaño crítico del mineral a partir de la curva de rompimiento, se consideraron congruentes y satisfactorios. El tamaño crítico antes de la instalación de la quebradora auxiliar era de 62 mm y con la instalación de la quebradora auxiliar se logró reducir a 44.5 mm. Lo que se cuantifica en una reducción del 28.22 %. Se pudo corroborar que por el tamaño de la parrilla (50.3 mm) contra el tamaño crítico antes de la quebradora (62 mm), este material no era descargado del interior y esa carga solo perjudicaba el rendimiento de la molienda. La quebradora llevó el material a un tamaño crítico menor al de la parrilla (44.5 mm), con la consecuente mejora en la fluidez y correcta molienda del mineral. Lo que aumentó la tasa de descarga del molino. En el tamaño crítico, la tasa de ruptura descendió a un valor de $0.55 \cdot 10 \text{ t/(kW-h)}$. La reducción de 3/4 de pulgada en el tamaño crítico indica que esta variable es fuertemente dependiente de la granulometría de entrada al molino.

Por otro lado, el efecto del cambio del tamaño crítico se ve reflejado en la operación, ya que se tiene un incremento en la capacidad de molienda del 5%.

En base a los resultados obtenidos en la determinación del tamaño crítico y relacionando todos los conceptos del marco teórico en cuanto a la variación de la curva de velocidad de rompimiento con respecto a las variables de operación y/o diseño, se sugiere que si es posible tomar decisiones basadas en esta herramienta. Esto se facilitará a medida que sea una práctica de uso común y se genere una base de datos mayor en donde ya haya antecedentes y experiencia del caso particular de la planta Velardeña.

Por otra parte, en el desarrollo de esta tesis, surgió una aportación adicional, que es una metodología de resolución del balance de masa del circuito de molienda. Que se puede aplicar en general a cualquier tipo de circuito, ya sea de molienda, flotación o cualquier

otro. La aportación de esta metodología es importante en el sentido de que la complejidad que se va generando en estos sistemas de ecuaciones, hace necesario recurrir a softwares comerciales no siempre al alcance de algunas plantas y que el planteamiento y resolución depende de la habilidad del ingeniero metalurgista. El método fue validado con buenos resultados en otro caso de balance de circuito de molienda.

Posibles líneas de investigación

- Aplicación de modelo JKMRC de splines cúbicos con datos de carga de bolas, velocidad crítica, etc., para planta Velardeña.
- Optimización de uso de quebradora auxiliar mediante preclasificación de carga circulante, esto basado en el concepto de que recircula todo el material de tamaño mayor a la criba, pero que no todo este material está cercano al tamaño crítico, por lo que una fracción se puede recircular sin pasar por la quebradora ya que puede ser molido por su tamaño, en la zona de la curva que todavía tiene poder de conminución.
- Estudio de la función de descarga relacionado con el diseño del molino SAG (abertura de parrilla, porcentaje de área abierta de la misma, tipo de elevadores de pulpa, etc.).
- Estudio de la función de clasificación de la parrilla interna y la criba de pebbles en base a datos de balance poblacional
- Estudio de función de selección y función de quebrado, relacionado con la competencia del mineral de Velardeña.

REFERENCIAS

- Bond, F.C. (1952) The third theory of grinding. *Trans. AIME*, Vol. 193, 484-494.
- Chen, C.-T. (1999). *Linear System: Theory and Design*. Oxford, 3rd. edition.
- Fuerstenau, M. C. & Han, K. N. (2003). Principles of mineral processing, SME.
- Fuerstenau, D. W., De, A., & Kapur, P. C. (2004). Linear and nonlinear particle breakage processes in comminution systems, 317–327.
- Gupta, A., & Yan, D. (2016). *03 Size Reduction and Energy Requirement. Mineral Processing Design and Operations - 2nd Edition*.
- Gupta, A., & Yan, D. (2016). *11 Mathematical Modelling of Comminution Processes. Mineral Processing Design and Operations - 2nd Edition*.
- Li, H. (2020). Dynamic Modeling and Simulation of SAG Mill Circuits with Pebble Crushing.
- Morrell, S., Finch, W. M., Kojovic, T., & Jr, H. D. (1996). Modelling and simulation of large diameter autogeneous and semi-autogeneous mills, *45*, 289–300.
- Morrell, S., & Morrison, R. D. (1996). Ag and Sag Mill Circuit Selection and Design By Simulation. *Sag*, (January 1996), 769–790.
- Morrell, S. (2004). A new autogenous and semi-autogenous mill model for scale-up, design and optimisation, *17*, 437–445.
- Powell, M. S., & Morrison, R. D. (2007). The future of comminution modelling. *International Journal of Mineral Processing*, *84*(1–4), 228–239.
- Napier-Munn, T. J., & Lynch, A. J. (1992). The modelling and computer simulation of mineral treatment processes — current status and future trends. *Minerals Engineering*, *5*(2), 143–167. [https://doi.org/10.1016/0892-6875\(92\)90039-C](https://doi.org/10.1016/0892-6875(92)90039-C).
- King, R. P. (2001). Comminution operations. *Modeling and Simulation of Mineral Processing Systems*, 127–210. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-051184-9.50009-2>.

Street, A., & Box, P. O. (2001). Autogenous / Semi-Autogenous Mills, 1–2.
<https://doi.org/10.1016/B978-0-444-63589-1/00009-5>.

Yu, P. (2016). A Generic Dynamic Model Structure for Tumbling Mills. Tesis de la
Universidad de Queensland

ANEXOS

ANEXO A.-FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA MATRICIAL

A.1 VECTORES

El símbolo \mathbb{R} denota el conjunto de números reales y \mathbb{R}^n denota un vector de n elementos reales. Se utilizan letras minúsculas: a, b, x, y , etc., para denotar variables escalares en \mathbb{R} y en negritas, \mathbf{x}, \mathbf{q} , denotan vectores en \mathbb{R}^n . Las letras mayúsculas $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{R}$, etc., denotan matrices. Por lo tanto, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ significa:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (37)$$

donde $x_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \dots, n$.

El vector \mathbf{x} es un arreglo en columna con n componentes reales x_1, \dots, x_n . También se puede representar como:

$$\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \quad (38)$$

donde el superíndice T representa la transpuesta.

El *producto escalar* de dos vectores \mathbf{x} y \mathbf{y} pertenecientes a \mathbb{R}^n , denotado por $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ o $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$, es un número real definido por:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \quad (39)$$

El producto escalar de dos vectores es conmutativo, es decir:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x} \quad (40)$$

La *norma de un vector* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es:

$$\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{\frac{1}{2}} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} \quad (41)$$

A.2 MATRICES

Una matriz $A = (a_{ij})$ de $n \times m$ es un arreglo ordenado de números reales con n vectores renglón $[a_{i1}, \dots, a_{im}]$, para $i = 1, \dots, n$ y a su vez m vectores columna $[a_{1j}, \dots, a_{nj}]^T$, para $j = 1, \dots, m$.

La *matriz identidad* es una matriz cuadrada, es decir de $n \times n$, donde los elementos de la diagonal principal son 1 y el resto de los elementos son 0, es decir:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

La transpuesta de una matriz A se denota por A^T y se forma intercambiando los renglones y las columnas de A .

A.3 ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES

Considere el conjunto de ecuaciones algebraicas:

$$Ax = y \quad (43)$$

donde A y y son, respectivamente, matrices reales de $m \times n$ y $m \times 1$ y x es un vector de $n \times 1$. La matriz A y el vector y son dados y x es la incógnita a resolver. Entonces, el conjunto realmente cuenta con m ecuaciones y n incógnitas. El número de ecuaciones puede ser mayor, igual, o menor que el número de incógnitas.

El rango de A se define como el número de columnas linealmente independientes. También es igual al número de renglones linealmente independientes. Debido a este hecho, si A es de $m \times n$, entonces:

$$\text{rango}(A) \leq \min(m, n) \quad (44)$$

Con estos antecedentes, se procede a discutir soluciones de (43). Usamos ρ para denotar el rango de una matriz.

Teorema 2.1. *Este teorema se divide en dos partes:*

1. *Dada una matriz \mathbf{A} de $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$, y un vector \mathbf{y} de $\mathbf{m} \times \mathbf{1}$, existe una solución \mathbf{x} de $\mathbf{n} \times \mathbf{1}$ en $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ si y sólo si \mathbf{y} cae en el espacio de rango de \mathbf{A} o, equivalentemente,*

$$\rho(\mathbf{A}) = \rho([\mathbf{A} \ \mathbf{y}]) \quad (45)$$

Donde $[\mathbf{A} \ \mathbf{y}]$ es una matriz de $\mathbf{m} \times (\mathbf{n} + \mathbf{1})$ en la que \mathbf{y} se añade a \mathbf{A} como una columna adicional.

2. *Dado \mathbf{A} , existe una solución \mathbf{x} en $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ para toda \mathbf{y} , si y sólo si \mathbf{A} tiene rango \mathbf{m} (rango pleno de renglón).*

A.4 DETERMINANTE E INVERSA DE MATRICES CUADRADAS

El *determinante* de una matriz de $\mathbf{1} \times \mathbf{1}$ se define como la misma matriz. Para $\mathbf{n} = \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots$, el determinante de una matriz cuadrada $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{ij}]$ de $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ se define recursivamente como, para una \mathbf{j} seleccionada:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_i^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{c}_{ij} \quad (46)$$

donde \mathbf{a}_{ij} denota la entrada en el \mathbf{i} -ésimo renglón y \mathbf{j} -ésima columna de \mathbf{A} . La Ecuación (46) se llama expansión de Laplace. El número \mathbf{c}_{ij} es el cofactor correspondiente a \mathbf{a}_{ij} y es igual a $(-1)^{i+j} \det(\mathbf{m}_{ij})$, donde \mathbf{m}_{ij} es la submatriz de \mathbf{A} de $(\mathbf{n} - \mathbf{1}) \times (\mathbf{n} - \mathbf{1})$ obtenida al eliminar su \mathbf{i} -ésimo renglón y \mathbf{j} -ésima columna.

Se dice que una matriz cuadrada es *no singular* si su determinante es distinto de cero. Por lo tanto, una matriz cuadrada no singular tiene rango pleno y todas sus columnas (renglones) son linealmente independientes.

La *inversa* de una matriz cuadrada no singular $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{ij}]$ se denota por \mathbf{A}^{-1} . La inversa tiene la propiedad $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ y se puede calcular como:

$$(47)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \text{Adj}(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{1}}{\det(\mathbf{A})} [\mathbf{c}_{ij}]^T$$

donde \mathbf{c}_{ij} es el cofactor. Si una matriz es singular, no existe su inversa.

Teorema 2.2. *Considere $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ con \mathbf{A} cuadrada.*

1. *Si \mathbf{A} es no singular, entonces la ecuación tiene una solución única para toda \mathbf{y} y la solución es igual a $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$. En particular, la única solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ es $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

2. *La ecuación homogénea $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tendrá soluciones distintas de cero si y sólo si \mathbf{A} es singular. El número de soluciones linealmente independientes es igual a la nulidad de \mathbf{A} .*

ANEXO B.- PROCEDIMIENTO DEL MUESTREO DE CORRIENTES DE MOLIENDA SAG

Se utilizó un procedimiento estandar de muestreo como se muestra a continuación:

- 1.- Coordinar al equipo de muestreo, ya que se requiere una persona ubicada en cada punto con el fin de llevarlo a cabo simultáneamente. El personal debe colocarse el equipo y ropa de seguridad completamente antes de proceder.
- 2.- El muestreo de cada punto se llevará a cabo cada 15 minutos. Las corrientes se encuentran en forma de pulpa, para cumplir con el protocolo de muestreo, se debe pasar el muestreador en forma vertical a través de toda la corriente.
- 3.- Simultáneamente se debe avisar al operador del cuarto de control para que adquiriera la siguiente serie de datos al momento de cada muestreo y así asegurar la estabilidad del proceso durante el mismo:

Durante el muestreo se debe de obtener la siguiente información promedio del proceso:

- Agua de alimentación
- Agua criba
- Agua dilución
- Peso alimentación (t/h)
- Peso pebble (t/h)
- Potencia (Kw)
- Velocidad (%)
- Porcentaje de carga del molino (%)
- Porcentaje de carga de bolas (%)
- Porcentaje de huecos intersticiales (%)
- Diámetro y longitud del molino (m)
- Tamaño de bola (in)
- Tamaño de parrilla (mm)
- Porcentaje de área abierta de parrilla(%)

- Nivel de carga total (%)
- Dimensiones de la abertura de la criba de pebbles (mm)

4.-La muestra de la alimentación al molino SAG se tomará de la banda alimentadora, que se debe detener con todas las medidas de seguridad. Tomando como muestra 6 metros de longitud de la banda.

ANEXO C.- DETERMINACIÓN DE PORCENTAJE DE SÓLIDOS SECOS DE ALIMENTACIÓN FRESCA DEL MOLINO SAG

Tabla anexo 1.-Determinación de porcentaje de sólidos de alimentación fresca del molino SAG

Determinación de porcentaje de sólidos secos de alimentación fresca del molino SAG		
Variable a determinar	Requerimientos	Proceso
Compósito de material (El objetivo es tener un muestra homogénea que represente la amplia distribución granulométrica)	Trituradores y molinos de pulverización de laboratorio. Equipos de muestreo, cuarteo y homogeneización. Muestra de cada fracción granulométrica	1.-Muestrear una cantidad de muestra representativa de cada tamaño granulométrico, después de haber hecho el tamizado. Triturar las piedras grandes, moler todo el material en el pulverizador y homogeneizar el compósito. Cuartear para obtener muestra final
Peso de muestra húmeda (compósito)	Báscula	2.-Pesar el compósito húmedo
Peso de compósito seco	Estufa y báscula	3.Secar el compósito húmedo a 110°C por 24 horas en la estufa de secado. Pesar la torta seca
Porcentaje de sólidos secos		4.-Relacionar el peso de la torta seca y la muestra húmeda con la siguiente fórmula $\%sol = \frac{Peso\ seco}{Peso\ húmedo} \times 100$

ANEXO D.- DETERMINACIÓN DE PORCENTAJE DE SÓLIDOS SECOS EN PULPAS

Tabla anexo 2.-Determinación de porcentaje de sólidos secos en pulpas

Determinación de porcentaje de sólidos secos en pulpas		
Variable a determinar	Requerimientos	Proceso
Peso de muestra húmeda (pulpa)	Muestras tomadas de puntos de muestreo	1.-Tarar los recipientes de muestreo, muestrear y pesar los recipientes con muestra. Restar el peso del recipiente con muestra menos el peso del recipiente sin muestra (vacío). La diferencia es el peso de pulpa
Obtención de torta húmeda	Filtros de presión y báscula	2.-Filtrar en el laboratorio las pulpas muestreadas en un filtro de presión con filtro de 53 micrómetros
Peso de torta seca	Estufa y báscula	3.Secar la torta húmeda que quedó en el papel filtro a 110°C por 24 horas en la estufa de secado. Pesar la torta seca
Porcentaje de sólidos secos		4.-Relacionar el peso de la torta seca y la muestra húmeda con la siguiente fórmula $\%sólidos = \frac{\text{Peso de torta seca}}{\text{Peso de pulpa}} \times 100$

ANEXO E.- PROCEDIMIENTO PARA DETERMINACIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑO DE PARTÍCULA DE CORRIENTES DE MUESTREO

Tabla anexo 3.-Procedimiento para determinación de distribución de tamaño de partícula de corrientes de muestreo

Procedimiento para determinación de distribución de tamaño de partícula de corrientes de muestreo	
Variable a determinar	Requerimientos
Distribución de tamaño de partícula de cada corriente muestreada	El análisis procede una vez secada la muestra para las pulpas. Se requieren juegos de tamices patrón
Proceso	
<p>1.-Seleccionar el juego de tamices patrón (En muestras de distribución muy amplia, se debe hacer predivisiones de la muestra, por ejemplo, todo el material arriba de 1000 micrómetros, que puede tener rocas de hasta 6", se hace en tamices de uso rudo), debajo de 1000 micrómetro y hasta 38 micrómetros, se van seleccionando fracciones de tamaños, de acuerdo a la capacidad de número de tamices que tenga el equipo de vibración (RoTap).</p> <p>2.-Limpiar perfectamente cada tamiz y tararlo. Apilarlo en orden de abertura creciente (plato colector, tamiz de menor abertura, tamiz de mayor abertura).</p> <p>3.-Colocar una muestra representativa de la fracción de tamaño en el tamiz superior. Arriba de 1000 micrómetros, como son cribas, se puede alimentar varios kilogramos de material (según el volumen de los contenedores de recolección) Entre 1000 y 100 micrómetros puede ser de 1000 a 500 g, y debajo de 100 micrómetros 250-100 g.</p>	

- 4.-En muestras con exceso de finos o arcillas, deberá hacerse un deslamado previo.
- 5.-Encender el equipo de vibración a una frecuencia de 800-1000 vibraciones/minuto durante 15 minutos.
- 6.-Retirar los tamices con muestra uno por uno y pesar cada uno con su contenido de muestra, en el caso de los tamices de uso rudo, pesar el contenedor recolector.
- 7.-Realizar cálculos para la determinación de la distribución a partir de la siguiente tabla:

Tabla de cálculos de distribución granulométrica						
Columna	(1)	(2)	(3)	(4)=(3)-(2)	(5)	(6)
	Tamiz (t)	Peso tamiz (t)	Peso de muestra más tamiz (m _i +t _i)	Peso de muestra (m _i)	fracción f _i = (m _i /m _T)	Bajoflujo
i=1..n	1					b _{f1} =1-f ₁
	2					b _{f2} =b _{f1} -f ₂ "

	n					b _{fn} =b _{fn-2} -b _{fn-1}
	Total			m_T=Σm_i		

- 8.-Limpiar tamices y equipo.

ANEXO F.- RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE BALANCE METALÚRGICO DE CIRCUITO DE MOLIENDA UNIDAD VELARDEÑA, DGO.; GRUPO PEÑOLES MEDIANTE ALGORITMO “SEMIMANUAL”

Se marcó en color amarillo los cruces de renglón- columna que se resuelven en esa matriz. Para el sistema de ecuaciones planteado de Velardeña, de acuerdo al diagrama de flujo, se generaron en total 16 matrices. Se presentan las mismas en las tablas sucesivas de este anexo (tablas anexo 4-20), en el entendido que siguen un orden de resolución resumido en la tabla 15. La matriz inicial muestra el estado de arranque del sistema, y la matriz 16 es en la que ya todo está en “0”, es decir, resuelto. En la matriz 9, para poder continuar con la resolución, se utiliza el artilugio de que aunque no se conocen por separado x_{15} y Q_{15} , si se conoce el valor de su producto, ya que por balance de sólidos del sistema global $x_1 Q_1$ (que ya es conocido) es igual al producto $x_{15} Q_{15}$ y así se puede despejar la ecuación 28 de la tabla 10 para Q_{13} . Finalmente M_{16} es la matriz con todas las incógnitas resueltas.

Tabla anexo 4.-Matriz inicial M0

Número de ecuación	Balance	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	X15	w1	w2	w3	w4	w5	Suma
1	$Q1+W1+W2+W3+W4+W5=Q15$												1		1	1	1	1	1	6
2	$x1Q1=x15Q15$												1	1						2
3	$Q1+W1+W2=Q6$			1											1	1				3
4	$x1Q1=x6Q6$			1																1
5	$Q6+W3+W4+W5=Q15$				1								1				1	1	1	5
6	$x6Q6=x15Q15$				1								1	1						3
7	$Q1+Q3+W1=Q4$	1													1					2
8	$x1Q1+x3Q3=x4Q4$	1																		1
9	$Q2=Q3$																			0
10	$x2Q2=x3Q3$																			0
11	$Q4=Q5$	1	1																	2
12	$x4Q4=x5Q5$	1	1																	2
13	$Q5+W2=Q2+Q6$			1	1											1				3
14	$x5Q5=x2Q2+x6Q6$			1	1															2
15	$Q6+W3=Q7$				1	1											1			3
16	$x6Q6=x7Q7$				1	1														2
17	$Q7=Q8+Q9$					1	1	1												3
18	$x7Q7=x8Q8+x9Q9$					1	1	1												3
19	$Q9+Q14+W4=Q10$						1	1				1						1		4
20	$x9Q9+x14Q14=x10Q10$						1	1				1								3
21	$Q10=Q11$							1	1											2
22	$x10Q10=x11Q11$							1	1											2
23	$Q11+W5=Q12$								1	1									1	3
24	$x11Q11=x12Q12$								1	1										2
25	$Q12=Q13+Q14$									1	1	1								3
26	$x12Q12=x13Q13+x14Q14$									1	1	1								3
27	$Q8+Q13=Q15$										1									3
28	$x8Q8+x13Q13=x15Q15$										1									3
	Sumatoria	4	4	4	8	4	4	4	4	4	4	4	6	3	3	3	3	3	3	4

Tabla anexo 5.- Matriz 1 (M1)

Número de ecuación	Balance	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	X15	w1	w2	w3	w4	w5	Suma
1	$Q1+W1+W2+W3+W4+W5=Q15$	1											1		1	1	1	1	1	6
2	$x1Q1=x15Q15$												1	1						2
3	$Q1+W1+W2=Q6$			1											1	1				3
4	$x1Q1=x6Q6$			1																1
5	$Q6+W3+W4+W5=Q15$			1									1				1	1	1	5
6	$x6Q6=x15Q15$			1									1	1						3
7	$Q1+Q3+W1=Q4$	1													1					2
8	$x1Q1+x3Q3=x4Q4$	1																		1
9	$Q2=Q3$																			0
10	$x2Q2=x3Q3$																			0
11	$Q4=Q5$	1	1																	2
12	$x4Q4=x5Q5$	1	1																	2
13	$Q5+W2=Q2+Q6$		1	1												1				3
14	$x5Q5=x2Q2+x6Q6$		1	1																2
15	$Q6+W3=Q7$			1	1												1			3
16	$x6Q6=x7Q7$			1	1															2
17	$Q7=Q8+Q9$			1	1	1														3
18	$x7Q7=x8Q8+x9Q9$			1	1	1														3
19	$Q9+Q14+W4=Q10$						1	1				1						1		4
20	$x9Q9+x14Q14=x10Q10$						1	1				1								3
21	$Q10=Q11$							1	1											2
22	$x10Q10=x11Q11$							1	1											2
23	$Q11+W5=Q12$								1	1									1	3
24	$x11Q11=x12Q12$								1	1										2
25	$Q12=Q13+Q14$									1	1									3
26	$x12Q12=x13Q13+x14Q14$									1	1									3
27	$Q8+Q13=Q15$					1														3
28	$x8Q8+x13Q13=x15Q15$					1														4
	Sumatoria	4	4	4	8	4	4	4	4	4	4	4	6	3	3	3	3	3	3	3

Tabla anexo 6.- Matriz 2 (M2)

Número de ecuación	Balace	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	X15	w1	w2	w3	w4	w5	Suma	
1	$Q1+W1+W2+W3+W4+W5=Q15$														1	1	1	1	1	1	6
2	$x1Q1=x15Q15$														1						2
3	$Q1+W1+W2=Q6$			1											1	1					3
4	$x1Q1=x6Q6$			1																	1
5	$Q6+W3+W4+W5=Q15$			1													1	1	1	1	5
6	$x6Q6=x15Q15$			1													1				3
7	$Q1+Q3+W1=Q4$	0													1	1					1
8	$x1Q1+x3Q3=x4Q4$	0																			0
9	$Q2=Q3$																				0
10	$x2Q2=x3Q3$																				0
11	$Q4=Q5$	0	1																		1
12	$x4Q4=x5Q5$	0	1																		1
13	$Q5+W2=Q2+Q6$		1	1												1					3
14	$x5Q5=x2Q2+x6Q6$		1	1																	2
15	$Q6+W3=Q7$			1	1													1			3
16	$x6Q6=x7Q7$			1	1																2
17	$Q7=Q8+Q9$				1	1															3
18	$x7Q7=x8Q8+x9Q9$				1	1															3
19	$Q9+Q14+W4=Q10$						1	1											1		4
20	$x9Q9+x14Q14=x10Q10$						1	1													3
21	$Q10=Q11$							1	1												2
22	$x10Q10=x11Q11$							1	1												2
23	$Q11+W5=Q12$								1	1											3
24	$x11Q11=x12Q12$								1	1											2
25	$Q12=Q13+Q14$									1	1										3
26	$x12Q12=x13Q13+x14Q14$									1	1										3
27	$Q8+Q13=Q15$					1															3
28	$x8Q8+x13Q13=x15Q15$					1															4
	Sumatoria	0	4	8	4	4	4	4	4	4	4	4	4	6	3	3	3	3	3	3	3

Tabla anexo 7.- Matriz 3 (M3)

Número de ecuación	Balance	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	X15	w1	w2	w3	w4	w5	Suma
1	$Q1+W1+W2+W3+W4+W5=Q15$												1		0	1	1	1	1	5
2	$x1Q1=x15Q15$												1	1						2
3	$Q1+W1+W2=Q6$			1											0	1				2
4	$x1Q1=x6Q6$			1																1
5	$Q6+W3+W4+W5=Q15$			1									1				1	1	1	5
6	$x6Q6=x15Q15$			1									1	1						3
7	$Q1+Q3+W1=Q4$	0													0					0
8	$x1Q1+x3Q3=x4Q4$	0																		0
9	$Q2=Q3$																			0
10	$x2Q2=x3Q3$																			0
11	$Q4=Q5$	0	1																	1
12	$x4Q4=x5Q5$	0	1																	1
13	$Q5+W2=Q2+Q6$		1	1												1				3
14	$x5Q5=x2Q2+x6Q6$		1	1																2
15	$Q6+W3=Q7$			1	1												1			3
16	$x6Q6=x7Q7$			1	1															2
17	$Q7=Q8+Q9$				1	1	1													3
18	$x7Q7=x8Q8+x9Q9$				1	1	1													3
19	$Q9+Q14+W4=Q10$						1	1				1						1		4
20	$x9Q9+x14Q14=x10Q10$						1	1				1								3
21	$Q10=Q11$							1	1											2
22	$x10Q10=x11Q11$							1	1											2
23	$Q11+W5=Q12$								1	1									1	3
24	$x11Q11=x12Q12$								1	1										2
25	$Q12=Q13+Q14$									1	1									3
26	$x12Q12=x13Q13+x14Q14$									1	1									3
27	$Q8+Q13=Q15$						1				1									3
28	$x8Q8+x13Q13=x15Q15$						1				1									3
	Sumatoria	0	4	8	4	4	4	4	4	4	4	4	4	6	3	0	3	3	3	3

Tabla anexo 8.- Matriz 4 (M4)

Número de ecuación	Balance	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	X15	w1	w2	w3	w4	w5	Suma
1	$Q1+W1+W2+W3+W4+W5=Q15$													1	0	1	1	1	1	5
2	$x1Q1=x15Q15$													1	1					2
3	$Q1+W1+W2=Q6$			0											0	1				1
4	$x1Q1=x6Q6$			0																0
5	$Q6+W3+W4+W5=Q15$			0										1			1	1	1	4
6	$x6Q6=x15Q15$			0										1	1					2
7	$Q1+Q3+W1=Q4$	0													0					0
8	$x1Q1+x3Q3=x4Q4$	0																		0
9	$Q2=Q3$																			0
10	$x2Q2=x3Q3$																			0
11	$Q4=Q5$	0	1																	1
12	$x4Q4=x5Q5$	0	1																	1
13	$Q5+W2=Q2+Q6$		1	0												1				2
14	$x5Q5=x2Q2+x6Q6$		1	0																1
15	$Q6+W3=Q7$			0	1												1			2
16	$x6Q6=x7Q7$			0	1															1
17	$Q7=Q8+Q9$					1	1	1												3
18	$x7Q7=x8Q8+x9Q9$					1	1	1												3
19	$Q9+Q14+W4=Q10$						1	1				1						1		4
20	$x9Q9+x14Q14=x10Q10$						1	1				1								3
21	$Q10=Q11$							1	1											2
22	$x10Q10=x11Q11$							1	1											2
23	$Q11+W5=Q12$								1	1									1	3
24	$x11Q11=x12Q12$								1	1										2
25	$Q12=Q13+Q14$									1	1									3
26	$x12Q12=x13Q13+x14Q14$									1	1									3
27	$Q8+Q13=Q15$					1														3
28	$x8Q8+x13Q13=x15Q15$					1														3
	Sumatoria	0	4	0	4	4	4	4	4	4	4	4	4	6	3	0	3	3	3	3

Tabla anexo 9.- Matriz 5 (M5)

Número de ecuación	Balance	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	X15	w1	w2	w3	w4	w5	Suma	
1	$Q1+W1+W2+W3+W4+W5=Q15$																				4
2	$x1Q1=x15Q15$																				2
3	$Q1+W1+W2=Q6$			0												0					0
4	$x1Q1=x6Q6$			0																	0
5	$Q6+W3+W4+W5=Q15$			0																	4
6	$x6Q6=x15Q15$			0																	2
7	$Q1+Q3+W1=Q4$	0														0					0
8	$x1Q1+x3Q3=x4Q4$	0																			0
9	$Q2=Q3$																				0
10	$x2Q2=x3Q3$																				0
11	$Q4=Q5$	0	1																		1
12	$x4Q4=x5Q5$	0	1																		1
13	$Q5+W2=Q2+Q6$		1	0													0				1
14	$x5Q5=x2Q2+x6Q6$		1	0																	1
15	$Q6+W3=Q7$			0	1																2
16	$x6Q6=x7Q7$			0	1																1
17	$Q7=Q8+Q9$				1	1															3
18	$x7Q7=x8Q8+x9Q9$				1	1															3
19	$Q9+Q14+W4=Q10$					1	1														4
20	$x9Q9+x14Q14=x10Q10$					1	1														3
21	$Q10=Q11$						1	1													2
22	$x10Q10=x11Q11$						1	1													2
23	$Q11+W5=Q12$							1	1												3
24	$x11Q11=x12Q12$							1	1												2
25	$Q12=Q13+Q14$								1	1											3
26	$x12Q12=x13Q13+x14Q14$								1	1											3
27	$Q8+Q13=Q15$									1											3
28	$x8Q8+x13Q13=x15Q15$									1											4
	Sumatoria	0	4	0	0	4	4	4	4	4	4	4	6	3	0	0	0	3	3	3	4

Tabla anexo 10.- Matriz 6 (M6)

Número de ecuación	Balance	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	X15	w1	w2	w3	w4	w5	Suma
1	$Q1+W1+W2+W3+W4+W5=Q15$												1		0	0	1	1	1	4
2	$x1Q1=x15Q15$												1	1						2
3	$Q1+W1+W2=Q6$			0											0	0				0
4	$x1Q1=x6Q6$			0																0
5	$Q6+W3+W4+W5=Q15$			0									1				1	1	1	4
6	$x6Q6=x15Q15$			0									1	1						2
7	$Q1+Q3+W1=Q4$	0													0					0
8	$x1Q1+x3Q3=x4Q4$	0																		0
9	$Q2=Q3$																			0
10	$x2Q2=x3Q3$																			0
11	$Q4=Q5$	0	0																	0
12	$x4Q4=x5Q5$	0	0																	0
13	$Q5+W2=Q2+Q6$		0	0												0				0
14	$x5Q5=x2Q2+x6Q6$		0	0																0
15	$Q6+W3=Q7$			0	1												1			2
16	$x6Q6=x7Q7$			0	1															1
17	$Q7=Q8+Q9$				1	1	1													3
18	$x7Q7=x8Q8+x9Q9$				1	1	1													3
19	$Q9+Q14+W4=Q10$						1	1				1						1		4
20	$x9Q9+x14Q14=x10Q10$						1	1				1								3
21	$Q10=Q11$							1	1											2
22	$x10Q10=x11Q11$							1	1											2
23	$Q11+W5=Q12$								1	1									1	3
24	$x11Q11=x12Q12$								1	1										2
25	$Q12=Q13+Q14$									1	1	1								3
26	$x12Q12=x13Q13+x14Q14$									1	1	1								3
27	$Q8+Q13=Q15$					1					1									3
28	$x8Q8+x13Q13=x15Q15$					1					1									3
	Sumatoria	0	0	0	4	4	4	4	4	4	4	4	6	3	0	0	3	3	3	4

Tabla anexo 11.- Matriz 7 (M7)

Número de ecuación	Balance	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	X15	w1	w2	w3	w4	w5	Suma
1	$Q1+W1+W2+W3+W4+W5=Q15$												1	1	0	0	1	1	1	4
2	$x1Q1=x15Q15$												1	1						2
3	$Q1+W1+W2=Q6$			0											0	0				0
4	$x1Q1=x6Q6$			0																0
5	$Q6+W3+W4+W5=Q15$			0									1	1			1	1	1	4
6	$x6Q6=x15Q15$			0									1	1						2
7	$Q1+Q3+W1=Q4$	0													0					0
8	$x1Q1+x3Q3=x4Q4$	0																		0
9	$Q2=Q3$																			0
10	$x2Q2=x3Q3$																			0
11	$Q4=Q5$	0	0																	0
12	$x4Q4=x5Q5$	0	0																	0
13	$Q5+W2=Q2+Q6$		0	0												0				0
14	$x5Q5=x2Q2+x6Q6$		0	0																0
15	$Q6+W3=Q7$			0	0												1	1	1	4
16	$x6Q6=x7Q7$			0	0															0
17	$Q7=Q8+Q9$				0	0	1	1												2
18	$x7Q7=x8Q8+x9Q9$				0	0	1	1												2
19	$Q9+Q14+W4=Q10$						1	1				1						1		4
20	$x9Q9+x14Q14=x10Q10$						1	1				1								3
21	$Q10=Q11$							1	1											2
22	$x10Q10=x11Q11$							1	1											2
23	$Q11+W5=Q12$								1	1									1	3
24	$x11Q11=x12Q12$								1	1										2
25	$Q12=Q13+Q14$									1	1	1								3
26	$x12Q12=x13Q13+x14Q14$									1	1	1								3
27	$Q8+Q13=Q15$					1								1						3
28	$x8Q8+x13Q13=x15Q15$					1								1						3
	Sumatoria	0	0	0	0	0	4	4	4	4	4	4	6	3	0	0	3	3	3	4

Tabla anexo 12.- Matriz 8 (M8)

Número de ecuación	Balance	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	X15	w1	w2	w3	w4	w5	Suma	
1	$Q1+W1+W2+W3+W4+W5-Q15$													1		0	0	0	1	1	3
2	$x1Q1=x15Q15$													1							2
3	$Q1+W1+W2=Q6$			0											0	0					0
4	$x1Q1=x6Q6$			0																	0
5	$Q6+W3+W4+W5=Q15$			0									1				0	1	1	1	3
6	$x6Q6=x15Q15$			0									1								2
7	$Q1+Q3+W1=Q4$	0													0						0
8	$x1Q1+x3Q3=x4Q4$	0																			0
9	$Q2=Q3$																				0
10	$x2Q2=x3Q3$																				0
11	$Q4=Q5$	0	0																		0
12	$x4Q4=x5Q5$	0	0																		0
13	$Q5+W2=Q2+Q6$			0	0											0					0
14	$x5Q5=x2Q2+x6Q6$			0	0																0
15	$Q6+W3=Q7$				0	0															0
16	$x6Q6=x7Q7$				0	0															0
17	$Q7=Q8+Q9$				0	1	1														2
18	$x7Q7=x8Q8+x9Q9$				0	1	1														2
19	$Q9+Q14+W4=Q10$						1	1				1									4
20	$x9Q9+x14Q14=x10Q10$						1	1				1									3
21	$Q10=Q11$							1	1												2
22	$x10Q10=x11Q11$							1	1												2
23	$Q11+W5=Q12$								1	1											1
24	$x11Q11=x12Q12$								1	1											2
25	$Q12=Q13+Q14$									1	1										3
26	$x12Q12=x13Q13+x14Q14$									1	1										3
27	$Q8+Q13=Q15$				1								1								3
28	$x8Q8+x13Q13=x15Q15$				1								1								4
	Sumatoria	0	0	0	0	0	4	4	4	4	4	4	4	6	3	0	0	0	3	3	3

Tabla anexo 13.- Matriz 9 (M9)

Número de ecuación	Balance	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	X15	w1	w2	w3	w4	w5	Suma	
1	$Q1+W1+W2+W3+W4+W5=Q15$												1		0	0	0	0	1	1	3
2	$x1Q1=x15Q15$												1		1						2
3	$Q1+W1+W2=Q6$			0											0	0					0
4	$x1Q1=x6Q6$			0											0						0
5	$Q6+W3+W4+W5=Q15$			0									1		0		0	1	1	1	3
6	$x6Q6=x15Q15$			0									1		1						2
7	$Q1+Q3+W1=Q4$	0													0						0
8	$x1Q1+x3Q3=x4Q4$	0																			0
9	$Q2=Q3$																				0
10	$x2Q2=x3Q3$																				0
11	$Q4=Q5$	0	0																		0
12	$x4Q4=x5Q5$	0	0																		0
13	$Q5+W2=Q2+Q6$		0	0												0					0
14	$x5Q5=x2Q2+x6Q6$		0	0																	0
15	$Q6+W3=Q7$			0	0													0			0
16	$x6Q6=x7Q7$			0	0																0
17	$Q7=Q8+Q9$				0	0															0
18	$x7Q7=x8Q8+x9Q9$				0	0															0
19	$Q9+Q14+W4=Q10$					0	0						1					1			3
20	$x9Q9+x14Q14=x10Q10$						0	1					1								2
21	$Q10=Q11$							1	1												2
22	$x10Q10=x11Q11$							1	1												2
23	$Q11+W5=Q12$									1											1
24	$x11Q11=x12Q12$									1											2
25	$Q12=Q13+Q14$									1	1										3
26	$x12Q12=x13Q13+x14Q14$									1	1										3
27	$Q8+Q13=Q15$					0					1										2
28	$x8Q8+x13Q13=x15Q15=x1Q1$ (no se conoce separado x15 y Q15 pero si el producto de ambos x15Q15=x1Q1)					0					1										1
	Sumatoria	0	0	0	0	0	0	0	4	4	4	4	5	2	2	0	0	0	3	3	3

Tabla anexo 14.-Matriz 10 (M10)

Número de ecuación	Balance	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	X15	w1	w2	w3	w4	w5	Suma	
1	$Q1+W1+W2+W3+W4+W5=Q15$												1		0	0	0	0	1	1	3
2	$x1Q1=x15Q15$												1	1							2
3	$Q1+W1+W2=Q6$			0											0	0					0
4	$x1Q1=x6Q6$			0																	0
5	$Q6+W3+W4+W5=Q15$			0									1				0	1	1	1	3
6	$x6Q6=x15Q15$			0									1	1							2
7	$Q1+Q3+W1=Q4$	0													0						0
8	$x1Q1+x3Q3=x4Q4$	0																			0
9	$Q2=Q3$																				0
10	$x2Q2=x3Q3$																				0
11	$Q4=Q5$	0	0																		0
12	$x4Q4=x5Q5$	0	0																		0
13	$Q5+W2=Q2+Q6$			0	0												0				0
14	$x5Q5=x2Q2+x6Q6$	0	0																		0
15	$Q6+W3=Q7$			0	0												0				0
16	$x6Q6=x7Q7$			0	0																0
17	$Q7=Q8+Q9$					0	0														0
18	$x7Q7=x8Q8+x9Q9$					0	0														0
19	$Q9+Q14+W4=Q10$						0	1				1							1		3
20	$x9Q9+x14Q14=x10Q10$						0	1				1									2
21	$Q10=Q11$								1	1											2
22	$x10Q10=x11Q11$								1	1											2
23	$Q11+W5=Q12$								1	1											3
24	$x11Q11=x12Q12$								1	1											2
25	$Q12=Q13+Q14$									1	0	1									2
26	$x12Q12=x13Q13+x14Q14$									1	0	1									2
27	$Q8+Q13=Q15$				0						0		1								1
28	$x8Q8+x13Q13=x15Q15=x1Q1$ (ahora se vuelve a indicar x15 y Q15 por separado)												1	1							2
	Sumatoria	0	0	0	0	0	0	0	4	4	4	4	6	3	0	0	0	0	3	3	2

Tabla anexo 15.-Matriz 11 (M11)

Número de ecuación	Balance	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	X15	w1	w2	w3	w4	w5	Suma	
1	$Q1+W1+W2+W3+W4+W5=Q15$													0	0	0	0	0	1	1	2
2	$x1Q1=x15Q15$													0	0	0	0	0	1	1	1
3	$Q1+W1+W2=Q6$			0											0	0	0				0
4	$x1Q1=x6Q6$			0																	0
5	$Q6+W3+W4+W5=Q15$			0										0	0	0	0	1	1	1	2
6	$x6Q6=x15Q15$			0										0	0	0	0	1	1	1	1
7	$Q1+Q3+W1=Q4$	0													0						0
8	$x1Q1+x3Q3=x4Q4$	0																			0
9	$Q2=Q3$																				0
10	$x2Q2=x3Q3$																				0
11	$Q4=Q5$	0	0																		0
12	$x4Q4=x5Q5$	0	0																		0
13	$Q5+W2=Q2+Q6$	0	0	0												0	0				0
14	$x5Q5=x2Q2+x6Q6$	0	0	0																	0
15	$Q6+W3=Q7$			0	0												0				0
16	$x6Q6=x7Q7$			0	0																0
17	$Q7=Q8+Q9$			0	0	0															0
18	$x7Q7=x8Q8+x9Q9$			0	0	0															0
19	$Q9+Q14+W4=Q10$					0	0	1				1						1			3
20	$x9Q9+x14Q14=x10Q10$					0	0	1				1									2
21	$Q10=Q11$							1	1												2
22	$x10Q10=x11Q11$							1	1												2
23	$Q11+W5=Q12$								1	1											3
24	$x11Q11=x12Q12$								1	1											2
25	$Q12=Q13+Q14$									1	0	1									2
26	$x12Q12=x13Q13+x14Q14$									1	0	1									2
27	$Q8+Q13=Q15$					0					0	0									0
28	$x8Q8+x13Q13=x15Q15=x1Q1$ (ahora se vuelve a indicar x15 y Q15 por separado)					0					0	0									1
	Sumatoria	0	0	0	0	0	0	0	4	4	4	0	4	0	3	0	0	0	3	3	3

Tabla anexo 16.-Matriz 12 (M12)

Número de ecuación	Balance	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	X15	w1	w2	w3	w4	w5	Suma	
1	$Q1+W1+W2+W3+W4+W5=Q15$													0	0	0	0	0	1	1	2
2	$x1Q1=x15Q15$													0	0						0
3	$Q1+W1+W2=Q6$			0											0	0					0
4	$x1Q1=x6Q6$			0											0						0
5	$Q6+W3+W4+W5=Q15$			0										0	0	0	0	1	1	1	2
6	$x6Q6=x15Q15$			0										0	0						0
7	$Q1+Q3+W1=Q4$	0													0						0
8	$x1Q1+x3Q3=x4Q4$	0																			0
9	$Q2=Q3$																				0
10	$x2Q2=x3Q3$																				0
11	$Q4=Q5$	0	0																		0
12	$x4Q4=x5Q5$	0	0																		0
13	$Q5+W2=Q2+Q6$		0	0												0					0
14	$x5Q5=x2Q2+x6Q6$		0	0																	0
15	$Q6+W3=Q7$			0	0												0				0
16	$x6Q6=x7Q7$			0	0																0
17	$Q7=Q8+Q9$				0	0															0
18	$x7Q7=x8Q8+x9Q9$				0	0															0
19	$Q9+Q14+W4=Q10$				0	0		1				1						1			3
20	$x9Q9+x14Q14=x10Q10$				0	0		1				1									2
21	$Q10=Q11$							1	1												2
22	$x10Q10=x11Q11$							1	1												2
23	$Q11+W5=Q12$								1	1											2
24	$x11Q11=x12Q12$								1	1											2
25	$Q12=Q13+Q14$								1	0	1										2
26	$x12Q12=x13Q13+x14Q14$								1	0	1										2
27	$Q8+Q13=Q15$					0								0							0
28	$x8Q8+x13Q13=x15Q15=x1Q1$ (ahora se vuelve a indicar x15 y Q15 por separado)													0							0
	Sumatoria	0	0	0	0	0	0	0	4	4	4	4	0	0	0	0	0	0	3	3	3

Tabla anexo 17.-Matriz 13 (M13)

Número de ecuación	Balance	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	X15	w1	w2	w3	w4	w5	Suma	
1	Q1+W1+W2+W3+W4+W5=Q15													0	0	0	0	0	1	1	2
2	x1Q1=x15Q15													0	0						0
3	Q1+W1+W2=Q6			0											0	0					0
4	x1Q1=x6Q6			0																	0
5	Q6+W3+W4+W5=Q15			0									0				0	1	1	1	2
6	x6Q6=x15Q15			0									0	0							0
7	Q1+Q3+W1=Q4	0													0	0					0
8	x1Q1+x3Q3=x4Q4	0																			0
9	Q2=Q3																				0
10	x2Q2=x3Q3																				0
11	Q4=Q5	0	0																		0
12	x4Q4=x5Q5	0	0																		0
13	Q5+W2=Q2+Q6		0	0													0				0
14	x5Q5=x2Q2+x6Q6		0	0																	0
15	Q6+W3=Q7			0	0													0			0
16	x6Q6=x7Q7			0	0																0
17	Q7=Q8+Q9				0	0															0
18	x7Q7=x8Q8+x9Q9				0	0															0
19	Q9+Q14+W4=Q10					0	0	1										1			2
20	x9Q9+x14Q14=x10Q10					0	0	1													1
21	Q10=Q11							1	1												2
22	x10Q10=x11Q11							1	1												2
23	Q11+W5=Q12								1	0											1
24	x11Q11=x12Q12								1	0											1
25	Q12=Q13+Q14									0	0	0									0
26	x12Q12=x13Q13+x14Q14									0	0	0									0
27	Q8+Q13=Q15					0															0
28	x8Q8+x13Q13=x15Q15=x1Q1 (ahora se vuelve a indicar x15 y Q15 por separado)																				0
	Sumatoria	0	0	0	0	0	0	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3

Tabla anexo 18.-Matriz 14 (M14)

Número de ecuación	Balance	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	X15	w1	w2	w3	w4	w5	Suma	
1	$Q1+W1+W2+W3+W4+W5=Q15$													0	0	0	0	0	1	1	2
2	$x1Q1=x15Q15$													0							0
3	$Q1+W1+W2=Q6$			0										0	0	0					0
4	$x1Q1=x6Q6$			0																	0
5	$Q6+W3+W4+W5=Q15$			0										0			0	1	1	2	0
6	$x6Q6=x15Q15$			0										0	0						0
7	$Q1+Q3+W1=Q4$	0													0						0
8	$x1Q1+x3Q3=x4Q4$	0																			0
9	$Q2=Q3$																				0
10	$x2Q2=x3Q3$																				0
11	$Q4=Q5$	0	0																		0
12	$x4Q4=x5Q5$	0	0																		0
13	$Q5+W2=Q2+Q6$	0	0	0												0					0
14	$x5Q5=x2Q2+x6Q6$	0	0	0																	0
15	$Q6+W3=Q7$			0	0												0				0
16	$x6Q6=x7Q7$			0	0																0
17	$Q7=Q8+Q9$				0	0	0														0
18	$x7Q7=x8Q8+x9Q9$				0	0	0														0
19	$Q9+Q14+W4=Q10$							0	0									1			1
20	$x9Q9+x14Q14=x10Q10$							0	0												0
21	$Q10=Q11$								0	0											0
22	$x10Q10=x11Q11$								0	0											0
23	$Q11+W5=Q12$									0											1
24	$x11Q11=x12Q12$									0											0
25	$Q12=Q13+Q14$										0	0	0								0
26	$x12Q12=x13Q13+x14Q14$										0	0	0								0
27	$Q8+Q13=Q15$					0															0
28	$x8Q8+x13Q13=x15Q15=x1Q1$ (ahora se vuelve a indicar x15 y Q15 por separado)																				0
	Sumatoria	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3

Tabla anexo 19.-Matriz 15 (M15)

Número de ecuación	Balace	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	X15	w1	w2	w3	w4	w5	Suma
1	$Q1+W1+W2+W3+W4+W5=Q15$												0	0	0	0	0	1	0	1
2	$x1Q1=x15Q15$												0	0	0	0	0	1	0	0
3	$Q1+W1+W2=Q6$			0											0	0				0
4	$x1Q1=x6Q6$			0											0	0				0
5	$Q6+W3+W4+W5=Q15$			0									0	0	0	0	0	1	0	1
6	$x6Q6=x15Q15$			0									0	0	0	0				0
7	$Q1+Q3+W1=Q4$	0													0	0				0
8	$x1Q1+x3Q3=x4Q4$	0													0	0				0
9	$Q2=Q3$																			0
10	$x2Q2=x3Q3$																			0
11	$Q4=Q5$	0	0																	0
12	$x4Q4=x5Q5$	0	0																	0
13	$Q5+W2=Q2+Q6$			0	0											0				0
14	$x5Q5+x2Q2=x6Q6$			0	0											0				0
15	$Q6+W3=Q7$			0	0															0
16	$x6Q6=x7Q7$			0	0															0
17	$Q7=Q8+Q9$					0	0													0
18	$x7Q7=x8Q8+x9Q9$					0	0													0
19	$Q9+Q14+W4=Q10$							0	0										1	1
20	$x9Q9+x14Q14=x10Q10$							0	0										1	1
21	$Q10=Q11$							0	0											0
22	$x10Q10=x11Q11$							0	0											0
23	$Q11+W5=Q12$								0	0										0
24	$x11Q11=x12Q12$								0	0										0
25	$Q12=Q13+Q14$									0	0									0
26	$x12Q12=x13Q13+x14Q14$									0	0									0
27	$Q8+Q13=Q15$												0	0						0
28	$x8Q8+x13Q13=x15Q15=x1Q1$ (ahora se vuelve a indicar x15 y Q15 por separado)												0	0						0
	Sumatoria	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0

Tabla anexo 20.-Matriz 16 (M16)

Número de ecuación	Balance	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	X15	w1	w2	w3	w4	w5	
1	$Q1+W1+W2+W3+W4+W5=Q15$													0	0	0	0	0	0	
2	$x1Q1=x15Q15$													0	0	0	0	0	0	
3	$Q1+W1+W2=Q6$			0										0	0	0	0	0	0	
4	$x1Q1=x6Q6$			0										0	0	0	0	0	0	
5	$Q6+W3+W4+W5=Q15$			0									0	0	0	0	0	0	0	
6	$x6Q6=x15Q15$			0									0	0	0	0	0	0	0	
7	$Q1+Q3+W1=Q4$	0												0	0	0	0	0	0	
8	$x1Q1+x3Q3=x4Q4$	0												0	0	0	0	0	0	
9	$Q2=Q3$																			
10	$x2Q2=x3Q3$																			
11	$Q4=Q5$	0	0																	
12	$x4Q4=x5Q5$	0	0																	
13	$Q5+W2=Q2+Q6$			0	0											0	0	0	0	
14	$x5Q5=x2Q2+x6Q6$			0	0											0	0	0	0	
15	$Q6+W3=Q7$			0	0															
16	$x6Q6=x7Q7$			0	0															
17	$Q7=Q8+Q9$			0	0	0														
18	$x7Q7=x8Q8+x9Q9$			0	0	0														
19	$Q9+Q14+W4=Q10$					0	0					0								0
20	$x9Q9+x14Q14=x10Q10$					0	0					0								0
21	$Q10=Q11$							0	0											
22	$x10Q10=x11Q11$							0	0											
23	$Q11+W5=Q12$							0	0											0
24	$x11Q11=x12Q12$							0	0											
25	$Q12=Q13+Q14$									0	0	0								
26	$x12Q12=x13Q13+x14Q14$									0	0	0								
27	$Q8+Q13=Q15$					0								0						
28	$x8Q8+x13Q13=x15Q15=x1Q1$ (ahora se vuelve a indicar x15 y Q15 por separado)					0								0						
	Sumatoria	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Como resultado de la aplicación de la secuencia propuesta, la tabla 17 muestra los resultados que se obtuvieron para el balance metalúrgico del circuito de molienda SAG-Bolas de la Unidad Minera de Velardeña, Dgo. Las celdas en gris son los datos ya conocidos y el de las celdas sin relleno son los resultados calculados. Se utilizó una hoja de cálculo en donde se conectaron las celdas de datos de entrada con las respectivas ecuaciones despejadas de acuerdo a las matrices de la secuencia de resolución. Las toneladas por hora de los flujos de Q_1 a Q_{15} , son de pulpa, de tal forma que al hacer el producto $x_i Q_i$ se obtienen las toneladas por hora de sólidos. Las variables W , indican flujos de agua. Los resultados muestran que es posible determinar el balance metalúrgico del circuito y reconciliar los flujos de cada corriente de manera analítica.

ANEXO G.- RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE BALANCE METALÚRGICO DE CIRCUITO DE MOLIENDA UNIDAD VELARDEÑA, DGO.; GRUPO PEÑALES, MEDIANTE PROGRAMA COMPUTACIONAL (OCTAVE 5.1.0)

El algoritmo establecido en la metodología para lenguaje de programación, que se muestra en el diagrama de flujo de la figura 15, se desarrolló en Octave 5.1.0 el cual es un programa de código abierto muy similar a Matlab. Los datos obtenidos del mismo se muestran a continuación.

En este ejemplo se busca resolver el balance de materia del circuito de molienda de Unidad Minera Velardeña, sujeto a las condiciones iniciales:

$$x_1 = 98.6, x_2 = 99, x_3 = 99, x_4 = 78.8, x_5 = 78.8, x_6 = 63.82, x_7 = 57, x_8 = 25.6, \\ x_9 = 77.8, x_{10} = 76.8, x_{11} = 76.8, x_{12} = 66.3, x_{13} = 42.58, x_{14} = 78.7, Q_1 = 300.00, \\ Q_2 = 66.6667 \text{ y } Q_3 = 66.6667.$$

En este ejemplo, x_{15} es desconocida. Ya que Q_{15} también es desconocida, se crea la nueva variable $P_1 = x_{15} Q_{15}$. Con esto, las variables del sistema son:

$$\mathbf{q} = [Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8, Q_9, Q_{10}, Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, Q_{14}, Q_{15}, W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, P_1]$$

Se utiliza el sistema de ecuaciones planteado en la tabla 12, las mismas utilizadas en la resolución semimanual, solo que aquí se utiliza P_1 como el producto de $x_{15}Q_{15}$ y en el semimanual se llenaron las matrices por separado.

El sistema de Ecuaciones se puede agrupar en la forma $\mathbf{A}_0 \mathbf{q} = \mathbf{0}$, donde \mathbf{q} ya está definido más arriba. La matriz \mathbf{A}_0 como se introduce al programa se muestra en la Tabla anexo 21.

Se introducen en el programa, para resolver el sistema de ecuaciones, la matriz A_0 , y los vectores x , Q y W .

Tabla anexo 21.-Matriz A0

Tabla de datos de la matriz A0																					
Ec	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	W1	W2	W3	W4	W5	P1
1	1														-1	1	1	1	1	1	
2	x1																				-1
3	1					-1										1	1				
4	x1					-x6															
5						1									-1			1	1	1	
6						x6															-1
7	1		1	-1												1					
8	x1		x3	-x4																	
9		1	-1																		
10		x2	-x3																		
11				1	-1																
12				x4	-x5																
13		-1			1	-1											1				
14		-x2			x5	-x6															
15					1	-1												1			
16					x6	-x7															
17						1	-1	-1													
18						x7	-x8	-x9													
19								1	-1					1					1		
20								x9	-x10					x14							
21									1	-1											
22									x10	-x11											
23										1	-1									1	
24										x11	-x12										
25											1	-1	-1								
26											x12	-x13	-x14								
27								1					1		-1						
28								x8					x13								-1

El programa en seguida crea una matriz M_0 , que se muestra en la Tabla anexo 22, en la que se llenan con un 1 las posiciones correspondientes a los valores de A_0 distintos de 0. Esta matriz auxiliar permite contabilizar el número de incógnitas por renglón. Aquí comienza la solución iterativa del sistema.

Tabla anexo 22.-Matriz M0

Tabla de datos de la matriz M0																						
Ec	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	W1	W2	W3	W4	W5	P1	Incog.
1	1														1	1	1	1	1	1		7
2	1																				1	2
3	1					1										1	1					4
4	1					1																2
5						1									1			1	1	1		5
6						1															1	2
7	1		1	1												1						4
8	1		1	1																		3
9		1	1																			2
10		1	1																			2
11				1	1																	2
12				1	1																	2
13		1			1	1											1					4
14		1			1	1																3
15						1	1											1				3
16						1	1															2
17							1	1	1													3
18							1	1	1													3
19									1	1				1					1			4
20									1	1				1								3
21										1	1											2
22										1	1											2
23											1	1								1		3
24											1	1										2
25												1	1	1								3
26												1	1	1								3
27								1					1		1							3
28								1					1								1	3

Paso 1. En este paso se crea una matriz M_1 eliminando los 1 correspondientes a las variables conocidas en la condición inicial. En este caso se quitan los 1 que representan a Q_1 correspondiente con la columna 1, Q_2 correspondiente con la columna 2 y Q_3 correspondiente con la columna 3.

La Tabla anexo 23, muestra los datos de M_1 y el conteo de incógnitas por renglón.

Tabla anexo 23.-Matriz M1

Tabla de datos de la matriz M1																						
Ec	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	W1	W2	W3	W4	W5	P1	Incog.
1															1	1	1	1	1	1		6
2																					1	1
3						1										1	1					3
4						1																1
5						1									1			1	1	1		5
6						1															1	2
7				1												1						2
8				1																		1
9																						0
10																						0
11				1	1																	2
12				1	1																	2
13					1	1											1					3
14					1	1																2
15						1	1											1				3
16						1	1															2
17							1	1	1													3
18							1	1	1													3
19									1	1				1					1			4
20									1	1				1								3
21										1	1											2
22											1	1										2
23												1	1							1		3
24												1	1									2
25													1	1	1							3
26													1	1	1							3
27								1						1		1						3
28								1						1							1	3

En la matriz M_1 se buscan los renglones con 1 sola incógnita. Se encuentra que los renglones 2, 4 y 8 tienen una sola incógnita. Se busca si ellos corresponden a diferente incógnita, y para las que sean diferentes se resuelven dichos valores.

Los 3 renglones con 1 sola incógnita corresponden a variables distintas. Se resuelven todas ellas quedando:

Para la Ec. (2), la incógnita es P_1 . Se encuentra $P_1 = 29580$

Para la Ec. (4), la incógnita es Q_6 . Se encuentra $Q_6 = 463.4911$

Para la Ec. (8), la incógnita es Q_4 . Se encuentra $Q_4 = 459.1370$

Paso 2. Se crea una matriz M_2 eliminando los 1 correspondientes a las incógnitas resueltas en el paso anterior, es decir: P_1 correspondiente con la columna 21. Q_6 correspondiente con la columna 6. Q_4 correspondiente con la columna 4.

Tabla anexo 24.-Matriz M2

Tabla de datos de la matriz M2																						
Ec	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	W1	W2	W3	W4	W5	P1	Incog.
1															1	1	1	1	1	1		6
2																						0
3																1	1					2
4																						0
5															1			1	1	1		4
6																						0
7																1						1
8																						0
9																						0
10																						0
11					1																	1
12					1																	1
13					1												1					2
14					1																	1
15							1											1				2
16							1															1
17							1	1	1													3
18							1	1	1													3
19									1	1				1					1			4
20									1	1				1								3
21										1	1											2
22										1	1											2
23											1	1								1		3
24											1	1										2
25												1	1	1								3
26												1	1	1								3
27										1					1							3
28										1						1						2

En M_2 se buscan los renglones con 1 sola incógnita. Se encuentra que los renglones 7, 11, 12, 14 y 16 tienen una sola incógnita. Se busca si ellos corresponden a diferente incógnita, y para las que sean diferentes se resuelve dichos valores.

De 5 renglones con 1 sola incógnita, 3 son variables distintas. Se resuelven todas ellas quedando:

Para la Ec. (7), la incógnita es W_1 . Se encuentra $W_1 = 92.4704$

Para la Ec. (11), la incógnita es Q_5 . Se encuentra $Q_5 = 459.1370$

Para la Ec. (16), la incógnita es Q_7 . Se encuentra $Q_7 = 518.9474$

Paso 3. Se crea una matriz M_3 eliminando los 1 correspondientes a las incógnitas resueltas en el paso anterior, es decir: W_1 correspondiente con la columna 16. Q_5 correspondiente con la columna 5. Q_7 correspondiente con la columna 7.

En la matriz M_3 se buscan los renglones con 1 sola incógnita. Se encuentra que los renglones 3, 13 y 15 tienen una sola incógnita. Se busca si ellos corresponden a diferente incógnita, y para las que sean diferentes se resuelve dichos valores.

Tabla anexo 25.-Matriz M3

Tabla de datos de la matriz M3																						
Ec	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	W1	W2	W3	W4	W5	P1	Incog.
1															1		1	1	1	1		5
2																						0
3																	1					1
4																						0
5															1			1	1	1		4
6																						0
7																						0
8																						0
9																						0
10																						0
11																						0
12																						0
13																	1					1
14																						0
15																		1				1
16																						0
17								1	1													2
18								1	1													2
19									1	1				1					1			4
20									1	1				1								3
21										1	1											2
22											1	1										2
23												1	1							1		3
24												1	1									2
25													1	1	1							3
26													1	1	1							3
27									1						1							3
28									1						1							2

De 3 renglones con 1 sola incógnita, 2 son variables distintas. Se resuelven todas ellas quedando:

Para la Ec. (3), la incógnita es W_2 . Se encuentra $W_2 = 71.0207$

Para la Ec. (15), la incógnita es W_3 . Se encuentra $W_3 = 55.4563$

Paso 4. Se crea una matriz M_4 eliminando los 1 correspondientes a las incógnitas resueltas en el paso anterior, es decir: W_2 correspondiente con la columna 17. W_3 correspondiente con la columna 18.

En la matriz M_4 se buscan los renglones con 1 sola incógnita. No se encontraron ecuaciones con una sola incógnita, se buscarán las de dos incógnitas. Se encuentra que los renglones

17, 18, 21, 22, 24 y 28 tienen 2 incógnitas cada uno. Se busca cuáles de ellos corresponden a ecuaciones linealmente independientes con el mismo par de incógnitas.

Tabla anexo 26.-Matriz M4

Tabla de datos de la matriz M4																						
Ec	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	W1	W2	W3	W4	W5	P1	Incog.
1															1				1	1		3
2																						0
3																						0
4																						0
5															1				1	1		3
6																						0
7																						0
8																						0
9																						0
10																						0
11																						0
12																						0
13																						0
14																						0
15																						0
16																						0
17								1	1													2
18								1	1													2
19									1	1				1					1			4
20									1	1				1								3
21										1	1											2
22										1	1											2
23											1	1								1		3
24											1	1										2
25												1	1	1								3
26												1	1	1								3
27								1					1		1							3
28								1					1									2

Se encuentra que las Ecuaciones 17 y 18 son linealmente independientes.

Se encuentra $Q_8 = 206.7836$ y $Q_9 = 312.1637$

Paso 5. Se crea una matriz M_5 eliminando los 1 correspondientes a las incógnitas resueltas en el paso anterior, es decir: Q_8 correspondiente con la columna 8. Q_9 correspondiente con la columna 9.

En la matriz M_5 se buscan los renglones con 1 sola incógnita. Se encuentra que el renglón 28, tiene una sola incógnita.

Tabla anexo 27.-Matriz M5

Tabla de datos de la matriz M5																						
Ec	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	W1	W2	W3	W4	W5	P1	Incog.
1															1				1	1		3
2																						0
3																						0
4																						0
5															1				1	1		3
6																						0
7																						0
8																						0
9																						0
10																						0
11																						0
12																						0
13																						0
14																						0
15																						0
16																						0
17																						0
18																						0
19										1				1					1			3
20										1				1								2
21										1	1											2
22										1	1											2
23											1	1								1		3
24											1	1										2
25												1	1	1								3
26												1	1	1								3
27													1		1							2
28													1									1

Se resuelve dicho valor quedando:

Para la Ec. (28), la incógnita es Q_{13} . Se encuentra $Q_{13} = 570.3696$

Paso 6. Se crea una matriz M_6 eliminando los 1 correspondientes a las incógnitas resueltas en el paso anterior, es decir: Q_{13} correspondiente con la columna 13.

En la matriz M_6 se buscan los renglones con 1 sola incógnita. Se encuentra que el renglón 27, tienen una sola incógnita.

Tabla anexo 28.-Matriz M6

Tabla de datos de la matriz M6																						
Ec	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	W1	W2	W3	W4	W5	P1	Incog.
1															1				1	1		3
2																						0
3																						0
4																						0
5															1				1	1		3
6																						0
7																						0
8																						0
9																						0
10																						0
11																						0
12																						0
13																						0
14																						0
15																						0
16																						0
17																						0
18																						0
19										1				1					1			3
20										1				1								2
21										1	1											2
22										1	1											2
23											1	1								1		3
24											1	1										2
25												1		1								2
26												1		1								2
27															1							1
28																						0

Se resuelve para Q_{15} quedando:

Para la Ec. (27), la incógnita es Q_{15} . Se encuentra $Q_{15} = 777.1533$

Paso 7. Se crea una matriz M_7 eliminando los 1 correspondientes a las incógnitas resueltas en el paso anterior, es decir: Q_{15} correspondiente con la columna 15.

En la matriz M_7 se buscan los renglones con 1 sola incógnita. No se encontraron ecuaciones con una sola incógnita, se buscarán las de dos incógnitas. Se encuentra que los renglones 1, 5, 20, 21, 22, 24, 25 y 26 contienen 2 incógnitas cada uno. Se busca cuáles de ellos corresponden a ecuaciones linealmente independientes con el mismo par de incógnitas.

Tabla anexo 29.-Matriz M7

Tabla de datos de la matriz M7																						
Ec	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	W1	W2	W3	W4	W5	P1	Incog.
1																			1	1		2
2																						0
3																						0
4																						0
5																			1	1		2
6																						0
7																						0
8																						0
9																						0
10																						0
11																						0
12																						0
13																						0
14																						0
15																						0
16																						0
17																						0
18																						0
19										1				1					1			3
20										1				1								2
21										1	1											2
22										1	1											2
23											1	1								1		3
24											1	1										2
25												1		1								2
26												1		1								2
27																						0
28																						0

Se encuentra que las Ecuaciones 25 y 26 son linealmente independientes.

Se encuentra $Q_{12} = 1661.4316$ y $Q_{14} = 1091.0619$

Paso 8. Se crea una matriz M_8 eliminando los 1 correspondientes a las incógnitas resueltas en el paso anterior, es decir: Q_{12} correspondiente con la columna 12. Q_{14} correspondiente con la columna 14.

En la matriz M_8 se buscan los renglones con 1 sola incógnita. Se encuentra que los renglones 20 y 24, tienen una sola incógnita. Se busca si ellos corresponden a diferente incógnita, y para las que sean diferentes y se resuelve para dichos valores.

Tabla anexo 30.-Matriz M8

Tabla de datos de la matriz M8																						
Ec	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	W1	W2	W3	W4	W5	P1	Incog.
1																			1	1		2
2																						0
3																						0
4																						0
5																			1	1		2
6																						0
7																						0
8																						0
9																						0
10																						0
11																						0
12																						0
13																						0
14																						0
15																						0
16																						0
17																						0
18																						0
19										1									1			2
20										1												1
21										1	1											2
22										1	1											2
23											1									1		2
24											1											1
25																						0
26																						0
27																						0
28																						0

Los 2 renglones con 1 sola incógnita corresponden a variables distintas, que en realidad tienen el mismo valor pues son la entrada y salida del molino de bolas, el cual no cambia en cantidad sino en granulometría. Se resuelven todas ellas quedando:

Para la Ec. (20), la incógnita es Q_{10} . Se encuentra $Q_{10} = 1434.2827$

Para la Ec. (24), la incógnita es Q_{11} . Se encuentra $Q_{11} = 1434.2827$

Paso 9. Se crea una matriz M_9 eliminando los 1 correspondientes a las incógnitas resueltas en el paso anterior, es decir: Q_{10} correspondiente con la columna 10. Q_{11} correspondiente con la columna 11.

En la matriz M_9 se buscan los renglones con 1 sola incógnita. Se encuentra que los renglones 19, 23, tienen una sola incógnita. Se busca si ellos corresponden a diferente incógnita, y para las que sean diferentes se resuelven dichos valores.

Tabla anexo 31.-Matriz M9

Tabla de datos de la matriz M9																						
Ec	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	W1	W2	W3	W4	W5	P1	Incog.
1																			1	1		2
2																						0
3																						0
4																						0
5																			1	1		2
6																						0
7																						0
8																						0
9																						0
10																						0
11																						0
12																						0
13																						0
14																						0
15																						0
16																						0
17																						0
18																						0
19																			1			1
20																						0
21																						0
22																						0
23																				1		1
24																						0
25																						0
26																						0
27																						0
28																						0

Los 2 renglones con 1 sola incógnita corresponden a variables distintas. Se resuelven todas ellas quedando:

Para la Ec. (19), la incógnita es W_4 . Se encuentra $W_4 = 31.0570$

Para la Ec. (23), la incógnita es W_5 . Se encuentra $W_5 = 227.1488$

Paso 10. Se crea una matriz M_{10} eliminando los 1 correspondientes a las incógnitas resueltas en el paso anterior, es decir: W_4 correspondiente con la columna 19. W_5 correspondiente con la columna 20.

Se observa que la matriz M_{10} es igual a cero, es decir, ya no quedan incógnitas.

Tabla anexo 32.-Matriz M10

Tabla de datos de la matriz M10

Ec	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	W1	W2	W3	W4	W5	P1	Incog.	
1																							0
2																							0
3																							0
4																							0
5																							0
6																							0
7																							0
8																							0
9																							0
10																							0
11																							0
12																							0
13																							0
14																							0
15																							0
16																							0
17																							0
18																							0
19																							0
20																							0
21																							0
22																							0
23																							0
24																							0
25																							0
26																							0
27																							0
28																							0

Ya que se han resuelto todas las incógnitas, se determina x_{15} a partir de P_1 y Q_{15} :

$$x_{15} = \frac{P_1}{Q_{15}} = 38.0620$$

ANEXO H.- REPORTE DE HOJA DE CÁLCULO SAG_ParamOpen DE MOLYCOP TOOLS

Tabla anexo 33.-Reporte de hoja de cálculo SAG_ParamOpen de MolyCop Tools

Moly-Cop Tools™ (Version 3.0)

SAG_Param SAG Model Parameter Estimator

Test N° 1

Remarks : Design Example : Velardeña Tesis

DESIGN AND OPERATING CONDITIONS

Configuration : OPEN

Eff. Diameter, ft	26.0	Throughput, ton/hr	300.00
Eff. Length, ft	12.0	Water, m3/hr	80.71
Speed, % Critical	76.0	Slurry, ton/hr	380.71
Charge Level, %	28.0	Slurry, m3/hr	187.85
Ball Filling, %	11.0	Slurry Dens., ton/m3	2.027
Interstitial Filling, %	50	% Solids (slurry)	78.80
Lift Angle, (°)	39.787062		
Grate Opening, mm	19.3	Power, kW (net)	3059.7
App. Dens., ton/m3	3.252	Energy, kWh/ton	10.20

Particle Size Distributions (Cumm. % Passing)

i	Mesh	Opening	Feed	Mill Discharge		Mill Load			
				Exp.	Adj.	Exp.	Adj.		
1	6-	152400	100.00	100.00	/	100.00	100.00	/	100.00
2	4"	101600	82.16	100.00	/	100.00	100.00	/	80.20
3	3"	76200	71.92	100.00	/	100.00	100.00	/	65.88
4	2"	50800	54.53	100.00	/	100.00	100.00	/	36.72
5	1.5"	38100	46.01	100.00	/	100.00	100.00	/	21.55
6	1"	25400	35.06	96.36	/	100.00	100.00	/	5.58
7	0.75"	19050	30.21	94.13	/	97.10	100.00	/	4.12
8	0.5"	12700	23.87	90.49	/	92.86	100.00	/	3.51
9	0.375"	9525	20.82	87.86	/	89.20	100.00	/	3.20
10	0.25"	6350	15.48	80.77	/	83.92	100.00	/	2.92
11	4	4699	15.22	79.84	/	80.69	100.00	/	2.78
12	6	3327	13.05	75.58	/	76.46	100.00	/	2.61
13	8	2360	11.32	71.52	/	71.77	100.00	/	2.44
14	14	1400	9.16	65.17	/	65.06	100.00	/	2.21
15	20	850	7.66	59.21	/	59.19	100.00	/	2.01
16	30	595	6.83	54.39	/	54.73	100.00	/	1.86
17	40	425	6.15	49.68	/	50.37	100.00	/	1.71
18	50	300	5.54	44.82	/	45.54	100.00	/	1.54
19	70	212	4.99	39.50	/	40.50	100.00	/	1.37
20	100	150	4.48	35.03	/	35.79	100.00	/	1.21
21	150	106	3.98	30.67	/	31.30	100.00	/	1.06
22	200	75	3.59	26.48	/	27.02	100.00	/	0.92
23	270	53	3.02	22.56	/	22.94	100.00	/	0.78
24	325	45	2.80	21.05	/	21.17	100.00	/	0.72
25	400	38	2.56	19.50	/	19.50	100.00	/	0.66
D80, microns			95907	4945	/	4448	0	/	101223

SAGParam_Open MODEL PARAMETERS

Selection Function			
Balls on Particles :		Self-Breakage :	
alpha0	0.003104	alpha0	0.000068
alpha1	0.721	alpha1	0.711
alpha2	3.50		
Dcrit	6432.845778		
Rocks on Particles :			
alpha0	0.033516		
alpha1	0.598		
alpha2	3.50		
Dcrit	6676.441534		

Breakage Function	
beta00	1.4834
beta01	0.050
beta1	0.739
beta2	2.50
beta30	0.1270
beta31	0.000

Grate Parameters	
Inefficiency	0.400
D50/DGrate	0.600
m	2.000

Obj. Function	1.214
----------------------	--------------