



Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Facultad de Ingeniería

Centro de Investigación y Estudios de Posgrado

Filtro de Partículas en Espacio de Cámara para un control basado en visión de una silla de ruedas eléctrica en ambientes estructurados

T E S I S

Que para obtener el grado de:

Doctor en Ingeniería Mecánica

Presenta:

M.C. Raúl Chávez Romero

Asesor:

Dr. Juan Antonio Cárdenas Galindo

San Luis Potosí, S. L. P.

Junio de 2015





UASLP
Universidad Autónoma
de San Luis Potosí

15 de enero de 2015

M.C. RAÚL CHÁVEZ ROMERO
P R E S E N T E.

En atención a su solicitud de Temario, presentada por el **Dr. Juan Antonio Cárdenas Galindo**, Asesor de la Tesis que desarrollará Usted, con el objeto de obtener el Grado de **Doctor en Ingeniería Mecánica**. Me es grato comunicarle que en la Sesión de Consejo Técnico Consultivo celebrada el día 15 de enero del presente año, fue aprobado el Temario propuesto:

TEMARIO:

"Filtro de Partículas en Espacio de Cámara para un control basado en visión de una silla de ruedas eléctrica en ambientes estructurados"

INTRODUCCIÓN.

1. ANTECEDENTES DE FILTROS BAYESIANOS.
2. DESARROLLO DE ESTRATEGIAS DE LOCALIZACIÓN Y CONTROL BASADAS EN VISIÓN PARA UNA SILLA DE RUEDAS.
3. IMPLEMENTACIÓN DE UN CONTROL BASADO EN VISIÓN DE UNA SILLA DE RUEDAS UTILIZANDO TÉCNICAS DE FILTRADO.
4. EXPERIMENTACIÓN, RESULTADOS Y DISCUSIÓN.

CONCLUSIONES.

REFERENCIAS.

ANEXOS.

"MODOS ET CUNCTARUM RERUM MENSURAS AUDEBO"

A T E N T A M E N T E

M. I. JORGE ALBERTO PÉREZ GONZÁLEZ
DIRECTOR.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE SAN LUIS POTOSÍ
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIRECCION



**FACULTAD DE
INGENIERÍA**

Av. Manuel Nava 8
Zona Universitaria • CP 78290
San Luis Potosí, S.L.P.
tel: (444) 826 2330 al 39
fax: (444) 826 2336
www.uaslp.mx

Copia. Archivo.
*etn

Índice

Índice.....	v
Índice de figuras	viii
Índice de tablas	x
Agradecimientos.....	xi
Introducción.....	1
Introducción	2
Justificación	7
Aspectos sociales	7
Aspectos científico-tecnológicos	9
Objetivos.....	11
Objetivos generales	11
Objetivos particulares.....	11
Hipótesis.....	11
Aportaciones.....	11
Estructura de la tesis	12
CAPÍTULO 1: Antecedentes de filtros bayesianos.....	13
1.1 Introducción.....	14
1.2 Estimación bayesiana	16
1.3 Filtro de Kalman	17
1.3.1 Filtrado secuencial.....	20
1.3.2 Propagación del error	21
1.3.3 Filtro de Kalman Extendido.....	25
1.4 Filtro de Partículas	28

CAPÍTULO 2: Desarrollo de la estrategia de localización y control basadas en visión para una silla de ruedas	33
2.1 Antecedentes de robótica móvil	34
2.1.1 Modelos cinemáticos de vehículos con ruedas.....	34
2.1.2 Percepción.....	44
2.1.3 Sistemas de visión.....	45
2.1.4 Estrategias de control	52
2.1.5 Navegación: localización y planeación	52
2.2 Cinemática de una silla de ruedas	60
2.3 Función de observación	62
2.4 Estimación de parámetros de visión.....	64
2.5 Enseñanza-Repetición	66
2.6 Control y planeación de ruta	68
CAPÍTULO 3: Implementación de un control basado en visión de una silla de ruedas utilizando técnicas de filtrado	71
3.1 Implementación de Filtro de Kalman Extendido para un control basado en visión	72
3.2 Implementación de Partículas Aleatorias para un control basado en visión	73
3.3 Implementación del Filtro de Partículas en Espacio de Cámara para un control basado en visión.....	75
3.4 Instrumentación de silla de ruedas	81
CAPÍTULO 4: Experimentación, resultados y discusión	85
4.1 Descripción del experimento	86
4.1.1 Validación y prueba del Filtro de Partículas en Espacio de Cámara .	87
4.1.2 Filtro de Partículas y Enseñanza-Repetición	89
4.2 Resultados	89

4.2.1	Validación y prueba de CSPF	90
4.2.2	Filtro de Partículas en Espacio de Cámara: enseñanza y repetición .	99
4.3	Discusión.....	104
	Conclusiones.....	109
	Conclusiones	110
	Trabajo futuro	113
	Referencias	115
	Anexos	123
Anexo A:	Generales de probabilidad.....	124
Anexo B:	Sistemas dinámicos lineales homogéneos	129
Anexo C:	Ecuaciones del Filtro de Kalman Extendido	133

Índice de figuras

Figura 1.	Diversas aplicaciones de robots móviles.....	3
Figura 2.	Ejemplos de sillas de ruedas robotizadas.	5
Figura 2.1.	Esquema del desplazamiento de un disco en un plano.	36
Figura 2.2.	Esquema de vehículo sobre ruedas tipo triciclo.	39
Figura 2.3.	Esquema de vehículo sobre ruedas con dirección tipo Ackerman. ...	40
Figura 2.4.	Esquema de vehículo sobre ruedas con dirección tipo diferencial. ...	42
Figura 2.5.	Diferentes configuraciones de Sistemas de Visión Catadióptricos. (A) Perfil parabólico, (B) Perfil hiperbólico y (C) Perfil elíptico.	49
Figura 2.6.	Geometría del modelo de cámara de agujero.	51
Figura 2.7.	Trayectoria poligonal.	57
Figura 2.8.	Descripción de los parámetros de visión utilizados en las observaciones.	63
Figura 2.9.	Esquema general del algoritmo de enseñanza-repetición.....	67
Figura 2.10.	Diagrama de control, fase de enseñanza.....	68
Figura 2.11.	Diagrama de control de fase de repetición.....	69
Figura 2.12.	Algoritmo de control en la etapa de repetición	69
Figura 3.1.	Diagrama esquemático de Filtro de Kalman Extendido.....	73
Figura 3.2.	Estimación con Partículas Aleatorias	74
Figura 3.3.	Diagrama esquemático del filtro de Partículas Aleatorias.	75
Figura 3.4.	Esquema de la implementación del filtro de Partículas en espacio de cámara.	77
Figura 3.5.	Diagrama esquemático del Filtro de Partículas Aleatorias es Espacio de Cámara.	80
Figura 3.6.	Ejemplo de rutas probables utilizando Filtro de Partículas.....	81
Figura 3.7.	Modificación de caja de transmisión para montaje de encoders.	82

Figura 3.8.	Elementos utilizados para la realización de las técnicas de control y navegación.....	83
Figura 3.9.	Diagrama componentes de silla de ruedas.	83
Figura 4.1.	Marcas visuales artificiales y silla de ruedas en posición inicial.....	86
Figura 4.2.	Esquema del experimento “Línea Recta”	88
Figura 4.3.	Esquema del experimento “Ruta-L”	88
Figura 4.4.	Esquema del experimento “Ruta-Oficina”	89
Figura 4.5.	Posiciones alcanzadas por la silla de ruedas con diferentes filtros en experimento de “Línea recta”.	92
Figura 4.6.	Posiciones alcanzadas por la silla de ruedas con diferentes filtros en experimento de “Ruta-L”.	92
Figura 4.7.	Comparativo entre ruta de referencia y posiciones alcanzadas usando CSPF en experimento “Ruta Oficina”.	94
Figura 4.8.	Error total en m para diferentes experimentos (según técnica de filtrado).	96
Figura 4.9.	Desviación total relativa al ancho de la silla de ruedas.	97
Figura 4.10.	Comparación de tiempo de procesamiento entre EKF, PA y CSPF con diferentes cantidades de partículas.	98
Figura 4.11.	Comparativo entre mediciones y estimaciones de la posición de una silla de ruedas utilizando CSPF en experimento de “Línea Recta”.	100
Figura 4.12.	Comparativo entre mediciones y estimaciones de la posición de una silla de ruedas utilizando CSPF en “Ruta-L”.	101
Figura 4.13.	Comparativo entre mediciones y estimaciones de la posición de una silla de ruedas utilizando CSPF en experimento de “Ruta-Oficina”.	103
Figura 4.14.	Índice de error para cada filtro.	107

Índice de tablas

Tabla 2.1.	Datos capturados para el cálculo de los parámetros de visión.	65
Tabla 2.2.	Parámetros de visión.....	65
Tabla 4.1.	Error RMS en m de la posición alcanzada usando diferentes técnicas de filtrado y la ruta de referencia en diferentes experimentos.....	95
Tabla 4.2.	Diferencias entre datos medidos y estimados en enseñanza y repetición en experimento " <i>Línea Recta</i> ".	101
Tabla 4.3.	Diferencias entre datos medidos y estimados en enseñanza y repetición en experimento " <i>Ruta-L</i> ".	102
Tabla 4.4.	Diferencias entre datos medidos y estimados en enseñanza y repetición en experimento " <i>Ruta-Oficina</i> ".	102

Agradecimientos

Agradezco a Dios que siempre ilumina mis pasos.

Agradezco a mis padres, David y Martha cuyo ejemplo de esfuerzo, tenacidad y pasión por el trabajo arrastran sin remedio.

Agradezco a las Universidades Autónomas de Zacatecas y de San Luis Potosí y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo y las oportunidades de crecimiento que generan.

Agradezco a mi Asesor Dr. Juan Antonio Cárdenas por su fe, su paciencia y su amistad sincera.

Agradezco a los Doctores Mauro Maya, Dirk Frederik, Hugo Medellín y Davide Piovesan por compartir sin reservas sus conocimientos y su entusiasmo por el saber y la excelencia.

Agradezco a mis amigos de toda la vida Luis, Pablo, Goyo, Omero y a mis nuevos amigos de toda la vida Marco, Prix, Eder, Andrés, Víctor, Darío, Luis, Dora, Miguel, Juan Carlos, Pola, Bety, Enrique, Efraín.

Agradezco a mis hermanos Luis, Leticia y Perla compañeros y amigos inigualables, donde, buenas soluciones, mejores consejos y excelentes regaños siempre hay.

A la familia Romero Núñez por todas esas porras.

Y en especial a mi querida esposa Claudia Yazmín y a mi hijo Josué por darle tantas alegrías a este viejo refunfuñón.

Lista de símbolos

$p(a)$	Probabilidad de a	$E\{a\}$	Esperanza matemática de a
$p(a b)$	Probabilidad de a dado b	$cov\{a\}$	Covarianza de a
$\hat{\mathbf{x}}$	Vector de estados óptimo	$\hat{\mathbf{x}}_a$	Vector de estados óptimo <i>a priori</i>
\mathbf{z}	Vector de mediciones	\mathbf{x}	Vector de estados
H	Matriz de transformación de espacio de estados a espacio de mediciones	J_{MAP}	Función de costos
\mathbf{v}	Vector de ruido de la medición	\mathbf{w}, \mathbf{W}	Vector de ruido del sistema
R	Matriz de covarianza del error de la medición	Q	Matriz de covarianza del ruido del sistema
$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	Función normal con media μ y varianza σ .	K	Matriz de Kalman
P	Matriz de covarianza del error del sistema.	G	Matriz de transición de estado
\mathbf{z}_k	Vector de mediciones en el instante k	\mathbf{x}_k	Vector de estados en el instante k
\mathbf{x}_k^+	Vector de estados en k considerando la medición k	\mathbf{x}_k^-	Vector de estados en k sin considerar la medición k
W	Inversa de la matriz R	\mathbf{u}	Vector de entradas de control
$\dot{\mathbf{x}}$	Derivada en el tiempo del vector de estados	Φ	Matriz de transición del estado
I	Matriz identidad	$\bar{\mathbf{x}}$	Vector de estados promedio
δ	Función delta de Dirac	\mathbf{x}_0	Vector de estados iniciales
$\mathbf{f}(\cdot)$	Función del sistema	$\mathbf{h}(\cdot)$	Función de observación
n	Número de partículas	q_i	Peso de la i -ésima partícula
$\mathbf{x}^{(j)}$	j -ésimo vector de estados	\mathbf{q}	Vector de coordenadas generalizadas
ϵ	Índice de error		

(X, Y, φ)	Posición X , Y y orientación φ de un objeto en espacio físico	ω_r	Velocidad angular de rueda motriz en vehículo tipo triciclo
n_l	Número de grados de libertad	k_a	Número de actuadores
$X_0 - Y_0$	Marco de coordenadas globales	$\dot{\varphi}$	Velocidad angular en la dirección φ
\dot{X}	Velocidad lineal en la dirección X	\dot{Y}	Velocidad lineal en la dirección Y
r	Radio de las ruedas	θ	Posición angular de rueda
$\dot{\theta}$	Velocidad angular de rueda	v	Velocidad de vehículo
ρ	Radio de curvatura	l	Largo de vehículo
ω_s	Velocidad angular de rueda motriz en dirección Ackerman	$\dot{\theta}_d, \dot{\theta}_i$	Velocidad angular de rueda derecha e izquierda
CR	Centro de Rotación	s	Ancho medio de vehículo
\hat{e}_1, \hat{e}_2	Vectores unitarios longitudinal y transversal al movimiento de un vehículo con ruedas.	α	Ángulo promedio entre incrementos de ruedas derecha e izquierda en robot diferencial
C_1, C_2, C_3, C_4	Parámetros de visión	X_q, Y_q	Posición de marcas visuales
X_p, Y_p, φ_p	Posición P de silla de ruedas	$\mathbb{U}[0,1]$	Distribución uniforme 0 a 1
\mathbf{X}	Vector de estados en espacio físico	$\mathbf{x}_k^{(i)}$	Vector del i -ésimo estado en espacio de cámara.
\mathbf{X}_{ME}	Posición en espacio físico medida en entrenamiento	\mathbf{X}_{EE}	Posición estimada en el entrenamiento
\mathbf{X}_{MR}	Posición en espacio físico medida en repetición	\mathbf{X}_{ER}	Posición estimada en repetición
a_0, a_1, a_2, a_3, a_4	Parámetros para ajuste polinomial	\mathbf{W}_p	Ancho medio de ventana de distribución de partículas aleatorias
$\theta G_1, \theta G_2$	Ángulo de giro de silla al inicio y final de la maniobra de corrección de posición	LG	Longitud de avance en maniobra de corrección de posición

Lista de acrónimos

COPIS	Sensor de imagen de proyección cónica
CPSF	Filtro de Partículas en Espacio de Cámara
CR	Centro de rotación
EKF	Filtro de Kalman Extendido
iid	Independientes e idénticamente distribuidas
LMS	Promedio de mínimos cuadrados
MAP	Máximo <i>a posteriori</i>
MCSM	Manipulación en Espacio de Cámara Móvil
PA	Partículas Aleatorias
pdf	Función de densidad de probabilidad
RMS	Raíz media cuadrática
SCI	Lesiones de médula espinal
SLAM	Mapeo y localización simultáneas
SMC	Monte Carlo secuencial
VHF	Histograma de Campo Vectorial

Introducción

Introducción

En la actualidad gracias a los diversos avances tecnológicos de la automatización de sistemas es una actividad cotidiana a muchas áreas de la ingeniería. Uno de los ejemplos más sobresalientes del proceso de automatización llevado a los límites del conocimiento humano es la robótica, en donde, un sistema mecánico es dotado de la capacidad de realizar procesos de manera automática teniendo además una cierta capacidad de decisión.

Los últimos logros alcanzados dentro del desarrollo industrial se deben en gran medida al desarrollo de la robótica. La producción en serie ha llegado a un nivel de eficiencia nunca antes visto, esto, gracias al uso de brazos robóticos capaces de repetir tareas de manera automática a una velocidad y precisión imposible de alcanzar por un ser humano. Sin embargo, muchos de los nuevos retos de la robótica se centran en la robótica móvil, ya que a diferencia de los brazos robóticos fijos donde su entorno es controlado, un robot móvil, se debe adaptar a un nuevo entorno en cada cambio de posición que realiza, haciendo necesario un nivel más elevado de "inteligencia" que le permita la toma de decisiones de tal forma que pueda desempeñarse en un ambiente fluctuante [7].

En la Figura 1 se muestran algunas de las actividades en las que actualmente los robots móviles son empleados, por ejemplo: para la exploración de lugares de alto riesgo que pueden ir desde la exploración de otros planetas (Figura 1a), la búsqueda de minas, rescate en catástrofes, exploración de zonas con contaminación nuclear, exploración aérea (Figura 1d) etc.; para el transporte de materiales en áreas industriales (Figura 1f), comerciales o de difícil acceso (Figura 1b); para la realización de actividades domésticas (Figura 1e) (limpieza de pisos, vidrios, etc.); robots de entretenimiento y compañía (Figura 1c); robots guía para museos (Figura 1g), hospitales o casas habitación, así como robots de asistencia para personas con algún problema de salud [7].

Respecto de los robots de asistencia, existen desde robots de acompañamiento utilizados para dar apoyo psicológico (sin actividad física alguna), hasta aquellos que activamente intervienen en el mejoramiento del nivel de vida de algún paciente, como lo pueden ser, robots caminadores o sillas de ruedas robotizadas, ver Figura 2, [8]. Sobre sillas de ruedas robotizadas existen trabajos importantes desarrollados por diferentes equipos alrededor del mundo que han tratado de brindar diferentes soluciones que ayuden a los usuarios de sillas de ruedas a mejorar su experiencia en el uso de estos dispositivos. Estas contribuciones que van desde asistentes de manejo compartido [9], hasta el manejo autónomo o semiautónomo enfocado a usuarios imposibilitados para hacer una conducción segura [10].

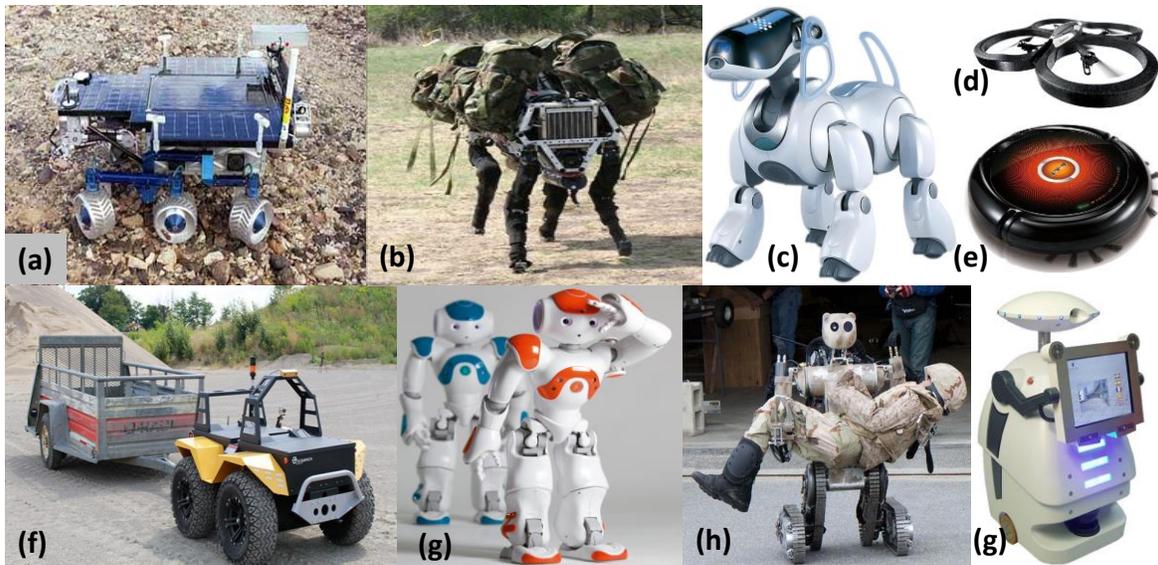


Figura 1. Diversas aplicaciones de robots móviles.

Algunos de los trabajos más conocidos en robots de asistencia tipo silla de ruedas tenemos la *VAHM* (Véhicule Autonome pour Handicapé Moteur) que fue desarrollada entre 1992 a 2010, por la Universidad de Metz, en Francia, en este periodo se desarrollaron tres versiones de la *VAHM*, la primera versión fue construida sobre la base de un robot móvil, el cual era guiado en base a un mapa interno y poseía dos comportamientos semiautónomos: seguimiento de paredes y evasión de obstáculos. La segunda versión del *VAHM* se instaló sobre una silla de ruedas eléctrica comercial, contando ahora con navegación autónoma [2] y recientemente una tercera versión de la *VAHM* fue desarrollada en la cual la localización se realiza utilizando un Filtro de Partículas llamado *Condensation* (*CONDitional DENSity Propagation*) el cual trata hacer un empate de registros de sensores ultrasónicos grabados en una etapa de entrenamiento con los registros medidos en una etapa de repetición, sin embargo, el último trabajo con la *VAHM* reportaba problemas en la calibración de los parámetros del filtro donde el tiempo de procesamiento y la precisión jugaban un rol central. Otro ejemplo conocido es la *NavChair* (Figura 2a), desarrollada por La Universidad de Michigan, entre 1993 y 2002, posee diferentes formas de manejo como seguimiento de paredes y evasión de obstáculos, pero sin tener la opción de manejo autónomo [1]. De 1994 a 2006, la Universidad de Notre Dame desarrolló la silla *CCPWS* (Computer-Controlled Power Wheelchair Navigation System), ver Figura 2d. El usuario podía reproducir rutas enseñadas al sistema de manera manual, llevando la silla desde un punto inicial hasta un punto final. Por medio de visión y el Filtro de Kalman Extendido a partir de la identificación visual de marcas artificiales en un entorno estructurado se lograba resolver el problema de la localización, sin embargo, en este trabajo el EKF requiere suposiciones de gaussianidad que un sistema de silla

de ruedas difícilmente cumple [11]. La silla *Rolland* es un proyecto de la Universidad de Bremen, la cual, utiliza un control basado en redes neuronales y visión ver Figura 2b [12]. La *RobChair (Robotic Wheelchair)* fue desarrollada por la Universidad de Coimbra Polo II para asistir en el manejo de sillas de ruedas, en esta propuesta se utilizan sensores infrarojos y de ultrasonido para apoyar una conducción por vos, sin llegar a ser un manejo autónomo ver Figura 2e [13]. El trabajo realizado por De la Cruz [14] muestra una implementación de una silla de ruedas donde la localización se realiza combinando la estrategia de un robot seguidor de línea y la identificación de tarjetas de radio frecuencia, ver Figura 2f, aquí se reportaban diversos problemas en la implementación del sistema, ya que requería marcas metálicas de gran tamaño poco prácticas para un uso cotidiano. En el trabajo realizado por Perrín [15] la silla de ruedas es controlada por un usuario, que utilizando aditamentos especiales y una interfaz de control cerebro-máquina intenta realizar un manejo semi-autónomo, sin llegar a ser un manejo autónomo. En el trabajo de Pinto [16] al igual que en Del Castillo [11] se hace uso de EKF y marcas artificiales en una estrategia de control para navegación autónoma basada en visión, sin que el sistema pueda cumplir las condiciones de gaussianidad que requiere.

Uno de los retos centrales que debe afrontar cualquier sistema móvil robotizado es el de la localización. Estimar de manera precisa la localización de un robot móvil es un problema estrechamente ligado con el uso de sensores. Recientemente el uso de diversos tipos de sensores y diferentes estrategias para la fusión de la información ha permitido importantes desarrollos en la robótica móvil donde el problema de la localización basada en sensores es un tema investigación vigente.

La localización de un robot móvil, es la principal preocupación para la implementación de una estrategia de navegación, ya que es necesario conocer con precisión la posición actual del robot móvil, para poder así, aplicar una ley de control y ejecutar una tarea deseada. En general, un sistema de navegación requiere un conjunto de sensores y un algoritmo de fusión que integre la información de los sensores para poder estimar de manera confiable la posición de un robot móvil. Uno de los sensores más comúnmente utilizado en robots con ruedas son los odómetros, cuyas lecturas, son comúnmente conocidas como cuenta-muerta (o en inglés *dead-reckoning*). Estos sensores son en general de bajo costo y puede llegar a tener una precisión de milésimas de grado, sin embargo, están sujetos a errores acumulados que son introducidos por diversos factores como resbalamiento de las ruedas y/o incertidumbres que pueden perturbar el curso del robot o la medición de los sensores. Es por eso que las estimaciones odométricas requieren de ser corregidas por medio de un sensor complementario de otro tipo. Trabajos reportados en robots móviles autónomos

presentan enfoques donde la información de los sensores de odometría es complementada con diferentes tipos de sensores tales como sensores ultrasónicos [10] [17] [18], LIDAR (del inglés Light Detection and Ranging) [19] [16] [20] [21] [22], cámaras digitales [23] [24] [25] [26], sensores de campo magnético [14] (ver Figura 2f), sistemas de posicionamiento global (GPS) [22] [21] [27] [28] y unidades de medición de inercia (IMU, por su siglas en inglés), por nombrar algunos.

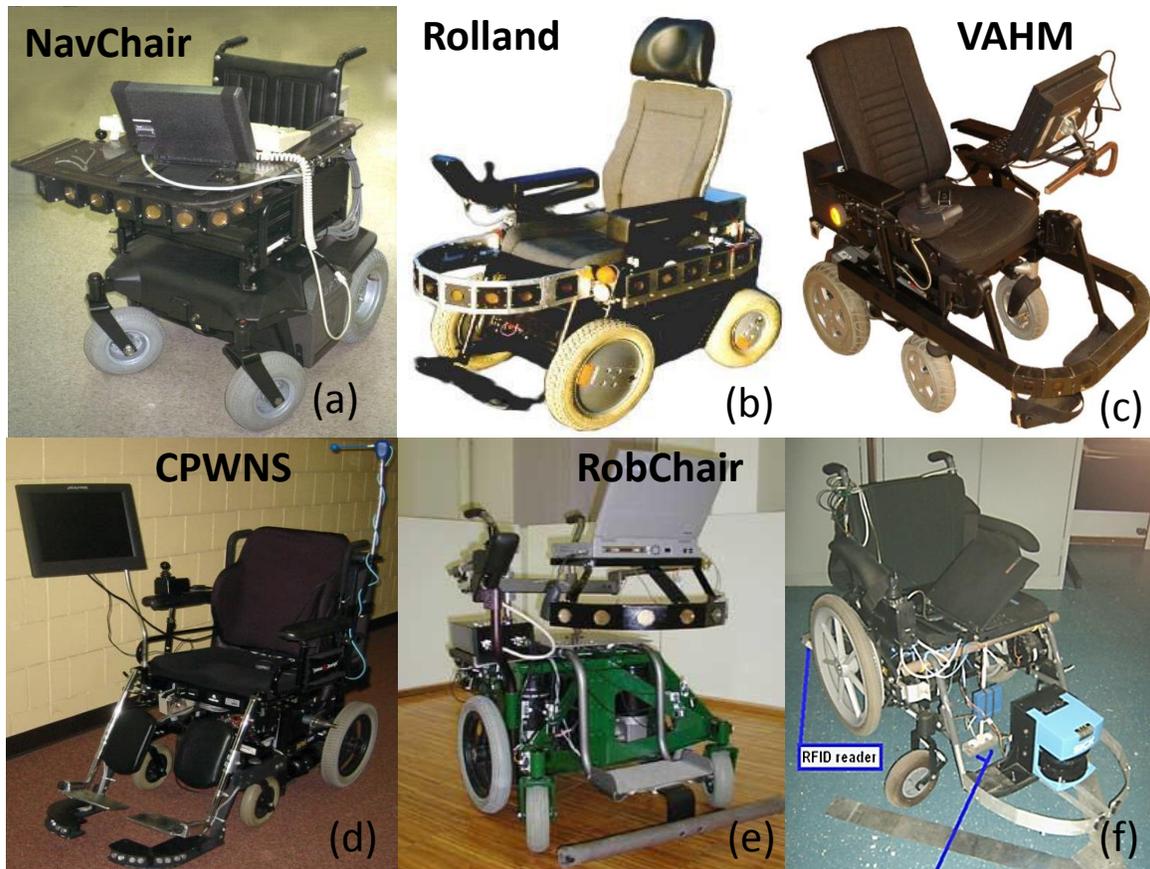


Figura 2. Ejemplos de sillas de ruedas robotizadas.

Entre los diferentes tipos de sensores existen ventajas y desventajas, que están en función de la aplicación general del robot móvil considerado. Por ejemplo, en el presente trabajo, se considera como aplicación el uso de una silla de ruedas robotizada que sirva como herramienta que eleve el nivel de independencia de una persona con lesiones severas dentro de su hogar (lugar cerrado y estructurado). Los sistemas basados en GPS, aunque son de bajo costo y relativamente sencillos de implementar. Debido a su baja precisión y su incapacidad de funcionar en lugares cerrados no son viables para el guiado de una silla de ruedas en interiores. Los sensores tipo IMUs son relativamente baratos, fácil de implementar, eficientes en condiciones de ambientes cerrados y

abiertos, pero, son muy sensibles al ruido del tipo vibración y no son convenientes para aplicaciones de alta precisión. Los sensores tipo LIDAR tiene una alta precisión y son robustos para aplicaciones en interiores y exteriores, con un desempeño aceptable en condiciones variables de luz, aun así, los LIDARs son costosos y el procesamiento de la información es complejo y tardado. Sensores tipo cámara son de bajo costo, sencillos de implementar y con una importante cantidad de herramientas para el procesamiento y análisis de imágenes. Aunque las cámaras o sensores de visión son sensibles a las condiciones de luz y del clima, el uso de sensores de visión es bastante confiable para ambientes interiores estructurados en donde las condiciones de luz pueden ser controladas.

Cuando varios sensores son implementados en un sólo sistema inteligente (e.g. un robot móvil) se hace necesaria la implementación de una estrategia que combine los datos proveniente de cada sensor de tal manera que se optimice la información. La mezcla optimizada de esta información es comúnmente denominada fusión de sensores. Con respecto del problema de localización, la literatura especializada reporta diferentes estrategias de fusión [29]. Estas técnicas pueden clasificarse en algoritmos heurísticos (e.g. algoritmos genéticos, lógica difusa) [18], algoritmos óptimos (Filtro Kalman y estimaciones basadas en mallas) [28], y algoritmos sub-óptimos [30]. Problemas del mundo real normalmente utiliza métodos sub-óptimos como filtrados bayesianos, tales como, estimaciones aproximadas basadas en mallas, Filtro Kalman Extendido (EKF, por su siglas en inglés) o Filtro de Kalman sin Esencia (UKF) [31] [32] [23] [33] [26], y métodos de Filtrado de Partículas (PF, por su siglas en inglés) [34] [35]. Debido a su confiabilidad y su habilidad para realizar procesamiento en tiempo real, las técnicas de fusión basadas en Kalman son implementadas en una gran cantidad de casos, todos bajo la suposición de que el ruido que afecta al sistema y a las mediciones es gaussiano y de media cero. Sin embargo, para el caso de una silla de ruedas robótica esta suposición es demasiado estricta y no siempre satisfecha [36].

Sin embargo, las técnica del EKF, a pesar de ser ampliamente difundida requiere de suposiciones de gaussianidad para el ruido del sistema y de la medición, que en vehículos robóticos no especializados es difícil que se cumplan. Es por eso que recientemente ha surgido el interés por otras estrategias que no dependan de estas suposiciones de gaussianidad. Una de ellas es el Filtro de Partículas que por medio del método de Monte Carlo logra hacer una descripción discreta de una función de densidades de probabilidad que será tan detallada como mayor sea el número de partículas utilizadas.

La técnica de PF introducida por primera vez por Gordon [29], aunque, no está limitada a sistemas con ruidos gaussianos tiene la desventaja de que

implementaciones típicas requieren un tiempo de procesamiento computacional órdenes de magnitud mayor que las implementaciones basadas en EKF, volviendo difícil su implementación para procesos en tiempo real.

De aquí, que un área de oportunidad importante se presenta al momento de querer tener una técnica de filtrado sin limitaciones del tipo de ruido (por ejemplo suponer ruido gaussiano) que afecta al sistema, con la posibilidad de usar esta técnica en tiempo real y que al mismo tiempo que las estimaciones de posición son precisas también sean robustas. La manera en cómo se busca resolver esta área de oportunidad es por medio de una técnica de filtrado basada en PF, que debe adecuarse para lograr una reducción del tiempo de procesamiento.

Respecto del tiempo de procesamiento se debe tener en cuenta típicamente las técnicas de filtrado realizan su labor en espacio del sistema. Las señales del sensor, cualquiera que sea su naturaleza, son interpretadas y llevadas a espacio del sistema, lo que usualmente implica el uso de modelos matemáticos donde los parámetros pueden ser difíciles calcular. La falta de precisión en el cálculo de estos parámetros implica un mapeo de mediciones del sensor a espacio del sistema de mala calidad y por consiguiente para el caso de un robot móvil una localización imprecisa. Para evitar esta situación se propone llevar todas las mediciones de los diferentes tipos de sensores al espacio del sensor con menos incertidumbre. Para el caso de un robot móvil (silla de ruedas) con odometría y visión, se hace necesario el desarrollo de una función de observación que mapee estimaciones iniciales del estado del sistema basadas en odometría al espacio del sensor de visión (espacio de cámara). Una ventaja de esta función de observación es que está formada a partir de relaciones geométricas donde los parámetros son calculados sin necesidad de suposiciones riesgosas, lo que dará robustez al sistema. Al tener todas las mediciones en espacio de sensor de visión el tiempo de procesamiento disminuye debido a que la dimensión del espacio del sensor es menor a la dimensión del espacio del sistema, teniendo una reducción en el tiempo de procesamiento.

Justificación

La justificación de este trabajo por el hecho de tratarse de una robot de asistencia se puede dividir en dos aspectos principales: aspectos sociales y aspectos científico-tecnológicos. Una breve descripción de cada uno de estos aspectos se muestra a continuación.

Aspectos sociales

Problemas de discriminación, sanidad y de falta de integración social aparecen cuando alguna discapacidad se hace presente en las personas. El grado de

rechazo y falta de adaptación depende de la gravedad de la discapacidad. Según la Organización Mundial de la Salud son consideradas como discapacidades severas aquellas como la tetraplejía, ceguera o depresión profunda y es que cualquiera de estas capacidades diferentes ya sea sólo una o combinadas, afectan gravemente al individuo tanto clínica como socialmente.

La Organización Mundial de la Salud en su Informe mundial sobre la discapacidad de 2011 [37] indica una tendencia a la alza en el número de discapacitados en el mundo, menciona que en el mundo, más de mil millones de personas viven con algún tipo de discapacidad lo que representa el 15% de la población mundial (según las estimaciones de la población de 2010) a diferencia de las estimaciones previas de los 70s que eran aproximadamente del 10%. En el mismo informe se comenta también que según la Encuesta Mundial de Salud, cerca de 785 millones de personas (15,6%) de 15 años y más viven con una discapacidad, mientras que el proyecto Carga mundial de morbilidad de 2010 [38] estima una cifra próxima a los 975 millones (19,4%). Sobre personas con “discapacidad grave” (tetraplejía, depresión grave o ceguera) la Encuesta Mundial de Salud señala que del total estimado de personas con discapacidad de 15 años y mayores es de 110 millones (2,2%) mientras que la cifra estimada por la Carga Mundial de Morbilidad es de 190 millones (3,8%) para el mismo grupo de personas y de 13 millones (0,7%) más de discapacitados graves de entre 0 y 14 años. Solamente en los Estados Unidos la estimación anual sobre incidencias en lesiones de médula espinal (SCI, por sus siglas en inglés) es de aproximadamente 40 casos por millón de población, lo que significa un incremento de 12mil nuevos casos por año. En Estados Unidos, para el 2013, el número de personas vivas que padecían SCI pudo estimarse entre 328mil y 332mil [1]. Aunque en México no existen cifras exactas de personas con discapacidades motrices severas el Censo de población y vivienda de 2010 menciona que México un 5.1% de la población tiene algún tipo de discapacidad, y que de esa población el 58.3% tiene discapacidades relacionadas con su capacidad motriz [2]. Más aún, año con año, el porcentaje de personas con discapacidad crece debido a que con los avances tecnológicos en la medicina el incremento en la esperanza de vida ha aumentado recién nacidos con malformaciones que afectan gravemente su motricidad, para personas de la tercera edad con enfermedades crónico degenerativas, personas lesionadas durante accidentes de transporte, de la industria o de catástrofes naturales, etcétera.

Un individuo con discapacidades severas que afecten su capacidad motriz, como por ejemplo, el SCI a nivel cervical, es completamente dependiente de otros para su ambulante y es que generalmente se ven imposibilitados de poder utilizar una interfaz estándar de manejo de una silla de ruedas eléctrica y aunque existen

trabajos donde se trata de otorgar la capacidad de conducción este tipo de personas por medio de accesorios personalizados que permitan utilizar los movimientos residuales de la cabeza [3] [4] [5] [6], sin embargo, la conducción de una silla de ruedas en ambientes estructurado es desafiante incluso para personas sin limitaciones motrices, por lo que es necesario también el desarrollo de sistemas automáticos que asistan o realicen completamente el manejo de una silla de ruedas automática. La creación y/o mejora de este tipo de sistemas robóticos es esencial para el mejoramiento de la calidad de vida de este sector de la población.

Aspectos científico-tecnológicos

Las discapacidades severas coartan gravemente la independencia de un paciente por lo que regularmente es necesaria alguna estrategia que auxilie en las actividades diarias dando el mayor grado posible de independencia al paciente. Entre los diferentes retos que enfrenta un paciente, se encuentran, el de poder desplazarse a diferentes lugares dentro de ambientes estructurados, como lo pueden ser partes específicas del interior de una vivienda. Actualmente, una forma de lograrlo, es mediante sistemas convencionales de sillas de ruedas estándar o eléctricas que forzosamente requieren un asistente de tiempo completo. Esto se debe principalmente, a la falta de sistemas comerciales que de manera segura permitan un desplazamiento automático de personas con discapacidades motrices severas.

La falta de tecnología que permita el traslado seguro de pacientes obedece a que éste es un problema matemáticamente complejo. Las ecuaciones que gobiernan un sistema móvil (sistema no holonómico) como lo es una silla de ruedas requieren la solución a ciertos problemas adicionales como, por ejemplo, la consideración del historial de movimientos, no crucial en el análisis general de sistemas holonómicos; estas consideraciones, hacen del problema de guiado de un robot móvil con ruedas, un problema no trivial. Es importante mencionar, que al tratarse de personas con discapacidades severas, el sistema móvil está sujeto a una serie de restricciones adicionales, como lo pueden ser, una fácil y rápida instalación lo suficientemente flexible como para poder ser utilizada en cualquier lugar donde habite un paciente. No se deben olvidar, además, las restricciones económicas, ya que la mayoría de los pacientes no cuentan con ingresos económicos debido a su condición.

Una más, y muy importante de las motivaciones de este trabajo es desarrollar una técnica de localización basada en visión que permita la localización precisa de un sistema móvil a partir de la fusión o combinación optimizada de la información de diferentes tipos de sensores (odometría, visión o cualesquiera otros) por medio de

estrategias de filtrado bayesiano que no estén limitadas a suposiciones de linealidad ni gaussianidad. Ya que aunque en este proyecto la aplicación es específica a una silla de ruedas, los resultados aquí obtenidos son fácilmente extrapolables a otros casos donde también se requiera el uso automático de vehículos.

El proyecto ofrece una gran variedad de retos tecnológicos y científicos que van desde la instrumentación de una silla de ruedas comercial hasta la creación e implementación de los algoritmos localización y control que la silla de ruedas necesita para ser autónoma.

La silla de ruedas automática debe desplazarse por ambientes estructurados con tolerancias de algunos centímetros, además, debe ser versátil y de fácil instalación para cualquier distribución arquitectónica.

Una motivación importante es la de poder desarrollar una estrategia de filtrado bien fundamentada, ya que las técnicas basadas en Filtro de Kalman Extendido requieren primeramente de la linealización del sistema y también de la consideración de que este sistema está afectado por ruido no-gaussiano. Sin embargo, la suposición de ruido no-gaussiano es particularmente difícil de asegurar en sistemas como una silla de ruedas, donde, seguramente se encuentran desbalances, diferencias sutiles en los diámetros nominales de las ruedas, vibraciones y otro tipo de fenómenos que pueden reflejarse en sesgos o ruido blanco en el sistema y en las mediciones realizadas por el sistema de sensores sin ser necesariamente distribuciones gaussianas. A sabiendas de que diversos sistemas de robótica móvil no cumplen con las suposiciones solicitadas, muchos son los trabajos donde se siguen aplicando técnicas como el EKF con resultados aceptables. Aun así, este trabajo busca encontrar una metodología con mejores fundamentos teóricos y que experimentalmente iguale o incluso mejore a las implementaciones existentes, ya que, al utilizar teorías donde las suposiciones no sean totalmente cumplidas nos pone en riesgo de situaciones donde el sistema no funcione adecuadamente, lo que en aplicaciones como las de una silla de ruedas no es permitido por las implicaciones que esto podría tener en la salud de un paciente.

Cabe mencionar que las sillas de ruedas autónomas consideras como robots de asistencia evidentemente son un subconjunto dentro de la familia de robots móviles autónomos que brindan movilidad a gente con discapacidades motrices [3]. Es por esto que todos los resultados obtenidos pueden ser fácilmente extrapolados a otros tipos de robots móviles como por ejemplo robots guía para personas invidentes o robots exploradores.

Objetivos

Los objetivos generales y particulares del proyecto se describen a continuación.

Objetivos generales

Desarrollar e implementar un sistema de navegación que utilice nuevas técnicas de localización bien fundamentadas en la teoría de filtrado bayesiano y que sirvan como base para la utilización de una estrategia de control basada en visión aplicada a una silla de ruedas eléctrica.

Objetivos particulares

A continuación se citan los objetivos particulares del proyecto:

- Desarrollo de técnicas de integración multisensorial
- Desarrollo de nuevas de estrategias de localización
- Implementación de los algoritmos de control basados en visión.
- Seguimiento de trayectorias en ambientes estructurados
- Evaluación experimental del sistema en ambientes estructurados.

Hipótesis

A partir de una integración multisensorial basada en filtros bayesianos es posible realizar la localización precisa y el control basado en visión de una silla de ruedas eléctrica siguiendo de manera autónoma una ruta deseada en interiores, sin que la técnica de filtrado utilizada en la localización esté limitada por suposiciones de linealidad o gaussianidad.

Aportaciones

Con el fin de clarificar de manera sucinta cuales de las partes del presente trabajo son aportaciones originales, éstas se describen de manera breve a continuación:

- Desarrollo de una función de observación que realiza un mapeo de las estimaciones basadas en odometría al espacio de cámara.
- Desarrollo de una estrategia de localización que no depende de la suposición de ruido con una distribución de probabilidades del tipo gaussiana.
- Adaptación del Filtro de Partículas para su uso en espacio del sensor (espacio de cámara) con una significativa mejora en tiempo de procesamiento.
- Validación y prueba experimental del sistema en ambientes controlados.

Estructura de la tesis

La presente tesis se divide en cuatro capítulos. En el Capítulo 1, se abordan desde un enfoque matemático los aspectos más generales de las diferentes estrategias de filtrado aquí presentadas. En el Capítulo 2, se muestra el procedimiento para obtener los diferentes modelos matemáticos y los parámetros utilizados que hacen posible la implementación del control basado en visión. El Capítulo 3 describe como a los modelos matemáticos y sus parámetros hacen posible la localización de una silla de ruedas eléctrica con diferentes estrategias de filtrado como Filtro Extendido de Kalman, Partículas Aleatorias y Filtro de Partículas en Espacio de Cámara. El Capítulo 4 contiene la descripción de los diferentes experimentos realizados para la validación y prueba de los algoritmos propuestos. Por último se describen las conclusiones obtenidas del proyecto y se hace una reflexión sobre trabajos futuros que podrían ser abordados partiendo de los logros alcanzados.

CAPÍTULO 1: Antecedentes de filtros bayesianos

Los filtros bayesianos son una de las estrategias más utilizadas en la estimación de estados o parámetros de sistemas lineales y no lineales afectadas por diferentes tipos de incertidumbres. A diferencia de las técnicas de cómputo suave como lógica difusa, algoritmos genéticos o redes neuronales, las técnicas de filtrado bayesiano realizan un estricto análisis estadístico de las incertidumbres que afectan al sistema. En el presente capítulo se presentan las bases teóricas que dan sustento a los dos tipos de filtrado bayesiano utilizados en el presente trabajo: Filtro de Kalman Extendido y Filtro de Partículas.

1.1 Introducción

La teoría de filtrado estocástico fue establecida por primera vez a principios de los años 1940s gracias a los trabajos pioneros de Norbert Wiener y Andrey N. Kolmogorov, mismo que culminaron en 1960 con la publicación del Filtro de Kalman y algoritmo del Cuadrado Promedio Mínimo (LMS, por su siglas en inglés) sobre el cual se basa. En la actualidad, se sabe que el Filtro de Kalman (y sus numerosas variantes) han dominado la teoría de filtrado adaptativo por décadas en áreas de la ingeniería tales como navegación y posicionamiento global, seguimiento, guiado, robótica, radares, detección de fallas y visión por computadora [39], siendo también utilizado en aplicaciones que involucran procesamiento de señales, reconocimiento de voz, estabilización de video y sistemas de control automotrices. En campos puramente cuantitativos, el filtro de Kalman también juega un rol importante en análisis de series de tiempo, redes neuronales, econometría, matemáticas financieras, ciencia política e identificación de sistemas entre otras. Teniendo en mente que el filtro de Kalman está limitado por sus suposiciones de análisis para un sistema con ruido gaussiano, numerosos métodos de filtrado siguiendo esta corriente han sido propuestos para librar estas limitaciones.

El filtro de partículas o también nombrado Método Monte Carlo Secuencial (SMC) tiene sus bases teóricas en la Regla de Bayes y el método de Monte Carlo. Sin embargo, la regla de Bayes se atribuye al inglés Thomas Bayes (Bayes, 1763) ya que en su obra póstuma se describen las definiciones, propiedades y reglas que dieron pie a toda la teoría bayesiana. Sin embargo, fue el científico francés Pierre Simon Laplace quien introdujo primero las aplicaciones bayesianas en su obra "*Théorie analytique des probabilités*" donde hablaba sobre el uso de la inferencia bayesiana en los parámetros binomiales desconocidos. Sin embargo, a causa de su complicado enfoque de modelado y las objeciones de muchos en torno al uso de la distribución *a priori* subjetiva, los investigadores y científicos no aceptaron ampliamente las aplicaciones bayesianas, sino hasta principios de la década de 1990, cuando se lograron avances en los métodos computacionales bayesianos, [40].

En lo que se refiere al método de Monte Carlo la idea inicial fue originada a partir del problema de la aguja de Buffón, cuando éste, intentó en 1777 estimar el valor de π . Pero la formulación moderna del Método de Monte Carlo empieza desde 1940 en física y más tarde en 1950 en estadística. Durante la Segunda guerra mundial, John von Neumann, Stanislaw Ulam, Niick Metropolis, y otros iniciaron el método de Monte Carlo en el laboratorio de Los Álamos. Von Neumann también usa el método de Monte Carlo para calcular los elementos de una matriz inversa, en el cual se redefinía la "Ruleta rusa" (relacionado con la generación de números aleatorios) y los métodos de "partición" [39].

Uno de los primeros trabajos donde se hace un establecimiento formal de los filtros de partículas se presenta en [29] donde se presenta un filtro *bootstrap* o de partículas, como resultado de la implementación de filtros bayesianos recursivos. La densidad requerida del vector de estados es representada como un conjunto de muestras aleatorias, las cuales son actualizadas y propagadas por un algoritmo. El método no es restringido por suposiciones de linealidad o de ruido gaussiano lo que implica que éste puede ser aplicado a cualquier estado de transición o modelo de medición.

En décadas recientes, las técnicas Monte Carlo han sido redescubiertas independientemente en estadística, física e ingeniería. Muchas nuevas metodologías de Monte Carlo (por ejemplo *Bootstrap* bayesiano, híbrido Monte Carlo, quasi Monte Carlo) han sido rejuvenecidos y desarrollados. El poder de los Métodos de Monte Carlo es que se pueden utilizar para resolver problemas complicados de integración numérica obteniendo resultados satisfactorios. En años recientes, los enfoques de Monte Carlo Secuencial han atraído más y más la atención de los investigadores de diferentes áreas, con muchas aplicaciones exitosas en estadística procesamiento de señales, aprendizaje de máquinas, econometría, control automático, navegación y búsqueda, comunicaciones, biología y muchas otras. Uno de los méritos atractivos de los enfoques basados en Monte Carlo Secuencial se basa en el hecho de que permite estimaciones en tiempo real al combinar el método de muestreo por Monte Carlo con inferencias bayesianas a cambio de un razonable costo computacional. En particular, el enfoque de Monte Carlo Secuencial ha sido utilizado en la estimación de parámetros y la estimación de estados. La idea básica de los filtros de partículas es usar un número dado de variables aleatorias independientes llamadas partículas, muestreadas directamente en el espacio de estado con ciertos valores de probabilidad (probabilidad *a priori*). A cada una de las partículas se le afecta con la dinámica del sistema, y así, representar la probabilidad posterior (*a posteriori*) que se actualiza/corriga al involucrar las nuevas observaciones. Para lograr encontrar esta representación *a posteriori* el "sistema de partículas" es

apropiadamente localizado, ponderado y propagado de forma recursiva acorde con la regla bayesiana.

1.2 Estimación bayesiana

El objetivo de la estimación bayesiana es la estimación de valores sucesivos de un vector de estados \mathbf{x} dado un vector de observaciones \mathbf{z} . Para la estimación bayesiana es necesario considerar tanto las mediciones, como los estados a estimar como variables aleatorias con alguna distribución *a priori*. Para el vector de estado, la suposición estocástica es inherente en las ecuaciones que gobiernan la dinámica del estado, donde efectos no modelados son agregados como ruido aleatorio. En tanto, que para el vector de observaciones o mediciones se justifica su naturaleza estocástica al asumir que siempre existe ruido aleatorio en las mediciones. Se asume que el vector aleatorio \mathbf{x} posee una función de densidad ya conocida *a priori* $p(\mathbf{x})$. Esta distribución *a priori* incluye todo lo que es conocido y desconocido acerca del vector de estado hasta antes de obtener información de una nueva medición. Si el verdadero valor de \mathbf{x} fuera conocido, entonces la densidad de probabilidades de \mathbf{z} está dada por la densidad condicional o función de vecindad $p(\mathbf{z}|\mathbf{x})$ con lo que las propiedades de \mathbf{z} serían conocidas [41].

La estimación bayesiana combina esta información *a priori* con las mediciones a través de una función de densidad condicional de \mathbf{x} dadas las mediciones \mathbf{z} , esta función de densidades de probabilidad condicionales es conocida como *distribución a posteriori* de \mathbf{x} . La función de densidad condicional posterior $p(\mathbf{x}|\mathbf{z})$ para \mathbf{x} tomando en cuenta la medición \mathbf{z} está dada por la *regla de Bayes* [42]:

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = \frac{p(\mathbf{z}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})}{p(\mathbf{z})} \quad (1.1)$$

Dentro de un marco bayesiano, la función de densidad posterior $p(\mathbf{x}|\mathbf{z})$ contiene toda la información que se puede obtener de \mathbf{x} después de tomar en cuenta los últimos datos observados en un experimento dado [41]. Debe notarse además, que desde que \mathbf{z} es tratada como un conjunto de cantidades desconocidas, entonces $p(\mathbf{z})$ es un escalar que además provee el adecuado factor de normalización para asegurar que $p(\mathbf{x}|\mathbf{z})$ es una función de densidad de probabilidad. Es decir

$$p(\mathbf{z}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{z}|\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.2)$$

ver ecuación (A.12)

1.3 Filtro de Kalman

El filtro de Kalman es una optimización de la ecuación (1.1) de tal forma que sea posible encontrar la estimación de \mathbf{x} que maximice la probabilidad de medir los valores de z que se están midiendo [42]. Para realizar esta optimización existen diferentes estrategias como la estimación de *Máximo a posteriori* (MAP), o la estimación de Mínimo Riesgo. Un desarrollo del Filtro de Kalman basado en una estimación MAP se describe a continuación [42].

En el desarrollo del filtro de Kalman es necesario optimizar la ecuación (1.1) para lograrlo se asume un modelo de observación lineal

$$\mathbf{z} = H\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (1.3)$$

donde H es una matriz de transformación que lleva al vector de estados al espacio de mediciones. La medición se asume corrompida por un ruido \mathbf{v} , mismo que está asociado a la matriz R que es una matriz de covarianza del error de medición, ecuación (A.17). Esta matriz se asume conocida y está directamente relacionada con la incertidumbre del aparato con el que se realiza la medición

$$\text{cov}\{\mathbf{v}\} = E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} = R \quad (1.4)$$

suponiendo que se conoce el vector de estados *a priori* $\hat{\mathbf{x}}_a$ o vector de predicción del estado, que es función de una estimación óptima $\hat{\mathbf{x}}$ contaminada por un ruido \mathbf{w} se tiene que

$$\hat{\mathbf{x}}_a = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{w} \quad (1.5)$$

donde \mathbf{w} es el error de estimación debido a la diferencia entre la predicción del estado *a priori* y la estimación óptima, este error \mathbf{w} se relaciona con una matriz Q , ecuación (A.17) que es una matriz de covarianza del error del sistema

$$\text{cov}\{\mathbf{w}\} = E\{\mathbf{w}\mathbf{w}^T\} = Q \quad (1.6)$$

donde los errores de medición y del sistema no están correlacionados, es decir,

$$E\{\mathbf{w}\mathbf{v}^T\} = 0 \quad (1.7)$$

Con estas consideraciones, si se asume que las funciones $p(z|\hat{\mathbf{x}})$ y $p(\hat{\mathbf{x}})$ poseen una distribución normal

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{z}|\hat{\mathbf{x}}) &\sim \mathcal{N}(H\hat{\mathbf{x}}, R) \\
p(\hat{\mathbf{x}}) &\sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_a, Q)
\end{aligned}
\tag{1.8}$$

es decir

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{z}|\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}[\det(R)]^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[\mathbf{z} - H\hat{\mathbf{x}}]^T R^{-1}[\mathbf{z} - H\hat{\mathbf{x}}]\right\} \\
p(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}[\det(Q)]^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[\hat{\mathbf{x}}_a - \hat{\mathbf{x}}]^T Q^{-1}[\hat{\mathbf{x}}_a - \hat{\mathbf{x}}]\right\}
\end{aligned}
\tag{1.9}$$

La optimización de estado $\hat{\mathbf{x}}$ se puede realizar considerando la siguiente función de costos

$$J_{MAP}(\hat{\mathbf{x}}) = \ln p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = \ln[p(\mathbf{z}|\hat{\mathbf{x}})p(\hat{\mathbf{x}})] \tag{1.10}$$

El término $p(\mathbf{z})$ no es considerado en la función de costos, ya que su labor dentro de la regla de Bayes, ecuación (1.1), es la de constante de normalización (la incertidumbre de la medición no es función del tiempo), por lo que no afecta al proceso de optimización.

Para optimizar respecto de $\hat{\mathbf{x}}$ la ecuación de costos (1.10) debe cumplir con la condición necesaria de

$$\frac{\partial J_{MAP}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = \frac{\partial \ln p(\mathbf{z}|\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} + \frac{\partial \ln p(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = 0 \tag{1.11}$$

donde

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{z}|\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = \frac{1}{2}[(\mathbf{z} - H\hat{\mathbf{x}})^T R^{-1}H + H^T R^{-1}(\mathbf{z} - H\hat{\mathbf{x}})] \tag{1.12}$$

y

$$\frac{\partial \ln p(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = \frac{1}{2}[(\hat{\mathbf{x}}_a - \hat{\mathbf{x}})^T Q^{-1} + Q^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_a - \hat{\mathbf{x}})] \tag{1.13}$$

de tal forma que

$$[(\mathbf{z} - H\hat{\mathbf{x}})^T R^{-1}H + H^T R^{-1}(\mathbf{z} - H\hat{\mathbf{x}})] + [(\hat{\mathbf{x}}_a - \hat{\mathbf{x}})^T Q^{-1} + Q^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_a - \hat{\mathbf{x}})] = 0 \tag{1.14}$$

Resolviendo para $\hat{\mathbf{x}}$ se encuentra que

$$\hat{\mathbf{x}} = (H^T R^{-1} H + Q^{-1})^{-1} (H^T R^{-1} \mathbf{z} + Q^{-1} \hat{\mathbf{x}}_a) \quad (1.15)$$

utilizando el lema de inversión de matrices de Sherman-Morrison-Woodbury, el cual dice

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (1.16)$$

donde A, B, C, D son matrices cualquiera de dimensiones adecuadas, ahora se puede escribir que

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_a + K(\mathbf{z} - H\hat{\mathbf{x}}_a) \quad (1.17)$$

donde

$$K = QH^T(R + HQH^T)^{-1} \quad (1.18)$$

Considerando la ecuación (1.5) se puede escribir

$$\mathbf{w} = \hat{\mathbf{x}}_a - \hat{\mathbf{x}} \quad (1.19)$$

por lo que la covarianza del error del sistema *a priori* también se puede escribir como

$$Q = E\{\mathbf{w}\mathbf{w}^T\} = E\{(\hat{\mathbf{x}}_a - \hat{\mathbf{x}})(\hat{\mathbf{x}}_a - \hat{\mathbf{x}})^T\} \quad (1.20)$$

Si consideramos que el valor estimado óptimo $\hat{\mathbf{x}}$ será igual al valor verdadero \mathbf{x} más un ruido \mathbf{w}'

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{w}' \quad (1.21)$$

sustituyendo ecuaciones (1.5) y (1.21) en (1.20) se tiene que

$$\begin{aligned} Q &= E\{(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{w} - \mathbf{x} - \mathbf{w}')(\dots)^T\} = E\{[(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) + (\mathbf{w} - \mathbf{w}')][\dots]^T\} \\ &= E\{(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T\} + E\{(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})(\mathbf{w} - \mathbf{w}')^T\} + E\{(\mathbf{w} - \mathbf{w}')(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T\} \\ &\quad + (\mathbf{w} - \mathbf{w}')(\mathbf{w} - \mathbf{w}')^T \\ &= E\{(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T\} = P \end{aligned} \quad (1.22)$$

ya que los ruidos \mathbf{w} y \mathbf{w}' que afectan al sistema se consideran sin correlación y media cero, la esperanza matemática de su diferencia será cero, con lo cual la ecuación (1.18) también puede escribirse de la siguiente forma

$$K = PH^T(R + HPH^T)^{-1} \quad (1.23)$$

siendo la ecuación (1.23) una de las formas más utilizadas de la ganancia de Kalman, K .

1.3.1 Filtrado secuencial

Si consideramos que $\hat{\mathbf{x}}_a$ es una predicción de la mejor estimación $\hat{\mathbf{x}}$. Si se considera un modelo lineal es posible describir esta predicción en términos de una matriz de transición G de tal forma que

$$\hat{\mathbf{x}}_a = G\hat{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{w}_0 \quad (1.24)$$

es decir si se conoce, a partir de una medición, un estado inicial $\hat{\mathbf{x}}_0$ en un instante k , por medio de la matriz de transición G es posible predecir el valor del vector de estados en un instante siguiente $k + 1$, sin tener aún en consideración la medición realizada en ese instante $k + 1$. Para el caso particular donde G es una matriz de transición que estima un estado invariante en el tiempo, G es la matriz identidad, teniendo esto en mente, la ecuación (1.5) también puede expresarse como

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = G\hat{\mathbf{x}}_k^+ + \mathbf{w}_k \quad (1.25)$$

donde los signos $+$ y $-$ son indicadores de si la medición ha sido considerada para el instante considerado que aparece como subíndice del vector de estados. Por ejemplo $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ es la estimación óptima del estado \mathbf{x} en el instante k considerando la medición realizada en ese mismo instante k ; en cambio, $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$ también es la estimación óptima del estado \mathbf{x} en el instante $k + 1$, pero sin considerar la medición realizada en el instante $k + 1$, bien se podría decir que es la estimación de \mathbf{x} antes del proceso de filtrado. Es decir, que por medio de la estimación óptima en un instante k y una matriz de transición se puede predecir la mejor estimación en un instante $k + 1$ más un error de covarianza. Así mismo también se puede considerar la medición en un instante k por lo que la ecuación (1.3) en un filtrado secuencial puede escribirse como

$$\mathbf{z}_k = H\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (1.26)$$

Las ecuaciones (1.24) y (1.26) son equivalentes a las ecuaciones (1.3) y (1.5) por lo que procediendo de manera análoga a lo expuesto en la sección anterior es posible llegar a las siguientes expresiones:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + K_k(\mathbf{z}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (1.27)$$

$$K_k = P_{k-1} H_k^T (R_k + H_k P_{k-1} H_k^T)^{-1} \quad (1.28)$$

sin embargo, la actualización de la matriz de covarianzas P_k debe ser tratada de manera distinta, para lo cual se considera una matriz de covarianzas para el instante $k - 1$ y k , ya que las covarianzas se acumulan conforme se realizan más mediciones, se tiene que

$$P_0 = [H_0 W_0 H_0^T]^{-1} \quad (1.29)$$

$$P_1 = [H_0 W_0 H_0^T + H_1 W_1 H_1^T]^{-1}$$

$$P_2 = [P_1 + H_2 W_2 H_2^T]^{-1}$$

donde $W = R^{-1}$, por lo que la actualización de la matriz de covarianzas para un momento k se puede expresar de la siguiente manera

$$P_k^{-1} = P_{k-1}^{-1} + H_k W_k H_k^T \quad (1.30)$$

la ecuación (1.30) es también conocida como la matriz de información recursiva, debido a que el cómputo de esta ecuación es demandante por el cálculo de matrices inversas, existen maneras alternativas para realizar esta actualización, como lo es el *lema de inversión de matrices* de Sherman-Morrison-Woodbury, lo que da como resultado la siguiente forma de la matriz de covarianzas

$$P_k = P_{k-1} - P_{k-1} H_k^T (H_k P_{k-1} H_k^T + W_k^{-1})^{-1} H_k P_{k-1} \quad (1.31)$$

Si se considera la ecuación (1.28) y se sustituye en la (1.31) se puede encontrar una de las formas más comúnmente utilizadas en la actualización de la matriz de la covarianza del error

$$P_k = [I - K_k H_k] P_{k-1} \quad (1.32)$$

1.3.2 Propagación del error

A continuación se verá como la media y la covarianza de un estado de un sistema lineal en tiempo continuo se propaga. Considerando un sistema en tiempo continuo de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (1.33)$$

donde $\mathbf{u}(t)$ es un vector conocido de entradas de control y $\mathbf{w}(t)$ es un vector de ruido blanco con media cero y covarianza, ver ecuación (A.17)

$$E\{\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)\} = Q \quad (1.34)$$

Para averiguar como el promedio del estado se propaga con el tiempo se utiliza el promedio de la solución general a sistemas de la forma descrita en (1.33) tomando el límite de $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ cuando éste tiende a cero es

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t_k, t_{k-1})\bar{\mathbf{x}}(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (1.35)$$

La derivación de esta solución se encuentra en el Anexo B: donde la matriz de transición de estados $\Phi(t_k, t_{k-1})$ se escribe como

$$\Phi(t_k, t_{k-1}) = e^{F(t_k - t_{k-1})} = e^{F\Delta t} \quad (1.36)$$

$$\Phi(t_k, t_{k-1}) = \mathbf{I} + F\Delta t + \frac{1}{2!}F^2\Delta t^2 + \dots$$

Por lo que para valores pequeños de Δt , esta puede aproximarse a

$$\Phi(t_k, t_{k-1}) = \mathbf{I} + F\Delta t \quad (1.37)$$

Por lo que la ecuación (1.35) cambia a

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{I} + F\Delta t)\bar{\mathbf{x}}(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (1.38)$$

restando $\bar{\mathbf{x}}(t_{k-1})$ a ambos lados y dividiendo entre Δt se tiene

$$\frac{\bar{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t_{k-1})}{\Delta t} = F\bar{\mathbf{x}}(t_{k-1}) + \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (1.39)$$

Tomando los límites de Δt hasta cero, da lo siguiente:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t_{k-1})}{\Delta t} = \dot{\mathbf{x}}(t) \quad (1.40)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Phi(t_k, \tau) = I \quad \text{para } \tau \in [t_{k-1}, t_k]$$

sustituyendo las ecuaciones (1.40) en (1.39) se obtiene

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = F(t)\bar{\mathbf{x}}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) \quad (1.41)$$

Para conocer la propagación de la covarianza del error del sistema, consideraremos la solución de la ecuación (1.33) para algún tiempo arbitrario t_k , (ver Apéndice B)

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t_k, t_{k-1})\mathbf{x}(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \tau)[B(\tau)\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{w}(\tau)]d\tau \quad (1.42)$$

Si se supone que $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_k$ para $t \in [t_k, t_{k+1}]$; quiere decir que el control $\mathbf{u}(t)$ es constante a trozos. Si se realizan las siguientes definiciones

$$\Delta t = t_k - t_{k-1} \quad (1.43)$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(t_k)$$

Entonces la ecuación (1.42) cambia a

$$\mathbf{x}_k = \Phi(t_k, t_{k-1})\mathbf{x}_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \tau)B(\tau)d\tau\mathbf{u}(\tau) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \tau)\mathbf{w}(\tau)d\tau \quad (1.44)$$

Si ahora se define A_k y G_k como

$$A_k = \Phi(t_k, t_{k-1}) \quad (1.45)$$

$$G_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)B(\tau)d\tau$$

con lo que la ecuación (1.44) es

$$\mathbf{x}_k = A_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + G_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \tau)\mathbf{w}(\tau)d\tau \quad (1.46)$$

donde $\Phi(t_k, \tau)$ es la matriz de transición de estado del sistema desde un tiempo τ hasta un tiempo t_k . Si ahora se considera la media de la ecuación anterior, recordando que $\mathbf{w}(t)$ es media cero para obtener

$$\bar{\mathbf{x}}_k = E\{\mathbf{x}_k\} = A_{k-1} \bar{\mathbf{x}}_{k-1} + G_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} \quad (1.47)$$

Basado en lo anterior es posible obtener la covarianza del estado como sigue

$$\begin{aligned} P_k &= E\{(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^T\} \\ &= E\left\{\left(A_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + G_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) \mathbf{w}(\tau) d\tau - \bar{\mathbf{x}}_k\right) (\dots)^T\right\} \\ &= A_{k-1} P_{k-1} A_{k-1}^T + E\left\{\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) \mathbf{w}(\tau) d\tau\right) (\dots)^T\right\} \\ &= A_{k-1} P_{k-1} A_{k-1}^T + \int \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) E\{\mathbf{w}(\tau) \mathbf{w}^T(\alpha)\} \Phi(t_k, \alpha) d\tau d\alpha \end{aligned} \quad (1.48)$$

Si ahora se asume que $\mathbf{w}(t)$ es ruido blanco en tiempo continuo con una covarianza de $Q_c(t)$, es posible ver que

$$E\{\mathbf{w}(\tau) \mathbf{w}^T(\alpha)\} = Q_c(\tau) \delta(\tau - \alpha) \quad (1.49)$$

Lo que significa que utilizando la propiedad de desplazamiento de la función impulso la ecuación (1.48) puede escribirse como

$$\begin{aligned} P_k &= A_{k-1} P_{k-1} A_{k-1}^T + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) Q_c(\tau) \Phi(t_k, \alpha) d\tau \\ &= A_{k-1} P_{k-1} A_{k-1}^T + Q_{k-1} \end{aligned} \quad (1.50)$$

considerando valores pequeños de Δt es posible nuevamente aproximar $\Phi(t_k, t_{k-1})$ como se muestra en la ecuación (1.37) y sustituir en la ecuación (1.50) para obtener

$$\begin{aligned} P_k &\approx (\mathbf{I} + F\Delta t) P_{k-1} (\mathbf{I} + F\Delta t)^T + Q_{k-1} \\ &= P_{k-1} + F P_{k-1} \Delta t + P_{k-1} F^T \Delta t + F P_{k-1} F^T (\Delta t)^2 + Q_{k-1} \end{aligned} \quad (1.51)$$

sustrayendo P_{k-1} de ambos lados y dividiendo entre Δt da

$$\frac{P_k - P_{k-1}}{\Delta t} = F P_{k-1} + P_{k-1} F^T + F P_{k-1} F^T \Delta t + \frac{Q_{k-1}}{\Delta t} \quad (1.52)$$

para Δt pequeños

$$Q_{k-1} \approx Q_c(t_k)\Delta t \quad (1.53)$$

que puede escribirse como

$$\frac{Q_{k-1}}{\Delta t} \approx Q_c(t_k) \quad (1.54)$$

con lo que al tomar el límite de Δt cuando tiene a cero la ecuación (1.52) da

$$\dot{P} = FP + PF^T + Q_c \quad (1.55)$$

Esta ecuación de Lyapunov en tiempo continuo, en ocasiones, también llamada ecuación de Sylvester, es una ecuación que describe cómo la covarianza de un estado de un sistema en tiempo continuo se propaga con el tiempo, más información sobre esta ecuación se puede consultar en [43].

1.3.3 Filtro de Kalman Extendido

En la validación este trabajo los resultados obtenidos son comparados contra resultados obtenidos utilizando el Filtro de Kalman Extendido (EKF, por sus siglas en inglés). Esta comparación se realiza debido a que con el paso del tiempo el EKF se ha vuelto el estándar *de facto* para la estimación de estados no lineales [44].

El desarrollo del EKF que se presenta a continuación es el utilizado en sistemas donde existen mediciones realizadas en tiempos discretos de un sistema dinámico en tiempo continuo como el siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, t) \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \\ \mathbf{w}(t) &\sim \mathcal{N}(0, Q) \\ \mathbf{v}_k &\sim \mathcal{N}(0, R_k) \end{aligned} \quad (1.56)$$

La ecuación del sistema $\mathbf{f}(\cdot)$ y la ecuación de la medición $\mathbf{h}(\cdot)$ son funciones no lineales. Utilizando las series de Taylor para expandir estas ecuaciones alrededor de un control nominal \mathbf{u}_0 , un estado nominal \mathbf{x}_0 , una salida nominal \mathbf{z}_0 y valores de ruido nominal \mathbf{w}_0 y \mathbf{v}_0 . Estos valores nominales que son a su vez funciones del tiempo están basados en propuestas *a priori* que son una predicción de lo que se espera que sea la trayectoria del sistema. La linealización en series de Taylor de la ecuación (1.56) está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &\approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_0 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_0 (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{w}} \right|_0 (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, t) + A\tilde{\mathbf{x}} + B\tilde{\mathbf{u}} + L\mathbf{w} = \dot{\mathbf{x}}_0 + A\tilde{\mathbf{x}} + B\tilde{\mathbf{u}} + L\mathbf{w}\end{aligned}\quad (1.57)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{z} &\approx \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_0 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{v}} \right|_0 (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \\ &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t) + H\tilde{\mathbf{x}} + M\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{z}_0 + H\tilde{\mathbf{x}} + M\tilde{\mathbf{v}}\end{aligned}$$

De tal forma que el sistema descrito en la ecuación (1.56) al linealizar alrededor de un punto nominal, indicado por cero, se obtiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}_0(t) &= \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + L\mathbf{w} \\ \tilde{\mathbf{z}} &= H\tilde{\mathbf{x}} + M\tilde{\mathbf{v}}\end{aligned}\quad (1.58)$$

Al tener esta forma es posible utilizar todas las ecuaciones descritas anteriormente para realizar la estimación óptima del estado del sistema considerando observaciones que pueden ser también no lineales.

El ruido del proceso $\mathbf{w}(t)$ es un vector de ruido blanco en tiempo continuo el cual está asociado a una matriz de covarianza Q , a diferencia del vector de ruido de la medición \mathbf{v}_k que es vector de ruido blanco en tiempo discreto asociado a una matriz de covarianza R_k . Entre cada medición se propaga la estimación del estado de acuerdo con la dinámica no lineal y además se propaga la covarianza de la misma forma como se hace para el EKF de tiempo continuo por lo que

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= f(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0, t) \\ \dot{P} &= AP + PA^T + LQL^T\end{aligned}\quad (1.59)$$

En el EKF continuo-discreto no se incluye el término R en la ecuación \dot{P} ya que se está integrando P mientras no existan nuevas mediciones. Las matrices A y L están dadas en ecuación (1.57). Las ecuaciones anteriores propagan $\hat{\mathbf{x}}$ desde $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$ hasta $\hat{\mathbf{x}}_k^-$, y P desde P_{k-1}^+ hasta P_k^- . Note que \mathbf{w}_0 es el ruido del proceso nominal en la ecuación anterior, esto es, $w_0(t) = 0$.

Al momento en que una nueva medición es adquirida, se actualiza la estimación del estado y la covarianza de la misma forma en que se hace para el Filtro de Kalman en tiempo discreto:

$$\begin{aligned}
K_k &= P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + M_k R_k M_k^T)^{-1} \\
\hat{\mathbf{x}}_k^+ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + K_k [z_k - h_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-, v_0, t_k)] \\
P_k^+ &= (I - K_k H_k) P_k^-
\end{aligned} \tag{1.60}$$

donde \mathbf{v}_0 es el ruido de la medición nominal; esto es, $\mathbf{v}_0 = 0$. H_k es la derivada parcial de $\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)$ con respecto de \mathbf{x}_k y M_k es la derivada parcial de $\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)$ con respecto de \mathbf{v}_k . Además las matrices H_k y M_k son evaluadas en $\hat{\mathbf{x}}_k^-$.

Es importante notar que P_k y K_k no pueden ser calculadas fuera de línea ya que dependen de H_k y M_k , la cuales, a su vez, dependen de $\hat{\mathbf{x}}_k^-$, el cual finalmente, depende de una medición ruidosa.

El algoritmo para el EKF continuo-discreto puede resumirse como sigue:

1. El sistema de ecuaciones con dinámica en tiempo continuo y mediciones en tiempo discreto está dado por:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, t) \\
\mathbf{z}_k &= \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \\
\mathbf{w}(t) &\sim \mathcal{N}(0, Q) \\
\mathbf{v}_k &\sim \mathcal{N}(0, R_k)
\end{aligned} \tag{1.61}$$

2. El sistema se inicializa con:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_0^+ &= E[\mathbf{x}_0] \\
P_0^+ &= E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)^T]
\end{aligned} \tag{1.62}$$

3. Para $k = 1, 2, \dots$, realizar lo siguiente
 - a. Integrar la estimación de estado y su covarianza desde $(k - 1)^+$ hasta el tiempo k^{-1} como sigue:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_0, t) \\
\dot{P} &= AP + PA^T + LQL^T
\end{aligned} \tag{1.63}$$

donde A y L están dadas en la ecuación (1.57). La integración comienza con $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$ y $P = P_{k-1}^+$. Al final de esta integración se tiene $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_k^-$ y $P = P_k^-$.

- b. En cierto tiempo k , se incorpora la medición y_k dentro de la estimación de estado y de covarianza como sigue:

$$\begin{aligned}
 K_k &= P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + M_k R_k M_k^T)^{-1} \\
 \hat{\mathbf{x}}_k^+ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + K_k [\mathbf{z}_k - h_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-, 0, t_k)] \\
 P_k^+ &= (I - K_k H_k) P_k^-
 \end{aligned} \tag{1.64}$$

H_k y M_k son las derivadas parciales de $\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)$ respecto con \mathbf{x}_k y \mathbf{v}_k siendo ambas evaluadas en $\hat{\mathbf{x}}_k^-$.

1.4 Filtro de Partículas

El objetivo último del Filtro de Partículas (PF, por sus siglas en inglés) es reconstruir la función de densidad de probabilidades (pdf, por sus siglas en inglés) del vector de estado o de la distribución de probabilidades del vector de estado condicional basado en todas las mediciones disponibles. Cabe mencionar que la aproximación con PF es muy diferente de aquella hecha con filtros no lineales convencionales. En este método se aproxima una distribución continua dada en el espacio de estados, esto al utilizar un número grande y finito de muestras ponderadas también conocidas como partículas. En su forma más simple las partículas del PF son propagadas a través de un modelo dinámico y posteriormente ponderadas acorde a una función de vecindad, la cual determina que tan fielmente las partículas describen las mediciones. Aquellas que mejor describan las mediciones son ponderadas con un alto peso y aquellas que no lo hagan se ponderan con bajos pesos o incluso pueden ser descartadas.

En principio, si el PF considerara un número infinito de partículas, éste, podría aproximar la distribución de probabilidades posterior de cualquier forma y resolver cualquier problema de estimación no-lineal y/o no-gaussiana. En la práctica, no es trivial el diseño de un PF con un número relativamente pequeño de partículas. El desempeño del PF depende fuertemente de si las partículas están localizadas en regiones significativas del espacio de estados y en si las regiones significativas son cubiertas por las partículas. Cuando las mediciones son exactas, lo cual es típico de muchos problemas de estimación, la función de vecindad se concentra en una pequeña región del espacio de estados, y las partículas propagadas a través del modelo dinámico más frecuentemente se ubicarán dentro de regiones significantes de la función de vecindad. Estimaciones de estado tales como la media y la covarianza aproximada con estas partículas son imprecisas. Este problema se complica aún más cuando los errores de las estimaciones iniciales son grandes, por ejemplo, varios ordenes de magnitud mayores que la precisión

del sensor. Consecuentemente, el PF básico, rápidamente sufre del problema de una severa degeneración de las partículas (pérdida de la diversidad de las partículas) y divergencia del filtro [30].

Las partículas del PF se muestrean aleatoriamente mediante una *función de importancia*. El *peso de importancia* asociado a cada partícula es adaptativamente calculado en base al ratio entre la pdf posterior y la función de importancia (hasta una constante). Dadas las partículas, diferentes datos estadísticos, así como la media y la covarianza pueden ser calculados de manera directa cuando así se desee. Utilizando estas partículas, puede resultar conveniente también calcular estadísticas tales como la moda y la mediana, que podría tener uso en ciertos tipos de aplicaciones. En otras palabras, el PF busca proveer una imagen completa de la distribución subyacente.

En general, un modelo de espacio de estados en tiempo discreto consiste de un modelo del sistema y de un modelo de la medición. El modelo del sistema relaciona el vector de estado actual, \mathbf{x}_k , con el vector de estado de un instante siguiente, \mathbf{x}_{k+1} , y con el modelo de mediciones relaciona el vector de estado con el vector de mediciones, \mathbf{z}_k :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k) \quad (1.65)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \quad (1.66)$$

En las ecuaciones anteriores, las funciones del sistema y las de mediciones están denotadas por \mathbf{f} y \mathbf{h} , respectivamente. El vector \mathbf{u}_k es una entrada determinística. El ruido del proceso \mathbf{w}_k y el ruido de la medición \mathbf{v}_k se asumen como secuencias de ruido blanco con media cero. Las distribuciones de las mutuamente independientes \mathbf{x}_0 , \mathbf{w}_k y \mathbf{v}_k , denotadas por $p(\mathbf{x}_0)$, $p(\mathbf{w}_k)$ y $p(\mathbf{v}_k)$, respectivamente, se asumen conocidas. La suposición de gaussianidad no es requerida.

El problema central del filtrado bayesiano o filtrado óptimo es el de poder construir una distribución de filtrado posterior $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Z}_{k+1})$, donde $\mathbf{Z}_{k+1} = \{\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{k+1}\}$ es el conjunto de mediciones desde la primera realizada en el tiempo t_0 hasta la medición realizada en el tiempo t_{k+1} . Además, se asume que $p(\mathbf{x}_0|\mathbf{Z}_0) = p(\mathbf{x}_0)$. Bajo las suposiciones antes descritas, la evolución de $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Z}_{k+1})$ sólo depende de la información conocida del estado *a priori* $p(\mathbf{x}_0)$, de la transición $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k)$ y de la vecindad $p(\mathbf{z}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1})$. La recursión para el problema de filtrado óptimo puede ser establecido como:

$$\left. \begin{array}{l} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k) \\ p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) \\ p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}) \end{array} \right\} \Rightarrow p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Z}_{k+1}) \quad (1.67)$$

En principio, basados en $p(\mathbf{w}_k)$ y en el modelo dinámico de la ecuación (1.65), la transición $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)$ puede ser calculada; basados en $p(\mathbf{v}_k)$ y el modelo de medición de la ecuación (1.66), la vecindad $p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1})$ puede ser determinada. La pdf del filtrado posterior $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Z}_{k+1})$ satisface la siguiente recursión formal [29]:

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Z}_{k+1}) = \frac{p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}) p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Z}_k)}{\int p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}) p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Z}_k) d\mathbf{x}_{k+1}} \quad (1.68)$$

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Z}_k) = \int p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k) d\mathbf{x}_k \quad (1.69)$$

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) = \int \delta(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k)) p(\mathbf{w}_k) d\mathbf{w}_k \quad (1.70)$$

$$p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}) = \int \delta(\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1})) p(\mathbf{v}_{k+1}) d\mathbf{v}_{k+1} \quad (1.71)$$

La cantidad $\delta(\cdot)$ en las ecuaciones anteriores es la función delta de Dirac, y las anteriores integrales multidimensionales se definen como

$$\int \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \cdots \int \int \mathbf{f}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (1.72)$$

con $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$.

Con excepción de pocos sistemas dinámicos, como los gaussianos lineales, las relaciones recursivas anteriores involucran integrales que son matemáticamente intratables. La solución aproximada que el PF ofrece se basa en el método de Monte Carlo, en el cual una distribución de probabilidad es representada por medio de un conjunto de muestras aleatorias. Dadas n muestras aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas (iid) $\mathbf{x}^{(j)}$ tomadas de $p(\mathbf{x})$, con $j = 1, \dots, n$, la distribución puede aproximarse con

$$p(\mathbf{x}) \approx \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{j=1}^n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j)}) \quad (1.73)$$

y con una integral arbitraria (o expectación) con respecto de $p(\mathbf{x})$, ver ecuación (A.11), puede ser aproximada con

$$\int \mathbf{f}(\mathbf{x})p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(j)}) \quad (1.74)$$

Un muestreo perfecto de Monte Carlo asume que las muestras son tomadas directamente de la distribución $p(\mathbf{x})$, pero en la práctica es casi imposible hacer esto. El PF está basado en una técnica de muestreo conocida como muestreo de importancia. En lugar de tomar muestras directamente de la distribución objetivo $p(\mathbf{x})$, el muestreo de importancia toma $\mathbf{x}^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$, de una función de importancia $q(\mathbf{x})$ (también una pdf). Estas muestras son ponderadas por medio de un normalizador de pesos de importancia, el cual simultáneamente satisface

$$w^{(j)} \propto \frac{p(\mathbf{x}^{(j)})}{q(\mathbf{x}^{(j)})} \quad (1.75)$$

$$\sum_{j=1}^n w^{(j)} = 1 \quad (1.76)$$

Estas condiciones se utilizan con el fin de dar cuenta de la discrepancia entre la función de importancia $q(\mathbf{x}^{(j)})$ y la distribución objetivo $p(\mathbf{x}^{(j)})$. Las muestras tomadas desde una función de importancia, y sus pesos de importancia $\{\mathbf{x}^{(j)}, w^{(j)}\}$ en conjunto forman los dos componentes esenciales del muestreo de importancia. De aquí, que la integral en la ecuación (1.74) es aproximada por medio de

$$\int \mathbf{f}(\mathbf{x})p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{j=1}^N w^{(j)} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(j)}) \quad (1.77)$$

Con el fin de tener mayor precisión, es deseable que un número adecuado de muestras extraídas acorde con $q(\mathbf{x})$ estén en regiones de alta probabilidad de $p(\mathbf{x})$ y que los pesos de importancia normalizados estén igualmente distribuidos.

En base a este análisis el PF puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Las ecuaciones del sistema y de la medición están dadas por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k) \quad (1.78)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \quad (1.79)$$

donde \mathbf{w}_k y \mathbf{v}_k son procesos de ruido blanco independientes con pdf conocidas.

2. Asumiendo que la pdf del estado inicial $p(\mathbf{x}_0)$, es conocido, aleatoriamente se generan n partículas iniciales en la base de la pdf $p(\mathbf{x}_0)$. Estas partículas están denotadas como $\mathbf{x}_0^{(j)}$ ($i = 1, \dots, n$). El parámetro n es el número de partículas, el cual es escogido por el usuario experimentalmente en un ajuste que considera costo computacional contra precisión.
3. Para $k = 1, 2, \dots$, realizar lo siguiente.
 - a. Realizar el paso de la propagación en tiempo para obtener *a priori* las partículas $\mathbf{x}_k^{(i)-}$ usando la ecuación del proceso y la pdf del ruido del proceso:

$$\mathbf{x}_{k+1}^{(j)-} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k^{(j)+}, w_k^{(j)}) \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1.80)$$

donde cada vector de ruido $w_k^{(j)}$ es generado aleatoriamente en la base de la pdf $p(w_k)$ que es conocida.

- b. En el muestreo de importancia se calcula la vecindad relativa q_i de cada partícula $\mathbf{x}_{k+1}^{(j)-}$ condicionada a la medición de \mathbf{z}_{k+1} . Esto se realiza al evaluar la pdf $p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}^{(j)-})$ en base a la ecuación no lineal de mediciones y la pdf del ruido de la medición.
- c. Las vecindades relativas obtenidas anteriormente se escalan de la siguiente manera:

$$q_i = \frac{q_i}{\sum_{j=1}^n q_j} \quad (1.81)$$

Ahora la suma de todas las vecindades es igual con uno.

- d. Se genera un conjunto de partículas $\mathbf{x}_{k+1}^{(j)+}$ *a posteriori* en base a las vecindades relativas q_i . Esta etapa es llamada remuestreo.
- e. Ahora que se tiene un conjunto de partículas $\mathbf{x}_{k+1}^{(j)+}$ que están distribuidas acorde a la pdf $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{z}_{k+1})$, es posible calcular cualquier medida estadística de esta pdf. Típicamente se acostumbra utilizar la media y la covarianza.

En el presente capítulo se ha descrito el desarrollo de los fundamentos de los filtrados bayesianos así como los aspectos generales del Filtro de Kalman Extendido y el Filtro de Partículas utilizados en las estrategias de localización y de control basadas en visión presentadas en este proyecto.

CAPÍTULO 2: Desarrollo de la estrategia de localización y control basadas en visión para una silla de ruedas

Una estrategia de localización además de un método filtrado requiere de otros componentes analíticos para su implementación, muchos de estos aspectos son tomados de la teoría de la robótica móvil es por eso que en primer lugar se describen los antecedentes de robótica móvil. En las secciones siguientes se describen el desarrollo de las partes analíticas que requiere el sistema para su localización. Estas partes son el desarrollo de un modelo cinemático, el desarrollo de la función de observación y la obtención de los parámetros necesarios para su óptimo desempeño, así como de las estrategias de enseñanza-repetición utilizadas para la programación de las rutas que el sistema debe seguir y por último se describe el algoritmo de control implementado para la corrección de ruta. En particular el desarrollo de la función de observación se inspira en lo expuesto en [31].

2.1 Antecedentes de robótica móvil

Para que un robot pueda ser móvil requiere de un sistema de navegación. En esencia un sistema de navegación es aquel que permite al robot tomar decisiones a partir de mediciones del ambiente donde se desplaza dicho robot. Estas decisiones requieren del conocimiento tanto del robot como de las condiciones circundantes. Por ejemplo, es necesario saber la manera en como el robot se desplaza, si es que es aéreo, submarino o terrestre; si es terrestre el robot puede ser articulado o con ruedas, en cualquiera que sea el caso, el robot requiere de un modelo que describa la cinemática del robot. Además del modelo cinemático, el robot requiere de un conjunto de sensores que describan el ambiente a su alrededor. Cuando se tiene el modelo cinemático del robot y el conjunto de sensores es posible utilizar alguna estrategia que permita resolver el problema de localización y el de detección y evasión de obstáculos. Si la posición del robot es calculada con precisión (localización) se puede planear la mejor ruta para alcanzar posiciones deseadas y con esto implementar una estrategia de control que permita alcanzar estas posiciones. A continuación, se describe de manera general algunas de las clasificaciones comúnmente utilizadas para las partes que componen a un robot móvil.

2.1.1 Modelos cinemáticos de vehículos con ruedas

Debido a sus características los robots móviles con ruedas, se consideran sistemas no-holonómicos, lo que conlleva a una serie de consideraciones extras no presentes en sistemas holonómicos. Algunos de los sistemas holonómicos clásicos pueden ser brazos robóticos o cualquier cadena cinemática cerrada. Las características generales de un sistema no-holonómico se describen a continuación.

2.1.1.1 Sistemas no-holonómicos

Un sistema no-holonómico es aquel que presenta restricciones (relaciones) no-holonómicas, es decir, un sistema cuyo modelo cinemático contiene derivadas en el tiempo de las coordenadas generalizadas (variables) siendo éstas no integrables. Debido a esto los sistemas no-holonómicos también suelen ser llamados como sistemas no-integrables. [45]. Para profundizar en el significado de una *restricción holonómica* se considera una función de la forma

$$f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0 \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ es un vector de coordenadas generalizadas. Si esta restricción puede convertirse a la forma

$$F(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (2.2)$$

se dice que es integrable. Por lo tanto, aunque f en la ecuación (2.1) posea las derivadas en el tiempo $\dot{\mathbf{q}}$, si ésta puede expresarse de la forma descrita en la ecuación (2.2), entonces f es una restricción holonómica. Por lo tanto, se puede decir que toda restricción de la forma (2.1) se dirá *no-holonómica* si no puede ser convertida a la forma (2.2) en donde sólo se involucre a las variables generalizadas en si mismas.

Sistemas típicos que son sujetos a restricciones no-holonómicas (llamados *sistemas no-holonómicos*) son robots subactuados, como lo pueden ser robots móviles autónomos ya sea terrestres con ruedas, aéreos o subacuáticos. La no-holomicidad ocurre cuando existen redundantes grados de libertad. Por ejemplo, los tres grados de libertad (X, Y, φ) de la pose de un robot móvil diferencial pueden ser controlados mediante el uso de dos motores. El número de restricciones no-holonómicas está dado por la resta entre el número de grados de libertad n_l y el número de actuadores que producen movimiento en el robot k_a , para el robot diferencial tendremos que $n_l = 3$ y $k_a = 2$ por lo que $(n_l - k_a = 1)$ existe una sola restricción no-holonómica.

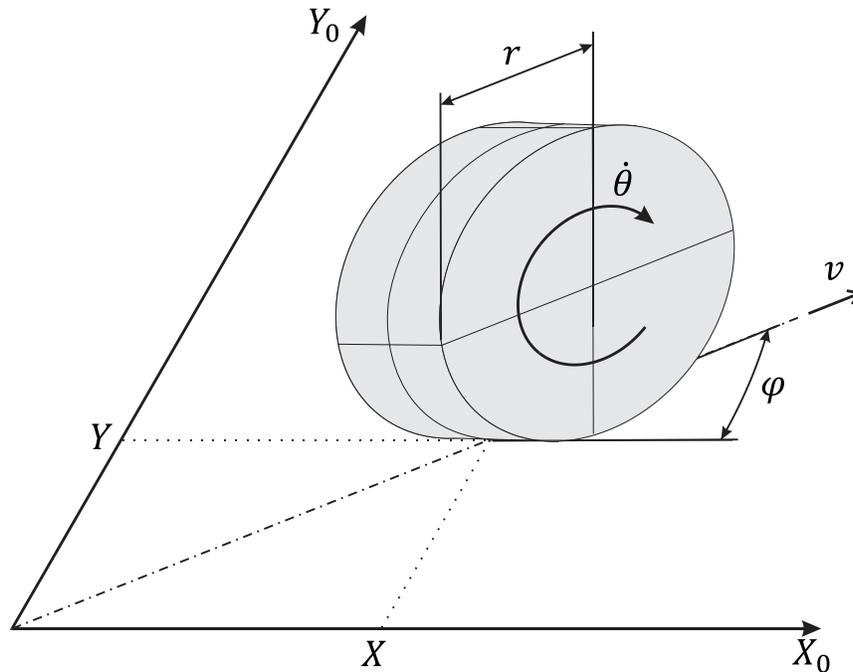


Figura 2.1. Esquema del desplazamiento de un disco en un plano.

Ahora bien, considerando el disco de radio r y velocidad angular $\dot{\theta}$, en un movimiento sin deslizamiento sobre un plano $X_0 - Y_0$ como se muestra en la Figura 2.1 tendremos que sus coordenadas generalizadas estarán restringidas por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{X} &= r\dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{Y} &= r\dot{\theta} \sin \varphi \end{aligned} \tag{2.3}$$

las cuales no son integrables. Estas restricciones expresan la condición de que el vector de velocidad v del centro del disco yace en el plano medio del disco. Eliminando la velocidad $v = r\dot{\theta}$ en la ecuación (2.3) da

$$v = r\dot{\theta} = \frac{\dot{X}}{\cos \varphi} = \frac{\dot{Y}}{\sin \varphi} \tag{2.4}$$

o bien

$$\dot{X} \sin \varphi - \dot{Y} \cos \varphi = 0 \tag{2.5}$$

La ecuación (2.5) es la restricción no-holonómica del movimiento del disco. Debido a las restricciones cinemáticas descritas en (2.3), si el disco parte de una posición

(X_1, Y_1, φ_1) puede alcanzar cualquier otra posición (X_2, Y_2, φ_2) deseada en tres pasos:

Paso 1: girando el disco $\varphi_1 - \tan(Y_2 - Y_1)/(X_2 - X_1)$ grados alrededor de un eje normal al plano que pasa por el centro del disco, hasta quedar apuntando a la nueva posición (X_2, Y_2) ;

Paso 2: avanzando en esa dirección una distancia $l = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$, y

Paso 3: girando ahora $\varphi_2 + \tan(Y_2 - Y_1)/(X_2 - X_1)$ grados.

Otros dos ejemplos de sistemas que son sujetos a restricciones no-holonómicas son una bola rodante en un plano sin rotación en un solo punto, y un aeroplano que no puede detenerse de manera instantánea en el viento o moverse hacia atrás.

Para los robots móviles con ruedas existe una gran variedad de configuraciones con restricciones no-holonómicas. La cinemática de algunas de ellas se describe en los siguientes apartados.

2.1.1.2 Arquitectura tipo triciclo

En esta configuración una sola rueda al mismo tiempo es impulsada y dirigida. Este diseño, guarda muchas similitudes con la arquitectura tipo bicicleta y ambas son el diseño conceptual más simple para un robot móvil, ver Figura 2.2. La velocidad lineal y la velocidad angular del robot están completamente desacopladas. Para un manejo recto, la rueda delantera se ubica en la posición media y se impulsa a la velocidad deseada. Para seguir una curva, la rueda es girada a un ángulo que empate la curva deseada. A continuación se describe de manera geométrica el desarrollo de la cinemática que gobierna a la arquitectura tipo triciclo.

Si la rueda de dirección gira a un cierto ángulo β medido a partir de una línea perpendicular al eje de las ruedas traseras, el triciclo rotará con una cierta velocidad angular alrededor del punto llamado Centro de Rotación Instantáneo (CR) donde se intersectan las proyecciones del eje que sostiene a la rueda motriz y el eje de las ruedas traseras, como se puede apreciar en la Figura 2.2.

La velocidad lineal de la rueda motriz v_r quedará determinada por

$$v_r = \omega_r r \quad (2.6)$$

donde ω_r y r son la velocidad angular y el radio de la rueda motriz respectivamente.

Considerando β como el ángulo formado entre la rueda motriz y un eje paralelo a las ruedas traseras, y siendo l la distancia entre el eje de las ruedas traseras y el pivote alrededor del cual gira la rueda motriz; de la Figura 2.2 se pueden apreciar que el radio de curvatura ρ es

$$\rho = l \tan \beta \quad (2.7)$$

donde es posible observar que la velocidad angular instantánea $\dot{\varphi}$ del triciclo es

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_r r}{\sqrt{l^2 + \rho^2}} = \frac{v_r}{l} \sin \beta \quad (2.8)$$

Si consideramos un sistema de coordenadas móvil unido a la plataforma con origen en el centro del eje de las ruedas traseras y ejes $x - y$ lo largo de los vectores unitarios \hat{e}_1 (paralelo a las ruedas traseras) y \hat{e}_2 (paralelo al eje de las ruedas traseras), respectivamente, las velocidades medidas a lo largo de estos ejes serán

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_r \cos \beta \\ \dot{y} &= 0, \text{ sin resbalamiento lateral} \\ \dot{\varphi} &= \frac{v_r}{l} \sin \beta \end{aligned} \quad (2.9)$$

asimismo, las proyecciones de estas velocidades en los ejes absolutos $X_0 - Y_0$ tomarán la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{X} &= v_r \cos \beta \cos \varphi \\ \dot{Y} &= v_r \cos \beta \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= \frac{v_r}{l} \sin \beta \end{aligned} \quad (2.10)$$

o bien en forma matricial tenemos que

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \cos \beta \\ \frac{v_r}{l} \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

donde \dot{X} , \dot{Y} son las velocidades del vehículo en las direcciones de los ejes globales $X_0 - Y_0$ y $\dot{\varphi}$ la razón de cambio de la dirección medida en sentido antihorario a partir del semieje X_0 positivo.

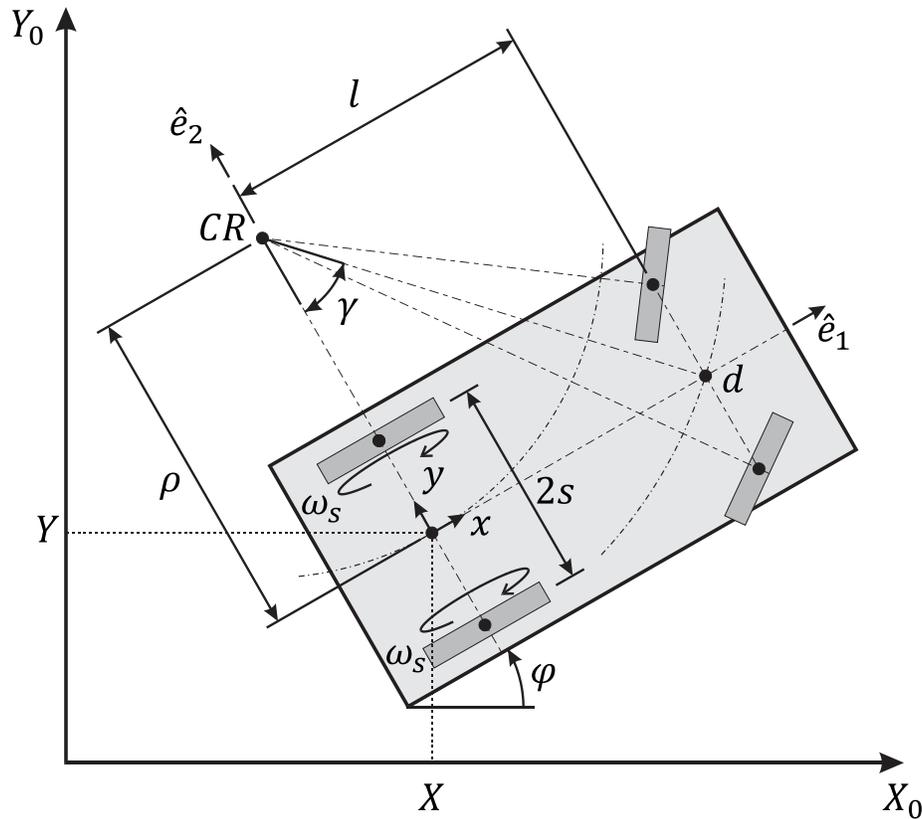


Figura 2.3. Esquema de vehículo sobre ruedas con dirección tipo Ackerman.

El desarrollo del modelo cinemático de la arquitectura Ackerman se describe a continuación. En primer lugar se considera la velocidad v de las ruedas traseras que es

$$v = \omega \rho = r \omega_s \rho \quad (2.12)$$

donde r es el radio de las ruedas motoras, ω es la velocidad angular instantánea del punto medio de las ruedas motrices y ω_s es la velocidad angular con la que giran ambas ruedas traseras. De la Figura 2.3 se puede verificar que

$$\rho = \frac{l}{\tan \gamma} \quad (2.13)$$

por lo tanto

$$\omega = \frac{v}{l} \tan \gamma \quad (2.14)$$

donde la distancia del centro de rotación ρ puede definirse en términos de las velocidades del centro del eje de las ruedas traseras v_t y la velocidad el punto medio d de las llantas delanteras v_d

$$\rho = \frac{v_t}{v_d - v_t} s \quad (2.15)$$

siendo

$$\begin{aligned} v &= v_t = \rho \dot{\phi} \\ v_d &= (\rho + s) \dot{\phi} \end{aligned} \quad (2.16)$$

ahora bien, las velocidades del robot Ackerman medidas desde un marco móvil ubicado al centro del eje de las ruedas traseras con ejes x y y paralelos a los vectores de dirección \hat{e}_1 y \hat{e}_2 respectivamente será

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \\ \frac{\tan \gamma}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

El modelo cinemático considerando el marco de referencia $X_0 - Y_0$ tiene la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi & 0 \\ 0 & \frac{\tan \gamma}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

donde la integración de estas ecuaciones usualmente se realiza por medio de las mediciones odométricas.

2.1.1.4 Dirección diferencial

La arquitectura de manejo diferencial es aquella donde se tienen dos motores montados en posiciones fijas en los costados de un vehículo, y donde cada rueda es impulsada de manera independiente. Para tener estabilidad es necesario tres o más puntos de contacto, por lo que este diseño requiere adicionalmente al menos una rueda de castor (rueda loca). El manejo diferencial es mecánicamente más sencillo que el de una sola rueda impulsora, ya que, no es necesaria la rotación de un eje de dirección. Sin embargo, el control de manejo para la arquitectura diferencial es más complejo que el de una sola rueda, debido a que requiere la coordinación de dos ruedas impulsoras.

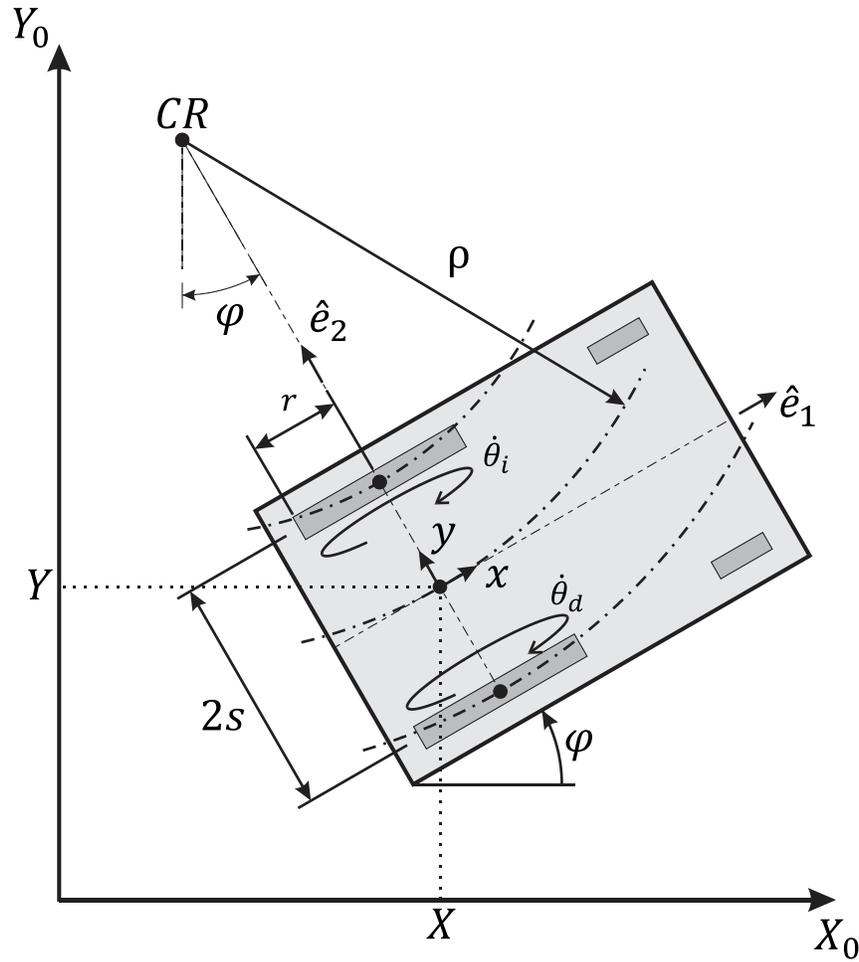


Figura 2.4. Esquema de vehículo sobre ruedas con dirección tipo diferencial.

Para obtener las ecuaciones cinemáticas se considera que las ruedas izquierda y derecha giran a diferentes velocidades angulares $\dot{\theta}_i$ y $\dot{\theta}_d$ respectivamente, ver Figura 2.4. Esta diferencia, entre las velocidades angulares de cada rueda, provoca que el vehículo gire alrededor de un centro de rotación instantáneo CR . Para ambas ruedas y para el centro del vehículo el CR será el mismo, aunque para cada elemento se tendrá un radio de curvatura distinto. El radio de curvatura R_i y R_d para la rueda izquierda y derecha respectivamente viene dado por

$$\rho_i = \rho - s \tag{2.19}$$

$$\rho_d = \rho + s$$

por lo tanto la velocidad lineal de cada rueda viene dada por

$$v_i = \omega(\rho - s) \tag{2.20}$$

$$v_d = \omega(\rho + s)$$

Si restamos ambas velocidades podemos encontrar que

$$\omega = \frac{v_i - v_d}{2s} \quad (2.21)$$

donde ω es la velocidad angular del vehículo respecto del centro de rotación.

Para encontrar el valor del radio de giro del centro del vehículo ρ , se divide la suma de las velocidades lineales de ambas ruedas entre la resta de las mismas, lo que da como resultado

$$\rho = \frac{v_i + v_d}{v_i - v_d} s \quad (2.22)$$

con estos resultados es posible calcular la velocidad instantánea del centro del vehículo utilizando la siguiente ecuación

$$v = \omega \rho = \frac{1}{2}(v_i + v_d) \quad (2.23)$$

las velocidades del robot diferencial medidas en un marco móvil ubicado al centro del eje de las ruedas motoras con ejes x y y paralelos a los vectores de dirección \hat{e}_1 y \hat{e}_2 respectivamente será

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r/2 & r/2 \\ 0 & 0 \\ r/(2s) & -r/(2s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_i \\ \omega_d \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

donde r es el radio de las ruedas motoras.

El modelo cinemático considerando el marco de referencia $X_0 - Y_0$ tiene la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

donde la integración de estas ecuaciones usualmente se realiza por medio de las mediciones odométricas.

2.1.2 Percepción

El sistema de sensores que acompaña a cualquier sistema automático es de primordial importancia ya que gracias a él, se permite cerrar el ciclo de control de cualquier dispositivo automático. En robótica móvil, los sensores, son el puente entre las acciones que realizar y el mundo que lo rodea. Actualmente uno de los problemas de interés de la ciencia es la toma de decisiones que el robot debe hacer basada en la óptima integración de diferentes tipos de sensores. El trabajo presentado en este documento es en gran medida un propuesta de cómo integrar mediciones odométricas con mediciones basadas en visión, sin embargo, el número y tipo de sensores puede ser muy variado, por lo que a continuación presentamos una breve reseña referente a las características principales de los sensores más comunes.

Según [45], en general, los sensores se pueden clasificar como *analógicos* y *digitales*. Los *sensores analógicos* proveen señales de salida análogas que necesitan convertidores análogo-a-digital (A/D) para su uso con sistemas digitales. Ejemplos de sensores analógicos son sensores infrarrojos de distancia analógicos, micrófonos y brújulas analógicas. Los *sensores digitales* son más estables (con menos ruido) que los sensores analógicos, y sus salidas pueden ser de diferentes formatos. Por ejemplo, pueden ser de la forma “serial síncrona” (i.e. lectura de datos bit por bit), o de la forma “paralela” (e.g. de 8 a 16 líneas de salida digital).

Para todos los casos, las características deseadas para un sensor son *alta resolución, amplio rango de operación, respuesta rápida, calibración fácil, gran confiabilidad, y bajo costo* (en compra, soporte, y mantenimiento). Los sensores incluyen también las *cámaras de video* con todos sus equipos auxiliares necesarios en visión artificial.

Los sistemas de sensores utilizados para el posicionamiento de un robot pueden también agruparse en: *mecánicos, acústicos, electromagnéticos, magnéticos y ópticos*.

Algunos de estos son adecuados para la medición de un robot estacionario, mientras que otros son adecuados para la medición de la posición durante el movimiento del robot. Los *sistemas mecánicos* requieren de un contacto físico entre el robot y el sensor. Frecuentemente, éstos se encuentran integrados en el cuerpo del robot. Los *sensores acústicos* y *electromagnéticos* utilizan la direccionalidad y el tiempo de vuelo de una señal enviada y recibida con el fin de poder calcular la posición angular y lineal de un objeto de interés.

Los sistemas acústicos utilizan frecuencias ultrasónicas, en tanto que, los sensores electromagnéticos pueden incluir equipos ópticos, laser o de radar. En

ambos casos, es necesario que el sensor y el objetivo a ser medido se encuentren sin obstáculos. Los *Sensores Magnéticos* utilizan la configuración espacial de los campos magnéticos de la Tierra o de solenoides para realizar los cálculos de la posición. Por último, los sensores ópticos utilizan apropiadas cámaras de visión (monocular, binocular, omnidireccional).

Otras clasificaciones de los sensores utilizados en robótica son las siguientes:

Desde el punto de vista del robot:

- Sensores a bordo, es decir, sensores montados en el robot
- Sensores globales, es decir, sensores montados fuera del robot en el ambiente desde donde se mandan la información del sensor hacia el robot.

Desde en un punto de vista pasivo/activo:

- Sensores pasivos, es decir, sensores que monitorean el ambiente sin afectarlo (e.g. giroscopios, cámaras de video)
- Sensores activos, es decir, sensores que estimulan el ambiente para poderlo monitorear (e.g. sensores infrarrojos, scanner laser, sonares)

Sensores de robótica móvil

- Sensores internos (Propioceptivos), es decir, sensores que monitorean el estado interno del robot.
- Sensores externos (Exteroceptivos), es decir, sensores que monitorean el ambiente donde el robot se mueve.

Los sensores internos incluyen los sensores que miden la velocidad del motor, la carga de las ruedas, el ángulo entre las juntas de los brazos, el voltaje de la batería. Sensores externos incluyen sensores miden distancia, amplitud de sonido e intensidad luminosa. Ejemplos de sensores activos, son aquellos donde el sensor emite energía al ambiente, y pueden ser encoders de eje y laser medidores de rango (LIDAR). Ejemplos de sensores pasivos incluye termómetros, micrófonos o sensores de cámara tales como CCD o CMOS. Las cámaras constituyen el elemento central de un sistema de visión, y debido a su gran versatilidad y relativamente bajo costo los sistemas de visión han logrado posicionarse los más utilizados en aplicaciones automáticas.

2.1.3 Sistemas de visión

Debido a su versatilidad y bajo costo, en el trabajo aquí descrito se optó por la utilización de un sistema de visión basado en dos cámaras de agujero que permiten la corrección de la posición calculada por cuenta muerta. Sin embargo,

existen diversos tipos de sistemas de visión que debido a sus características pueden aplicarse a otros tipos de sistemas móviles.

2.1.3.1 Introducción

Los sistemas de visión, cuando son utilizados en robótica, permiten que un robot pueda reconocer objetos mediante los haces de luz que inciden en el sensor de una cámara digital y un grupo de algoritmos computacionales que traducen las señales detectadas por el sensor de la cámara en información geométrica.

En los últimos años ha habido avances importantes en las tecnologías de los sensores de cámaras digitales. Los sensores chip CCD (Dispositivo de Carga Acoplada), sensores previamente dominantes están siendo superados por los más baratos de producir sensores chip CMOS (Sensor de Óxido Metal Complementario). El rango de sensibilidad de brillo para los sensores CMOS es típicamente mayor que la de los sensores CCD en varios órdenes de magnitud. Sin significar esto, un cambio importante para la conexión a un sistema embebido. La mayoría de los sensores proporcionan varios protocolos de interfaz diferentes que se puede seleccionar a través del software. Por otro lado, esto permite un diseño más versátil de hardware, aunque, implica que los sensores se vuelvan tan complejos como un microcontrolador y que el diseño de software se vuelva más elaborado [46].

Los sensores de las cámaras digitales transforman haces de luz en señales eléctricas que son medidas y posteriormente digitalizadas en forma de píxeles. Un píxel, es un vector de números binarios que representa un color particular. Una imagen digital es una matriz de píxeles (vectores) que al estar llena con los correspondientes colores crea una imagen de la escena desde el punto de vista de la cámara.

Además de los sensores CDD o CMOS utilizados las cámaras digitales están provistas un conjunto de lentes (también llamados la óptica de la cámara) que al mismo tiempo que protegen el sensor difractan los haces de luz para poder hacer un uso óptimo del área del sensor. Aunque los lentes utilizados en cámaras digitales pueden tener distorsiones que provocan un desplazamiento de los puntos de imagen respecto de sus ubicaciones ideales descritas por algún modelo de cámara en el plano del sensor provocando incertidumbres en las mediciones realizadas con sistemas de visión. Estas distorsiones, pueden ser de diferentes índoles:

- *radiales*: desplazamientos hacia el centro de la imagen o fuera de ella.

- *tangencial*: estos desplazamientos se producen en ángulos rectos a la dirección radial y por lo general son mucho menores que los desplazamientos radiales
- *radial asimétrico o tangencial*: en este caso las funciones de error varían para diferentes ubicaciones en el plano de la imagen
- azar (estos desplazamientos no pueden ser modelados matemáticamente)

El proceso de corrección de los desplazamientos de la imagen que se producen debido a la posición y orientación de los elementos internos de la cámara se llama calibración de la cámara. Aunque, en aplicaciones especializadas, siempre se busca utilizar lentes de alta calidad con pocas distorsiones, que brinden al sistema de alta precisión tratando de evitar en la medida de lo posible las correcciones por software. Aun así, existe una gran cantidad de herramientas para realizar las correcciones por software (también conocidas como procesamiento digital de imágenes) que utilizan variados modelos matemáticos que compensan alguna deformación o que también pueden resaltar diferentes aspectos de una imagen. El procesamiento de imágenes puede realizarse a diferentes niveles (bajo, medio y alto) mismos que se describen brevemente en la siguiente sección.

2.1.3.2 Procesamiento digital de imágenes

El procesamiento digital de imágenes es un proceso computarizado en el cual una imagen digital es analizada para la obtención de cierta información deseada. En general se pueden considerar tres tipos de procesos computarizados: procesos de bajo, medio y alto nivel [47].

Procesamiento de bajo nivel. Este procesamiento involucra operaciones primitivas tales como el pre-procesamiento de la imagen para reducir ruido, mejoramiento del contraste y agudización (*sharpening*) de una imagen. Un proceso de bajo nivel se caracteriza porque tanto a la entrada como a la salida del proceso se tienen imágenes.

Procesamiento de medio nivel. El procesamiento de imágenes de medio nivel involucra tareas tales como la segmentación (partir una imagen en regiones u objetos), la descripción de dichos objetos para poder reducir de forma sustancial el costo computacional y también se utiliza para lograr la clasificación (reconocimiento) de objetos individuales. Un proceso de medio nivel se caracteriza por el hecho de que sus entradas generalmente son imágenes, pero sus salidas son atributos extraídos de esas imágenes (e.g. ejes, contornos y la identificación de objetos individuales). Este tipo de procesamiento fue el utilizado en el presente proyecto para poder detectar las marcas visuales artificiales (círculos concéntricos) que sirvieron de guía para la actualización de la posición de la silla

de ruedas. La ventaja de usar marcas artificiales es que el proceso puede hacerse más *ad hoc* para la detección de un solo tipo característica lo que ahorra tiempo de procesamiento.

Procesamiento de alto nivel. En este nivel de procesamiento está implicada la necesidad de “tener sentido” de un ensamble de objetos reconocidos, con en el análisis de imágenes, y en el final lejano del continuo, desempeñando funciones cognitivas normalmente asociadas con la visión, como podría ser la descripción espacial de un escenario.

Además del procesamiento de imágenes los sistemas de visión pueden caracterizarse por el tipo de cámaras que utilicen, y dependiendo del tipo de cámara utilizado las metodologías utilizadas en los sistemas de visión pueden variar. A continuación se describirán brevemente las metodologías de cámaras estereográficas, sistemas de visión omnidireccional y el modelo de cámara de agujero.

2.1.3.3 Cámaras estereográficas

Una *cámara estereográfica* es aquella que posee dos o más lentes con sensores de imagen o marcos de filmación diferentes para cada lente y pueden simular la visión binocular del humano. Debido a esto, este tipo de cámaras tienen la habilidad de capturar imágenes tridimensionales, por medio de un proceso llamado *estereografía*. La distancia entre los lentes de las cámaras es típicamente aproximada a la de la distancia promedio entre los ojos humanos. [45]

Existe una clase de sensores de visión activos que han recibido considerable atención conocidos como sistemas de visión robótica binocular o cabezas estéreo activas. Las cabezas estero binoculares afrontan el problema de lograr posicionar y direccionar dos cámaras de tal forma que las cámaras logren apuntar a la misma dirección de la misma forma en que lo hacen los sistemas biológicos. Ya que las cabezas son modeladas en base a un sistema biológico, el diseño de las cabezas estero con frecuencia son descritas en términos biológicos. Existen dos modelos básicos para describir el movimiento del ojo humano: el sistema Helmholtz y el Fick. En el modelo Helmholtz, los ojos giran alrededor de un eje horizontal primero (*tilt*) y luego alrededor de un eje vertical (*pan*). En el modelo Fick, los ojos primero giran alrededor de un eje vertical (*pan*) y luego alrededor de un eje horizontal (*tilt*). El modelo Fick es también conocido como modelo de mira de pistola. En cualquiera de los dos modelos los ojos rotan alrededor de sus ejes ópticos. Las cabezas estéreo robóticas son construidas típicamente utilizando uno de estos dos modelos.

Aunque los modelos del movimiento del ojo humano se basan en el hecho de que los movimientos del ojo humano son de naturaleza rotatoria, los sistemas robóticos tienen considerablemente más libertad, por lo que es común encontrar cabezas estero con movimientos tanto rotacionales como de traslación para cada una de las cámaras, [48].

2.1.3.4 Cámaras omnidireccionales

Uno de los problemas de las cámaras de video estándar es su limitado campo de visión. Ya que un robot no puede responder a algo que no puede medir, las cámaras individuales con limitado campo de visión se desempeñan pobremente bajo condiciones generales. Para afrontar este problema varias técnicas han sido propuestas. Algunas son, el uso de múltiples cámaras, cámaras con movimiento continuo e incluso lentes del tipo ojo de pescado han sido propuestos. Una alternativa a estas propuestas también ha sido el uso de espejos especialmente diseñados para captar una porción mayor del ambiente en el campo de visión de la cámara. Este es el enfoque que desarrolla en sensores tales como COPIS (*COnic Projection Image Sensor*) y Paracamera.

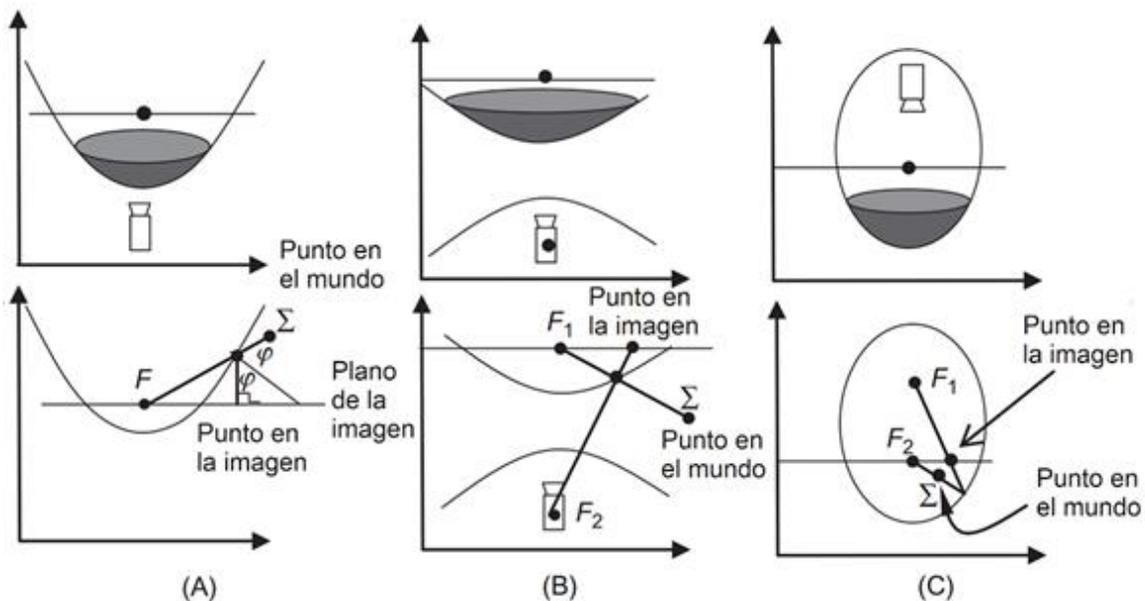


Figura 2.5. Diferentes configuraciones de Sistemas de Visión Catadióptricos. (A) Perfil parabólico, (B) Perfil hiperbólico y (C) Perfil elíptico. Adaptada de [45].

Los sistemas tales como Paracamera y COPIS utilizan espejos cónicos para proyectar una vista de 360° del ambiente. Esta proyección es filmada por una cámara CCD montada directamente por debajo del espejo. El campo de visión está limitado únicamente por el vértice del espejo cónico y el ángulo de visión de la cámara. El sensor obtiene una vista radial de su entorno; donde el robot está

ubicado en el centro de la imagen. COPIS ha sido utilizado de manera exitosa para la navegación en ambientes interiores estructurados conocidos y no conocidos. [48]

Además de los perfiles parabólicos es posible utilizar otros tipos de perfiles tales como hiperbólicos o elípticos. El término general utilizado para este tipo de sistemas es *Sistemas de Visión Catadióptricos*, una descripción detallada de diferentes sistemas Catadióptricos puede encontrarse en [45]. En la Figura 2.5 se pueden ver diferentes configuraciones de Sistemas de Visión Catadióptricos encontrados en la práctica.

2.1.3.5 Modelo básico de cámara de agujero

Este es el modelo utilizado en este proyecto, un modelo de *cámara de agujero* ideal asume el uso de un lente sin distorsiones y supone que los rayos de luz viajan en línea recta desde el objeto observado hasta el plano de imagen (sensor), a través de un agujero. La cámara de agujero es el dispositivo más simple para capturar con precisión la geometría de proyección en perspectiva. Para el análisis el agujero tiene un tamaño infinitesimalmente pequeño. La imagen del objeto se forma por la intersección de los rayos de luz con el plano de la imagen. Este mapeo de las tres dimensiones en dos dimensiones se llama proyección en perspectiva [45].

El modelo de cámara de agujero también conocido como *pinhole*, como ya se mencionó, parte de considerar la proyección central de puntos en el espacio sobre un plano. Si consideramos el centro de proyección ubicado en el origen de un sistema de coordenadas Euclidianas, existirá un plano en $Z = f$, llamado, *plano de imagen* o *plano focal*. Si se utiliza el modelo de cámara de agujero, un punto en el espacio con coordenadas $\mathbf{X} = [X, Y, Z]^T$ se mapea a un punto en el plano de imagen donde una línea une al punto \mathbf{X} con el centro de proyección y con el plano de imagen como se muestra en la Figura 2.6.

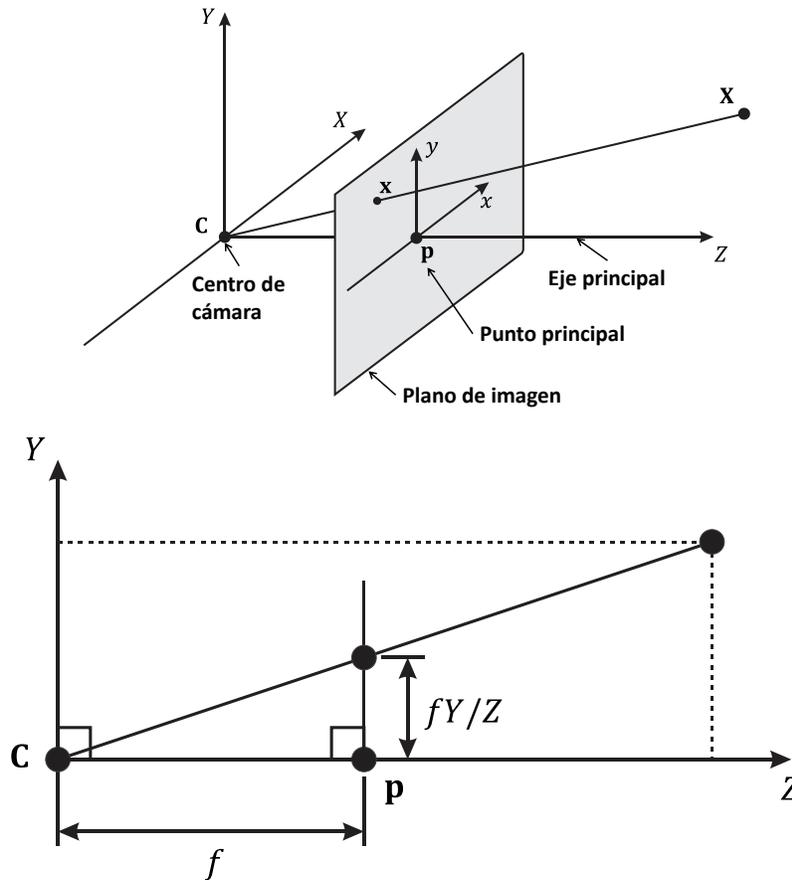


Figura 2.6. Geometría del modelo de cámara de agujero.

Por triángulos semejantes se puede calcular que el punto $[X, Y, Z]^T$ es mapeado al punto $[fX/Z, fY/Z, f]^T$ sobre el plano de imagen. Ignorando la última coordenada de imagen, se puede ver que

$$[X, Y, Z]^T \rightarrow [f X/Z, f Y/Z]^T \quad (2.26)$$

describe el mapeo de la proyección central desde un sistema de coordenadas global al sistema de coordenadas de imagen [49].

Además en Figura 2.6 es posible notar, que el centro de la cámara o foco se encuentra ubicado en el origen del sistema de coordenadas y que el plano de imagen se encuentra localizado enfrente del dentro de la cámara. En base a esta configuración es fácil apreciar que para poder mapear la posición de un punto en el espacio existe un parámetro f , la distancia entre el plano de imagen y el centro de la cámara. En general este parámetro debe calcularse utilizando maneras indirectas, como por ejemplo, con una serie de mediciones tanto físicas, como en el plano de imagen (usualmente con la ayuda de un tablero de ajedrez) de las cuales el valor de f se encuentra realizando un ajuste de curva con mínimos

cuadrados a la función (2.26). Para el caso de la silla de ruedas además del parámetro f fue necesario el cálculo de más parámetros ya que en ese caso, el centro de la cámara no se encontraba en el origen de coordenadas. De hecho, el centro de la cámara se encuentra siempre en movimiento, por lo que se hace necesario describir su posición como función de la posición del vehículo y de la posición relativa que el centro de la cámara guarda con el vehículo, en este caso, con la silla de ruedas.

Normalmente, un sistema de visión va acompañado de otros sensores como podrían ser sensores de odometría o de otro tipo, la combinación de estos diferentes sensores, es lo que permite la creación de sistemas de control de lazo cerrado. Por ejemplo, en un robot móvil la posición estimada en base a la odometría puede considerarse como la señal de entrada a un lazo de control mientras que la medición realizada con un sistema de visión puede considerarse como la señal que cierra el lazo de control. Teniendo esto en consideración, existen diferentes estrategias de control en robótica móvil, de las que se hace una descripción breve a continuación.

2.1.4 Estrategias de control

En las estrategias de control describe Tzafestas en [45] se mencionan las siguientes: métodos basados en Lyapunov, el método de sistemas afines e invariantes múltiples, métodos adaptativos y robustos, métodos difusos y neuronales, Visual Servoing, Visual Servoing con cámaras omnidireccionales, Manipulación en Espacio de Cámara Móvil (MCSM) [50], y Mapeo y Localización Simultánea (SLAM) y sus variante FastSLAM [51].

La estrategia de control en conjunto con un modelo cinemático y un grupo de sensores son la base para la creación de un sistema de navegación. El modelo cinemático alimentado por la información de ciertos sensores hacen posible la localización del sistema robótico móvil, otro conjunto de sensores pueden detectar obstáculos alrededor de sistema móvil y evitar colisiones en un ambiente dado. Con la información de la posición del sistema móvil respecto de un marco de referencia dado (localización) se hace posible la planeación una ruta, con lo que se conforma un sistema de navegación. Algunas de las estrategias utilizadas para la navegación de robots móviles se describen a continuación, ver Figura 2.11.

2.1.5 Navegación: localización y planeación

Una definición de navegación dice que éste es el proceso por el cual se determina con exactitud la posición y velocidad relativa de una referencia conocida, o bien, es el proceso de planeación y ejecución de las maniobras necesarias para moverse entre localidades deseadas, [52].

La arquitectura de un sistema de navegación posee tres elementos principales: programación modular que permita la combinación y reutilización de diferentes códigos para cada situación dada, el control de la localización que puede ir desde un aspecto puramente geométrico hasta un nivel meramente conceptual y por último una estrategia de descomposición que permite la utilización de los diversos módulos que componen al robot, esta descomposición puede ser temporal (tiempo real o fuera de línea) o descomposición del control, que busca como combinar varias salidas de control (acciones físicas).

De la definición de navegación dada se puede deducir que la localización y la planeación son las dos tareas más importantes para un robot móvil ver Figura 2.11. Es necesario conocer la posición actual de un robot para poder planear la forma en que éste llegará a una posición deseada. Estos dos problemas están estrechamente ligados, ya que si el robot no sabe con precisión donde se localiza al inicio de una trayectoria planeada, será difícil que el vehículo alcance el destino deseado. Después de que una variedad de enfoques algorítmicos han sido propuestos en el pasado para la localización, navegación y mapeo; los métodos probabilísticos que minimizan las incertidumbres son actualmente utilizados en la solución de este problema, [46].

2.1.5.1 Estrategias de localización

Uno de los problemas centrales para el manejo de robots móviles, es la localización. En muchos escenarios, es necesario conocer la posición y orientación del robot en todo instante. Por ejemplo, un robot de limpieza necesita asegurarse de que ha cubierto la superficie completa del piso sin repetir superficies y sin perderse, un robot de entrega de correo, debe ser capaz de navegar en un piso de cierto edificio y necesita saber su posición y orientación relativa al punto de inicio. Este es un problema no trivial en la ausencia de sensores globales, [46].

El problema de la localización podría resolverse mediante el uso de sistemas de posicionamiento global. En una configuración de exteriores, este posicionamiento global podría estar basado en satélites (GPS). En cambio para interiores, una red de sensores globales constituida por sensores infrarrojos, sonares, laser o marcas con radiofrecuencia podrían ser utilizadas para adaptar un sistema de posicionamiento global. Cualquiera de estas dos configuraciones las coordenadas de un robot. Sin embargo, los sistemas GPS manejan precisiones que usualmente son bajas considerando la mayoría de los robots móviles más cercanos a las personas, como lo podrían ser, robots de compañía, sillas de ruedas, etc. Por otro lado, las redes de sensores utilizadas para la localización en interiores son difíciles de implementar ya que por lo regular las arquitecturas de los edificios no facilitan

el desplazamiento ya sea de ondas de radio o el desplazamiento de rayos laser, aunado a esto, con este método sólo es posible conocer la posición de un robot, más no su orientación, lo que obligaría a estimarla por medio de algún otro método.

El uso de marcas visuales naturales o artificiales es un método de bajo costo que puede ayudar en la localización de un robot móvil, sin embargo, para poder hacer uso de éstas, es necesario también utilizar sensores odométricos en las ruedas del robot móvil que puedan dar un primera estimación de la posición y orientación del robot. Los encoders por si mismos no son una solución robusta al problema de localización ya que sufren de la acumulación de los errores de medición junto con los errores provocados por el resbalamiento de las ruedas, vibraciones, entre otros, además son sensibles al cambio en dirección del vehículo. Sensores que usualmente acompañan a los encoders son laser, de ultrasonido, de visión, brújulas electrónicas, etc.

Normalmente en la utilización de dos tipos de sensores o más se requiere la utilización de alguna estrategia que permita el óptimo uso de la información proveniente de cada uno de los sensores. Estas estrategias pueden ser de computación suave como los Algoritmos Genéticos (GA), Lógica Difusa o Redes Neuronales, o bien, pueden ser estrategias estocásticas basadas en probabilidades como lo pueden ser los Filtros de Kalman, Filtros de Partículas, Cadenas de Markov, etc.

2.1.5.2 Estrategias de planeación

Existen diferentes enfoques para la planeación de ruta utilizados en robótica móvil, de los que su elección dependerá de la aplicación particular. Por ejemplo, métodos basados en comportamiento reactivo son buenos en cuanto a una robusta evasión de colisiones.

La planeación de rutas en representaciones espaciales con frecuencia requiere de la integración de diferentes enfoques. Con lo que se puede lograr una navegación eficiente, precisa y consistente para un robot móvil.

En [53] y [54] se describen algunas de las estrategias utilizadas para la planeación de rutas que mencionamos a continuación:

Planeación de rutas topológicas. La planeación de rutas topológicas es útil para la creación de rutas de larga distancia, las cuales, dan soporte a la navegación para completar una tarea. Los mapas topológicos son una abstracción de las rutas que debe seguir el robot, donde existen nodos conectados por líneas rectas que indican el origen y destino de cierta ruta. La ventaja de esta abstracción es el

hecho de que no se tiene que lidiar con los detalles geométricos de la ruta, ya que esta parte se resolverá por otro algoritmo de planeación de ruta que considere las maniobras geométricas que el robot tendrá que hacer para seguir la ruta trazada por el mapa topológico.

Ejecución de ruta basada en comportamientos. Este tipo de enfoque puede ser utilizado para diferentes casos: evitar colisiones, monitorear posiciones y lograr metas. Cada uno de estos casos se realiza casi de manera concurrente. Si el robot espera que después de su posición actual pueda encontrar la región deseada, dos escenarios pueden presentarse. Uno, que el robot alcance la región deseada. En este caso el robot puede cambiar del modo de monitoreo de posición al modo de logro de meta. Dos, si el robot no logra la meta esperada, éste puede utilizar estrategias para resolver el problema, las cuales dependerán del tipo de evento ocurrido. Por ejemplo, si un humano obstruye la ruta, el robot puede pedirle a la persona que libere el camino. Si el camino sigue sin ser liberado, el robot puede planear una nueva ruta que le permita evitar el obstáculo y llegar a la meta.

Planeación de ruta local. En este enfoque, primero se crea un mapa topológico del ambiente. Este mapa se crea durante una etapa de enseñanza. Si un objetivo debe ser alcanzado, la planeación de ruta local se lleva a cabo bajo la condición de que la longitud de la ruta es mínima. El robot, basado en comportamientos, detecta las áreas sin obstáculos. El centro de las áreas libres es usado para la planeación de la ruta. Si varias rutas están disponibles el sistema utiliza un proceso de decisión para elegir la ruta óptima a ser empleada.

Evasión de obstáculos. Para la evasión de obstáculos existen estrategias tales como: algoritmo de gusano, histograma de campo vectorial (VFH), la técnica de la burbuja, técnicas de curvatura de velocidad, enfoques de ventana dinámica (local o global), el enfoque de Schlegel, método del gradiente, entre otros.

Planeación geométrica. En lo referente a seguir una ruta específica existen varias estrategias con las cuales a partir de la cinemática del robot móvil es posible calcular las velocidades y orientaciones de las ruedas para poder seguir una trayectoria dada, o alcanzar un punto específico en un espacio físico. Algunas de las estrategias utilizadas son: trayectorias punto a punto (como la utilizada en el presente proyecto), conexión con líneas, con arcos y líneas rectas, espirales de Euler, curvas con arcos tangentes, método de curvatura constante, por ajuste a polinomios de tercer [55], cuarto [56] o quinto orden [57] [58], por mencionar algunas.

2.1.5.3 Ajuste polinomial de ruta.

En particular la técnica de ajuste polinomial ha demostrado ser robustas y conveniente para aplicaciones donde movimientos bruscos deben ser evitados, e.i. en sillas de ruedas con pacientes sensibles a cambios súbitos de velocidad y aceleración. La ventaja del ajuste polinomial radica en que su diseño hace posible tener funciones suaves de la aceleración y del tirón y de su derivada como en el caso del ajuste de quinto orden, lo que se hace posible un manejo suave y continuo.

Aunque el enfoque del trabajo presente no se ha centrado en la planeación de una ruta suave, a continuación, se describe de manera breve el método de ajuste a polinomios de tercer, cuarto y quinto grado. Esto con el fin de preparar un antecedente a los trabajos futuros que se realizarán para la utilización de la silla de ruedas con pacientes en condiciones controladas.

2.1.5.3.1 Polinomial de tercer grado

El polinomio de tercer orden tiene la forma general

$$Y(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \quad (2.27)$$

Si se considera la Figura 2.7, se puede ver que el punto O es el punto de partida del vehículo y además el origen de coordenadas. Las condiciones iniciales y finales del trayecto son consideradas para resolver las cuatro constantes (a_0, \dots, a_3) del polinomio de tercer orden.

Estas condiciones son:

Al inicio del movimiento el origen del sistema de coordenadas coincide con el centro del eje de las ruedas motoras entonces

$$Y(0) = 0 \quad (2.28)$$

de igual manera, ya que el vehículo se encuentra con una orientación de 0° respecto del semieje positivo X_0 , tendremos

$$\left. \frac{dY}{dX} \right|_{X=0} = 0 \quad (2.29)$$

por último con la condición final, si se asume que se conoce la coordenada de destino (X_B, Y_B, φ_B) entonces tendremos que

$$Y(X_B) = Y_B \quad (2.30)$$

y

$$\left. \frac{dY}{dX} \right|_{X=X_B} = \tan \varphi_B \quad (2.31)$$

con las cuatro ecuaciones (2.28) a la (2.31) es posible encontrar las cuatro constantes a_0 , a_1 , a_2 y a_4 .

$$\begin{aligned} a_0 &= a_1 = 0 \\ a_2 &= 3 \frac{Y_B}{X_B} - \tan \varphi_B \\ a_3 &= \frac{X_B^2 \tan \varphi_B - 2Y_B}{3X_B^4 - 2X_B^3} \end{aligned} \quad (2.32)$$

con estos valores es posible construir la ruta que llevará al vehículo del punto O al punto B .

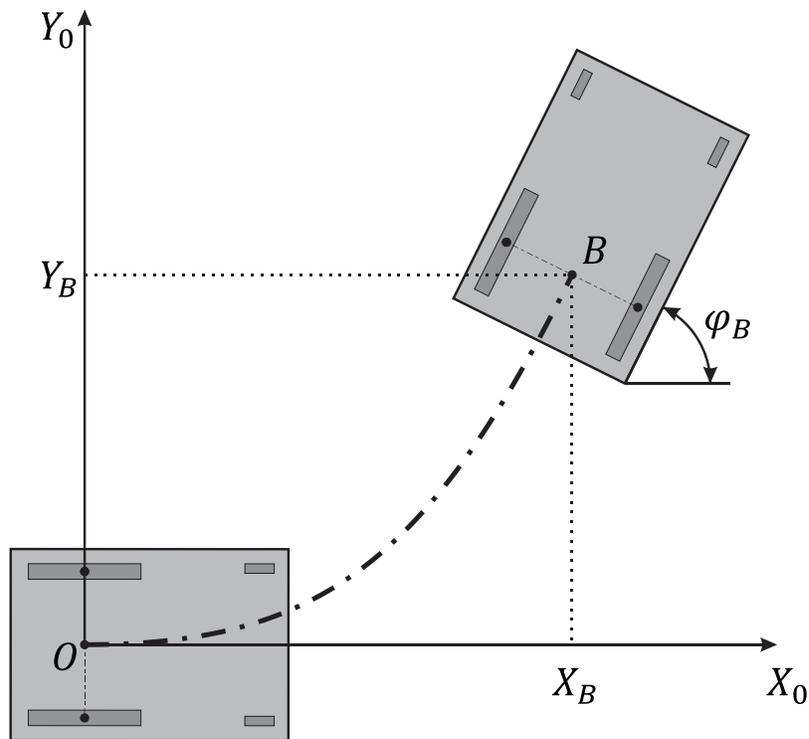


Figura 2.7. Trayectoria poligonal.

2.1.5.3.2 Polinomial de cuarto grado

Ahora, considerando la forma general del polinomio de cuarto orden

$$Y(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 \quad (2.33)$$

Si nuevamente se considera la Figura 2.7, las condiciones iniciales y finales del trayecto son consideradas para resolver las cuatro constantes (a_0, \dots, a_4) del polinomio de grado cuatro con la nueva consideración de que la curvatura al inicio del trayecto es una curvatura μ_0 .

Para este caso las condiciones de frontera serán:

Al inicio del movimiento el origen del sistema de coordenadas coincide con el centro del eje de las ruedas motoras entonces

$$Y(0) = 0 \quad (2.34)$$

de igual manera, ya que el vehículo se encuentra a con una orientación de 0° respecto del semieje positivo X_0 , tendremos

$$\left. \frac{dY}{dX} \right|_{X=0} = 0 \quad (2.35)$$

ya que la trayectoria debe iniciar con cierta curvatura, μ_0 , está curvatura, además, debe coincidir con la curvatura del trayecto inmediato anterior, partiendo de la definición de curvatura, $\mu = \frac{d^2Y}{dX^2} / \left(1 + \frac{dY}{dX}\right)^{3/2}$ y de la ecuación (2.29) se tiene que

$$\left. \frac{d^2Y}{dX^2} \right|_{X=0} - \mu_0 = 0 \quad (2.36)$$

por último con la condición final, si se asume que se conoce la coordenada de destino (X_B, Y_B, φ_B) entonces tendremos

$$Y(X_B) = Y_B \quad (2.37)$$

con

$$\left. \frac{dY}{dX} \right|_{X=X_B} = \tan \varphi_B \quad (2.38)$$

además si se considera que al final del trayecto tendremos un punto de inflexión, donde la curvatura se hace cero podremos también considerar

$$\left. \frac{d^2Y}{dX^2} \right|_{X=X_B} = 0 \quad (2.39)$$

con las seis ecuaciones (2.34) a la (2.39) es posible encontrar las cinco constantes a_0 , a_4 y el valor de la curvatura inicial μ_0 .

2.1.5.3.3 Polinomial de quinto grado

Ahora, considerando la forma general del polinomio de cuarto orden

$$Y(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 + a_5X^5 \quad (2.40)$$

Considerando la Figura 2.7, las condiciones iniciales y finales del trayecto son consideradas para resolver las cuatro constantes (a_0, \dots, a_5) del polinomio de grado cinco con la nueva consideración de que la curvatura al inicio del trayecto es una curvatura μ_0 .

Para este caso las condiciones de frontera serán:

Al inicio del movimiento el origen del sistema de coordenadas coincide con el centro del eje de las ruedas motoras entonces

$$Y(0) = 0 \quad (2.41)$$

de igual manera, ya que el vehículo se encuentra a con una orientación de 0° respecto del semieje positivo X_0 , tendremos

$$\left. \frac{dY}{dX} \right|_{X=0} = 0 \quad (2.42)$$

ya que la trayectoria debe iniciar con cierta curvatura, μ_0 , está curvatura, además, debe coincidir con la curvatura del trayecto inmediato anterior, partiendo de la definición de curvatura, $\mu = \frac{d^2Y}{dX^2} / \left(1 + \frac{dY}{dX}\right)^{3/2}$ y de la ecuación (2.29) se tiene que

$$\left. \frac{d^2Y}{dX^2} \right|_{X=0} - \mu_0 = 0 \quad (2.43)$$

por último con la condición final, si se asume que se conoce la coordenada de destino (X_B, Y_B, φ_B) entonces tendremos

$$Y(X_B) = Y_B \quad (2.44)$$

con

$$\left. \frac{dY}{dX} \right|_{X=X_B} = \tan \varphi_B \quad (2.45)$$

además si se considera que al final del trayecto tendremos un punto de inflexión, donde la curvatura se hace cero podremos también considerar

$$\left. \frac{d^2Y}{dX^2} \right|_{X=X_B} = 0 \quad (2.46)$$

con las seis ecuaciones (2.34) a la (2.39) es posible encontrar las cinco constantes a_0 , a a_5 sin embargo, en este caso las constantes del polinomio de quinto grado quedarán como función de la curvatura inicial μ_0 y para calcularla será necesario utilizar alguna técnica de optimización que genera otra ecuación, para más detalles recurrir a [57].

Entre más alto el grado del polinomio más se asegura la suavidad de la curva, y se puede apreciar de las descripciones anteriores que conforme aumenta el grado del polinomio la complejidad para calcular sus coeficientes también aumenta. En aplicaciones corrientes de robótica móvil un polinomio de tercer grado podría ser suficiente, sin embargo, en aplicaciones médicas como la aquí descrita, ecuaciones de más alto grado se hacen necesarias.

Después de hacer una breve descripción de las características principales que podrían configurar a un robot móvil para realizar una navegación automática. En las siguientes secciones de este capítulo se describen las configuraciones utilizadas para el desarrollo de la silla de ruedas automática utilizadas en el presente trabajo.

2.2 Cinemática de una silla de ruedas

Ya que la silla de ruedas utilizada en este proyecto cuenta con dos ruedas motrices que pueden ser activadas de manera independiente a distintas velocidades se tiene que esta configuración es congruente con la de un modelo cinemático de dirección diferencial. Basándose en lo descrito en la sección anterior se sabe que las ecuaciones cinemáticas de un robot móvil con dirección diferencial serán las mismas que describen la cinemática de la silla de ruedas, y estas son:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \frac{r}{2}(\dot{\theta}_i + \dot{\theta}_d)\cos \varphi \\ \dot{Y} &= \frac{r}{2}(\dot{\theta}_i + \dot{\theta}_d)\text{sen } \varphi \\ \dot{\varphi} &= -\frac{r}{2s}(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_d)\end{aligned}\tag{2.47}$$

donde $\dot{\theta}_i$ y $\dot{\theta}_d$ son las velocidades angulares de las ruedas izquierda y derecha de la silla de ruedas respectivamente; r es el radio de las ruedas y s la distancia media entre las ruedas motrices de la silla de ruedas.

Sin embargo, para el presente proyecto se consideró conveniente definir el historial de desplazamiento no en función del tiempo, sino, de una variable que se relacione directamente con el desplazamiento promedio de las ruedas, esta variable se designa como

$$\alpha = \frac{\theta_i + \theta_d}{2}\tag{2.48}$$

considerando que

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\dot{\theta}_i + \dot{\theta}_d}{2}\tag{2.49}$$

y utilizando la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\alpha} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\alpha}\tag{2.50}$$

por lo que si se multiplica cada uno de los término de la ecuación (2.47) por el inverso de la ecuación (2.49) se obtendrá un sistema de funciones diferenciales como se describe a continuación

$$\begin{aligned}\frac{dX}{d\alpha} &= r \cos \varphi \\ \frac{dY}{d\alpha} &= r \text{sen } \varphi \\ \frac{d\varphi}{d\alpha} &= \frac{r}{s}u\end{aligned}\tag{2.51}$$

con

$$u = \frac{\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_d}{\dot{\theta}_i + \dot{\theta}_d} \quad (2.52)$$

donde u es la variable de control, ya que ésta, dependerá de las velocidades angulares de cada una de las ruedas.

Integrando las ecuaciones diferenciales (2.51) se logra por medio de los incrementos de ángulos detectados por los sensores de odometría. Con este cálculo es posible obtener una primera estimación de la pose de la silla de ruedas. Esta estimación es también conocida como “cuenta muerta” o “dead-reckoning”.

2.3 Función de observación

La función de observación es una expresión matemática capaz de transformar la estimación odométrica de la pose de la silla de ruedas en coordenadas (X, Y, φ) a una estimación o predicción en espacio de cámara de la posición de una marca visual dada (x) . Para la realización de este modelo se toma como base lo mostrado en la Figura 2.8.

siendo β el ángulo que se forma entre el eje focal y el eje que pasa por el foco y el centro de la marca observada. La distancia perpendicular entre el plano de imagen y el foco es denotada por C_1 . Por último la distancia entre el punto principal (centro del plano de imagen) y el lugar donde aparece el centro de la marca visual en el plano de imagen se denota por x . En base a la Figura 2.8 se puede comprobar que β , C_1 y x se relacionan de la siguiente manera

$$\tan\beta = \frac{-x}{C_1} \quad (2.53)$$

$$x = -C_1 \tan\beta \quad (2.54)$$

en las ecuaciones (2.53) y (2.52) x se considera negativa por aparecer al lado izquierdo (eje negativo) del punto principal. El plano de imagen aparece como una línea gruesa ya que es perpendicular a la Figura 2.8. En la misma figura también se puede observar que la siguiente relación siempre se cumple

$$\beta = \frac{\pi}{2} - (\gamma + \varphi + C_4) \quad (2.55)$$

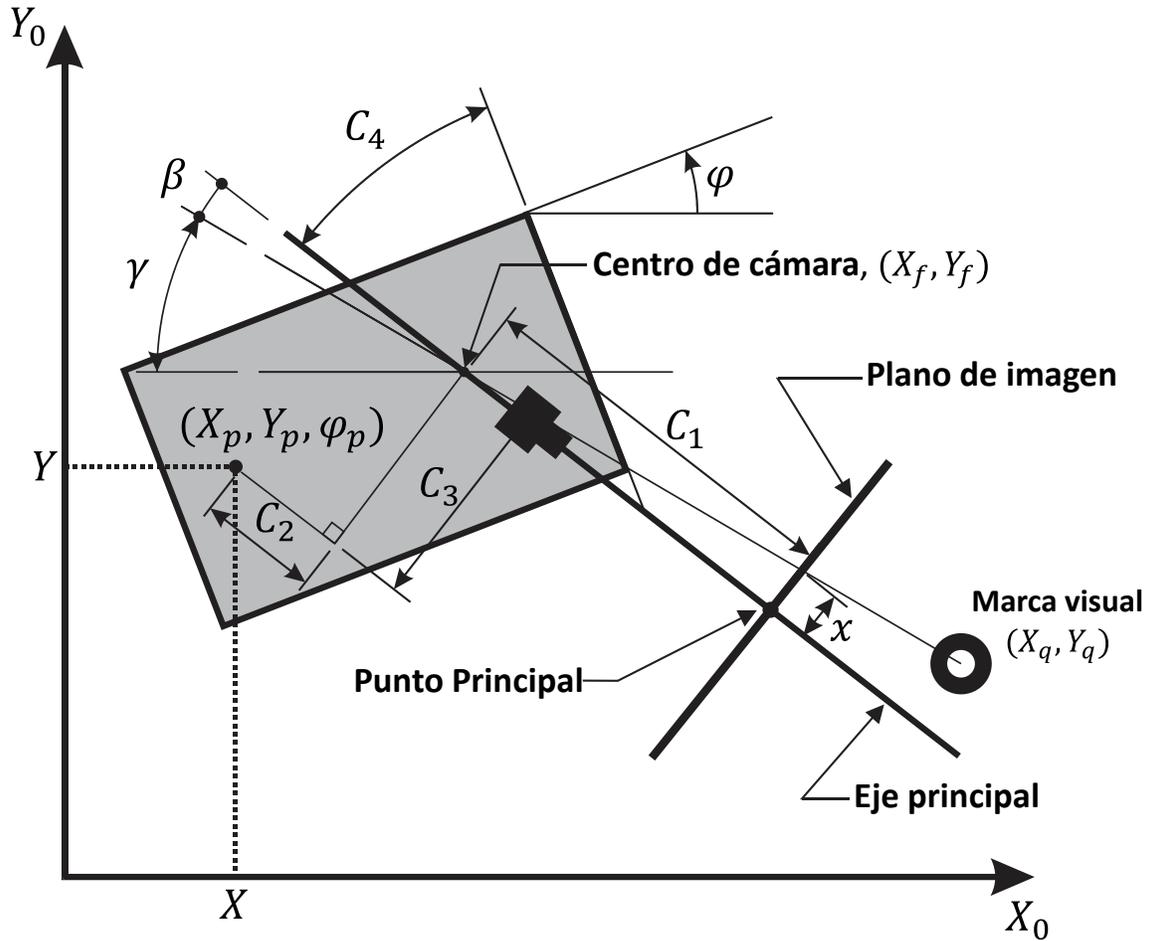


Figura 2.8. Descripción de los parámetros de visión utilizados en las observaciones.

Donde ahora bien, sustituyendo la ecuación (2.55) en la ecuación (2.54) encontramos que

$$x = -C_1 \tan \left[\frac{\pi}{2} - (\gamma + \varphi + C_4) \right] \quad (2.56)$$

Al utilizar algunas identidades trigonométricas podemos llegar a

$$x = -C_1 \frac{\cos(\varphi + C_4) - \sin(\varphi + C_4) \tan \gamma}{\sin(\varphi + C_4) + \cos(\varphi + C_4) \tan \gamma} \quad (2.57)$$

Nuevamente recurriendo a la Figura 2.8 se puede comprobar la siguiente ecuación

$$\tan \gamma = \frac{-(Y_q - Y_f)}{(X_q - X_f)} \quad (2.58)$$

sustituyendo la ecuación (2.57) en (2.58) tenemos que

$$x = -C_1 \frac{(X_q - X_f)\cos(\varphi_p + C_4) + (Y_q - Y_f)\sin(\varphi_p + C_4)}{(X_q - X_f)\sin(\varphi_p + C_4) - (Y_q - Y_f)\cos(\varphi_p + C_4)} \quad (2.59)$$

Las coordenadas (X_f, Y_f) se pueden calcular con

$$X_f = X_p + C_3 \sin(\varphi_p + C_4) + C_2 \cos(\varphi_p + C_4) \quad (2.60)$$

$$Y_f = Y_p + C_3 \cos(\varphi_p + C_4) + C_2 \sin(\varphi_p + C_4) \quad (2.61)$$

al sustituir las ecuaciones (2.60) y (2.61) en (2.59) da

$$x = -C_1 \frac{(X_q - X_p)\cos(\varphi_p + C_4) + (Y_q - Y_p)\sin(\varphi_p + C_4) - C_3 \sin[2(\varphi_p + C_4)] - C_2}{(X_q - X_p)\sin(\varphi_p + C_4) - (Y_q - Y_p)\cos(\varphi_p + C_4) + C_3 \cos[2(\varphi_p + C_4)]} \quad (2.62)$$

La ecuación (2.62) es la función de observación. Las variables C_1 a C_4 son llamados parámetros de visión y deben ser calculados de manera indirecta mediante un proceso de calibración. El proceso de calibración se realiza se realiza por medio de un ajuste de mínimos cuadrados a la función de observación como se describe en la siguiente sección. La función de observación es la encargará de predecir la ubicación de una marca visual dada en espacio de cámara a partir de la información odométrica.

Aquí y en lo siguiente, las letras mayúsculas se utilizarán para referirnos a cantidades dentro del espacio físico, en tanto que las minúsculas se utilizaran para designar cantidades dentro del espacio de cámara.

2.4 Estimación de parámetros de visión

Para el cálculo de los parámetros de visión se condujo la silla de ruedas por cada una de las marcas ubicadas en el laboratorio de mecatrónica en las posiciones (X_q, Y_q) y se capturó la posición en espacio de cámara de cada una de las marcas $(Cam1X, Cam2X)$. Con esta información se forma una base de datos que relaciona las coordenadas y orientación (X_p, Y_p, φ_p) de la silla con la ubicación en espacio de cámara de cada una de las marcas, esta información se muestra en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1. Datos capturados para el cálculo de los parámetros de visión.

Marca	EncA	EncB	Cam1X	Cam1Y	Cam2X	Cam2Y	X	Y	Fi	Xq	Yq
1	0	0	-18.000	-66.500	115.500	57.000	0.000	0.000	0.000	565	-900
1	187	-180	58.750	-64.500	182.333	59.500	46.119	0.045	0.003	565	-900
2	3999	-3954	-107.500	-78.500	35.250	45.000	998.885	15.831	0.021	1660	-900
2	4409	-4373	38.750	-77.500	164.200	47.300	1103.020	17.534	0.017	1660	-900
3	7784	-7862	-273.083	-79.500	-110.250	41.917	1964.910	-1.680	-0.036	2675	-900
3	8355	-8338	-14.500	-76.250	118.750	48.750	2096.468	-3.431	0.008	2675	-900
4	12256	-12275	-203.000	-79.200	-49.500	43.000	3081.217	-2.046	-0.009	3783	-900
4	12654	-12641	-42.000	-77.550	94.000	46.500	3177.260	-2.284	0.006	3783	-900
5	16826	-16858	-145.750	-88.250	1.500	35.500	4231.394	-15.103	-0.015	4900	-900
5	17279	-17341	9.250	-89.000	138.750	37.333	4348.874	-18.292	-0.029	4900	-900
6	20928	-20950	-235.500	-80.250	-80.000	41.000	5259.828	-44.528	-0.010	6010	-900
6	21590	-21597	14.750	-79.500	142.500	45.438	5424.140	-45.988	-0.003	6010	-900
7	25506	-25604	-201.000	-80.000	-47.500	42.250	6418.573	-77.282	-0.046	7110	-900
7	26045	-26112	19.417	-77.500	147.250	47.500	6549.960	-82.853	-0.031	7110	-900
8	29481	-29550	-182.333	-93.500	-31.500	30.500	7412.680	-115.045	-0.032	8120	-900
8	29950	-30005	1.000	-92.750	131.000	33.500	7528.643	-118.514	-0.026	8120	-900
9	33538	-33634	-221.000	-77.000	-65.500	44.500	8433.980	-168.324	-0.045	9160	-900
9	34101	-34144	20.500	-74.500	148.050	49.700	8569.107	-172.381	-0.020	9160	-900
10	35019	-33661	-201.125	-77.688	-46.750	44.500	8623.244	-168.402	0.586	9740	-290
10	35171	-33546	-2.000	-69.000	126.000	53.500	8626.982	-165.643	0.705	9740	-290
11	36712	-33837	-89.750	-83.000	52.000	41.500	8708.545	48.717	1.256	9740	625
11	37038	-34098	71.333	-79.833	192.500	45.250	8730.172	119.235	1.286	9740	625
12	39722	-36357	-209.750	-70.000	-60.250	49.625	8796.922	736.565	1.479	9740	1650
12	40260	-36829	3.750	-65.750	130.583	56.000	8806.307	863.134	1.509	9740	1650
13	43394	-40019	-182.250	-69.000	-35.000	50.850	8874.121	1654.770	1.483	9740	2560
13	43884	-40453	5.000	-66.750	132.500	55.333	8882.864	1770.551	1.509	9740	2560
14	47105	-43727	-191.750	-76.083	-43.750	44.500	8956.368	2583.233	1.485	9740	3510
14	47537	-44086	-14.000	-72.500	114.750	50.000	8963.669	2682.365	1.519	9740	3510

A partir de esta base de datos se realizó un ajuste de curva por medio de una minimización de los errores cuadráticos por medio del comando *lsqnonlin(...)* de Matlab® de donde se obtuvieron los valores mostrados en la Tabla 2.2. Cabe recordar que estos parámetros son los mismos que se describen en la Figura 2.8.

Tabla 2.2. Parámetros de visión.

Parametros	Cámara1	Cámara2
C1	901.304762	836.068808
C2	246.365595	323.358013
C3	-157.145392	-158.133898
C4	0.46396416	0.550243

2.5 Enseñanza-Repetición

La filosofía de enseñanza-repetición es una estrategia ampliamente utilizada en la automatización de procesos industriales donde un robot (usualmente un brazo robótico) es llevado a diferentes posiciones deseadas para que realice alguna operación. Estas posiciones son guardadas en una base de datos que son utilizadas en la etapa de repetición donde el robot sigue las instrucciones determinadas de manera automática una infinidad de veces.

Siguiendo esta filosofía de Entrenamiento-Repetición la silla ha sido adecuada para tener una etapa de entrenamiento y una etapa de repetición. En el entrenamiento la silla es conducida por una persona a lo largo de las rutas por las que se desee desplazar al usuario de la silla de ruedas, construyendo así un mapa topológico con los diferentes destinos que pudieran ser de interés para el usuario. Durante la etapa de repetición el usuario deberá elegir el destino de su predilección y la silla de manera automática seguirá la ruta guardada durante la etapa de entrenamiento.

En la Figura 2.9 se muestra de manera esquemática las diferentes etapas del algoritmo de enseñanza para la creación de una nueva ruta de destino y de la repetición. Para la etapa de enseñanza, en primer lugar, la silla se coloca en una posición conocida u origen, esta posición bien puede ser la última coordenada de un viaje previo. En seguida, estando en el origen la silla realiza una medición visual misma que utiliza para filtrar/actualizar la posición de la silla en el origen. La posición filtrada en el origen es guardada en una base de datos (punto de partida del mapa topológico). Con la posición de partida ya definida, se inicia el movimiento de la silla de ruedas que para el caso de la enseñanza, se hace con la ayuda de una persona que empuje el vehículo manualmente por los diferentes lugares de la ruta. Durante el recorrido de la ruta cada vez que una marca visual sea detectada por las cámaras el sistema actualizará su posición y la guardará en la base de datos ya mencionada construyendo así una serie de instrucciones que será utilizada en la etapa de repetición. Este proceso se repite hasta llegar al final de la ruta (destino del mapa topológico)

Durante la etapa de repetición, al igual que en la enseñanza, la silla se coloca en una posición conocida u origen en donde se realiza una medición visual que filtra/actualiza la posición de partida. Una vez estimada la posición de partida, el sistema lee las instrucciones generadas durante la etapa de entrenamiento y las transforma en órdenes para los motores de la silla de ruedas. Al momento de alcanzar una posición donde una medición visual es posible se realiza una actualización de la posición de la silla de ruedas. Partiendo de esa estimación la silla planea la estrategia para alcanzar la siguiente posición guardada en la base

de datos, para lograrlo, utiliza un algoritmo de planeación de ruta, que en este caso es un desplazamiento punto a punto descrito en la siguiente sección. El proceso se repite hasta alcanzar terminar el recorrido generado en la etapa de entrenamiento.

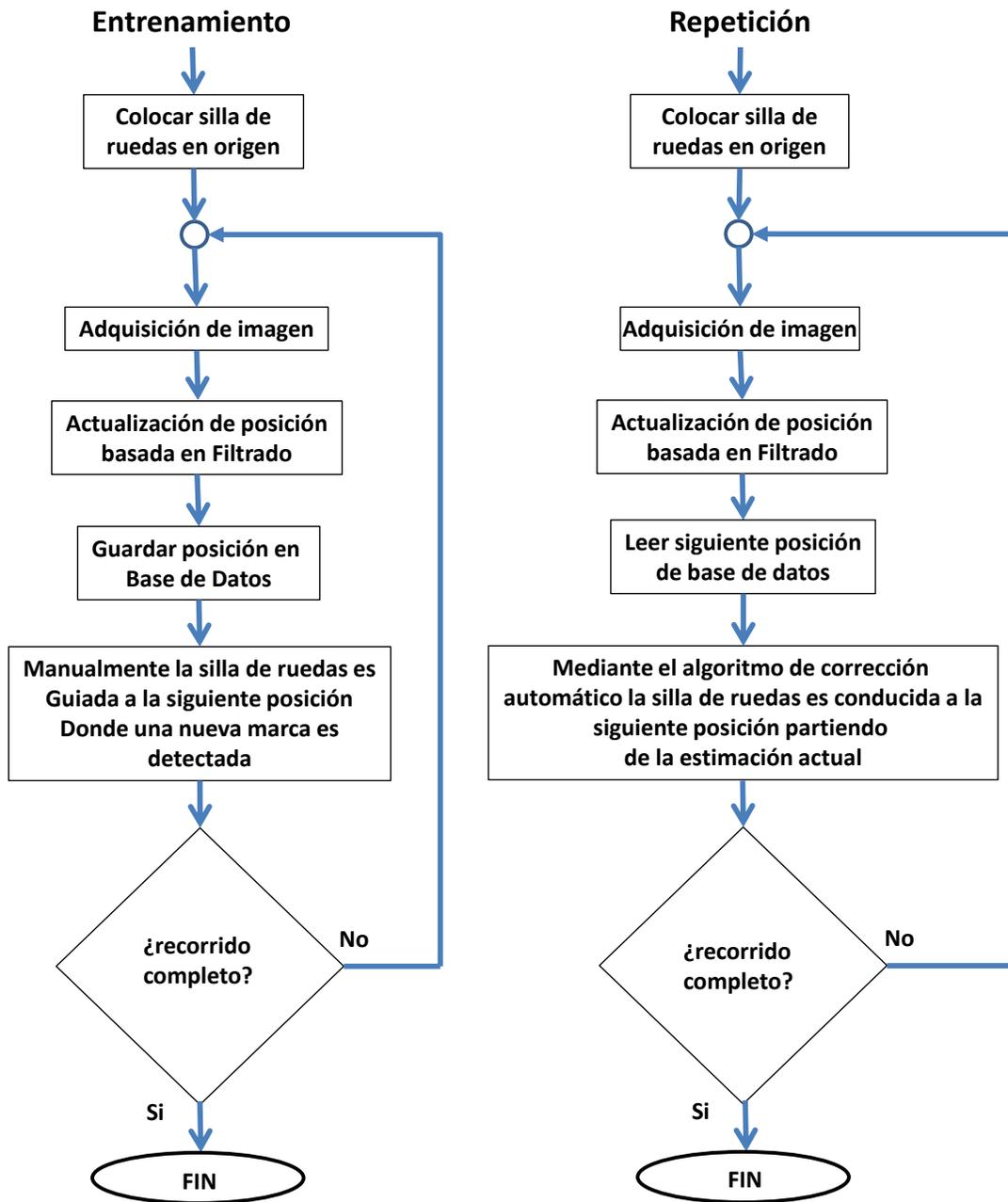


Figura 2.9. Esquema general del algoritmo de enseñanza-repetición.

2.6 Control y planeación de ruta

La estimación de la posición de la silla de ruedas es fundamental para poder lograr que la silla siga una trayectoria enseñada. Durante la etapa del entrenamiento el “entrenador” va conduciendo la silla de ruedas por cada uno de los puntos donde se puede visualizar una marca visual y ahí graba la posición estimada de la silla. La estimación de la posición de la silla se puede realizar por medio de EKF, Partículas Aleatorias, Filtro de Partículas, etc.

En la Figura 2.10 se muestra un diagrama donde se pueden apreciar las partes que conforman la fase de entrenamiento. Al inicio del diagrama la medición visual es comparada con la estimación de cuenta muerta mapeada a espacio de cámara, diferencia entre la medición visual y la predicción visual basada en odometría es el error que debe ser filtrado para estimar la posición de la silla de ruedas. Una vez estimada la posición actual ésta es guardada en una base de datos, una vez concluido el almacenamiento de la posición deseada el entrenador mueve la silla a la siguiente posición realizando nuevamente una estimación por cuenta muerta, para poder así repetir el ciclo.

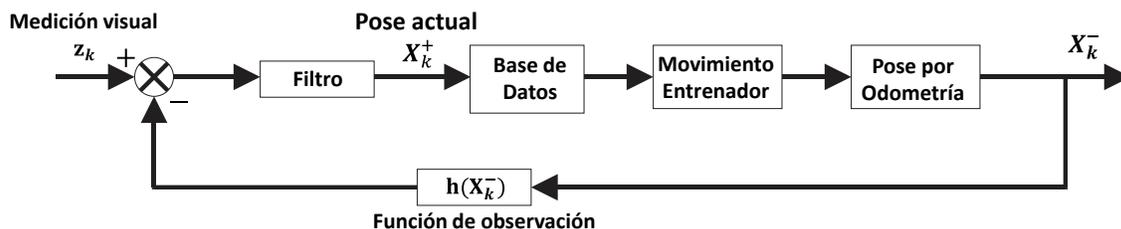


Figura 2.10. Diagrama de control, fase de enseñanza

Al momento de la repetición la silla nuevamente estima su pose (Localización), que idealmente, sería la misma que la guardada en memoria, aunque por lo general, no es así. Debido a esta diferencia se hace necesaria una maniobra que permita la búsqueda de la siguiente pose que fue grabada en base de datos durante la etapa de entrenamiento (Planeación), ver Figura 2.11. Una vez definida la maniobra para alcanzar la siguiente posición deseada (grabada en la base de datos) se realiza el control de los motores para alcanzar dicha posición, esto se hace al mismo tiempo que por cuenta muerta se hace una vez una estimación de la posición a partir de la última estimación arrojada por el filtro.

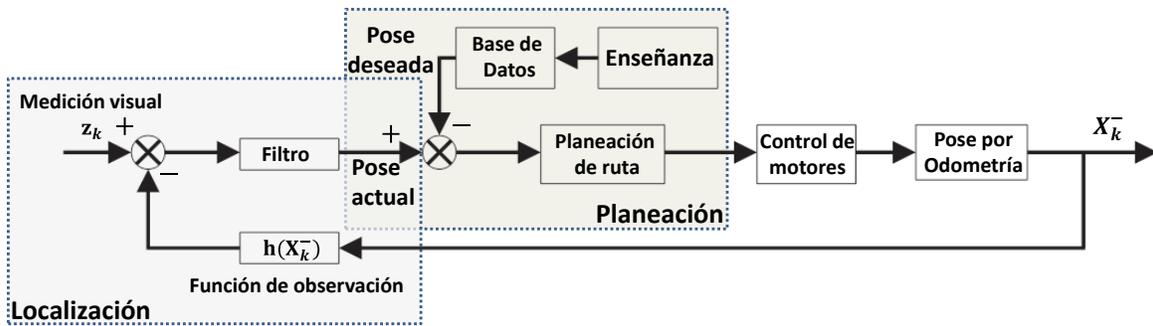


Figura 2.11. Diagrama de control de fase de repetición.

En el trabajo aquí reportado la estrategia de planeación de ruta es de punto a punto, donde por medio de una línea recta se conectan la posición actual con la posición deseada.

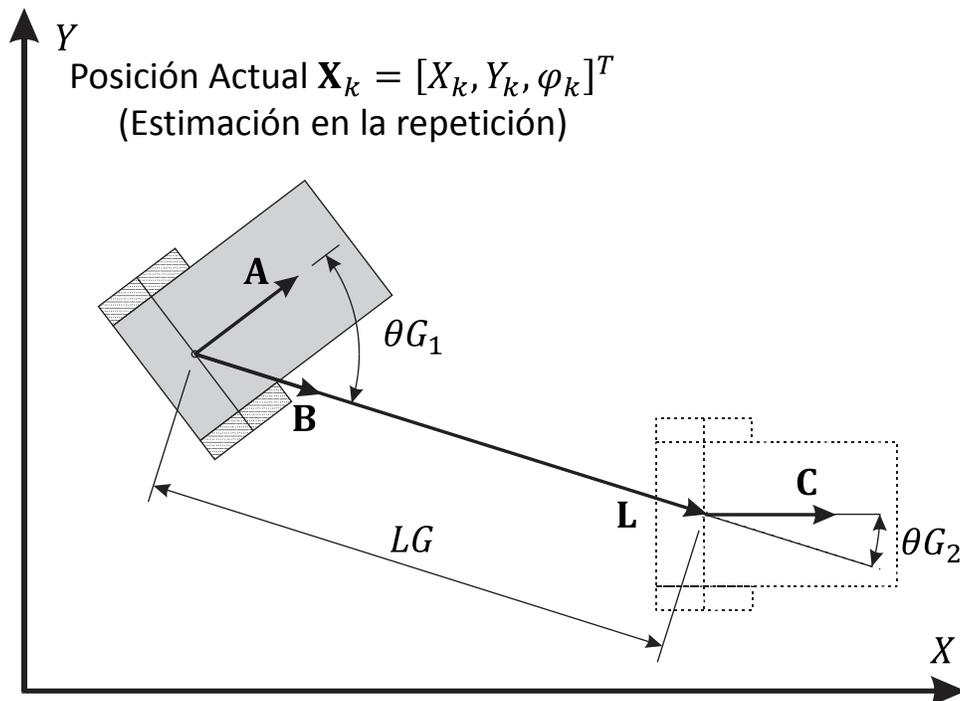


Figura 2.12. Algoritmo de control en la etapa de repetición

En la Figura 2.12 es posible apreciar las tres etapas de la maniobra con la que se busca alcanzar la posición siguiente guardada en memoria. La maniobra comienza con un giro θG_1 [rad] hasta que la silla tenga la misma orientación de la línea que conectaría la coordenada actual, con la coordenada deseada. En seguida se realiza un desplazamiento de LG [mm] en línea recta. Por último se realiza otro giro de θG_2 [rad] hasta alcanzar la orientación deseada (la guardada en memoria durante el entrenamiento).

Los ángulos de comienzo y fin de maniobra θ_{G_1} y θ_{G_2} así como el de la longitud de desplazamiento LG se calculan como:

$$\begin{aligned}\theta_{G_1} &= \cos^{-1}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \\ \theta_{G_2} &= \cos^{-1}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \\ LG &= \|\mathbf{L}\|\end{aligned}\tag{2.63}$$

de la Figura 2.12 encontramos que

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= [\cos \varphi_k, \sin \varphi_k]^T \\ \mathbf{L} &= [X_{k+1} - X_k, Y_{k+1} - Y_k]^T \\ \mathbf{B} &= \mathbf{L}/\|\mathbf{L}\| \\ \mathbf{C} &= [\cos \varphi_{k+1}, \sin \varphi_{k+1}]^T\end{aligned}\tag{2.64}$$

En este capítulo se analizaron los aspectos generales de la robótica móvil. En seguida se describieron los elementos teóricos principales que son necesarios para la implementación de las estrategias de localización y de control basado en visión aquí propuestas. Con estos elementos establecidos ya es posible la implementación de un control basado en visión utilizando técnicas de filtrado bayesiano, lo cual, se presenta en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 3: Implementación de un control basado en visión de una silla de ruedas utilizando técnicas de filtrado

La implementación de un control basado en visión usando diferentes estrategias de filtrado se describe a continuación, no sin antes, hacer una descripción del proceso de instrumentación a la que fue sometida un silla de ruedas eléctrica comercial en la que se le instalaron sensores de odometría y visión para poder hacer posible la implementación y validación de los aspectos teóricos ya descritos.

3.1 Implementación de Filtro de Kalman Extendido para un control basado en visión

Para la validación de las técnicas de filtrado expuestas en el presente documento se utilizó la formulación del EKF propuesta en [31] donde se hacen las siguientes consideraciones:

1. Estimación de estado, $\mathbf{X}(\alpha)$, y la matriz de covarianza del error de estimación $P(\alpha)$, son inicializadas en $\alpha = 0$
2. La estimación del estado y la matriz de covarianza de la estimación del error son propagados cuando las observaciones no están disponibles por medio de las siguientes expresiones:

$$\frac{d\hat{\mathbf{X}}(\alpha)}{d\alpha} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{X}}(\alpha)) \quad (3.1)$$

$$\frac{dP(\alpha)}{d\alpha} = A(\hat{\mathbf{X}}(\alpha))P(\alpha) + P(\alpha)A^T(\hat{\mathbf{X}}(\alpha)) + Q(\alpha) \quad (3.2)$$

La ecuación (3.1) es resuelta al integrar los incrementos de ángulo de las ruedas cuando la silla se desplaza, mientras que la ecuación (3.2) es resuelta por medio de un esquema de integración numérica de primer orden. Al momento de registrarse una medición con el sistema de medición la integración de (3.1) y (3.2) es utilizada en las ecuaciones del Filtro de Kalman Extendido

$$\hat{\mathbf{X}}_k^+ = \hat{\mathbf{X}}_k^- + K_k[\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{X}}_k^-)] \quad (3.3)$$

$$P_k^+ = [I - K_k H_k] P_k^- \quad (3.4)$$

$$K_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + R_k]^{-1} \quad (3.5)$$

donde:

$\hat{\mathbf{X}}_k^-$: vector de posición estimada antes de la corrección por visión.

$\hat{\mathbf{X}}_k^+$: vector de posición estimada después de la corrección por visión.

\mathbf{z}_k : posición horizontal del centro de la marca en el plano de imagen en la k medición.

$\mathbf{h}(\hat{\mathbf{X}}_k)$: predicción de la posición horizontal del centro de la marca en el plano de imagen. La ecuación de observación \mathbf{h} es un vector cuya única componente es x , ver ecuación (2.62).

K_k : ganancia de Kalman

$$H_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-}$$

Este método se ilustra de manera esquemática en la Figura 3.1.

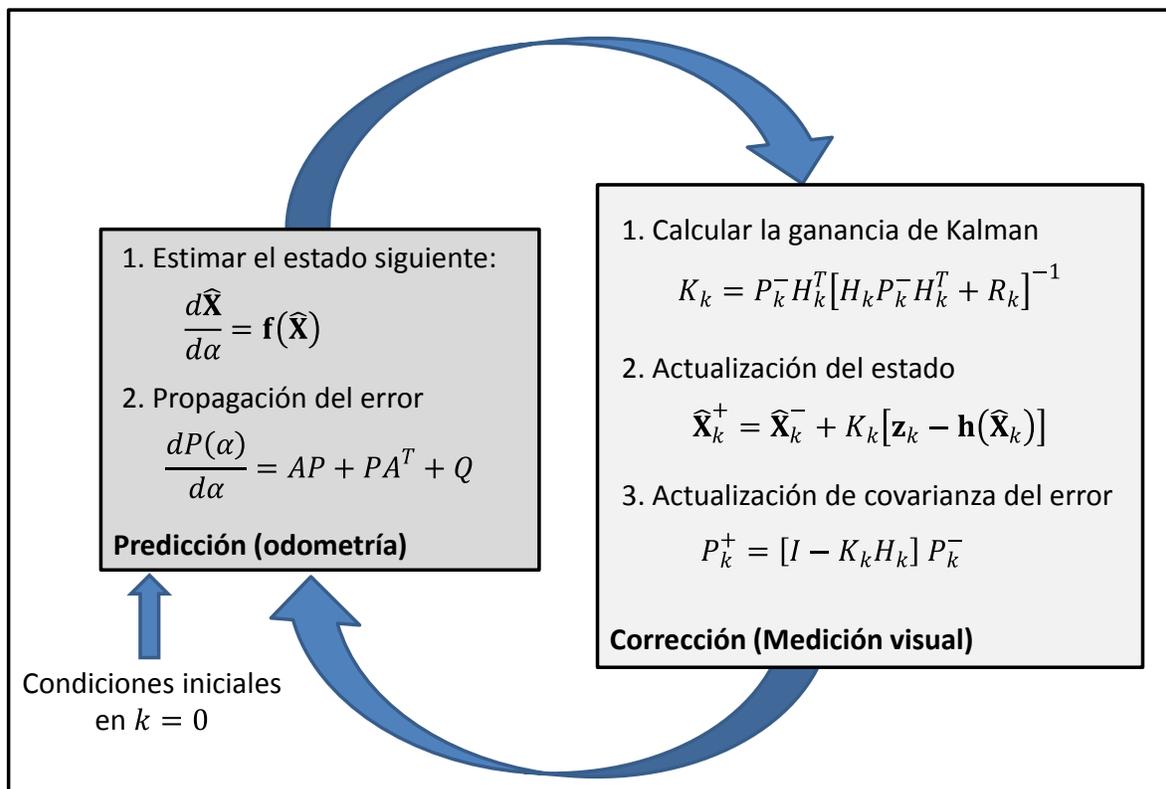


Figura 3.1. Diagrama esquemático de Filtro de Kalman Extendido

3.2 Implementación de Partículas Aleatorias para un control basado en visión

La estimación con Partículas Aleatorias (PA) es un algoritmo que sirve como preámbulo al Filtro de Partículas. Un esquema de esta propuesta se muestra en la Figura 3.2.

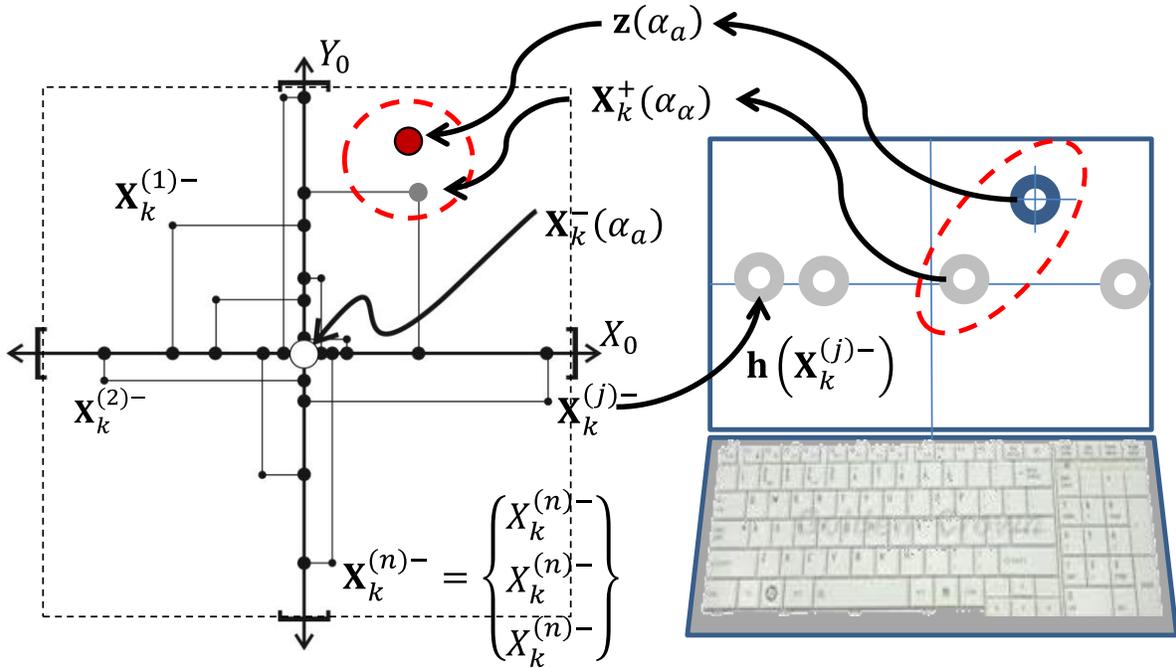


Figura 3.2. Estimación con Partículas Aleatorias

En la estimación con PA se considera la posición arrojada por la odometría, ecuación (2.51); alrededor de esta posición \mathbf{X}_k^- en el espacio físico, se distribuyen n partículas de manera aleatoria uniformemente distribuida dentro de una ventana dada.

$$\{\mathbf{X}_k^{(j)}, j = 1, 2, \dots, n\} \sim \mathbb{U}[\mathbf{X}_k^- - \mathbf{W}_p, \mathbf{X}_k^- + \mathbf{W}_p] \quad (3.6)$$

donde \mathbf{W}_p es el ancho medio de la ventana de muestreo y $\mathbb{U}[\cdot]$ indica una distribución uniforme en un rango dado.

Cada partícula se mapea a espacio de cámara con la ecuación (2.62), que es la función de observación \mathbf{h} formando un vector de predicciones $\mathbf{x}_k^{(j)-}$ con $j = 1, 2, \dots, n$. En espacio de cámara cada uno de los elementos de este vector de predicciones es comparado con la observación \mathbf{z}_k de la marca, de donde se elige el de mayor cercanía, como se expresa en la siguiente ecuación:

$$\mathbf{X}_k^+ = \mathbf{X}_k^{(j)-}, \text{ cuando } \min \left\{ \left\| \mathbf{z}_k - \mathbf{h} \left(\mathbf{X}_k^{(j)-} \right) \right\| \right\}, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.7)$$

Las coordenadas en espacio físico de la partícula elegida, que son conocidas *a priori*, definen la nueva posición corregida de la silla al momento de la medición con las cámaras.

Un diagrama esquemático del filtro de Partículas Aleatorias se muestra en la

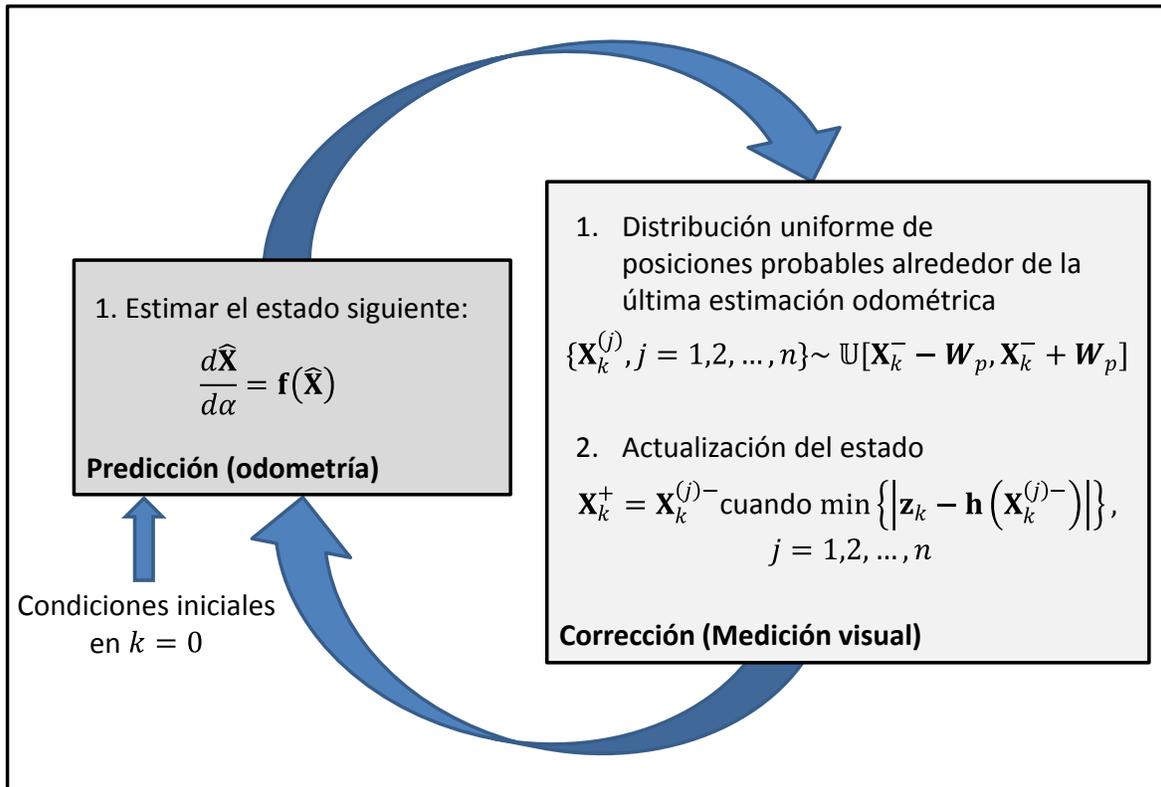


Figura 3.3. Diagrama esquemático del filtro de Partículas Aleatorias.

3.3 Implementación del Filtro de Partículas en Espacio de Cámara para un control basado en visión.

El Filtro de Partículas es un enfoque estadístico de búsqueda exhaustiva para estimación que regularmente funciona bien en problemas donde el Filtro de Kalman Extendido convencional no funciona como podría ser el caso de sistemas altamente no lineales o sistemas que son afectados por ruido no Gaussiano [59]. La idea principal de un Filtro de Partículas es representar la función de densidad posterior requerida por medio de un conjunto de muestras aleatorias con pesos asociados y hacer una estimación basada en estas muestras y pesos [29].

La manera como es utilizado el Filtro de Partículas en el presente proyecto es una propuesta original. Está propuesta es llamada Filtro de Partículas en Espacio de Cámara (CSPF, por sus siglas en inglés) y es la extensión de lo realizado con Partículas Aleatorias pero con dos elementos adicionales que permiten, describir este método como un Filtro de Partículas.

El primero de estos elementos es la manera en cómo se obtienen las partículas, ya que ahora, estas partículas son resultado de la consideración de todo el

historial de incrementos arrojado por los sensores de odometría, lo que genera partículas con mucho mejores cualidades, ver Figura 3.4. En Filtro de Partículas Aleatorias las partículas se generaban al momento que se realizaba la observación de una marca. El segundo elemento a considerar es la asignación de pesos a cada partícula, que se realiza por medio de una función gaussiana, ver Figura 3.4 que toma como media al valor de la observación y como desviación estándar un valor calculado experimentalmente. El peso que se asigna a cada partícula estará en función de la función gaussiana. Después de ponderar las partículas se eligen aleatoriamente un nuevo conjunto de partículas donde la probabilidad de una partícula de ser seleccionada será función del peso previamente asignado. Una vez obtenido este nuevo conjunto de partículas se utiliza el promedio como la actualización de la posición de la silla. Después de que se actualiza la posición de la silla, una etapa de remuestreo se hace necesaria al final de este proceso, en cuyo caso, el remuestreo se realiza asignando puntos aleatorios alrededor de la nueva estimación.

Para definir el problema de estimación de estado, se consideran las siguientes ecuaciones de sistema y de medición.

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}) + \mathbf{W}_{k-1} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{X}_k) + \mathbf{v}_k \quad (3.9)$$

donde $\mathbf{f}: \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ es una función no lineal del estado \mathbf{X}_{k-1} , $\mathbf{h}: \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_n} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$ es una función no lineal relacionada con el proceso de medición y k es el índice de la medición dada. También se tiene que \mathbf{W}_{k-1} , y \mathbf{v}_{k-1} , son vectores de ruido tanto del sistema como de la medición respectivamente, siendo ambos independientes e idénticamente distribuidos.

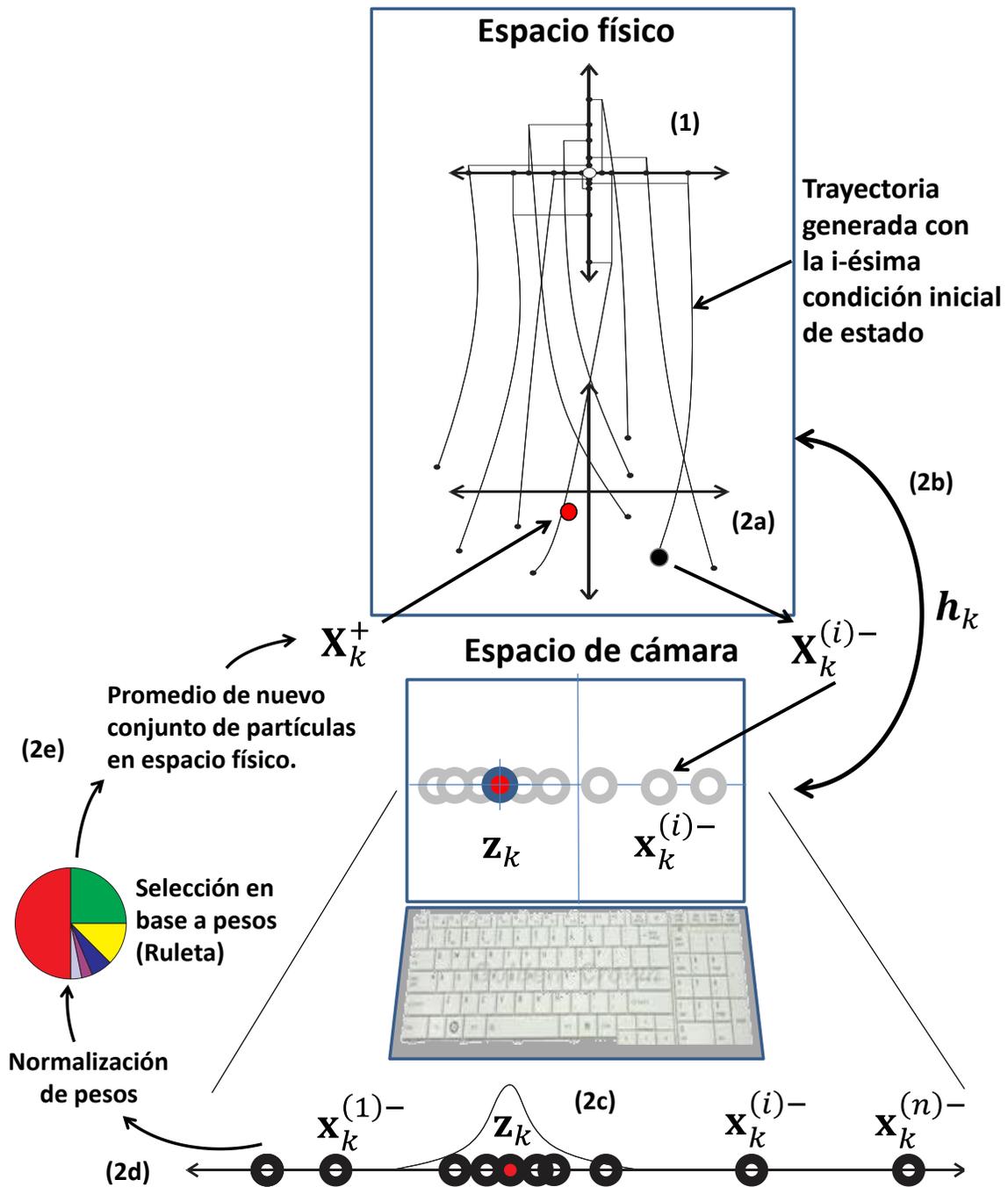


Figura 3.4. Esquema de la implementación del filtro de Partículas en espacio de cámara.

El algoritmo CSPF se describe en la Figura 3.4 y se resume en seguida:

1. Asumiendo que la función de densidades de probabilidad del estado inicial $p(\mathbf{X}_0)$ es conocida, n estados iniciales generados aleatoriamente en base a

- $p(\mathbf{X}_0)$ y denotados como $\{\mathbf{X}_0^{(i)+}, i = 0, \dots, n\}$, están distribuidos uniformemente en un rango inicial, es decir, $\mathbf{X}_0^{(i)+} \sim \mathbb{U}[\mathbf{X}_0 - \mathbf{W}_p, \mathbf{X}_0 + \mathbf{W}_p]$, donde \mathbf{W}_p es el ancho medio de la ventana y encontrada experimentalmente; $\mathbb{U}[a, b]$ define un conjunto cerrado de números aleatorios uniformemente distribuidos en el intervalo cerrado de a hasta b ; el parámetro n (número de partículas) se elige como un punto óptimo entre esfuerzo computacional y precisión de estimación
2. Para cada actualización de estado, el algoritmo es como sigue:
 - a. Se realiza la propagación de las partículas iniciales para obtener un conjunto *a priori* de estados $\mathbf{X}_k^{(i)-}$, utilizando

$$\mathbf{X}_k^{(i)-} = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}^{(i)+}) + \mathbf{V}_{k-1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.10)$$

- b. Un conjunto de partículas en espacio de cámara son determinados utilizando la ecuación de observación

$$\mathbf{x}_k^{(i)-} = \mathbf{h}(\mathbf{X}_k^{(i)-}) \quad (3.11)$$

- c. El peso $\{q_k^{(i)}, i = 1, \dots, n\}$ para cada partícula $\mathbf{x}_k^{(i)-}$ se condiciona con base en la medición \mathbf{z}_k por medio de la siguiente ecuación

$$q_k^{(i)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} [\mathbf{z}_k - \mathbf{x}_k^{(i)-}]^T [\mathbf{z}_k - \mathbf{x}_k^{(i)-}]\right) \quad (3.12)$$

Donde σ es la varianza de la del ruido de la medición, sintonizado experimentalmente.

Para cada partícula, el peso $q_k^{(i)}$ será máximo cuando la posición en espacio de cámara de alguna partícula *a priori* $\mathbf{x}_k^{(i)-}$ coincida con el pixel ubicado en el centro de la marca visual observada con las cámaras digitales, y decrecerá siguiendo la cola de la función gaussiana según las partículas *a priori* se alejan de la posición del pixel central de la marca visual observado en espacio de cámara, ver Figura 3.4.

- d. Los pesos obtenidos en pasos anteriores se normalizan utilizando la siguiente expresión

$$q_k^{(i)} = \frac{q_k^{(i)}}{\sum_{j=1}^n q_k^{(j)}} \quad (3.13)$$

La suma de todos los pesos relativos es igual con uno.

- e. En seguida una etapa de remuestreo es necesaria para tener un conjunto de partículas *posteriores* $\mathbf{x}_k^{(i)+}$ generadas a partir de los pesos relativos $w_k^{(i)}$ como sigue:

Para $i = 1, \dots, n$ se realizan los siguientes tres pasos:

- Se genera un número aleatorio $\tau \sim \mathbb{U}[0,1]$.
- Se acumulan, de uno en uno, los pesos $w_k^{(i)}$ en una suma, hasta que la suma acumulada sea mayor que τ . Esto es, se busca el índice j tal que $\sum_{m=1}^{j-1} q_k^{(m)} < \tau$ pero con $\sum_{m=1}^j q_k^{(m)} > \tau$. Siendo determinado este índice la nueva partícula $\mathbf{x}_k^{(i)+}$ es igual a la vieja partícula que posea el índice j , es decir $\mathbf{x}_k^{(j)-}$. La etapa de remuestreo se resume como:

$$\mathbf{x}_k^{(i)+} = \mathbf{x}_k^{(j)-} \quad \text{con un peso } q_k^{(j)}$$

$\mathbf{x}_k^{(i)+}$ está relacionada con su estado $\mathbf{X}_k^{(i)+}$. Por lo que $\mathbf{X}_k^{(i)+}$ también toma el valor del estado anterior $\mathbf{X}_k^{(j)+}$. El valor promedio del $\mathbf{X}_k^{(i)+}$ se transforma en la estimación (actualización) del estado $\hat{\mathbf{X}}_k$.

- Después de la actualización, un nuevo conjunto de estados aleatorios es creado alrededor de la actualización obtenida, evitando así el empobrecimiento de las partículas. Los nuevos estados está uniformemente distribuidos dentro del intervalo $[\mathbf{X}_k - \mathbf{W}, \mathbf{X}_k + \mathbf{W}]$ alrededor de \mathbf{X}_k , el cual, a partir de este momento cambia a $\mathbf{X}_{k-1}^{(i)+}$ para la siguiente iteración.

El filtrado en espacio de cámara implica el uso de un PF que utiliza un conjunto de datos unidimensional. Este conjunto es formado por el centroide de la marca visual observada o medida (\mathbf{z}_k) y además por un conjunto de marcas virtuales generadas a partir de la ecuación de observación (2.62). Estas marcas virtuales, son creadas con la integración de la ecuación (2.51), es decir con “cuenta-muerta”, para cada una de las n partículas, que a su vez, cada una, fueron creadas con condiciones iniciales aleatorias dentro de un intervalo dado.

En la Figura 3.5 se muestra un diagrama esquemático de la implementación del Filtro de Partículas en Espacio de Cámara.

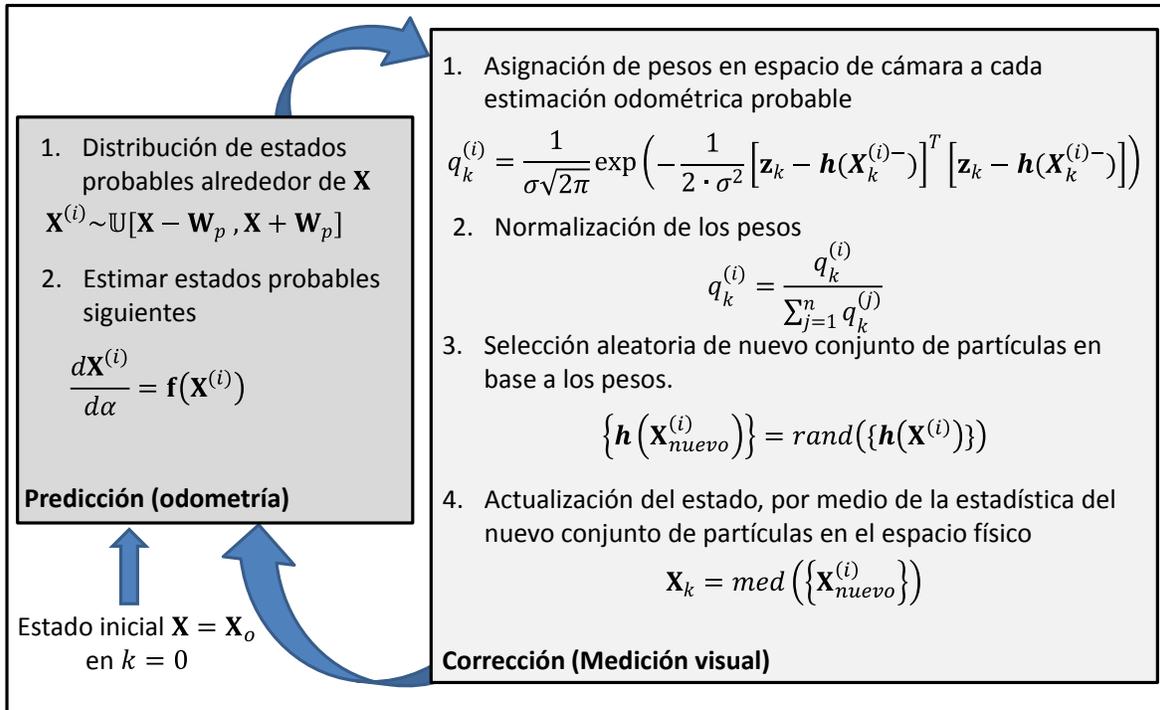


Figura 3.5. Diagrama esquemático del Filtro de Partículas Aleatorias en el Espacio de Cámara.

En la Figura 3.6 se muestra un ejemplo de la generación de diferentes rutas probables a partir de distintas condiciones iniciales. En la figura es posible apreciar el momento de remuestreo que se realiza después de haber adquirido una medición visual. También es posible percibir un cierto desplazamiento en la dirección del eje Y y aunque algunas rutas probables, se ven separadas del grueso del grupo de las rutas probables, como por ejemplo en el tramo alrededor de los 600mm, el Filtro de Partículas dará a estas rutas un bajo peso, con lo que su influencia en la estimación final será poca.

El CSPF básicamente propone un número de hipótesis iniciales probables que en base al historial de mediciones odométricas van trazando la función de densidad de probabilidades. A diferencia del PF convencional en el que el remuestreo se haría en el mismo espacio físico, llevando la medición a espacio físico, en el CSPF las hipótesis iniciales con el historial de movimiento son llevadas al espacio de sensor, en este caso al espacio de cámara. Y es en el espacio de cámara, donde se realiza la etapa de ponderación y remuestreo del filtro. Esta diferencia hace que el CSPF se vuelva significativamente más veloz comparado con las aplicaciones típicas de PF, ya que en lugar de filtrar un conjunto de n partículas formadas cada una por un vector de coordenadas se termina por filtrar sólo n posiciones escalares, es decir, se filtra la posición de n partículas mapeadas del espacio físico al espacio de cámara.

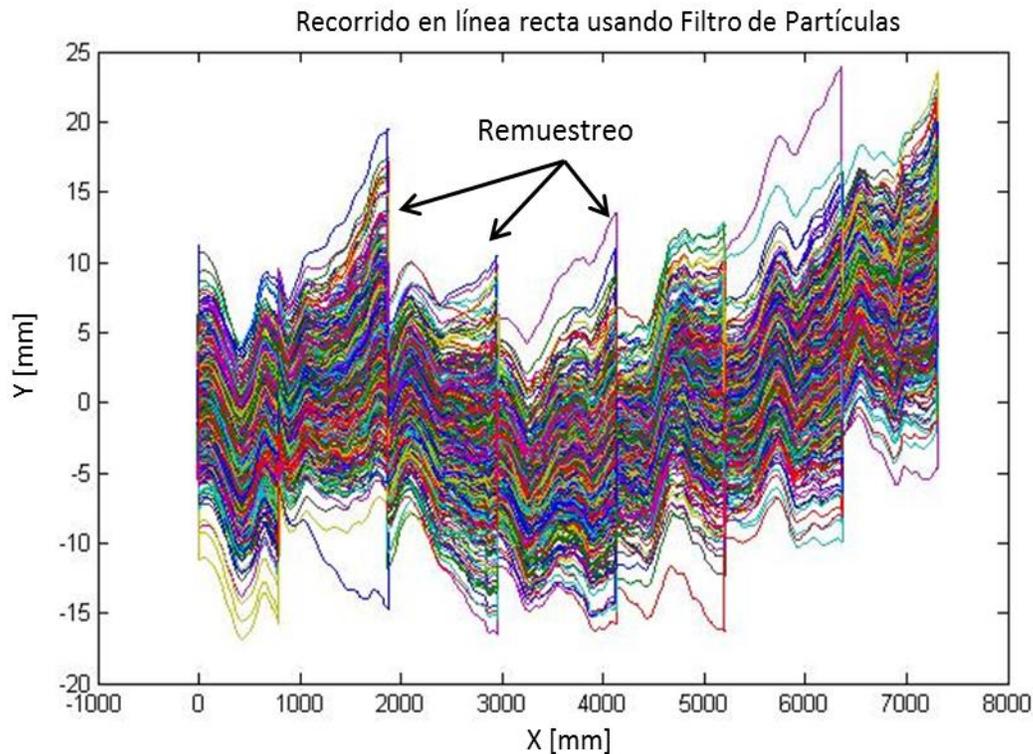


Figura 3.6. Ejemplo de rutas probables utilizando Filtro de Partículas

Para poder realizar estas implementaciones, fue necesaria la creación de una plataforma de pruebas, la cual, consistió en utilizar una silla de ruedas eléctrica comercial y acondicionarla con sensores de odometría y visión, como se describe a continuación.

3.4 Instrumentación de silla de ruedas

La silla de ruedas eléctrica utilizada para el presente proyecto es la P9000 XDT fabricada por INVACARE. Se trata de una silla de viaje plegable la cual posee un par de baterías de 12V de fácil montaje que permiten la portabilidad de la silla. La P9000 XDT está diseñada para personas con movilidad en las extremidades superiores ya que por medio de un *joystick* se controla su orientación y velocidad.

Con el fin de poder realizar las primeras estimaciones en base a odometría o de "cuenta-muerta" la silla de ruedas fue provista con encoders incrementales en cada una de las ruedas motoras. Estos encoders digitales de bajo costo están provistos de dos canales de señal con 1000CPR, el modelo utilizado es el HEDS-5600#B06 fabricado por Avagon Technologies mismo que funcionan con 5V de alimentación.



Figura 3.7. Modificación de caja de transmisión para montaje de encoders.

En la Figura 3.7 se muestran los detalles del montaje de los encoders HEDS-5600#B06, éstos fueron montados en la parte posterior del eje de cada una de las ruedas motoras de la silla de ruedas. Para realizar esta operación fue necesario desmontar los motores y desarmar parcialmente las cajas de transmisión para poder acceder a los extremos de dichos ejes. Los encoders seleccionados fueron de gran utilidad ya que el espacio libre entre la transmisión y las baterías de la silla de ruedas era reducido (aproximadamente 15mm para cada rueda motora).

La silla P9000 XDT cuenta con dos motores de CD con escobillas los cuales junto con los encoders se conectan directamente a la tarjeta de control de movimiento. La tarjeta de control de movimiento utilizada fue la DMC-4040 construida por Galil Motion Control, con capacidad para controlar hasta 4 servomotores y se comunica con la PC por medio de una conexión IP.

La retroalimentación por visión se realizó por medio de dos cámaras UI-2210 desarrolladas por *Imaging Development Systems*, las cuales poseen una definición de 640X480 pixeles. Las cámaras son conectadas a la PC por medio de los puertos USB. Para el manejo de estas cámaras se utilizó una PC portátil con procesador *Core i5* y 4GB de memoria RAM. La PC estaba provista del *Microsoft Visual C++ 2010* como software de programación en conjunto con las librerías de libre acceso *OpenCV 2.3*, siendo estas últimas compiladas por medio de *Cmaker 2.8*.



Figura 3.8. Elementos utilizados para la realización de las técnicas de control y navegación.

Al tener todo lo antes descrito integrado en un solo sistema se realizó la programación de la etapa de enseñanza, la cual, al llevar a la silla por las posiciones deseadas permitía guardar éstas posición en un archivo, éste archivo es el utilizado en la etapa de repetición que también fue programada para las pruebas iniciales con la implementación del Filtro de Kalman Extendido.

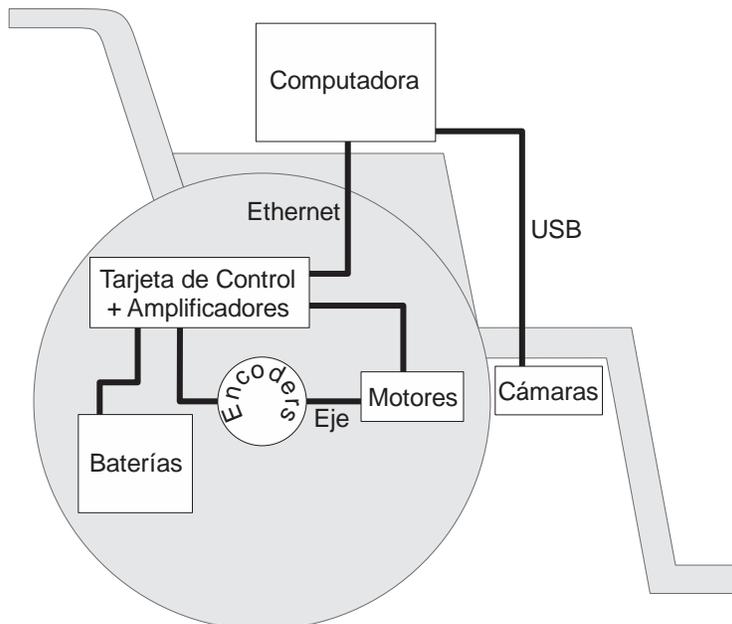


Figura 3.9. Diagrama componentes de silla de ruedas.

En este capítulo se ha descrito la implementación de un control basado en visión mediante diferentes técnicas de filtrado. Con el desarrollo de la implementación del control basado en visión y la instrumentación de una silla de ruedas comercial se hace posible la evaluación experimental del sistema completo utilizando diferentes técnicas de filtrado, como se describe en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 4: Experimentación, resultados y discusión

Para el presente capítulo se describen una serie de experimentos con los que se valida y prueba el control basado en visión utilizando diferentes técnicas de localización fundamentadas en filtrados bayesianos. Además se evalúan los resultados obtenidos por medio de las técnicas de enseñanza y repetición aquí propuestas. Los resultados obtenidos son exitosos ya que la silla de ruedas pudo desplazarse en diferentes por varias rutas con diferentes grados de dificultad sin colisionar contra los obstáculos fijos circundantes.

4.1 Descripción del experimento

Con el fin de probar los algoritmos descritos en las secciones anteriores un conjunto de experimentos fueron desarrollados. Para estos experimentos la posición inicial de la silla de ruedas así como la ruta a seguir son definidas en base a diferentes niveles de complejidad. A lo largo de esta ruta en posiciones conocidas, (X_q, Y_q) , se colocan N_c marcas visuales (círculos concéntricos), como se muestra en la Figura 4.1.



Figura 4.1. Marcas visuales artificiales y silla de ruedas en posición inicial.

Después de que la posición de los marcadores artificiales fue establecida y una ruta fue determinada, se realiza una etapa de entrenamiento para poder así en una siguiente etapa realizar el seguimiento automático de la ruta. La silla de ruedas es entrenada por un guía humano que conduce la silla a lo largo de la ruta buscando posiciones donde las marcas visuales pueden ser detectadas por las cámaras. Por medio de la odometría, la posición de la silla de ruedas es inicialmente estimada y mapeada al espacio de cámara por medio de la ecuación

de observación. Entonces, se calcula la diferencia entre la estimación odométrica mapeada a espacio de cámara y la observación o medición de la posición de la marca visual realizada con los sensores de visión (espacio de cámara). Esta diferencia es utilizada para actualizar o corregir la posición actual por medio de un filtro (e.g. CSPF, EKF) que pueda fusionar la información de ambos sensores (i.e. encoders y cámaras). Esta posición ya actualizada, también conocida como estado actual del sistema es guardada en una base de datos.

A partir de la información adquirida durante la etapa de entrenamiento la silla se mueve a cada una de las posiciones guardadas. En cada una de estas locaciones el sistema de visión realiza mediciones en busca de marcas relacionadas con el estado actual. Por medio de la estrategia de filtrado la medición de la posición de la marca artificial en espacio de cámara permite la actualización de la posición de la silla de ruedas. Después de que la posición es actualizada o corregida se hace posible la implementación de la estrategia de control y planeación de ruta que permita a la silla de ruedas llegar a la siguiente posición.

4.1.1 Validación y prueba del Filtro de Partículas en Espacio de Cámara

Para validar el sistema dos experimentos diferentes fueron implementados. En el primer experimento, llamado "*Línea Recta*" y mostrado en la Figura 4.2 la silla de ruedas se desplaza sobre un segmento recto de 7.5m de largo. En el experimento de "*Línea recta*" se realizaron pruebas con "cuenta muerta", PA, CSPF y EKF. El experimento "*Ruta-L*" es el segundo experimento propuesto, ver Figura 4.3. En este experimento la silla de ruedas sigue una trayectoria compuesta por dos tramos rectos perpendiculares. En los experimentos realizados, la posición de la silla de ruedas se estima tanto en la etapa de enseñanza como en la de repetición. La estimación de la posición, se realiza por medio de alguno de los algoritmos propuestos (e.i. "cuenta muerta", PA, CSPF y EKF). Con el fin de validar las propuestas aquí desarrolladas, en el primer y segundo experimento el EKF es utilizado como medida de comparación para las otras estrategias, ya que por su importancia el EKF se ha convertido en la medida de comparación contra la propuesta de nuevos algoritmos en lo referente a la estimación óptima de estados.

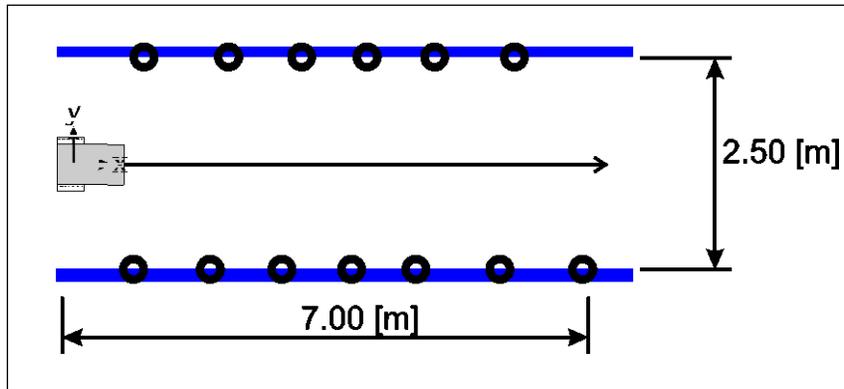


Figura 4.2. Esquema del experimento “Línea Recta”

Finalmente en un tercer experimento el CSPF es probado con maniobras más complejas, ver Figura 4.4. Este experimento es llamado “Ruta-Oficina”, y consiste en llevar a la silla de ruedas desde un escritorio localizado al interior de una oficina a un segundo escritorio localizado en otra oficina pasando a través del marco de una puerta y siguiendo una ruta de referencia.

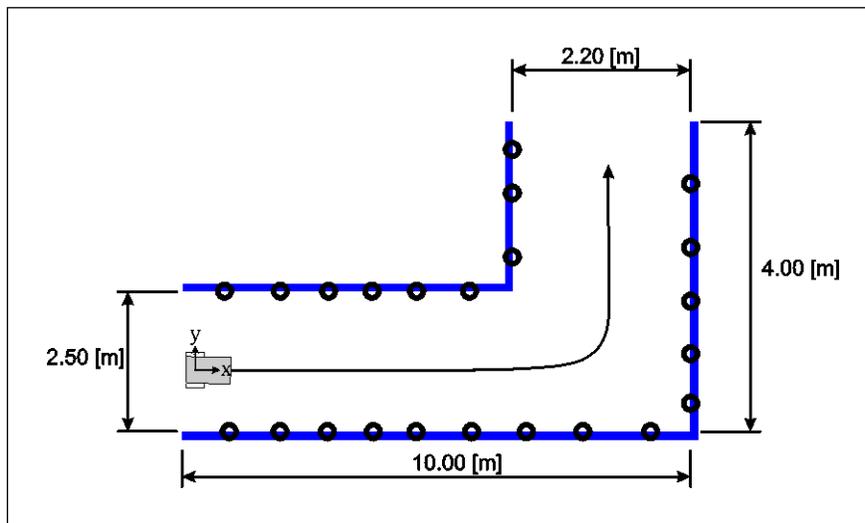


Figura 4.3. Esquema del experimento “Ruta-L”

Adicional al análisis de las posiciones físicas enseñadas y las posiciones físicas alcanzadas por la silla, también se realiza un análisis de las posiciones estimadas en la enseñanza y en la repetición. Con este fin se realizó un experimento considerando además de las mediciones físicas del sistema las estimaciones internas del sistema.

En este experimento se busca observar las diferencias que pueden existir entre la estimación realizada por el sistema y la posición física de la silla en el momento de la enseñanza, asimismo para la repetición, pero además observando las diferencias entre las estimaciones al momento de la enseñanza y la repetición.

aleatorias de partida en cada trayecto fue de $\mathbf{W} = [0.02m, 0.02m, 0.01rad]^T$, también estimado experimentalmente.

4.2.1 Validación y prueba de CSPF

4.2.1.1 Experimento “Línea recta”

En el experimento de “Línea recta” la silla de ruedas se mueve a lo largo de un segmento recto de $7.5m$ de longitud (Figura 4.2). Durante la etapa de entrenamiento la silla de ruedas es llevada sobre una línea recta pintada en el piso, permitiendo con esto que el guía humano conduzca el sistema de manera precisa a pesar de ser un manejo manual.

Los resultados del experimento de “Línea recta” se muestran en la Figura 4.5. Esta gráfica muestra cinco series de datos, el primero es la ruta de referencia adquirida durante la etapa de entrenamiento y el resto de las series son mediciones de las posiciones automáticamente alcanzadas durante el desplazamiento de la silla de ruedas al usar distintos filtros. Primeramente, en la serie de “Sin filtro” la silla de ruedas sigue la ruta de referencia basada sólo en la información adquirida durante el entrenamiento utilizando sólo lecturas del sensor de odometría sin la actualización de ningún filtrado. Esta tarea produce un error máximo de $0.3m$ al final de la ruta. Este es un error significativo que se puede deber a la sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales y a la existencia de incertidumbres debidas a factores físicos que no son considerados dentro del modelo cinemático. Debido a estas incertidumbres que pueden deberse a resbalamiento de las ruedas, desbalances de la silla, irregularidades del piso, etc., es necesario tener información adicional de otros sensores (i.e. cámaras) para poder así detectar desviaciones de la ruta de referencia. La prueba realizada con PA da resultados importantes si se considera que su implementación es relativamente sencilla con una implementación computacionalmente económica, el error transversal más grande utilizando PA es de $0.04m$, aunque también se pueden apreciar errores en los desplazamientos longitudinales.

En la corrida donde el CSPF es utilizado se muestra una desviación transversal de alrededor $0.03m$ sin errores longitudinales significativos. Finalmente, La corrida donde un EKF fusiona información visual y odométrica muestra desviaciones menores a $0.05m$ en la dirección transversal al desplazamiento, error mayor al encontrado con PA, cabe hacer mención que al utilizar EKF también se observan errores transversales no significativos. La Figura 4.5 muestra que la implementación realizada con CSPF lleva a un mejor desempeño en términos de desviación transversal comparada con la obtenida al utilizar EKF y PA.

Es importante mencionar que el CSPF es un filtro que puede filtrar sistemas con ruido no-Gaussiano, el cual, seguramente se encuentra presente en un sistema de silla de ruedas plegable como el aquí utilizado. Este tipo de ruido puede producirse debido a diferencias en las ruedas, desbalances, etc. Estas fuentes de ruido sesgan la función de densidad de probabilidades, lo que dificulta la corrección de los errores que afectan la pose de la silla de ruedas por medio del EKF.

4.2.1.2 Experimento "Ruta-L"

Para el experimento "*Ruta-L*" la ruta de referencia tiene forma de L con un tramo recto de aproximadamente $8m$ conectado por medio de una curva a un segundo segmento de $2.5m$ perpendicular al primero, esta trayectoria es de aproximadamente $11m$ de largo, ver Figura 4.3.

Los resultados del experimento "*Ruta-L*" están mostrados en la Figura 4.6. Aquí la serie "*Sin filtro*" claramente muestra una desviación de la ruta de referencia. En el primer segmento la silla se desvía transversalmente alrededor de $0.4m$ de la ruta de referencia. Al pasar por la curva el error acumulado del primer segmento compensa el error angular, quedando la silla correctamente orientada al segundo segmento pero con un adelanto considerable dando como resultado que la silla de ruedas sobrepase la posición final esperada con un error cercano a $0.5m$.

Durante el primer segmento, cuando la tarea se realiza utilizando EKF, el desempeño se aprecia muy similar al desempeño obtenido por medio del CSPF. Al inicio del segundo segmento al utilizar EKF se aprecia una desviación de la ruta de referencia de alrededor $0.25m$. En el punto donde la curva conecta con el segundo segmento la desviación de la ruta de referencia con CSPF siempre es menor que la registrada al realizar la misma tarea con correcciones basadas en EKF.

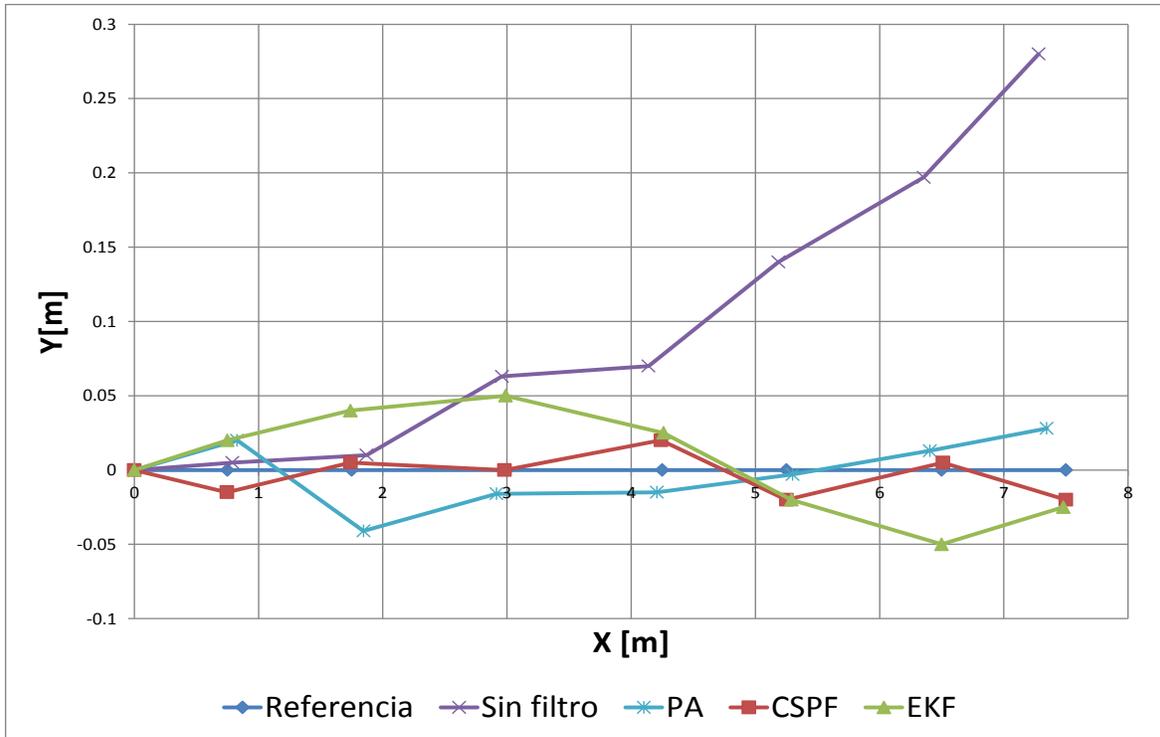


Figura 4.5. Posiciones alcanzadas por la silla de ruedas con diferentes filtros en experimento de “Línea recta”.

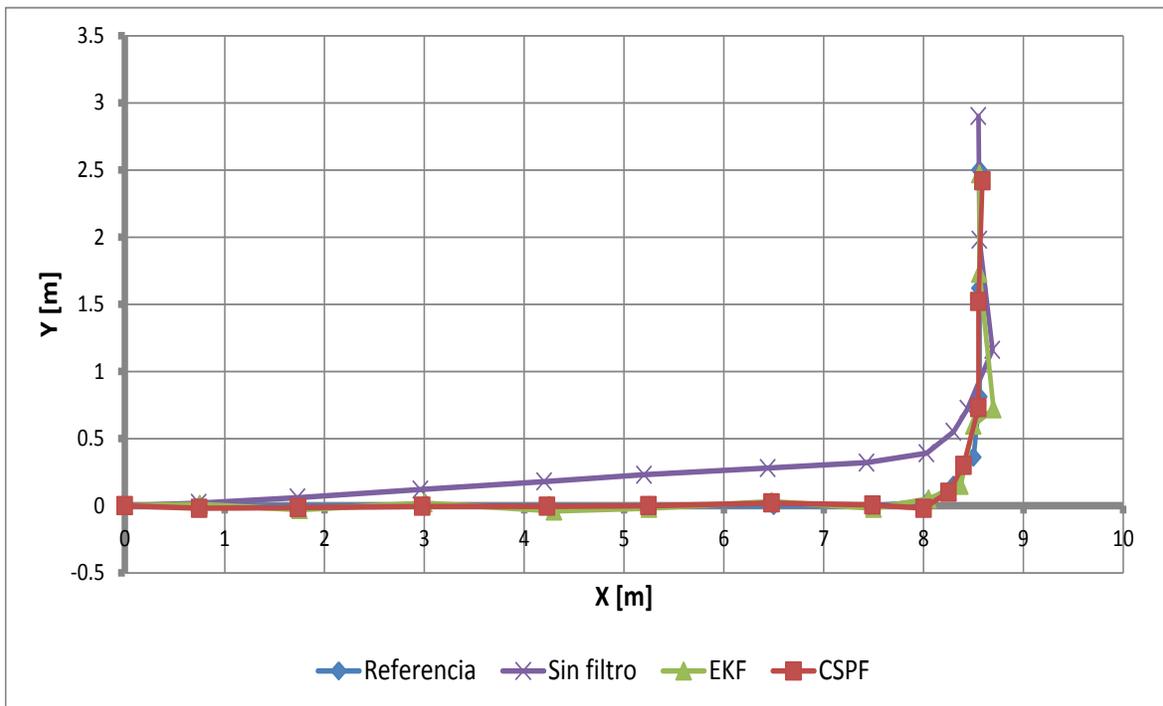


Figura 4.6. Posiciones alcanzadas por la silla de ruedas con diferentes filtros en experimento de “Ruta-L”.

4.2.1.3 Experimento “Ruta-oficina”

Finalmente, el CSPF fue probado en una nueva trayectoria donde la silla de ruedas es programada para ir desde una oficina a otra oficina distinta. Incluso, la silla de ruedas se encuentra colocada frente a un escritorio y es programada para que automáticamente se conduzca a un escritorio diferente ubicado en otra oficina. En este experimento la silla de ruedas necesita realizar varios movimientos complejos tales como moverse en reversa, girar y moverse hacia adelante. Esta trayectoria incluye la maniobra de pasar a través del umbral de una puerta de tamaño estándar ($0.9m$ de ancho), haciendo enseguida una vuelta izquierda luego una vuelta derecha concluyendo con el arribo al nuevo escritorio. Este viaje es de aproximadamente $10m$ de longitud, con un nivel de complejidad mayor al de los previos experimentos.

Debido al movimiento en reversa que la silla de ruedas necesita realizar al inicio de la trayectoria para salir del primer escritorio en el experimento “Ruta-oficina” la utilización de EKF no fue considerada, ya que de hecho, durante movimientos en reversa el EKF requiere cierta modificación en su algoritmo, esta modificación consiste en realizar la substracción de la matriz de covarianza del error en lugar de la adición realizada en los movimientos hacia adelante [11]. Esta diferencia no aplica para el CSPF ya que la variación en dirección afecta directamente la PDF formada a partir de la información odométrica. Esta PDF es la que sirve de entrada para el CSPF, lo que hace que este filtro no requiera adecuaciones adicionales para maniobras hacia adelante o hacia atrás.

La Figura 4.7 muestra los resultados del experimento “Ruta oficina” donde se aprecia que la silla de ruedas es capaz de seguir la ruta enseñada sin colisión. Es importante mencionar que cuando se realizó el experimento sin técnica de filtrado aplicada, la silla no fue capaz de salir de la primera oficina debido a los repetidos impactos que la silla tenía con el marco de la puerta de salida. La trayectoria sin filtrado no se muestra en la Figura 4.7.

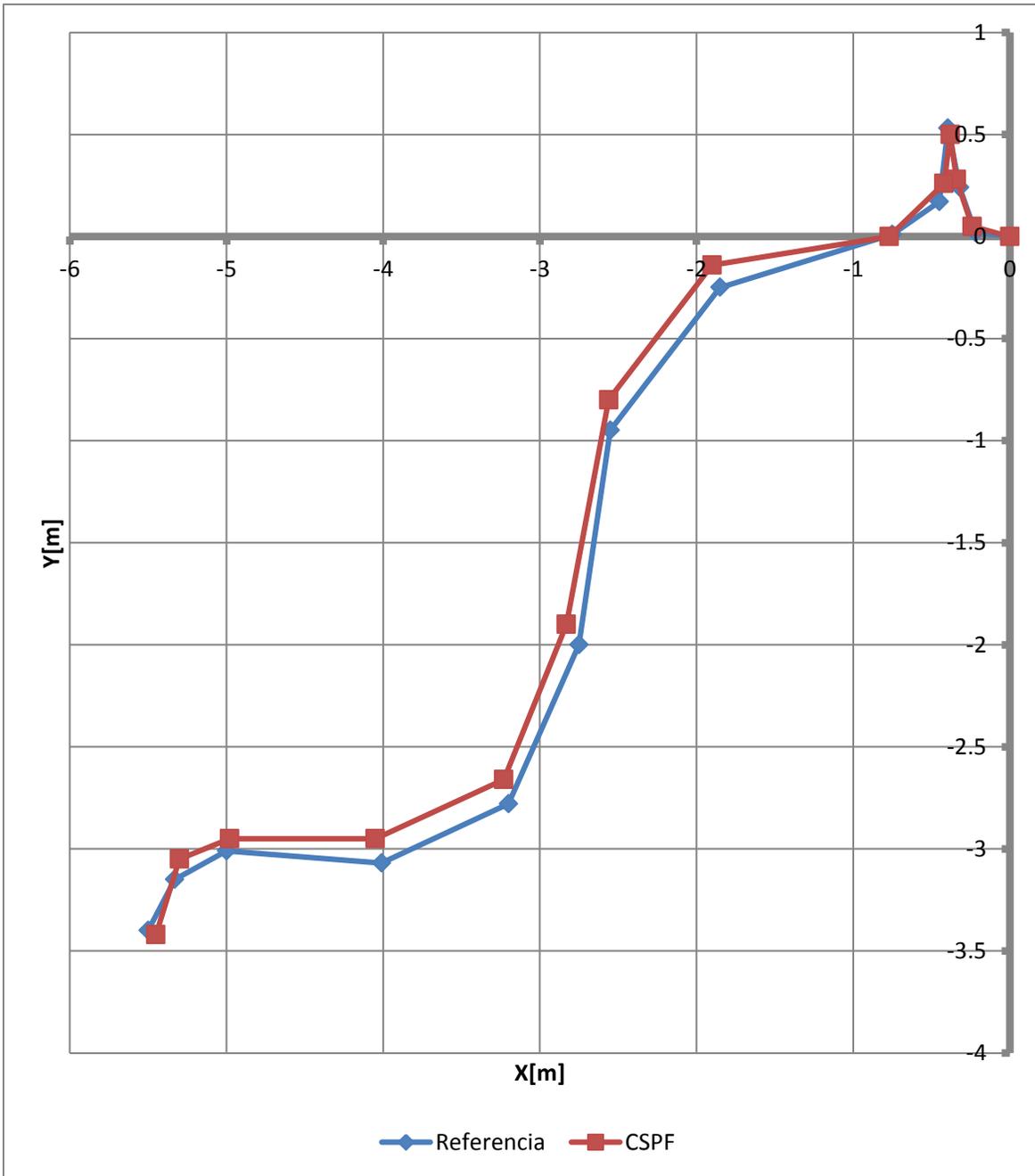


Figura 4.7. Comparativo entre ruta de referencia y posiciones alcanzadas usando CSPF en experimento “Ruta Oficina”.

4.2.1.4 Análisis RMS

Con el fin de facilitar la comparación del desempeño entre CSPF, EKF y “Sin filtro”, se hace uso del error medio cuadrático (RMS, por sus siglas en inglés) con respecto de la ruta de referencia propuesta. Además se ha encontrado que el error medio cuadrático es utilizado por otros investigadores en el análisis de la posición de sistemas móviles, lo que permitirá en cierto grado realizar una comparación con

otros sistemas. El error medio cuadrático se define como la raíz cuadrada de la suma del promedio cuadrado de la diferencia entre la posición alcanzada usando una técnica de filtrado y la ruta de referencia:

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_i^{ref} - \mathbf{x}_i^{filtro})^2}$$

donde N es el número de correcciones hechas durante el viaje; $\mathbf{x}_i^{ref} = [X_i^{ref}, Y_i^{ref}]^T$ es la medición física de las coordenadas X y Y de la ruta de referencia al instante que la corrección i -ésima es realizada. Por otra parte $\mathbf{x}_i^{filtro} = [X_i^{filtro}, Y_i^{filtro}]^T$ es la medición física de la coordenada X y Y de la posición alcanzada por la silla de ruedas cuando se realiza la i -ésima corrección usando un determinado tipo de filtro en la etapa de la repetición automática.

Tabla 4.1. Error RMS en m de la posición alcanzada usando diferentes técnicas de filtrado y la ruta de referencia en diferentes experimentos.

Error RMS					
Experimento	Coord.	CSPF	EKF	Sin filtro	PA
Línea recta	X	9.52	16.96	113.66	86.16
	Y	13.58	32.88	135.00	20.99
Ruta-L	X	33.49	42.26	45.67	--
	Y	47.68	75.78	268.87	--
Ruta-oficina	X	33.06	--	--	--
	Y	79.01	--	--	--

En la Tabla 4.1 se muestran los resultados obtenidos al analizar las coordenadas X, Y alcanzadas por la silla de ruedas y comparadas contra la ruta de referencia, al utilizar el índice RMS los valores más pequeños son indicadores de una menor desviación, es decir, de un mejor desempeño. Para los experimentos de “Línea recta” y “Ruta-L” las desviaciones aumentan significativamente para ambas coordenadas cuando ninguna estrategia de filtrado es utilizada en comparación con los datos obtenidos al utilizar EKF o CSPF. Esta desviación es esperada ya que el control aplicado se vuelve de “lazo-abierto” por lo que no existe manera de detectar desviación alguna respecto de la ruta de referencia. Es por eso que el sistema se vuelve muy sensible a las variaciones de las condiciones iniciales y

otras incertidumbres inherentes al sistema. En la Tabla 4.1 el experimento “*Ruta-oficina*” no muestra valores para los casos de “*Sin filtro*” ni EKF. Para el primer caso no fue posible completar el experimento ya que la silla de ruedas se impactaba en el marco de la puerta. En el segundo caso, si se quería utilizar el EKF para el experimento se hacía necesario un cambio en el algoritmo del filtro para poder realizar el experimento, situación no necesaria con la técnica CSPF aquí propuesta. Cuando ambos filtros EKF y CSPF fueron utilizados, ambos se desempeñaron satisfactoriamente, aunque, teniendo mejores resultados el CSPF. Por último en la Tabla 4.1 se muestran los resultados de utilizar PA en el experimento de “*Línea Recta*”, el cual, aunque en la coordenada *X* tiene un RMS menor que “*Sin filtro*”, es interesante ver que en la coordenada *Y* la estrategia de PA supera al EKF. A pesar de estos resultados esta estrategia no se implementó para los otros experimentos ya que se le consideró como una estrategia de “*fuerza bruta*” que no poseía los requisitos necesarios para ser considerada dentro de los métodos estocásticos.

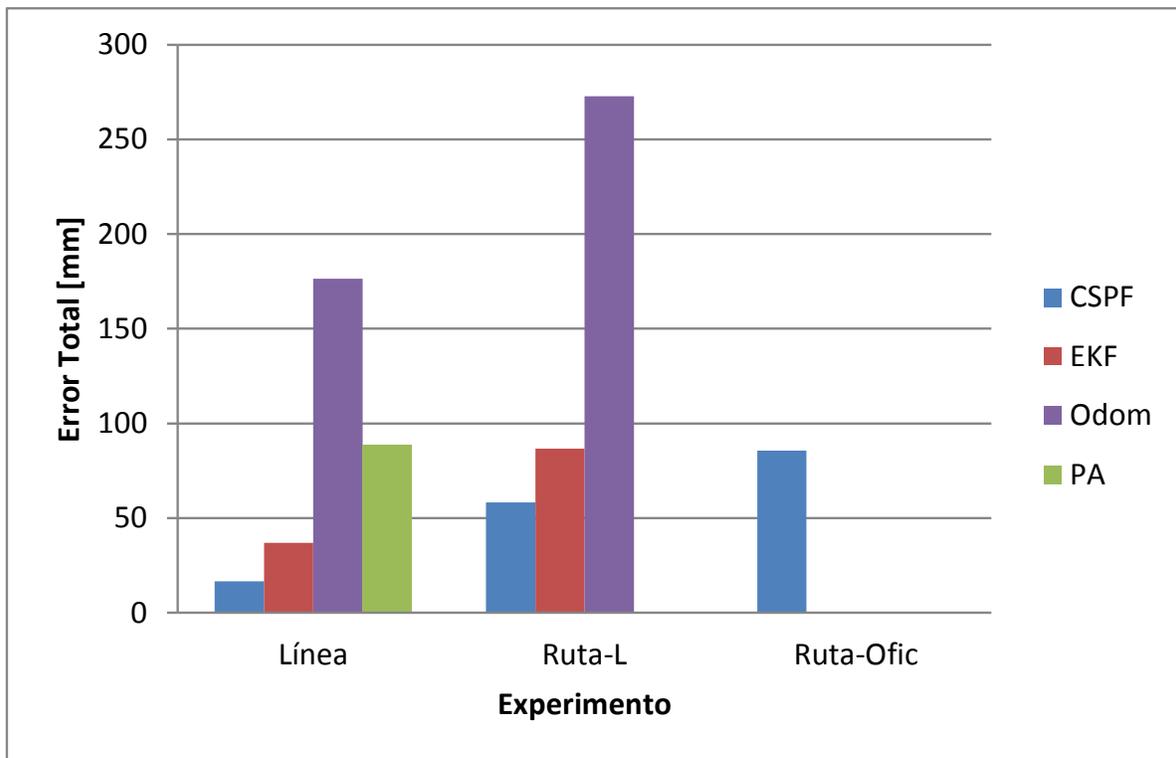


Figura 4.8. Error total en *m* para diferentes experimentos (según técnica de filtrado).

En la Figura 4.8 se describen los valores del error total ($\sqrt{RMS_X^2 + RMS_Y^2}$). El mayor error total se registra en el experimento “*Ruta-L*” cuando ninguna técnica de filtrado es empleada. Este error es de 272mm, alrededor del 50% del ancho de la

silla de ruedas (i.e. 60cm). En la Figura 4.8, EKF y CSPF pueden ser comparados cuando se utilizan para realizar los experimentos de “Línea recta” y “Ruta-L”. Durante el experimento “Línea recta” el EKF arroja un error total de 37mm (6.0% del ancho de la silla de ruedas), mientras que la implementación del CSPF da un error de 16mm (2.8% del ancho de la silla de ruedas). Con respecto al experimento “Ruta-L”, los datos mostrados en la Figura 4.8 indican un incremento en el error total a 86mm para el EKF y 57.8mm para el CSPF (14.5% y 9% del ancho de la silla de ruedas, respectivamente) esto debido al aumento en la complejidad del experimento. Estos valores son seguros considerando que los pasillos por donde transita la silla de ruedas en el experimento tiene alrededor de 2m de ancho. Incluso, para el caso del tránsito por marcos de puerta estos errores podrían ser tolerables desde que la diferencia entre el ancho de la silla y el ancho de una puerta estándar es de 300mm (i.e. 50% del ancho de la silla de ruedas). Este error aún puede garantizar un buen margen de seguridad y un manejo sin colisión, considerando que la ruta de referencia pase cercanamente al centro del marco de la puerta ($\pm 0.1m$ alrededor del centro), ver la Figura 4.9.

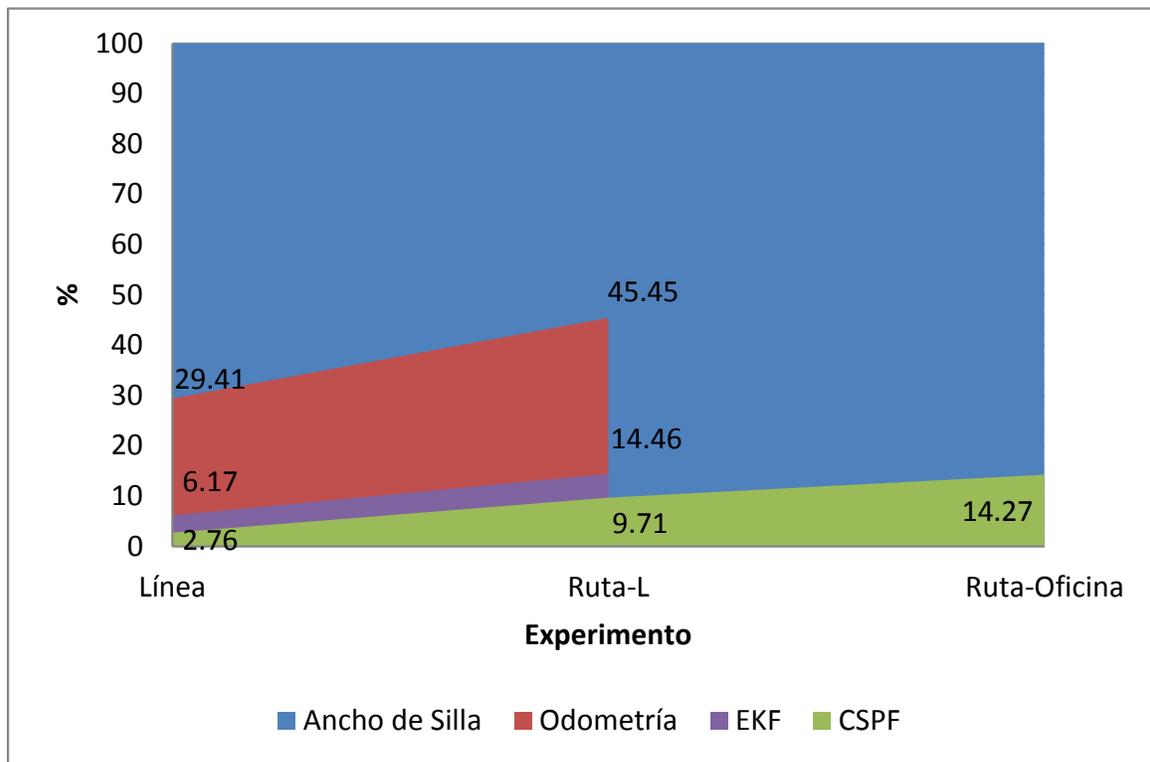


Figura 4.9. Desviación total relativa al ancho de la silla de ruedas.

4.2.1.5 Tiempo de procesamiento

En este enfoque el incremento del costo computacional entre las implementaciones utilizando EKF, PA y CSPF no es crítico, ver Figura 4.10. Esto

es uno de los beneficios de realizar la implementación de un Filtro de Partículas en espacio de sensor. De aquí la importancia de la función de observación, ya que permite el mapeo de un espacio tridimensional (espacio físico) a un espacio unidimensional (espacio de cámara). Este mapeo es lo que permite un ahorro significativo en costo computacional.

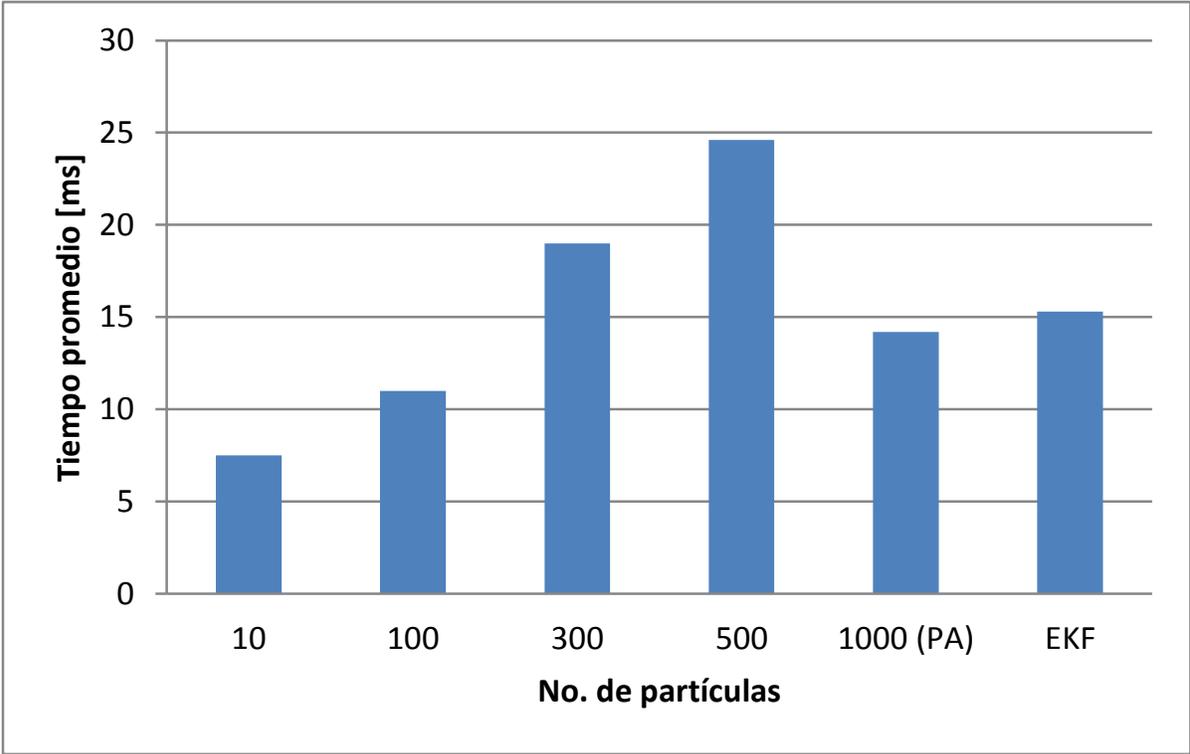


Figura 4.10. Comparación de tiempo de procesamiento entre EKF, PA y CSPF con diferentes cantidades de partículas.

En la Figura 4.10 se muestra el tiempo de procesamiento de 4 implementaciones del CSPF utilizando diferentes cantidades de partículas, y el tiempo de procesamiento de la estrategia con PA utilizando mil partículas, estos tiempos se contrastan con el tiempo de procesamiento utilizado por el EKF. La cantidad de partículas a usar se determinó de manera experimental buscando el mejor balance entre la precisión de localización y el tiempo de procesamiento. Para el uso de PA la cantidad que mejor logró conciliar ambos aspectos fue de 1000 partículas, y aunque sus resultados no son precisos como CSPF o EKF su tiempo de procesamiento es ligeramente menor que con EKF. Para el caso de CSPF el número de partículas que dio mejores resultados fue el de 500 partículas, aunque el tiempo de procesamiento del CSPF fue mayor que el de PA y EKF, un incremento de 10ms no resulta crítico para la aplicación propuesta. Considerando que un sistema de visión comercial realiza un procesamiento de 10 a 24 imágenes por segundo, (entre 100ms y 42ms por cada imagen, respectivamente), si el

filtrado se coloca en un hilo de programación diferente, el tiempo de filtrado no supera el tiempo de adquisición de cada imagen es por eso que un aumento de $10ms$ no afecta significativamente al proceso de estimación en esta aplicación. Finalmente debe tenerse en cuenta que el CSPF no está limitado ni a suposiciones de linealidad ni de gaussianidad a diferencia del EKF. En el caso de PA es notable que aunque el número de partículas es del doble que en el CSPF el tiempo del procesamiento es prácticamente igual que en EKF, lo que pudiera considerarse una ventaja aunque el EKF tenga más precisión, el hecho de la sencillez de la implementación de PA puede hacerlo atractivo para pruebas preliminares de cualquier estudio o para implementaciones con exigencias de precisión y recursos computacionales menores.

4.2.2 Filtro de Partículas en Espacio de Cámara: enseñanza y repetición

Para el análisis de la estimación de la posición de la silla de ruedas durante la etapa de enseñanza y repetición se realizaron los experimentos “*Línea-Recta*”, “*Ruta-L*” y “*Ruta-Oficina*” pero en esta ocasión contrastando las mediciones físicas de las posiciones alcanzadas por la silla contra los valores estimados de la posición de la silla tanto en la enseñanza como en la repetición.

Los resultados de estas pruebas se muestran en las Figura 4.11, Figura 4.12 y Figura 4.13; en las cuales se muestran cuatro series de datos. La primera serie de datos muestra las estimaciones de la posición de la silla de ruedas utilizando CSPF en la etapa de enseñanza (\mathbf{X}_{EE}); la segunda serie de datos es la estimación de la silla de ruedas en la etapa de repetición (\mathbf{X}_{ER}); la tercera y cuarta serie son las mediciones físicas de la posición de la silla de ruedas durante la etapa de enseñanza (\mathbf{X}_{ME}) y la etapa de repetición (\mathbf{X}_{MR}) respectivamente.

Además se incluyen las Tabla 4.2, Tabla 4.3 y Tabla 4.4 para mostrar la diferencia promedio y desviación estándar entre diferentes series de datos. La diferencia j es $\|\mathbf{X}_{a_j} - \mathbf{X}_{b_j}\|$ con $j = 1, \dots, N_{ob}$, donde N_{ob} indica el número de veces que la silla de ruedas corrigió o actualizó su posición, $\|\cdot\|$ indica la norma euclidiana del vector, además a y b indican dos series de datos distintas. Cuatro casos de interés fueron considerados:

- $\|\mathbf{X}_{ME} - \mathbf{X}_{EE}\|$: diferencia promedio entre las mediciones y las estimaciones de la posición de la silla de ruedas durante la enseñanza, aquí se muestra que tan acertada es la estimación del CSPF respecto de la posición de la silla medida físicamente;

- $\|X_{MR} - X_{ER}\|$: entre las mediciones y las estimaciones de la posición de la silla de ruedas durante la repetición, este valor indica que tan cercanas eran las estimaciones de la posición de la silla de ruedas respecto a su medición física;
- $\|X_{EE} - X_{ER}\|$: entre la estimación de la posición de la silla de ruedas durante las etapas de enseñanza y repetición; y por último
- $\|X_{ME} - X_{MR}\|$: entre las mediciones físicas de la posición de la silla de ruedas en la etapa de enseñanza y repetición.

4.2.2.1 Experimento “Línea-Recta”

Los resultados mostrados en la Figura 4.11 muestran que durante las etapas de enseñanza y repetición aunque las estimaciones se encuentren lejos de las referencias físicas, la silla de ruedas permanece cercana a la ruta enseñada, como puede apreciarse en las series de datos de mediciones físicas de la enseñanza y la repetición.

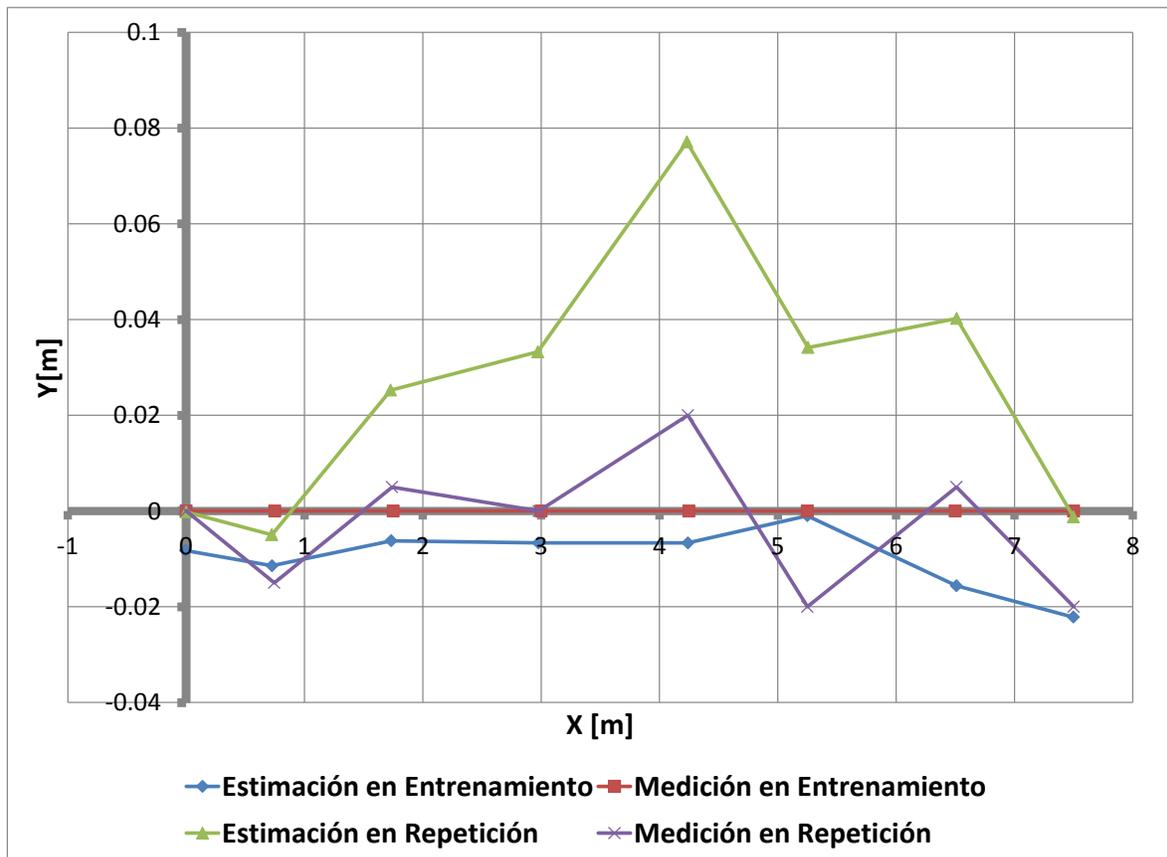


Figura 4.11. Comparativo entre mediciones y estimaciones de la posición de una silla de ruedas utilizando CSPF en experimento de “Línea Recta”.

En la Tabla 4.2 el mayor error se presenta al momento de comparar las mediciones físicas contra la estimación en la etapa de enseñanza. Aun así, la

diferencia promedio es lo suficientemente pequeña como para tener un manejo seguro.

Tabla 4.2. Diferencias entre datos medidos y estimados en enseñanza y repetición en experimento “*Línea Recta*”.

Experimento “ <i>Línea-Recta</i> ”		
Series Comparadas	Diferencia promedio [mm]	Desviación estándar [mm]
$\ X_{ME} - X_{EE}\ $	11.86	8.62
$\ X_{MR} - X_{ER}\ $	7.23	6.78
$\ X_{EE} - X_{ER}\ $	4.94	3.26
$\ X_{ME} - X_{MR}\ $	6.86	7.03

4.2.2.2 Experimento “*Ruta-L*”

En este experimento la dificultad aumenta ya que la silla de ruedas debe realizar un giro de 90° y recorrer una mayor distancia. Aunque en la Figura 4.12 se pueden apreciar algunas diferencias entre las distintas series de datos, la silla sigue exitosamente la ruta enseñada.

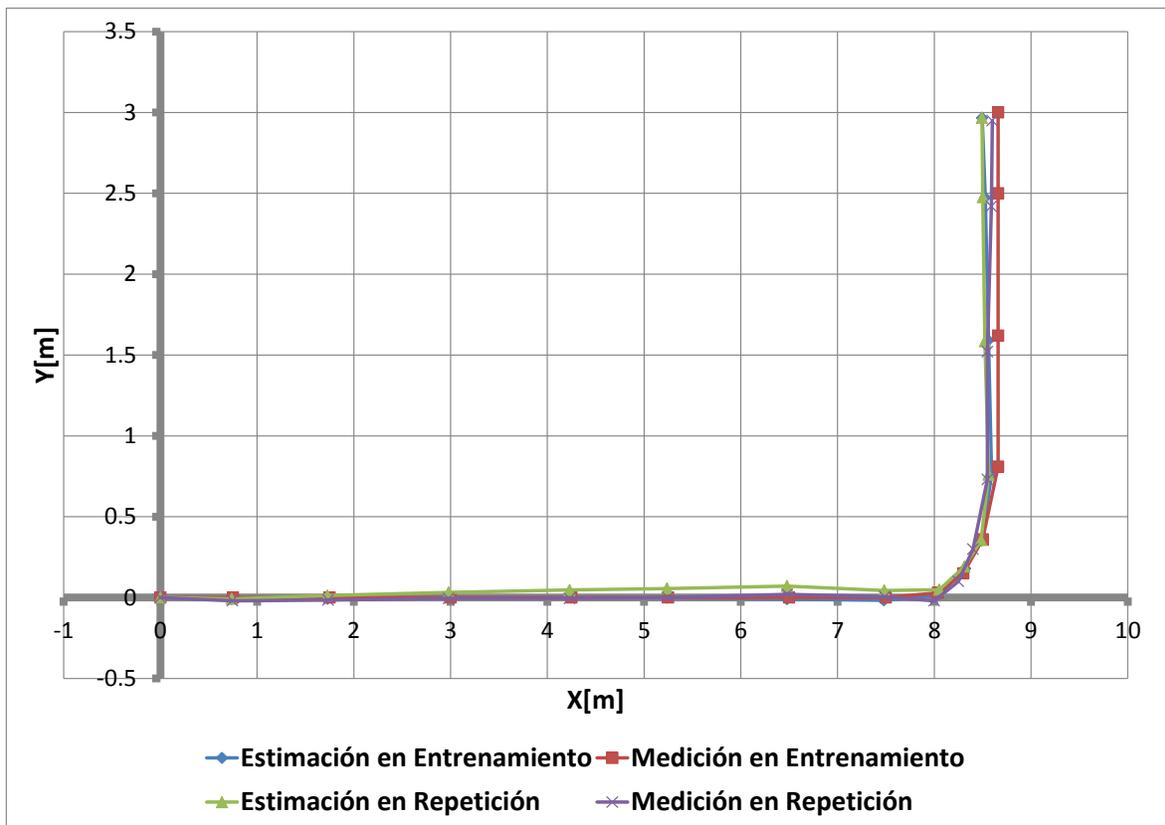


Figura 4.12. Comparativo entre mediciones y estimaciones de la posición de una silla de ruedas utilizando CSPF en “*Ruta-L*”.

En la Tabla 4.3 la diferencia promedio entre las diferentes series de datos ha aumentado a $46mm$, este aumento era de esperarse debido a la mayor complejidad de la ruta que ahora incluye giro y un incremento de la longitud. A pesar de lo anterior, estas diferencias no representa un riesgo para los usuarios de sillas de ruedas considerando que el ancho de un pasillo típico es varias veces mayor que una silla de ruedas estándar (alrededor de $600mm$).

Tabla 4.3. Diferencias entre datos medidos y estimados en enseñanza y repetición en experimento “Ruta-L”.

Experimento “Ruta-L”		
Series Comparadas	Diferencia promedio [mm]	Desviación estándar [mm]
$\ X_{ME} - X_{EE}\ $	42.93	51.53
$\ X_{MR} - X_{ER}\ $	28.68	34.40
$\ X_{EE} - X_{ER}\ $	8.76	11.49
$\ X_{ME} - X_{MR}\ $	46.19	43.95

4.2.2.3 Experimento “Ruta-Oficina”

En este experimento la silla de ruedas se encuentra situada próxima a un escritorio dentro de una oficina. Para poder lograr el cambio de un escritorio a otro en una diferente oficina se hace necesaria la realización de varias maniobras como girar de reversa, iniciar movimientos hacia adelante, cruzar por el umbral de una puerta de $900mm$ de ancha, realizar algunos giros para finalmente colocarse dentro de un nuevo escritorio. Este recorrido es de aproximadamente $8m$ de largo, pero con un grado de complejidad aún mayor.

Tabla 4.4. Diferencias entre datos medidos y estimados en enseñanza y repetición en experimento “Ruta-Oficina”.

Experimento “Ruta-Oficina”		
Series Comparas	Diferencia promedio [mm]	Desviación estándar [mm]
$\ X_{ME} - X_{EE}\ $	48.29	59.19
$\ X_{MR} - X_{ER}\ $	48.18	28.74
$\ X_{EE} - X_{ER}\ $	29.01	28.41
$\ X_{ME} - X_{MR}\ $	33.33	19.77

Los resultados mostrados en la Figura 4.13 indican que la silla de ruedas completa la ruta exitosamente, aunque algunas diferencias se aprecian entre las series de estimación y las de mediciones físicas. Se puede apreciar a partir de la gráfica que los datos estimados en enseñanza y repetición tienden a los mismos valores, en tanto que los valores de las mediciones físicas tienden también a los mismos valores, pero existe una diferencia clara entre los datos estimados y los medidos,

que podría deberse a errores en el mapa físico o a incertidumbres del sistema absorbidas por el filtrado.

Aunque el experimento “*Ruta-Oficina*” posee una complejidad mayor, en la Tabla 4.4 la diferencia promedio y su desviación estándar no tienen un incremento significativo en comparación con el experimento “*Ruta-L*”. Los valores aún indican un desplazamiento seguro incluso considerando el cruzar por el umbral de la puerta que solo da un margen de 300mm de error.

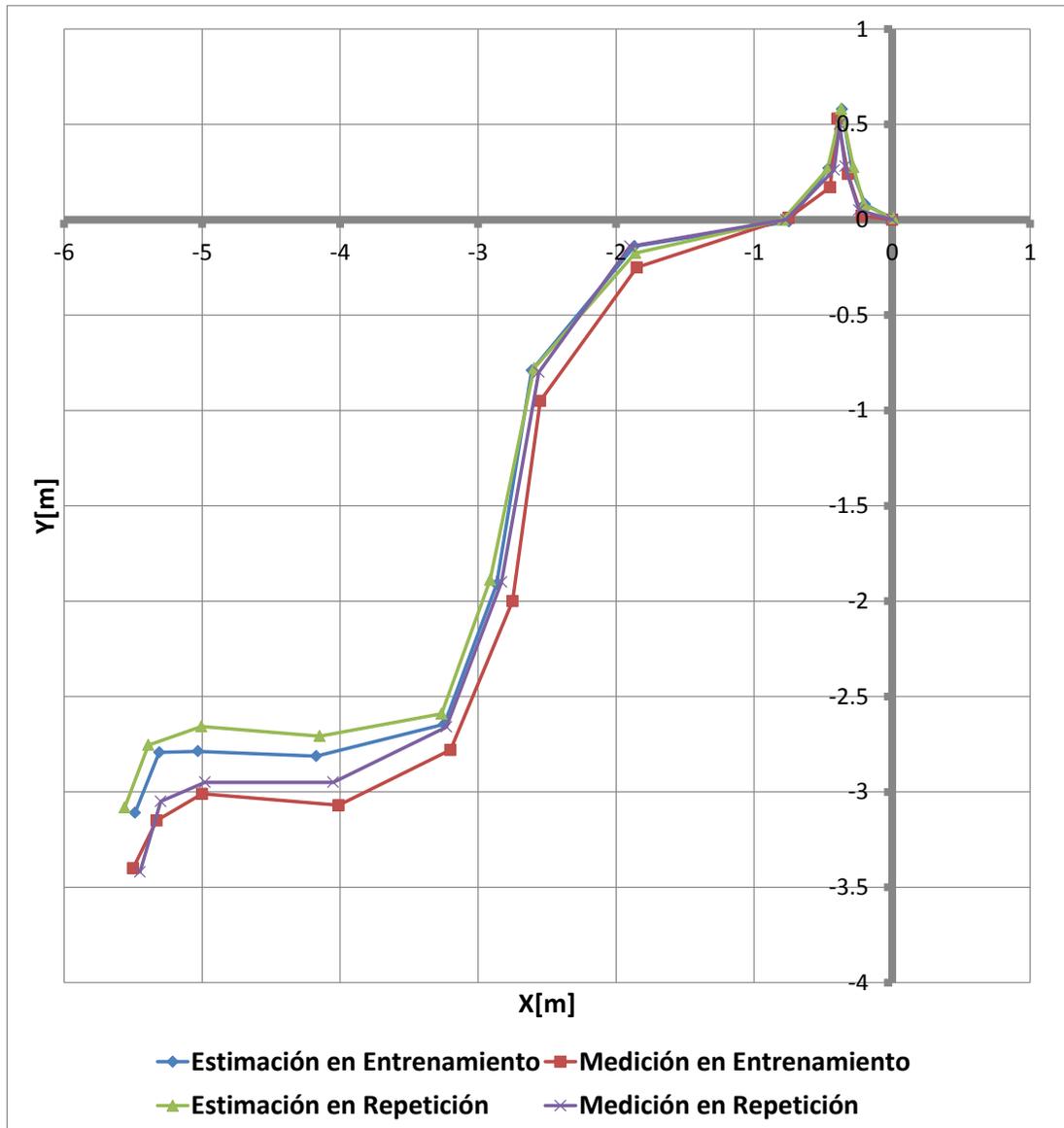


Figura 4.13. Comparativo entre mediciones y estimaciones de la posición de una silla de ruedas utilizando CSPF en experimento de “*Ruta-Oficina*”.

4.3 Discusión

Sobre los resultados obtenidos, se puede considerar que los experimentos implementados utilizando la propuesta original de CSPF en general han sido exitosos. Incluso si se compara el CSPF contra EKF es posible encontrar que existe mejoría en la precisión de la estimación a costa de un precio computacional no significativo para la aplicación dada. No debe olvidarse que aunque EKF está sujeto a restricciones de gaussianidad, su implementación a sistemas no gaussianos es común, incluso, a pesar de que en general no se cumple con la suposición de gaussianidad el EKF se ha transformado en un medio de comparación para todas las nuevas propuestas de filtrado. La implementación del EKF aquí descrita, toma como referencia el trabajo realizado en la Universidad de Notre Dame [31] y el trabajo presentado por Del Castillo [11]. La implementación de PA y del CSPF son propuestas originales que se basan en las ideas generales del filtrado con Partículas descrito en [29] [30] y en combinación con los trabajos realizados por Baumgartner y Del Castillo [31] [11]. El filtrado cualquiera que sea la técnica se realiza en el espacio de cámara por medio de una función de observación, esta característica en particular, junto con el hecho de utilizar marcas visuales artificiales y la técnica de enseñanza-repetición traen ventajas tales como bajo costo computacional y versatilidad en la implementación de la técnica de filtrado y navegación, así como sencillez en la implementación al utilizar la teoría de filtrado con partículas.

La instrumentación de la silla de ruedas fue realizada con sensores odométricos de bajo costo con altas prestaciones, mismos que al ser instalados directamente al eje sobre el que se encuentran la ruedas montadas, se evitan incertidumbres que pudieran surgir, como por ejemplo, el resbalamiento entre los odómetros y las ruedas si las instalación hubiera sido sobre la periferia de las ruedas de tracción. La instalación de los encoders y las cámaras fue pensada para cambiar en la menor medida posible la configuración original de la silla PX9000, como puede apreciarse en la Figura 3.8, logrando así ahorrar dinero y tiempo en la instalación e implementación del sistema. A pesar de que algunos detalles como filtraciones de aceite hacia los encoders obligaban a una limpieza periódicas y en ocasiones al reemplazo de los encoders, el sistema muestra un desempeño adecuado durante periodos de varias semanas, cabe mencionar que el mantenimiento a este tipo de fallas es rápido y sencillo de realizar, aunque, si se hace una adecuación que evite esta fuga, el sistema podría tener un funcionamiento sin falla por periodos mucho más largos.

La estrategia de enseñanza-repetición tradicionalmente utilizada en sistema holonómicos, como brazos robóticos, permite la realización de mapas topológicos que propician que el sistema aquí propuesto sea de fácil implementación para

diferentes diseños arquitectónicos. Además, la estrategia permite que con el uso de marcas visuales artificiales ubicadas en posiciones conocidas ya no sea necesario el conocimiento de un mapa detallado del lugar donde la silla se desplaza, lo que ahorra tiempo de instalación y costo computacional.

Para probar el sistema en su fase inicial se propuso el experimento de “Línea recta” que en primer lugar, sirvió para probar la totalidad del sistema y depurar los errores cometidos durante las etapas de instrumentación y programación. Por ser el caso más sencillo, en esta etapa se utilizaron diversos métodos de filtrado: cuenta-muerta (“Sin filtro”), Filtro de Kalman Extendido, Partículas Aleatorias y Filtro de Partículas en Espacio de Cámara. Con todas las estrategias propuestas se pudo completar el trayecto propuesto de $7.5m$, aunque con el método de cuenta-muerta se encontraron desviaciones de hasta $30cm$ en dirección transversal al desplazamiento, en tanto que para cualquiera de los otros filtros el error máximo fue de $5cm$ para el caso del EKF, $4cm$ para PA y $3cm$ para CSPF. En tanto que para las desviaciones longitudinales la implementación de PA es la que arrojó más error después de las desviaciones en cuenta-muerta. Si consideramos el error total en función del RMS mostrado en la Figura 4.8 vemos que para el experimento de “Línea recta” en la técnica de cuenta-muerta el error fue mayor, siguiéndole PA, después EKF y por último con menor error el CSPF.

Una vez completada la etapa en “Línea recta” se procedió a incrementar el nivel de dificultad del experimento agregando a la línea recta una rotación de 90° y otro tramo recto. En esta ocasión, la comparación se realizó entre las técnica de cuenta-muerta, EKF y CSPF. Aunque los resultados entre EKF y CSPF fueron muy similares, en la Figura 4.6 se puede apreciar una desviación significativa al final de la rotación al momento de utilizar EKF, error que se refleja en un aumento del error total mostrado en la Figura 4.8. Este experimento además de servir para validar el CSPF en condiciones más complejas también sirvió para depurar otros errores de programación relacionados con la realización de giros por el sistema.

Por último se probó la implementación del CSPF en un ambiente mucho más complejo, el cual implicaba salir de un escritorio, atravesar el umbral de una puerta e instalarse en un nuevo escritorio. En este caso el experimento sólo se realizó utilizando CSPF ya que se consideraba que el sistema había sido validado con los dos experimentos anteriores. Los resultados encontrados muestran que la silla de ruedas fue capaz de completar la ruta sin colisión lo que indica que el CSPF propuesto es una opción viable para el control del sistema aquí descrito.

Tratando de hacer una comparación más objetiva entre los distintos filtros se propone la utilización de un índice de error ϵ que se obtiene al multiplicar los dos aspectos negativos de cada método: error RMS total y tiempo de procesamiento.

Es decir, si un método tiene un alto error RMS aunque su tiempo de procesamiento sea corto su índice de error será alto, por otro lado, si tiene un error RMS pequeño, pero con un gran tiempo de procesamiento, el índice de error será igualmente grande, por lo que se buscará un método que tenga al mismo tiempo un error RMS bajo y un tiempo de procesamiento corto, lo que será reflejado en un índice de error menor. Dicho en otras palabras, entre menor sea el índice de error ϵ el método tendrá un mejor desempeño. En la Figura 4.14. se puede apreciar que para el experimento *Línea Recta* ϵ es menor para el CSPF. Para el experimento *Ruta-L* ϵ fue mayor que para EKF. En tanto que para el experimento *Ruta-Oficina* el índice de error ϵ aumenta debido a la complejidad del experimento. El cambio del índice de error entre el experimento *Línea recta* y el experimento *Ruta-L* nos indica que la eficiencia del CSPF es similar a la del EKF en este sistema de silla de ruedas, pero, CSPF tiene la ventaja de no está limitado a suposiciones de gaussianidad, lo que tal vez, en otros sistemas con no linealidades más severas o afectaciones de ruido bimodal o alguna otra pudiera reflejar una mejora significativa en comparación con EKF. Otra cosa que debe tenerse en cuenta es que el Filtro de Partículas usualmente tiene tiempos de procesamiento órdenes de magnitud mayor que las técnicas basadas en EKF y por lo tanto CSPF da una contribución importante a la implementación del filtrado con partículas.

Los tres experimentos muestran como utilizando una metodología que no supone desviaciones gaussianas respecto de un modelo dado incide positivamente en la precisión de las estimaciones de la posición de un sistema con un gran número de incertidumbres.

Por otro lado es notable ver que la implementación de PA aunque no cubra por completo los requisitos para ser un método estocástico, su comportamiento en el experimento en línea recta, indica que esta estrategia podría ser una opción en la puesta en marcha de sistemas de menos demanda, ya que con una implementación relativamente sencilla, comparada con EKF o con CSPF, es posible tener correcciones que podrían ser útiles pruebas preliminares en aplicaciones de menos precisión.

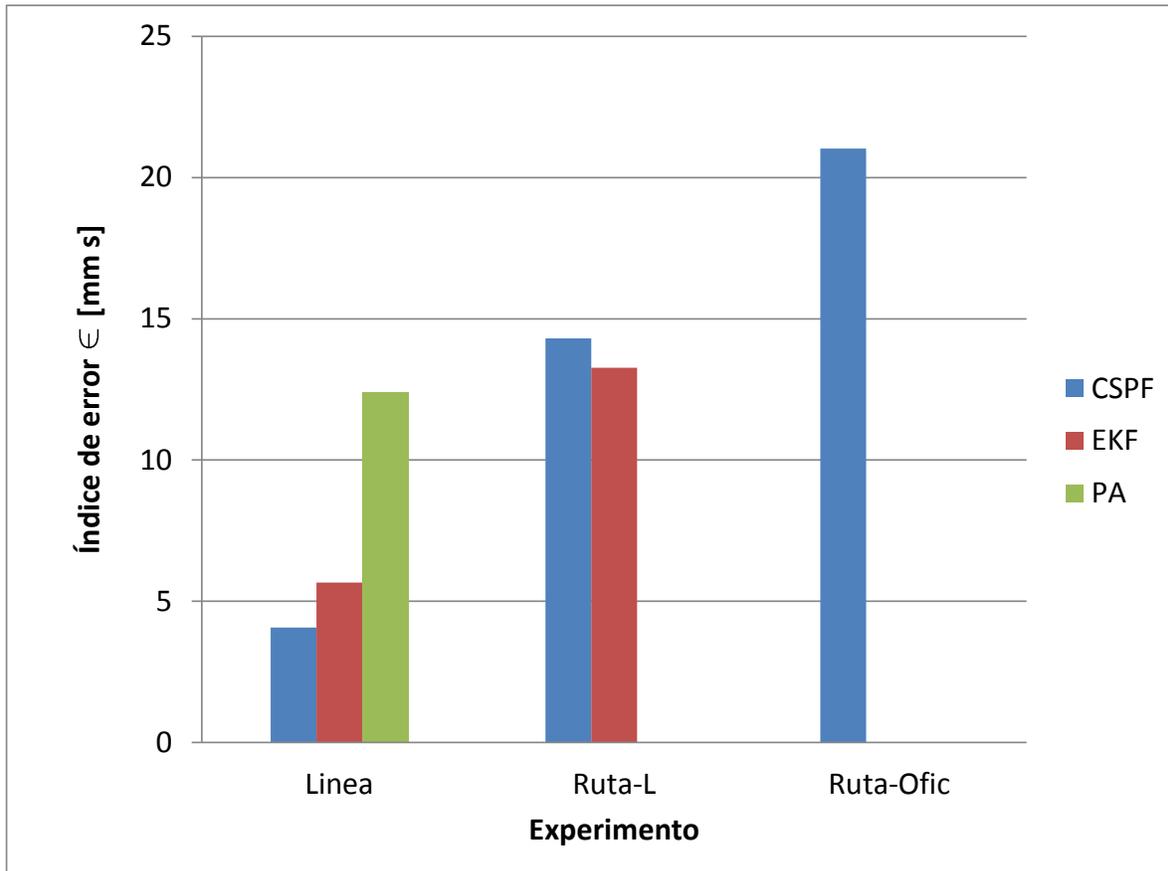


Figura 4.14. Índice de error para cada filtro.

Conclusiones

Conclusiones

El desarrollo teórico y la implementación experimental de una técnica de integración multisensorial basada en filtros bayesianos para la localización precisa y el control basado en visión en interiores para una silla de ruedas automáticamente guiada, sin limitaciones de linealidad ni gaussianidad, ha sido presentado.

El algoritmo desarrollado consiste en una implementación original de un Filtro de Partículas en Espacio de Cámara (Camera Space Particle Filter, CSPF). Este trabajo toma ventaja de las características intrínsecas del Filtro de Partículas (PF), es decir, de su habilidad para evaluar múltiples hipótesis y absorber incertidumbres de media no cero y no gaussianas, sin la suposición de que las funciones de densidad de probabilidades del ruido del sistema y del ruido de la medición sean del tipo gaussiano.

Es importante hacer notar que en el CSPF, el proceso por medio del cual se fusiona las múltiples hipótesis de la información odométrica con la información proveniente de las cámaras digitales, es implementado dentro del espacio del sensor, a diferencia del PF donde usualmente la medición es llevada a espacio físico [29]. Para la realización del filtrado en espacio de sensor (espacio de cámara) se recurre a una función de observación que es la que realiza el mapeo de un espacio físico tridimensional al espacio de cámara de dimensión uno, con lo que se reduce significativamente el costo computacional si se le compara con una implementación típica de PF, logrando con esto, una implementación en tiempo real para la aplicación aquí presentada.

Puede notarse de los experimentos que el EKF tiene un menor tiempo de procesamiento, sin embargo, el hecho de suponer un sistema con ruidos gaussianos hace de esta propuesta, una propuesta sin bases teóricas robustas que podrían tener como consecuencias fallas en escenarios no previstos. Aunque el CSPF requiere de un tiempo mayor de procesamiento este incremento no afecta el desempeño de la aplicación estudiada, y pareciera ser un precio justo que debe pagarse por poder manejar funciones de densidad de probabilidades de cualquier tipo con una base teórica bien sustentada.

La viabilidad del enfoque propuesto se muestra mediante exitosas pruebas experimentales. El sistema fue capaz de seguir trayectorias complejas en ambientes interiores estructurados, donde tolerancias cerradas son necesarias, como por ejemplo al pasar por el marco de una puerta o al instalarse en un escritorio. Basándose en los experimentos, se puede decir del algoritmo propuesto, que se demuestra ser robusto a las incertidumbres del sistema.

El sistema realiza una estimación precisa de la posición basándose en información de odometría y visión a través de una novedosa implementación del CSPF que fusiona la información de los sensores. En el proceso de fusión, la imprecisa información odométrica (dead-reckoning), es llevada a espacio de cámara por medio de una función de observación. En el espacio de cámara, por medio del método de Monte Carlo, un conjunto de posiciones probables se genera. Finalmente, en base a la media en espacio físico de este conjunto de posiciones probables, se obtiene, una estimación corregida de la posición del sistema.

El CSPF es un algoritmo basado en el principio de Monte Carlo que no está limitado por suposiciones de linealidad o gaussianidad a diferencia de implementaciones comunes basadas en Filtro de Kalman Extendido. Esta ventaja es especialmente importante para el caso de una silla de ruedas plegable donde el sistema es ruidoso y sus incertidumbres son difíciles de modelar.

El sistema de silla de ruedas robótica implementado en este trabajo es capaz de seguir una variedad de rutas de referencia. Los tres experimentos "*Línea recta*", "*Ruta-L*" y "*Ruta-oficina*" fueron realizados. Con el fin de validar el sistema, la fusión de la información proveniente de los sensores utilizando CSPF fue comparada con un experimento "*Sin filtro*" y con una implementación del EKF en dos de estos experimentos: "*Línea recta*" y "*Ruta-L*". Para estos dos experimentos, cuando no se utilizaba ninguna estrategia de filtrado el desempeño disminuía significativamente tornando el sistema a ser impráctico para la aplicación propuesta. Cuando el CSPF y EKF fueron comparados los resultados en ambos experimentos mostraron que CSPF tiene un mejor desempeño en la estimación de la posición. Esto puede deberse a la capacidad del CSPF para desempeñarse utilizando una distribución de probabilidades no-gaussianas, en tanto que, EKF no garantiza un alto desempeño para esas condiciones. Después de que el sistema fue validado contra la implementación del EKF, el sistema fue probado en una trayectoria significativamente más compleja, la "*Ruta-oficina*". Para esta ruta el error RMS fue mayor que para los otros casos debido al incremento en la complejidad de la trayectoria, aun así, los resultados estuvieron dentro de un marco de valores aceptables y seguros para el usuario.

Si además de la precisión alcanzada, si se considera el tiempo de procesamiento, ver Figura 4.14, de los filtros CSPF y EKF, se puede concluir que tienen índices de error similares. Ya que lo ganado en precisión con el CSPF se pierde en tiempo de procesamiento, sin embargo, aunque EKF funciona exitosamente para este sistema aún con las suposiciones de gaussianidad, CSPF podría ofrecer mejores resultados en sistemas gravemente no lineales o donde las afectaciones por el ruido sea del tipo binomial o de otro tipo.

A manera de comparación con otros estudios, en [60] se muestra un estudio donde usando cámaras fijas, diferentes técnicas de filtrado son utilizadas para robots móviles que juegan fútbol soccer. Utilizando EKF el error RMS en la localización fue alrededor de $0.061m$. Por otro lado, utilizando un algoritmo basado en PF este error disminuía hasta $0.030m$, siendo este el resultado más preciso reportado en este trabajo. Cabe mencionar que los robots utilizados en [60] son robots con 3 ruedas que se mueven en un área de $3 \times 5m$. Estos robots en general tienen pocas fuentes de ruido a diferencia de la silla de ruedas utilizada en este trabajo. El tiempo computacional más corto reportado en [60] es de aproximadamente $1.3ms$, y se presenta cuando es utilizado el EKF. En el mismo trabajo se reporta un tiempo de procesamiento de $287.3ms$ para una implementación de PF, el cual es 221 veces el tiempo de procesamiento utilizado por EKF en el mismo trabajo. Considerando estos resultados, el presente trabajo muestra una importante contribución ya que es posible localizar de manera precisa un sistema ruidoso, como es el caso de una silla de ruedas plegable, y aun así, mantener un tiempo de procesamiento del mismo orden de magnitud que el EKF sin estar limitado a condiciones de gaussianidad.

Además del CSPF, también se desarrolló una propuesta llamada filtrado con Partículas Aleatorias [61] que, a pesar de no cumplir los requerimientos para considerarse un método estocástico, el método arrojó resultados interesantes considerando que su implementación es sencilla y de bajo costo computacional.

Finalmente como parte de las conclusiones se describen nuevamente los aspectos innovadores del presente trabajo, así como fue ya descrito al final de la Introducción.

- Desarrollo de una función de observación que realiza un mapeo de las estimaciones basadas en odometría al espacio de cámara.
- Desarrollo de una estrategia de localización que no depende de la suposición de ruido con una distribución de probabilidades del tipo gaussiana.
- Adaptación del Filtro de Partículas para su uso en espacio del sensor (espacio de cámara) con una significativa mejora en tiempo de procesamiento.
- Validación y prueba experimental del sistema en ambientes controlados.

Los productos científicos obtenidos durante el periodo de formación doctoral se listan a continuación:

Título	Autores	Revista/evento	Estatus
Camera-Space-Particle Filter for the Robust and Precise Indoor Localization of a Wheelchair.	Raul Chavez-Romero, Antonio Cardenas, Mauro Maya, Davide Piovesan.	Journal of sensor en la edición especial de "Sensing and Intelligent Perception in Robotic Applications" (SIPR)	Aceptado.
Inexpensive Vision-Based System for the Direct Measurement of Ankle Stiffness during Quiet Standing.	Raul Chavez-Romero, Antonio Cardenas, Juan M. Rendon-Mancha, Karinna M. Vernaza, Davide Piovesan.	Journal of Medical Devices perteneciente al ASME.	En revisión.
Combining genetic algorithms and extended kalman filter to estimate ankle's muscle-tendon parameters	Enrique Coronado, Raul Chavez Romero, Antonio Cardenas, Davide Piovesan.	Proceedings of the ASME 2015 Dynamic Systems and Control Conference	En revisión
Experimental Validation of Vision-Based System for the Characterization of Human standing.	Raul Chavez-Romero, Antonio Cardenas, Mauro Maya, Karinna M. Vernaza, Davide Piovesan.	XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático (CLCA 2014)	Aceptado
Viscoelastic Properties of the Ankle During Quiet Standing via Raster Images and EKF.	Raul Chavez-Romero, Antonio Cardenas, Davide Piovesan.	IEEE Signal Processing in Medicine and Biology Symposium, (IEEE SPMB 2014)	Aceptado
Estimación de posición de una silla de ruedas utilizando EKF y Partículas Aleatorias a partir de visión.	Raul Chavez-Romero, Antonio Cardenas, Mauro Maya, Luis Gonzalez.	XV Congreso Latinoamericano de Control Automático (CLCA 2013)	Aceptado

Trabajo futuro

Es preciso mencionar que el proyecto aquí descrito se encuentra en una etapa inicial y que las vertientes que puede tomar son muchas y variadas. El que escribe propone como trabajo a futuro algunas de las siguientes acciones.

Realizar un estudio de sensibilidad y validación estadística para el sistema aquí presentado además de realizar experimentos con escenarios más complejos, donde se realicen rutas completas de ida y regreso.

Una línea importante que queda por ser estudiada es la implementación de más técnicas de filtrado ya que actualmente el problema de localización de robots móviles sigue siendo un problema de frontera.

Se propone también la combinación de diferentes filosofías de estimación que puedan generar nuevas estrategias de filtrado, por ejemplo, trabajos reportados recientemente combinan estrategias de cómputo suave con técnicas estocásticas.

La creación de una interface amigable para la instalación y uso del sistema de navegación. A esta interface puede integrarse el desarrollo de un sistema de

comunicación adecuado entre paciente y computadora que permita la selección de destinos deseados.

La implementación de un control basado en velocidad con planeación polinomial de ruta de tercero, cuarto o hasta quinto grado; que no requiera que el sistema se detenga en cada una de las marcas visuales para realizar la actualización de su posición. Esta propuesta de control basado en velocidad también puede ser implementada en la etapa de entrenamiento y lograr así facilitar esta etapa.

Se propone también el desarrollo de algoritmos para evasión de obstáculos fijos y móviles, ya sea por medio del sistema de visión o con un sistema adicional de sensores ultrasónicos o de otro tipo conveniente. Otro algoritmo que puede implementarse es uno de monitoreo para el funcionamiento interno del robot, actualmente existen reportados algunos trabajos donde en base a mediciones redundantes se logra monitorear la “salud” interna de un robot buscando prever fallas graves o logrando realizar una mejor estrategia de mantenimiento.

Se debe mejorar la instrumentación existente ya que existen fallas tales como filtraciones de aceite a los encoders. Además, se pueden instalar otros tipos de sensores como ultrasónicos, unidades de medición de inercia, acelerómetros, giroscopios, LIDARs, etc.

Una vez consolidado el sistema se hace necesaria la prueba del sistema con pacientes primero en entornos con condiciones altamente controladas y enseguida en condiciones reales.

Referencias

- [1] National Spinal Cord Injury Statistical Center, "The 2013 Annual Statistical Report for the Spinal Cord Injury Model," University of Alabama, Birmingham, Alabama., 2013.
- [2] Instituto Nacional de Estadística y Geografía, «Las personas con discapacidad en México : una visión al 2010,» INEGI, México, 2010.
- [3] I. Moon, M. Lee, J. Chu and M. Mun, "Wearable EMG-Based HCI for Electric-Powered Wheelchair Users with Motor Disabilities," in *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Barcelona, Spain, 2005.
- [4] C. . S. L. Tsui, P. Jia, J. Q. Gan, H. Hu and K. Yuan, "EMG-based Hands-Free Wheelchair Control with EOG," in *Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, Sanya, China, 2007.
- [5] S. ur Rehman, B. Raytchev, I. YODA and L. Liu, "Vibrotactile Rendering of Head Gestures for Controlling Electric Wheelchair," in *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, San Antonio, TX, USA, 2009.
- [6] A. Al-Haddad, R. Sudirman, C. Omar, K. Y. Hui and M. R. Jimin, "Wheelchair Motion Control Guide Using Eye Gaze and Blinks Based on PointBug," in *Third International Conference on Intelligent Systems Modelling and Simulation*, 2012.
- [7] S. Thrun, D. Foxy, W. Burgardz y F. Dellaert, «Robust Monte Carlo Localization for Mobile Robots,» *Artificial Intelligence*, pp. vol.128, no. 1-2, pp. 99–141,, 2001.
- [8] T. Fong, I. Nourbakhsh y K. Dautenhahn, «A survey of socially interactive robots,» *Robotics and Autonomous Systems*, nº 42, p. 143–166, 2003.
- [9] N. Oda y H. Shimizu, «Power Assist Control of Robotic Wheelchair Based on Visual Feedback,» *Electrical Engineering in Japan*, vol. 169, nº 2, pp. 41-47, 2009.
- [10] M. Y. P. A. Grasse R., «Assisted Navigation fo Persons with Reduced Mobility: Path Recognition Through Particle Filtering (Consensation Algorithm),» *Journal of Intelligente and Robotic Systems*, pp. 19-57, 2010.

- [11] G. Del Castillo, *Autonomous, Vision-Based, Pivoting Wheelchair With Obstacle. Tesis Doctoral*, Notre Dame: University of Notre Dame, 2004.
- [12] T. Röfer, «Routemark-based navigation of a wheelchair,» de *Proceedings of the 3rd ECPD International Conference on Advanced Robotics, Intelligent Automation and Active Systems.*, 1997.
- [13] G. Pires, R. Araujo, U. Nunes y A. T. de Almeida, «RobChair-a powered wheelchair using a behaviour-based navigation,» de *5th International Workshop on Advanced Motion Control, AMC '98-Coimbra., 1998*, 1998.
- [14] C. De La Cruz, W. Cardoso Celeste y T. Freire Bastos, «A robust navigation system for robotic wheelchairs,» *Control Engineering Practice*, vol. 19, p. 575–590, 2011.
- [15] X. Perrin, R. Chavarriaga, F. Colas, R. Siegwart y J. d. R. Millán, «Brain-coupled interaction for semi-autonomous navigation of an assistive robot.,» *Robotics and Autonomous Systems*, nº 58, pp. 1246-1255, 2010.
- [16] M. Pinto, H. Sobreira, A. P. Moreira, H. Mendonça y A. Matos, «Self-localisation of indoor mobile robots using multi-hypotheses and a matching algorithm,» *Mechatronics*, vol. 23, p. 727–737, 2013.
- [17] S. Levine, D. Bell, L. Jaros, R. Simpson, Y. Koren and J. Borenstein, "The NavChair Assistive Wheelchair Navigation System," *Rehabilitation Engineering*, pp. 443-451, V7, 1999.
- [18] Y. L. Ip, A. B. Rad, Y. K. Wong, Y. Liu y X. M. Ren, «A Localization Algorithm for Autonomous Mobile Robots via a Fuzzy Tuned Extended Kalman Filter.,» *Advanced Robotics*, nº 24, pp. 179-206, 2010.
- [19] C. Sprunk, G. D. Tipaldi, A. Cherubini and W. Burgard, "Lidar-based Teach-and-Repeat of Mobile Robot Trajectories," in *2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Tokyo, Japan, 2013.
- [20] A. Rusdinar, J. Kim y S. Kim, «Error Pose Correction of Mobile Robot for SLAM Problem using Laser Range Finder Based on Particle Filter,» de *International Conference on Control, Automation and Systems*, Gyeonggi-do, Korea, 2010.

- [21] H. M. La, R. S. Lim, B. B. Basily, N. Gucunski, J. Yi, A. Maher, F. A. Romero y H. Parvardeh, «Mechatronic Systems Design for an Autonomous Robotic System for High-Efficiency Bridge Deck Inspection and Evaluation,» *IEEE/ASME TRANSACTIONS ON MECHATRONICS*, vol. 18, nº 6, pp. 1655-1664, 2013.
- [22] S. A. Hiremath, G. W. van der Heijden, F. K. van Evert, A. Stein y C. J. t. Braak, «Laser range finder model for autonomous navigation of a robot in a maize field using a particle filter,» *Computers and Electronics in Agriculture*, nº 100, pp. 41-50, 2014.
- [23] G. Del Castillo, S. Skaar, A. Cárdenas and L. Fehr, "A Sonar Approach to Obstacle Detection for a Vision-Based Autonomous Wheelchair," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 54, pp. 967-981, 2006.
- [24] M.-H. Li, B.-R. Hong, Z.-S. Cai, S.-H. Piao y Q.-C. Huang, «Novel indoor mobile robot navigation using monocular vision,» *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 21, pp. 485-497, 2007.
- [25] B. Romero, A. Camacho, J. Varona, C. Delgado y R. Velázquez, «A Low-Cost Electric Power Wheelchair with Manual and Vision-Based Control Systems,» de *IEEE AFRICON 2009*, Nairobi, Kenya, 2009.
- [26] Z. Jia, A. Balasuriya y S. Challa, «Vision based data fusion for autonomous vehicles target tracking using interacting multiple dynamic models.,» *Computer Vision and Image Understanding*, nº 109, pp. 1-21, 2008.
- [27] Y.-H. Wu, B.-Y. Lu, H.-Y. Chen, Y. Ou-Yang, J.-s. Lai, T.-S. Kuo y F.-C. Chong, «The Development of M3S-Based GPS Navchair and Tele-Monitor System,» de *Proceedings of the 2005 IEEE, Engineering in Medicine and Biology 27th Annual Conference*, Shanghai, China, 2005.
- [28] F. Aghili y A. Salerno, «Driftless 3-D Attitude Determination and Positioning of Mobile Robots By Integration of IMU With Two RTK GPSs,» *IEEE/ASME TRANSACTIONS ON MECHATRONICS*, vol. 18, nº 1, pp. 21-31, 2013.
- [29] N. Gordon, D. Salmond y A. Smith, «Novel approach to nolineal/no-gaussian Bayesian state stimation,» *Radar and Signal Processing*, vol. 140, nº 2, pp. pp. 107–113,, April 1993.

- [30] S. M. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon and T. Clapp, "A Tutorial on Particle Filters for On-line Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian Tracking," *IEEE Transactions on Signal Processing*, pp. 174-188, 2002.
- [31] E. T. Baumgartner, *An Autonomous Vision-Based Mobile Robot. PhD Thesis*, Notre Dame: University of Notre Dame, 1992.
- [32] J. A. Cardenas Galindo, *A vision-guidance strategy to control hybrid holonomic/nonholonomic robots. PhD Dissertation*, Notre Dame: University of Notre Dame, 2003.
- [33] K. Jung, J. Kim, J. Kim, E. Jung y S. Kim, «Positioning accuracy improvement of laser navigation using UKF and FIS.,» *Robotics and Autonomous Systems*, n° 62, pp. 1241-1247, 2014.
- [34] M. Y. P. A. Grasse R., "Assisted Navigation for Persons with Reduced Mobility: Path Recognition Through Particle Filtering (Condensation Algorithm)," *Journal of Intelligente and Robotic Systems*, pp. 19-57, 2010.
- [35] C. Pozna, R.-E. Precup y P. Földesi, «A novel pose estimation algorithm for robotic navigation.,» *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 63, n° 1, pp. 10-21, 2015.
- [36] G. Del Castillo, S. B. Skaar and L. Fehr, "Extending Teach and Repeat to Pivoting Wheelchairs," *Systemics, cybernetics and informatics*, vol. 1, no. 1, pp. 55-62, 2003.
- [37] World Health Organization, «World report on disability,» WHO, Ginebra, 2011.
- [38] The Lancet Global Health, «Global Burden of Disease Study 2010,» Elsevier, 2012.
- [39] Z. Chen, «Bayesian Filtering: From Kalman Filters to Particle Filters, and Beyond,» McMaster University, Canada, 2003.
- [40] R. E. Walpole, R. H. Myers, S. L. Myers y K. Ye, «Probability & Statistics for Engineers & Scientists,» Pearson, Macmillan, New York, 2007.
- [41] A. J. Haug, *Bayesian Estimation and Tracking*, Hoboken, New Jersey: John Wiley &

Sons, 2012.

- [42] J. . L. Crassidis and J. . L. Junkins, *Optimal Estimation of Dynamic Systems*, New York: CRC Press, 2012.
- [43] D. Simon, *Optimal State Estimation, Kalman, H_∞, and Nonlinear Approaches*, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 2006.
- [44] J. Humpherys, P. Redd y J. West, «A Fresh Look at the Kalman Filter,» *Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 54, n^o 4, pp. 801-823, 2012.
- [45] S. G. Tzafestas, *Introduction to Mobile*, Athens, Greece: Elsevier Inc., 2014.
- [46] T. Bräunl, *Embedded robotics mobile robot design and applications with embedded systems 3rd Edition*, Crawley, Perth, Australia: Springer, 2008.
- [47] R. C. González y R. E. Woods, *Digital Image Processing, Second Edition*, Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2002.
- [48] G. Dudek y M. Jenkin, *Computacional Principles of Mobiles Robotics, Second Edition*, New York: Cambridge University Press, 2010.
- [49] R. Hartley y A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision. Second Edition*, New York: Cambridge University Press, 2004.
- [50] M. Seelinger, J.-D. Yoder, E. T. Baumgartner y S. B. Skaar, «High-Precision Visual Control of Mobile Manipulators,» *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS AND AUTOMATION*, vol. 18, n^o 6, pp. 957-965, 6 December 2002.
- [51] M. Montemerlo, *FastSLAM: A Factored Solution to the Simultaneous Localization and Mapping Problem with Unknown Data Association. Tesis Doctoral*, Pittsburgh, PA: Carnegie Mellon University, 2003.
- [52] G. Cook, *Mobile robots. Navigation, Control and Remote Sensing*, Hoboken, New Jersey: IEEE & A JOHN WILEY & SONS, INC., 2011.

- [53] S. Florczyk, Robot Vision, Video-based Indoor Exploration with Autonomous and Mobile Robots, Weinheim: WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2005.
- [54] R. Siegwart y I. R. Nourbakhsh, Introduction to Autonomous Mobile Robots, Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 2004.
- [55] A. Cárdenas, B. Goodwine, S. Skaar y M. Seelinger, *Vision-Based Control of a Mobile Base and On-Board Arm*, vol. 22, SAGE Journals Online and HighWire Press platforms, 2003, pp. 677-698.
- [56] Q. Ma, A. Cárdenas, W. Goodwine y S. B. Skaar, «Supervisory Control of a Mobile Robot Using Point-and-Click,» de *Proceeding of World Multiconference on Systemics, Cybernetics*, 2000.
- [57] Q. Ma, *Supervisory control of a mobile robot using point-and-click mobile. Tesis de Maestría*, Notre Dame, IN: University of Notre Dame, 2000.
- [58] S. Zhang, M. Simkani y M. H. Zadeh, «Automatic Vehicle Parallel Parking Design Using Fifth Degree Polynomial Path Planning,» *Vehicular Technology Conference (VTC Fall), 2011 IEEE*, pp. 1-4, 5-8 September 2011.
- [59] D. Simon, Optimal State Estimation, Kalman, H_∞ and Nonlinear Approaches, New Jersey: Wiley Interscience, 2006.
- [60] J. L. Peralta-Cabezas, M. Torres-Torriti y M. Guarini-Hermann, «A comparison of Bayesian prediction techniques for mobile robot trajectory tracking,» *Robotica*, vol. 26, nº 05, pp. 571-585, 2008.
- [61] R. Chavez, A. Cardenas, M. E. Maya y L. González Murillo, «Estimación de posición de una silla de ruedas utilizando EKF y Partículas Aleatorias a partir de visión.,» de *Congreso Nacional de Control Automático de la AMCA*, Ensenada, BC, México, 2013.

Anexos

Anexo A: Generales de probabilidad

En este trabajo, valores como mediciones de los sensores, controles así como los estados de un robot y su entorno han sido asumidos y modelados como variables aleatorias. Las variables aleatorias pueden tomar múltiples valores acorde a ciertas leyes probabilísticas. Una inferencia probabilística es el proceso de calcular estas leyes para que variables aleatorias puedan ser obtenidas de otras variables aleatorias, tal como es el caso del modelado de datos a partir de uno o varios sensores.

Sea X una variable aleatoria y x un evento específico que pueda ocurrir en X . Un ejemplo común de una variable aleatoria es el lanzamiento de una moneda, donde X puede tomar el valor de cara o cruz. Si el espacio de todos los valores que X puede tomar es discreto, como en este caso del lanzamiento de la moneda, entonces se escribe:

$$p(X = x) \tag{A.1}$$

Para denotar la probabilidad de que la variable aleatoria X tiene el valor x . Por ejemplo, una moneda sin trampa se caracteriza por $p(X = cara) = p(X = cruz) = \frac{1}{2}$. Las probabilidades discretas suman hasta uno, esto es

$$\sum_x p(X = x) = 1 \tag{A.2}$$

además, las probabilidades son siempre no-negativas, esto es, $p(X = x) \geq 0$. Para simplificar la notación siempre que es posible se omite la mención explícita de la variable aleatoria por lo que se escribe $p(x)$ en lugar de $p(X = x)$.

En este trabajo, también son utilizados espacios continuos. Los espacios continuos son caracterizados por variables aleatorias que pueden tomar valores continuos. En este trabajo se asume que todas las variables aleatorias continuas poseen funciones de densidad de probabilidades (PDFs, por sus siglas en inglés). Un ejemplo común de función de densidad es la *distribución normal* en una dimensión con media μ y varianza σ^2 . Esta distribución es dada por la siguiente función Gaussiana:

$$p(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right\} \tag{A.3}$$

Distribuciones Normales son abreviadas frecuentemente como $\mathcal{N}(x; \mu, \sigma)$, donde se especifica la variable aleatoria, su media y su varianza.

La distribución Normal (A.3) asume que x es un escalar. En ocasiones, x será un vector multidimensional. Distribuciones normales sobre vectores son llamadas *multivariantes*. Una distribución Normal multivariante está caracterizada por la siguiente ecuación:

$$p(x) = \det(2\pi\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)\right\} \quad (\text{A.4})$$

Aquí μ es el vector promedio y Σ una matriz simétrica positiva semidefinida llamada matriz de covarianza. El superíndice T indica la transpuesta de un vector. Las expresiones (A.3) y (A.4) son equivalentes si x es un escalar.

La integral de una función de distribución continua siempre es uno:

$$\int p(x) dx = 1 \quad (\text{A.5})$$

A lo largo de este texto se usan de manera intercambiable los términos *probabilidad*, *densidad de probabilidad* y *función de densidad de probabilidad*. También se asume que todas las variables aleatorias continuas son medibles y que todas las distribuciones continuas poseen densidades.

La *distribución conjunta* de dos variables aleatorias X y Y esta dada por:

$$p(x, y) = p(X = x \text{ y } Y = y) \quad (\text{A.6})$$

esta expresión describe la probabilidad de que en un evento la variable aleatoria X tome el valor x y que Y tome el valor y . Si X y Y son independientes, se tiene que:

$$p(x, y) = p(x)p(y) \quad (\text{A.7})$$

En ocasiones, variables aleatorias contienen información sobre otras variables aleatorias. Es decir, suponiendo que se sabe que el valor de Y es y , y a partir de esto se pretendiera conocer la probabilidad de que el valor de X es x bajo aquella condición. Esa probabilidad se denota como:

$$p(x|y) = p(X = x | Y = y) \quad (\text{A.8})$$

Y es llamada probabilidad *condicional*. Si $p(y) > 0$, entonces la probabilidad condicional se define como:

$$p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)} \quad (\text{A.9})$$

Si X y Y son independientes, se tiene

$$p(x|y) = \frac{p(x)p(y)}{p(y)} = p(x) \quad (\text{A.10})$$

Lo que esto dice es, que si X y Y son independientes, Y no puede decir nada sobre el valor de X . No hay ventaja de conocer Y si lo que interesa es conocer X . Independencia y su generalización conocida como independencia condicional, juega un rol importante en los algoritmos propuestos en este trabajo.

Un hecho interesante, el cual viene de la definición de probabilidad condicional y de los axiomas de mediciones de probabilidad, regularmente conocido como *teorema de probabilidad total*:

$$p(x) = \sum_y p(x|y) p(y) \quad (\text{caso discreto}) \quad (\text{A.11})$$

$$p(x) = \int p(x|y)p(y)dy \quad (\text{caso continuo}) \quad (\text{A.12})$$

Si $p(x|y)$ o $p(y)$ son cero, se define el producto de $p(x|y)p(y)$ como cero, independientemente del valor del factor acompañante.

Igualmente importante es la *Regla de Bayes*, en la cual se relacionan condicionales del tipo $p(x|y)$ con sus "inversas" $p(y|x)$. La regla, según se describe a continuación, requiere que $p(y) > 0$:

$$p(x|y) = \frac{p(y|x) p(x)}{p(y)} = \frac{p(y|x) p(x)}{\sum_{x'} p(y|x')p(x')} \quad (\text{caso discreto}) \quad (\text{A.13})$$

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} = \frac{p(y|x) p(x)}{\int p(y|x')p(x')dx'} \quad (\text{caso continuo}) \quad (\text{A.14})$$

La regla de Bayes juega un rol predominante en robótica probabilística. Si x es una cantidad que se busca inferir desde y , la probabilidad $p(x)$ será referida como la *distribución de probabilidades a priori* y y será llamada el dato (e.g. la medición

de un sensor). La distribución de $p(x)$ resume el conocimiento que se tiene respecto de X antes de incorporar el dato y . La probabilidad $p(x|y)$ es llamada la *distribución de probabilidad posterior* sobre X . Como se sugiere en (A.14), la regla de Bayes es una forma conveniente de calcular la probabilidad posterior $p(x|y)$ usando la probabilidad condicional “inversa” $p(y|x)$ junto con la probabilidad a priori $p(x)$. En otras palabras, si se está interesado en inferir una cantidad x usando un dato y de un sensor, la regla de Bayes permite hacerlo mediante la probabilidad inversa, la cual especifica la probabilidad de un dato y asumiendo que ocurre x . En robótica, esta probabilidad inversa es usualmente denominada como “modelo generativo”, ya que éste describe a cierto nivel de abstracción, como la variable de estado X origina Y mediciones de un sensor.

La *esperanza matemática* o simplemente *esperanza* de una variable aleatoria X está dada por

$$E\{X\} = \sum_x x p(x) \tag{A.15}$$

$$E\{X\} = \int x p(x) dx$$

No todas las variables aleatorias poseen esperanzas finitas; sin embargo, aquellas donde no, no son de relevancia para los desarrollos propuestos en este trabajo. La esperanza es una función lineal de una variable aleatoria. En particular, se tiene

$$E\{aX + b\} = aE\{X\} + b \tag{A.16}$$

para valores arbitrarios de a y b . La covarianza de X se obtiene como sigue

$$cov\{X\} = E\{X - E\{X\}\}^2 = E\{X^2\} - E\{X\}^2 = E\{XX^T\} \tag{A.17}$$

La covarianza mide la desviación cuadrática esperada de la media. Según se plantea arriba, el promedio de una distribución normal multivariada $\mathcal{N}(x; \mu, \Sigma)$ es μ y su covarianza es Σ .

Se hace notar, que es perfectamente válido el condicionar cualquiera de las reglas discutidas hasta ahora en base a otras variables aleatorias, como podría ser Z . Por ejemplo, condicionar la regla de Bayes en $Z = z$ da:

$$p(x|y, z) = \frac{p(y|x, z)p(x|z)}{p(y|z)} \tag{A.18}$$

Similarmente, es posible condicionar la regla para combinar probabilidades de variables aleatorias independientes (A.7) sobre otras variables z :

$$p(x, y|z) = p(x|z) p(y|z) \quad (\text{A.19})$$

Esta relación es conocida como *independencia condicional*. Se puede verificar que (A.19) es equivalente a

$$\begin{aligned} p(x|z) &= p(x|z, y) \\ p(y|z) &= p(y|z, x) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

La independencia condicional juega un rol importante en robótica probabilística. Ésta se aplica siempre que una variable y no posee información a cerca de una variable x si otro valor de una variable z es conocido. La independencia condicional no implica independencia (absoluta), esto es,

$$p(x, y|z) = p(x|z) p(y|z) \not\Rightarrow p(x, y) = p(x) p(y) \quad (\text{A.21})$$

Lo inverso, tampoco es verdad en general: independencia absoluta no implica independencia condicional:

$$p(x, y) = p(x) p(y) \not\Rightarrow p(x, y|z) = p(x|z) p(y|z) \quad (\text{A.22})$$

En casos especiales, sin embargo, la independencia condicional y absoluta pueden coincidir.

Anexo B: Sistemas dinámicos lineales homogéneos

Considere la siguiente ecuación diferencial en forma de matriz homogénea

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) \text{ conocida} \quad (\text{B.1})$$

El enfoque estándar para resolver ecuaciones de la forma (B.1) es por medio de la determinación de la matriz “fundamental” o matriz de “transición de estado” $\Phi(t, t_0)$, la cual “mapea” el estado inicial dentro del estado actual como

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) \quad (\text{B.2})$$

Antes de desarrollar medios para determinar $\Phi(t, t_0)$, tres importantes propiedades de la matriz de transición que se pueden seguir por inspección de la ecuación (B.2) se declaran

$$\Phi(t_0, t_0) = I \quad (\text{B.3})$$

$$\Phi(t_0, t) = \Phi^{-1}(t, t_0) \quad (\text{B.4})$$

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) \quad (\text{B.5})$$

Una ecuación diferencial para determinar $\Phi(t, t_0)$ se puede desarrollar al sustituir la ecuación (B.2) dentro de la parte derecha de la ecuación (B.1) y la derivada de la ecuación (B.2) dentro del lado izquierdo de la ecuación (B.1) para obtener

$$\dot{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) = F(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) \quad (\text{B.6})$$

Con lo que se concluye que la matriz de transición satisface la ecuación diferencial

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = F(t)\Phi(t, t_0) \quad (\text{B.7})$$

siendo la matriz identidad la condición inicial por medio de la ecuación (B.3). Sólo bajo circunstancias ideales una solución analítica práctica de la ecuación (B.7) puede ser obtenida; de otra manera, técnicas numéricas deben emplearse para calcular $\Phi(t, t_0)$. A continuación se considera un enfoque estándar para la obtención de la mencionada matriz.

Se reescribe la ecuación (B.7) en forma integral como

$$\Phi(t, t_0) = I + \int_{t_0}^t F(\tau_1)\Phi(\tau_1, t_0)d\tau_1 \quad (\text{B.8})$$

La cual es la “matriz de la ecuación integral de Volterra”. Ahora bien, es posible sustituir $\Phi(\tau_1, t_0)$ de la ecuación (B.8) por la siguiente expresión

$$\Phi(\tau_1, t_0) = I + \int_{t_0}^{\tau_1} F(\tau_2) \Phi(\tau_2, t_0) d\tau_2 \quad (\text{B.9})$$

Para obtener

$$\Phi(t, t_0) = I + \int_{t_0}^t F(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_0}^t F(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} F(\tau_2) \Phi(\tau_2, t_0) d\tau_2 d\tau_1 \quad (\text{B.10})$$

similarmente es posible utilizar la ecuación (B.8) para escribir

$$\Phi(\tau_2, t_0) = I + \int_{t_0}^{\tau_2} F(\tau_3) \Phi(\tau_3, t_0) d\tau_3 \quad (\text{B.11})$$

Lo que al ser sustituida en la ecuación (B.10) da

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) = & I + \int_{t_0}^t F(\tau_1) d\tau_1 \\ & + \int_{t_0}^t F(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} F(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \\ & + \int_{t_0}^t F(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} F(\tau_2) \int_{t_0}^{\tau_2} F(\tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 \\ & + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Este procedimiento es conocido como el Método de Peano-Baker, en el cual se garantiza una absoluta y uniforme convergencia. El que este método sea práctico o no, depende en de la dificultad para integrar los elementos de $F(t)$ y de que tan rápido la convergencia ocurra.

Considerando un importante caso especial en el cual F es igual a una matriz constante; F puede ser extraída de todas las integrales de la ecuación (B.12), y así encontrar que

$$\Phi(t, t_0) = I + F(t - t_0) + \frac{1}{2!} F^2(t - t_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} F^n(t - t_0)^n + \dots \quad (\text{B.13})$$

La cual puede ser reconocida como la serie de e^x con la matriz $F(t - t_0)$ como argumento. La cual, para efectos de abreviatura la ecuación (B.13) regularmente se escribe como

$$\Phi(t, t_0) = e^{F(t-t_0)} \quad (\text{B.14})$$

Regresando a la ecuación (B.2), se puede ver que la solución para cuando F es una matriz constante es

$$\mathbf{x}(t) = e^{F(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) \quad (\text{B.15})$$

En el caso de que el sistema ahora sea una ecuación diferencial no-homogénea de múltiples entradas con la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) \quad (\text{B.16})$$

utilizando el método de Lagrange de *variación de parámetros*, se puede asumir una solución de la ecuación (B.16) que tenga la siguiente forma:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{g}(t), \quad \mathbf{g}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) \quad (\text{B.17})$$

donde $\mathbf{g}(t)$ es un vector de funciones desconocidas de $n \times 1$ y $\Phi(t, t_0)$ es la matriz de transición homogénea. Diferenciando la ecuación (B.17) se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t, t_0)\dot{\mathbf{g}}(t) + \dot{\Phi}(t, t_0)\mathbf{g}(t) \quad (\text{B.18})$$

la cual al sustituir la ecuación (B.6) por $\dot{\Phi}(t, t_0)$, se transforma en

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t, t_0)\dot{\mathbf{g}}(t) + F(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{g}(t) \quad (\text{B.19})$$

sustituyendo la ecuación (B.17) y ecuación (B.19) en ecuación (B.16) se tiene que

$$\Phi(t, t_0)\dot{\mathbf{g}}(t) + F(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{g}(t) = F(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{g}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) \quad (\text{B.20})$$

por lo tanto,

$$\dot{\mathbf{g}}(t) = \Phi^{-1}(t, t_0)B(t)\mathbf{u}(t) \quad (\text{B.21})$$

El cual se integra para obtener [notando que $\mathbf{g}(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$]

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (\text{B.22})$$

por lo tanto, la solución general de la ecuación (B.16) es

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (\text{B.23})$$

Aplicando la ecuación (B.4) permite escribir el integrando de la siguiente forma

$$\Phi^{-1}(\tau, t_0) = \Phi(t_0, \tau) \quad (\text{B.24})$$

Utilizando la ecuación (B.5) da

$$\Phi^{-1}(\tau, t_0) = \Phi(t_0, t)\Phi(t, \tau) \quad (\text{B.25})$$

o bien

$$\Phi^{-1}(\tau, t_0) = \Phi^{-1}(t, t_0)\Phi(t, \tau) \quad (\text{B.26})$$

Lo cual, al ser sustituido en la ecuación (B.23), da como resultado

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (\text{B.27})$$

Que es la forma final de la solución de la ecuación (B.16) para $F(t)$, $B(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ arbitrarios. La ecuación (B.27) típicamente debe resolverse de manera numérica.

Anexo C: Ecuaciones del Filtro de Kalman Extendido

En este apéndice se presenta varias de las ecuaciones del Filtro de Kalman Extendido (EKF) específicas para la aplicación de un robot móvil de transmisión diferencial. La implementación del EKF realizada para la silla de ruedas se presenta en el 2.6. La ecuación de la propagación del estado (0) está dada por

$$\frac{d\hat{\mathbf{X}}(\alpha)}{d\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{d\hat{X}}{d\alpha} \\ \frac{d\hat{Y}}{d\alpha} \\ \frac{d\hat{\varphi}}{d\alpha} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{X}}(\alpha), \mathbf{U}(\alpha)) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{s}(a \cos \varphi - b \sin \varphi)u + R \cos \varphi \\ \frac{R}{s}(a \sin \varphi - b \cos \varphi)u + R \sin \varphi \\ \frac{R}{s}u \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

donde R , a , b y s están definidas en el Capítulo 2. Ya que las ecuaciones anteriores para un vehículo son funciones solamente de φ , la linealización de la matriz A es determinada por la ecuación (1.57) y está dada por

$$A = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_{13} \\ 0 & 0 & f_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

donde

$$f_{13} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} \quad (\text{C.3})$$

$$f_{23} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} \quad (\text{C.4})$$

donde f_1 y f_2 están dadas en la ecuación (C.1). Para simplificar la notación se asume que f_{13} y f_{23} son funciones de la estimación de estado y de la variable de control. Por lo tanto, la matriz de covarianza del error de estimación $P = P(\alpha)$, según lo descrito en la ecuación (1.59) lleva a las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{dP_{11}}{d\alpha} = 2f_{13}P_{13} + Q_{11} \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{dP_{12}}{d\alpha} = f_{13}P_{23} + f_{23}P_{13} + Q_{12} \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{dP_{13}}{d\alpha} = f_{13}P_{33} + Q_{13} \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{dP_{22}}{d\alpha} = 2f_{23}P_{23} + Q_{22} \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{dP_{23}}{d\alpha} = f_{23}P_{33} + Q_{23} \quad (\text{C.9})$$

$$\frac{dP_{33}}{d\alpha} = Q_{33} \quad (\text{C.10})$$

donde P_{ij} son los elementos de la matrix de covarianza del error de estimación y donde Q_{ij} son los elementos de la matrix de covarianza del ruido del proceso para $i = 1,2,3$ y $j = 1,2,3$. Ya que P y Q son matrices simétricas, solo seis elementos de los nueve elementos de la dos matrices son únicos. Recordando que estas ecuaciones diferenciales junto con las ecuaciones de estado son integradas numéricamente por medio de las mediciones de la variable independiente α y la variable de control u conforme el vehículo se mueve en su entorno.

Cuando una sola marca es detectada en una imagen la cual es adquirida en la k -ésima medición con un valor de α dado, la matrix de la estimación de estado y la estimación de la covarianza del error puede actualizarse utilizando información obtenida de la medición visual. Para estas actualizaciones, la linealización de la ecuación de observación dada en (2.62), se calcula con

$$H = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} = [h_1 \quad h_2 \quad h_3] \quad (\text{C.11})$$

donde

$$h_1 = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial X} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} \quad (\text{C.12})$$

$$h_2 = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial Y} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} \quad (\text{C.13})$$

$$h_3 = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \varphi} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} \quad (\text{C.14})$$

Recordando que la ecuación de observación está definida por un vector \mathbf{h} de un solo elemento y está definida como

$$\mathbf{h} = \left[-C_1 \frac{(X_q - X_p)\cos(\varphi + C_4) + (Y_q - Y_p)\sin(\varphi + C_4) - C_3 \sin[2(\varphi + C_4)] - C_2}{(X_q - X_p)\sin(\varphi + C_4) - (Y_q - Y_p)\cos(\varphi + C_4) + C_3 \cos[2(\varphi + C_4)]} \right] \quad (\text{C.15})$$

Donde las constantes de calibración C_1 a C_4 están definidas en el CAPÍTULO 2:. De igual manera, para simplificar notación h_1 , h_2 y h_3 se asumen como funciones de la estimación de estado. Ahora, la matriz de ganancias de Kalman, $K = [K_1 \ K_2 \ K_3]^T$ de la ecuación (1.64) de la cual se obtiene que

$$K_1 = \frac{h_1 P_{11} + h_2 P_{12} + h_3 P_{13}}{HPH^T + R} \quad (\text{C.16})$$

$$K_2 = \frac{h_1 P_{12} + h_2 P_{22} + h_3 P_{23}}{HPH^T + R} \quad (\text{C.17})$$

$$K_3 = \frac{h_1 P_{13} + h_2 P_{23} + h_3 P_{33}}{HPH^T + R} \quad (\text{C.18})$$

donde

$$HPH^T + R = h_1[h_1 P_{11} + h_2 P_{12} + h_3 P_{13}] + h_2[h_1 P_{12} + h_2 P_{22} + h_3 P_{23}] + h_3[h_1 P_{13} + h_2 P_{23} + h_3 P_{33}] + R \quad (\text{C.19})$$

donde P es la propagación de la matriz de covarianza del error de estimación al momento de la medición k , y R es la matriz de covarianza del ruido de la medición, la cual, tiene un solo elemento para esta aplicación.

La actualización de la matriz de covarianza del error de estimación está dada por la ecuación (1.64) y para esta aplicación se define como

$$P_{11}^+ = P_{11}^- - K_1[h_1 P_{11}^- + h_2 P_{12}^- + h_3 P_{13}^-] \quad (\text{C.20})$$

$$P_{12}^+ = P_{12}^- - K_1[h_1 P_{12}^- + h_2 P_{22}^- + h_3 P_{23}^-] \quad (\text{C.21})$$

$$P_{13}^+ = P_{13}^- - K_1[h_1 P_{13}^- + h_2 P_{23}^- + h_3 P_{33}^-] \quad (\text{C.22})$$

$$P_{22}^+ = P_{22}^- - K_2[h_1 P_{12}^- + h_2 P_{22}^- + h_3 P_{23}^-] \quad (\text{C.23})$$

$$P_{23}^+ = P_{23}^- - K_2[h_1 P_{13}^- + h_2 P_{23}^- + h_3 P_{33}^-] \quad (\text{C.24})$$

$$P_{33}^+ = P_{33}^- - K_3[h_1 P_{13}^- + h_2 P_{23}^- + h_3 P_{33}^-] \quad (\text{C.25})$$

donde P_k^+ representa la matriz de covarianza del error de estimación en un instante k considerando la medición k . Además P_k^- es la matriz de covarianza del error obtenida a partir de la integración odométrica hasta antes de considerar la k -

ésima medición. La actualización de la estimación de estado en el instante k dada la observación en ese instante k esta dada por

$$\hat{X}_k^+ = \hat{X}_k^- + K_1[\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k] \quad (\text{C.26})$$

$$\hat{Y}_k^+ = \hat{Y}_k^- + K_2[\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k] \quad (\text{C.27})$$

$$\hat{\phi}_k^+ = \hat{\phi}_k^- + K_3[\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k] \quad (\text{C.28})$$

donde \mathbf{z}_k representa la posición horizontal del centro de la marca observada en el plano de imagen en la observación k , en tanto que \mathbf{h}_k la predicción de la posición horizontal de la marca observada en el plano de imagen al momento de la k medición, siendo ambas vectores de un solo elemento.