



Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Facultad de Ingeniería
Centro de Investigación y Estudios de Posgrado

Control de vehículos aéreos multirrotores

T E S I S

Que para obtener el grado de:

Doctor en Ingeniería Eléctrica

Presenta:

M. I. José Carmen López Hernández

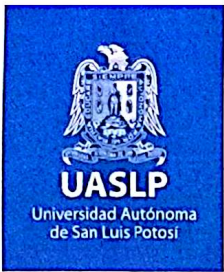
Asesor:

Dr. César Fernando Francisco Méndez Barrios



San Luis Potosí, S. L. P.

Febrero de 2026



FACULTAD DE
INGENIERÍA

20 de noviembre de 2025

**M.I. JOSÉ CARMEN LÓPEZ HERNÁNDEZ
P R E S E N T E.**

En atención a su solicitud de Temario, presentada por el **Dr. César Fernando Francisco Méndez Barrios**, Asesor de la Tesis que desarrollará Usted con el objeto de obtener el Grado de **Doctor en Ingeniería Eléctrica**, me es grato comunicarle que en la sesión del H. Consejo Técnico Consultivo celebrada el día 20 de noviembre del presente año, fue aprobado el Temario propuesto:

TEMARIO:

"Control de Vehículos Aéreos Multirotores"

Introducción.

1. Fundamentos de Modelado de Robots Aéreos.
2. Fundamentos de Sistemas Dinámicos.
3. Diseño de Controladores con Garantía Exponencial.
4. Resultados Numéricos y Experimentales.

Conclusiones

Referencias

"MODOS ET CUNCTARUM RERUM MENSURAS AUDEBO"

A T E N T A M E N T E

**DR. EMILIO JORGE GONZÁLEZ GALVÁN
DIRECTOR**



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE SAN LUIS POTOSÍ
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIRECCIÓN

www.uaslp.mx

ccp. Archivo.
-bvlg

Av. Manuel Nava 8
Zona Universitaria • CP 78290
San Luis Potosí, S.L.P.
tel. (444) 826 2330 al39
fax (444) 826 2336

"1945-2025: 80 años formando profesionales de la Ingeniería en beneficio de la sociedad"



UASLP
Universidad Autónoma
de San Luis Potosí



FACULTAD DE
INGENIERÍA



CENTRO DE
**INVESTIGACIÓN
Y ESTUDIOS
DE POSGRADO**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ
FACULTAD DE INGENIERÍA
Área de Investigación y Estudios de Posgrado

DECLARACIÓN

El presente trabajo que lleva por título:

Control de vehículos aéreos multirrotores

se realizó en el periodo septiembre de 2015 a febrero de 2026 bajo la dirección del Dr. Cesar Fernando Francisco Méndez Barrios.

Originalidad

Por este medio aseguro que he realizado el trabajo reportado, y la escritura de este documento de tesis para fines académicos sin ayuda indebida de terceros y sin utilizar otros medios más que los indicados.

Las referencias e información tomadas directa o indirectamente de otras fuentes se han definido en el texto como tales y se ha dado el debido crédito a las mismas.

El autor exime a la UASLP de las opiniones vertidas en este trabajo escrito y asume la responsabilidad total del mismo.

Este trabajo no ha sido sometido como tesis o trabajo terminal a ninguna otra institución nacional o internacional en forma parcial o total, exceptuando el caso cuando existe un convenio específico de doble titulación celebrado entre ambas instituciones.

Se autoriza a la UASLP para que divulgue este documento para fines académicos.

El autor del trabajo escrito, José Carmen López Hernández

Agradecimientos

A mi madre, Leonor, por darme la vida, su tiempo y su paciencia. Gracias por darme la mejor infancia que pude haber tenido pese a las adversidades. Gracias por nunca rendirte y por ser fuente de inspiración a lo largo de mi vida.

A mi esposa, Paulina, por estar conmigo en esta última etapa de mi trabajo. Gracias por el apoyo y la paciencia. Sin ti este trabajo no hubiera sido posible, te amo.

A mi director de tesis, Dr. César Fernando Francisco Méndez Barrios, por todo el tiempo brindado en el desarrollo de este trabajo. Gracias por facilitarme todos los recursos necesarios para la elaboración del mismo.

A los miembros del comité tutorial y del jurado de esta tesis, Dr. Emilio Jorge González Galván, Dr. Miguel, Dr. Miguel Ángel Lastras Montaña, Dr. Juan Antonio Cárdenas Galindo, Dr. Adrian Josue Guel Cortez y Dra. Elvia Ruth Palacios Hernández, quienes han seguido el presente trabajo de tesis y lo han enriquecido a través de sus observaciones y sugerencias.

Agradezco a la Facultad de Ingeniería y el Centro de Investigación y Estudios de Posgrado de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí por brindarme el espacio académico y los recursos necesarios para llevar a cabo este doctorado. Asimismo, reconozco el apoyo financiero otorgado por CONACYT, el cual fue esencial para la realización de esta investigación.

Finalmente, agradezco a todas aquellas personas que, de manera directa o indirecta, contribuyeron a la culminación de este trabajo: coordinadores, profesores, secretarías y compañeros del posgrado.

Índice general

Nomenclatura	13
1. Introducción	17
1.1. Aeronaves: definición y clasificación	18
1.2. Vehículos aéreos no tripulados (UAV)	19
1.2.1. Evolución hacia los multirrotores	19
1.3. Multirrotores	20
1.3.1. Principio de Operación	20
1.3.2. Estado del arte	23
1.4. Planteamiento del problema	24
1.4.1. Justificación	25
1.5. Objetivo	26
1.5.1. Objetivos específicos	26
1.6. Organización del documento	27
1.7. Contribuciones Principales	28
1.8. Productos académicos obtenidos	29
2. Fundamentos de modelado de robots aéreos	31
2.1. Cinemática del sólido rígido	31
2.1.1. Parametrización de la orientación	33
2.1.2. Cinemática Diferencial	36
2.2. Dinámica de los vehículos aéreos	38
2.2.1. Dinámica traslacional	38
2.2.2. Dinámica rotacional	39
2.2.3. Sistema de ecuaciones	40
2.3. Modelado de vehículos aéreos multirrotores	41
2.3.1. Dinámica del sistema de rotores	41
2.3.2. Configuración de rotores reorientables	42
2.3.3. Fuerzas y momentos en el multirrotor	43
2.4. Configuraciones de multirrotores	48
2.4.1. Configuración de rotores fijos	49
2.4.2. Configuración de rotores con un grado de libertad	55
2.5. Modelado de retardos en plataformas multirrotor	57
2.5.1. Retardos de medición	57
2.5.2. Dinámica de actuación en plataformas reorientables	58

3. Fundamentos de sistemas dinámicos	61
3.1. Sistemas dinámicos	61
3.1.1. Sistema lineal invariante en el tiempo.	63
3.2. Estabilidad de sistemas dinámicos	64
3.2.1. Criterio espectral para sistemas LTI	66
3.2.2. Estabilidad Relativa y σ -estabilidad	68
3.2.3. Tasa máxima de decaimiento exponencial ($\sigma_{\text{máx}}$)	68
3.3. Sistemas dinámicos con retardo	71
3.3.1. Definición y tipos de retardos	72
3.3.2. Sistemas de dimensión infinita	72
3.4. Estabilidad y control de sistemas con retardos	74
3.4.1. Estabilidad de sistemas dinámicos con retardos	74
4. Diseño de controladores con garantía de convergencia exponencial	79
4.1. Análisis de estabilidad	80
4.1.1. Regiones de estabilidad	81
4.1.2. Direcciones de cruce	82
4.1.3. Ejemplo ilustrativo: Regiones de estabilidad	84
4.1.4. σ -estabilidad	85
4.1.5. Tasa máxima de decaimiento exponencial.	88
4.2. Controlador óptimo no-frágil	96
4.2.1. Fragilidad	96
4.2.2. Discretización de la frontera de estabilidad	97
4.2.3. Aproximación convexa de la región de estabilidad	98
4.2.4. Algoritmo de optimización convexa para el controlador óptimo no frágil	99
5. Resultados numéricos y experimentales	103
5.1. Modelo Longitudinal de un bi-rotor de tipo <i>Tilt-Rotor</i>	103
5.1.1. Derivación del modelo simplificado	104
5.2. Estructuras de control	106
5.2.1. Lazo de altitud y orientación (Subsistema p)	106
5.2.2. Lazo de traslación lateral (Subsistema x)	107
5.3. Análisis de estabilidad	109
5.3.1. Regiones de Estabilidad.	109
5.3.2. Sigma estabilidad	111
5.3.3. Tasa máxima de decaimiento exponencial	111
5.3.4. Controlador Óptimo No Frágil	114
5.3.5. Desempeño del seguimiento de trayectoria	116
5.4. Plataforma experimental y validación preliminar	119
5.4.1. Banco de pruebas de orientación y vehículo aéreo	119
5.4.2. Evolución y diseño de la arquitectura electrónica	120
5.4.3. Estimación de estados y algoritmos de navegación	122
5.4.4. Validación experimental del control de orientación (PID)	125

6. Conclusiones y trabajo futuro	129
6.1. Conclusiones	129
6.1.1. Limitaciones y trabajo futuro	130

Índice de figuras

1.1.	Fuerzas aerodinámicas en un aerodino	18
1.2.	Clasificación de los Aerodinos.	19
1.3.	Relación taxonómica entre sistemas aéreos y robóticos.	20
1.4.	Mecanismos de control de empuje.	21
1.5.	Configuraciones topológicas multirrotores.	22
2.1.	Marcos de referencia y coordenadas generalizadas	32
2.2.	Representación geométrica de los cosenos directores.	34
2.3.	Representación de la no conmutatividad de las rotaciones	35
2.4.	Secuencia de rotaciones intrínsecas de Tait-Bryan ZYX	36
2.5.	Representación geométrica de las tasas de cambio de los ángulos de Euler y el vector de velocidad angular.	37
2.6.	Fuerzas externas aplicadas al cuerpo del aeronave	39
2.7.	Diagrama de bloques del sistema de ecuaciones de movimiento	41
2.8.	Dinámica del rotor	42
2.9.	Configuraciones de multirrotor.	43
2.10.	Marcos de referencia y fuerzas externas del multirrotor.	44
2.11.	Representación esquemática del i -ésimo rotor re-orientable.	45
2.12.	Componentes del par de control del i -ésimo rotor	46
2.13.	Representación del cuadricóptero en configuración X.	51
2.14.	Par de alabeo τ_ϕ	52
2.15.	Par de cabeceo τ_θ	52
2.16.	par de guiñada τ_ψ	52
2.17.	Representación del cuadricóptero en configuración cruz.	53
2.18.	Configuración geométrica del hexacóptero.	54
2.19.	Ejemplo de inclinación en un multirrotor <i>tilt-rotor</i>	55
2.20.	Vistas ortogonales del <i>tilt-rotor</i> en configuración H	57
2.21.	Ejemplo de inclinación en un multirrotor <i>tilt-rotor</i>	58
2.22.	Respuesta dinámica del servomecanismo	59
3.1.	Estado del sistema.	62
3.2.	Representación geométrica de la estabilidad de Lyapunov	64
3.3.	Representación geométrica de la estabilidad asintótica	65
3.4.	Representación geométrica de la estabilidad exponencial	66
3.5.	Relación entre la ubicación de los polos en el plano complejo s y la dinámica de la respuesta transitoria.	67
3.6.	Relación entre la ubicación de los polos en el plano complejo s y la dinámica de la respuesta transitoria.	69

3.7. Representación del estado funcional en un sistema con retardo τ	71
3.8. Distribución de las raíces de un cuasipolinomio en el plano complejo . .	73
3.9. Representación de un punto de cruce	75
3.10. Direcciones de cruce.	76
4.1. Diagramas de bloques de sistemas en lazo cerrado	80
4.2. Análisis integral de fronteras de estabilidad y direcciones de cruce . . .	84
4.3. Sigma estabilidad sistema de ejemplo.	88
4.4. Sigma estabilidad y evolución de las curvas de cruce.	90
4.5. Convergencia de las regiones de estabilidad	92
4.6. Representación del concepto de fragilidad.	96
4.7. Centro de Chebyshev.	97
4.8. Particionamiento del espacio de parámetros en semiespacios.	99
4.9. Representación y definición del poliedro.	99
5.1. Diagrama de cuerpo libre del bi-rotor tipo <i>tilt-rotor</i>	105
5.2. Diagramas de bloques de los subsistemas p y x	108
5.3. Curvas de estabilidad bajo retardos nominales.	109
5.4. Representación de las regiones de estabilidad ante un conjunto de valores de retardo τ	110
5.5. Regiones de sigma estabilidad para los subsistemas x y θ	111
5.6. Regiones de sigma estabilidad para 3D	112
5.7. Análisis de la región de sigma estabilidad de área mínima.	113
5.8. Sigma (σ) vs. el área de estabilidad (ϑ).	113
5.9. Iteraciones contra profundidad al ejecutar el Algoritmo 2	114
5.10. Discretización de las regiones de estabilidad.	115
5.11. Representación de los controladores óptimos para los subsistemas x y θ . .	116
5.12. Respuesta temporal ante una referencia fija.	117
5.13. Seguimiento de la trayectoria.	118
5.14. Respuesta temporal detallada para analizar el efecto del parámetro σ . .	119
5.15. Banco de pruebas de orientación de 3-GDL	121
5.16. Plataforma experimental	122
5.17. Diagrama de bloques del algoritmo DCM	123
5.18. Impacto de la perturbación de los motores en la estimación de orientación	124
5.19. Desempeño del Filtro de Kalman Vectorial bajo operación de motores .	126
5.20. Respuesta temporal del controlador PID en estado estacionario	127
5.21. Seguimiento dinámico de referencias de orientación	128
5.22. Prueba de robustez ante perturbación por carga asimétrica	128

Nomenclatura

- D-partición Método de descomposición de dominios para análisis de estabilidad
- DCM Direction Cosine Matrix (Matriz de Cosenos Directores)
- GPS Global Positioning System (Sistema de Posicionamiento Global)
- LQR Linear Quadratic Regulator (Regulador Cuadrático Lineal)
- LTI Linear Time-Invariant (Sistemas lineales invariantes en el tiempo)
- MIMO Multiple-Input Multiple-Output (Sistema de múltiples entradas y salidas)
- NED North-East-Down (Norte-Este-Abajo)
- OACI Organización de Aviación Civil Internacional
- P-D Proportional-Delayed (Controlador Proporcional con Retardo)
- PD Controlador Proporcional-Derivativo
- PID Controlador Proporcional-Integral-Derivativo
- PR Proportional-Retarded (Controlador Proporcional-Retardado)
- RPAS Remotely Piloted Aircraft System (Sistema de aeronave pilotada remotamente)
- SISO Single-Input Single-Output (Sistema de una entrada y una salida)
- UAS Unmanned Aerial Systems (Sistemas Aéreos No Tripulados)
- UAV Unmanned Aerial Vehicle (Vehículo Aéreo No Tripulado)
- VTOL Vertical Take-Off and Landing (Despegue y Aterrizaje Vertical)

Number sets

- \emptyset_χ Función de dirección de cruce para el parámetro χ
- η Vector de orientación (ángulos de Euler $\eta = [\phi, \theta, \psi]^T$)
- λ_i Eigenvalores o valores propios de la matriz del sistema
- \mathbb{C} Plano complejo

\mathbb{R}	Conjunto de los números reales
\mathbb{R}^3	Espacio euclidiano tridimensional de las posiciones
\mathbb{R}^n	Espacio de estados de dimensión n
\mathbb{R}_+	Conjunto de los números reales positivos
\mathcal{M}_{fix}	Matriz de asignación de control para rotores fijos
\mathcal{T}	Conjunto de curvas de cruce de estabilidad
\mathcal{T}_0	Línea de cruce a través del origen ($s = 0$)
\mathcal{T}_ω	Curvas de cruce a través del eje imaginario ($\omega \neq 0$)
$\Im\{\cdot\}$	Parte imaginaria de un número complejo
$\Re\{\cdot\}$	Parte real de un número complejo
Ω	Conjunto de frecuencias de cruce
ω_b	Vector de velocidad angular en el marco del cuerpo
ξ	Vector de posición en el marco inercial $\xi = [x, y, z]^\top$
$f(\cdot)$	Función no lineal que describe la dinámica del sistema
H_∞	Norma infinito (utilizada en control robusto)
R_b^i	Matriz de rotación del marco móvil al marco inercial
$SE(3)$	Grupo Euclidiano Especial (espacio de configuración $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$)
$SO(3)$	Grupo Especial Ortogonal (espacio de las orientaciones)
u_m	Vector de entradas virtuales de control
v_i	Velocidad lineal en el marco inercial

Other symbols

α_i	Ángulo de inclinación del i -ésimo rotor (tilt-rotor)
\mathcal{B}	Marco de referencia del cuerpo (Body Frame) o marco móvil
\mathcal{I}	Marco de referencia Inercial (convención NED: North-East-Down)
\mathcal{R}_i	Marco de referencia fijo al i -ésimo rotor
ϕ	Ángulo de alabeo (roll)
ψ	Ángulo de guiñada (yaw)
θ	Ángulo de cabeceo (pitch)

GAS	Estabilidad Global Asintóticamente Estable
LES	Estabilidad Local Exponencialmente Estable
SPD	Semiplano Derecho del plano complejo (región inestable)
SPI	Semiplano Izquierdo del plano complejo (región estable)

Physics constants

$\Delta(s)$	Ecuación característica o cuasi-polinomio del sistema
\dot{x}	Derivada temporal del estado (velocidad de cambio)
ω	Frecuencia de cruce
ρ	Densidad del aire circundante
σ	Tasa de decaimiento exponencial o margen de desempeño
τ	Retardo de tiempo (Time-delay)
τ_ϕ	par de alabeo (roll)
τ_ψ	par de guiñada (yaw)
τ_θ	par de cabeceo (pitch)
A, B, C, D	Matrices de la representación en espacio de estados
B	Empuje aerostático
$C(s)$	Función de transferencia del controlador
c	Coefficiente de par reactivo del rotor
D	Fuerza de arrastre o resistencia aerodinámica (Drag)
d	Distancia radial del centro de masa al rotor
F_i	Sumatoria de fuerzas externas en el marco inercial
g	Aceleración de la gravedad o vector de gravedad
J	Tensor de inercia del sólido rígido
k	Vector de ganancias del controlador $k = [k_p, k_d]^\top$
k_f	Coefficiente de empuje del rotor
k_p, k_d, k_i	Ganancias proporcional, derivativa e integral
L	Fuerza de sustentación aerodinámica
L_{stat}	Sustentación estática

M	Momento aerodinámico
m	Masa total de la aeronave
M_b	Sumatoria de pares o momentos en el marco del cuerpo
$P(s)$	Función de transferencia de la planta
R	Fuerza aerodinámica resultante
r_{ij}	Distancia entre partículas en un sólido rígido
s	Variable compleja de Laplace
T	Fuerza de empuje (Thrust)
$u(t)$	Vector de entradas de control
$V(x)$	Función candidata de Lyapunov
V	Volumen del aire desplazado
W	Peso total del vehículo
$x(t)$	Vector de estado del sistema
$y(t)$	Vector de salidas del sistema

Capítulo 1

Introducción

Índice

1.1. Aeronaves: definición y clasificación	18
1.2. Vehículos aéreos no tripulados (UAV)	19
1.3. Multirrotores	20
1.4. Planteamiento del problema	24
1.5. Objetivo	26
1.6. Organización del documento	27
1.7. Contribuciones Principales	28
1.8. Productos académicos obtenidos	29

La última década ha sido testigo de una transformación radical en el paradigma de la aviación. Lo que comenzó como desarrollos exclusivos para aplicaciones militares y de defensa ha permeado aceleradamente hacia el ámbito civil y comercial, consolidando a los Vehículos Aéreos No Tripulados (UAV, por sus siglas en inglés) como una tecnología disruptiva en la ingeniería moderna. La capacidad de estas plataformas para operar de forma autónoma o remota ha redefinido las posibilidades de exploración, monitoreo y manipulación en entornos que anteriormente resultaban inaccesibles o presentaban grandes riesgos para la aviación tripulada.

Dentro de este vasto ecosistema, los vehículos de ala rotatoria, y específicamente los multirrotores, han emergido como la configuración dominante para aplicaciones de escala reducida. Su éxito radica en una combinación única de simplicidad mecánica y agilidad operativa, permitiendo capacidades de despegue y aterrizaje vertical (VTOL) y vuelo estacionario. Sin embargo, la aparente sencillez de su construcción oculta una complejidad dinámica significativa: son sistemas intrínsecamente inestables, subactuados y altamente sensibles a perturbaciones.

A medida que las demandas operativas evolucionan hacia tareas de interacción física y navegación de alta precisión, surgen nuevas arquitecturas como los sistemas tilt-rotor y desafíos teóricos críticos, entre los que destaca el impacto de los retardos temporales en los lazos de control. En este contexto, el presente capítulo tiene como objetivo establecer el marco conceptual y el estado del arte que sustentan la investigación. Se

parte de una clasificación taxonómica general de las aeronaves para particularizar en la evolución de los multirrotores, analizando sus principios de operación, sus limitaciones actuales y las problemáticas abiertas que motivan el desarrollo de las estrategias de control propuestas en este trabajo.

1.1. Aeronaves: definición y clasificación

De acuerdo con la Organización de Aviación Civil Internacional (OACI) [44], una aeronave se define como toda máquina capaz de mantenerse en la atmósfera mediante reacciones del aire. Para los propósitos del presente trabajo, el estudio se restringe a los *aerodinos*, es decir, aeronaves más pesadas que el aire cuya sustentación se genera principalmente mediante fuerzas aerodinámicas [44].

A diferencia de los aerostatos (sistemas basados en flotabilidad), los aerodinos requieren de un movimiento relativo entre el fluido y la estructura para producir sustentación. Este flujo relativo V_∞ induce una distribución de presiones y esfuerzos cortantes que resultan en un momento aerodinámico M y una fuerza resultante R . Como se ilustra en la Figura (1.1), dicha fuerza se descompone en dos componentes ortogonales con respecto a la dirección del viento relativo: la sustentación L , perpendicular a V_∞ , y la resistencia aerodinámica D , paralela y opuesta al sentido del movimiento [6].

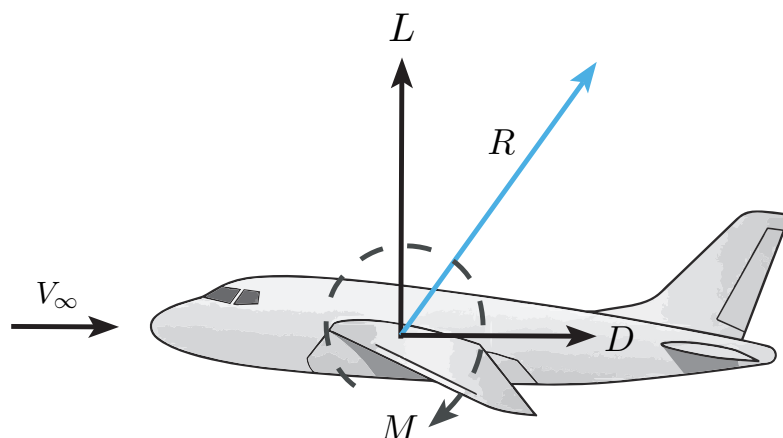


Figura 1.1: Descomposición de la fuerza aerodinámica resultante (R) en un aerodino. Se muestran la sustentación (L) y la resistencia aerodinámica (D) respecto al flujo relativo (V_∞), así como el momento aerodinámico (M) actuando sobre el cuerpo de la aeronave.

Dichas magnitudes físicas son generadas, principalmente, por medio de dos sistemas: el sistema de propulsión, que se encarga de establecer el flujo relativo y las superficies sustentadoras (alas o hélices), encargadas de controlar la dirección y magnitud de las fuerzas. Las diferentes configuraciones de los sistemas de propulsión y superficies sustentadoras permiten clasificar a los aerodinos en tres familias principales (Figura (1.2)):

- **Ala fija:** Generan sustentación mediante el flujo de aire sobre alas rígidamente unidas al fuselaje. Destacan por su alta eficiencia energética y autonomía, pero carecen de capacidad para realizar vuelo estacionario.

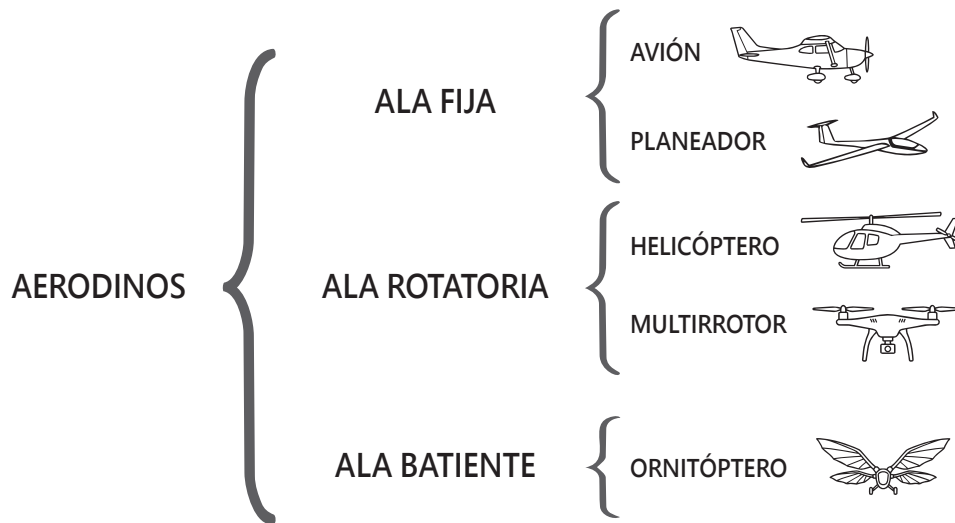


Figura 1.2: Clasificación de los aerodinámicos de acuerdo a su mecanismo de sustentación.

- **Ala rotatoria:** La sustentación se obtiene mediante uno o varios rotores. Su capacidad de despegue y aterrizaje vertical (VTOL) y vuelo estacionario los hace ideales para operar en entornos confinados, aunque presentan una mayor complejidad mecánica o de control.
- **Ala batiente:** Basan su sustentación en el movimiento oscilatorio de sus alas, emulando el vuelo biológico. Se emplean principalmente en micro-robótica aérea.

1.2. Vehículos aéreos no tripulados (UAV)

La necesidad de plataformas compactas capaces de operar en misiones de riesgo o espacios reducidos ha impulsado el desarrollo de los vehículos aéreos no tripulados (UAV, por sus siglas en inglés) [42]. Cuando un UAV es capaz de ejecutar misiones sin asistencia humana directa, basando sus decisiones en su estado actual y la información sensorial disponible, se clasifica como un *robot aéreo* [30]. Esta definición lo distingue de los sistemas pilotados remotamente (RPAS), cuya operación depende directamente de un operador humano en una estación de tierra (Figura (1.3)).

1.2.1. Evolución hacia los multirrotores

Desde una perspectiva técnica, los robots aéreos adaptan a escala reducida las plataformas de la aviación convencional (Figura (1.3)). Inicialmente, el desarrollo se concentró en vehículos de ala fija debido a su eficiencia para misiones de largo alcance. Sin embargo, la creciente demanda de aplicaciones civiles, comerciales y de investigación que exigen capacidades VTOL y vuelo estacionario impulsó el desarrollo de plataformas de ala rotatoria.

Si bien los primeros esfuerzos emularon la configuración clásica de un solo rotor (helicópteros), la complejidad mecánica y los costos de mantenimiento de los platos

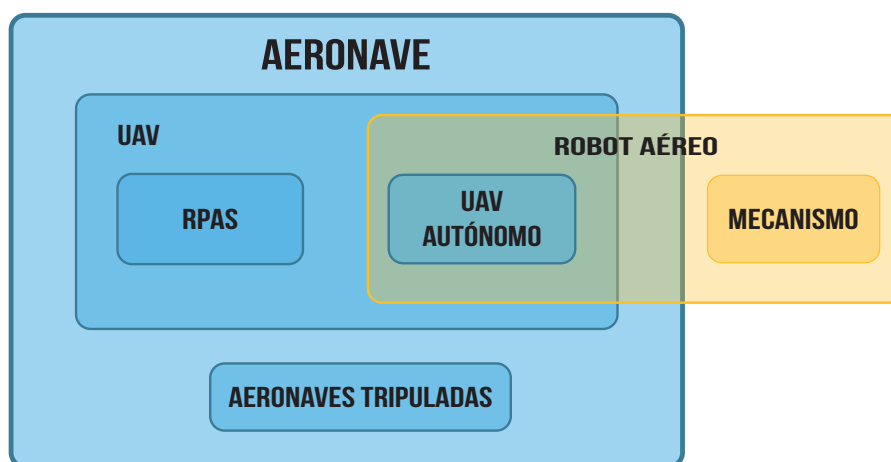


Figura 1.3: Relación taxonómica entre sistemas aéreos y robóticos. El diagrama ilustra la intersección entre los dominios de la aeronáutica y la robótica, diferenciando a los sistemas RPAS (pilotados remotamente) de los robots aéreos (autónomos) en función de su grado de intervención humana.

cíclicos limitaron su miniaturización. Esta barrera técnica fue superada gracias a la evolución de los sistemas microelectromecánicos (MEMS) y el perfeccionamiento de las técnicas de control automático, dando lugar a los sistemas *multirrotores*.

A diferencia de un helicóptero tradicional, un multirrotor (como un cuadricóptero o hexacóptero) emplea rotores de paso fijo, simplificando drásticamente su diseño mecánico. No obstante, esta simplicidad estructural resulta en una plataforma intrínsecamente inestable que depende de manera absoluta de algoritmos de control robustos para modular diferencialmente la velocidad de sus motores, logrando así la estabilización y maniobrabilidad requeridas. Esta dependencia hace de los multirrotores un objeto de estudio fundamental en la teoría de control y ha sentado las bases para la exploración de arquitecturas híbridas, como los sistemas *tilt-rotor*, los cuales se abordan a lo largo de este documento.

1.3. Multirrotores

Los vehículos aéreos multirrotores constituyen una subclase de UAV de ala rotatoria cuya sustentación se genera mediante la acción combinada de dos o más rotores. Estos actuadores, formados por el conjunto motor-hélice, producen la fuerza de empuje y los momentos aerodinámicos requeridos para compensar la acción de gravedad y controlar la orientación del vehículo.

1.3.1. Principio de Operación

A diferencia de los helicópteros convencionales, que emplean mecanismos mecánicos complejos (p. ej., plato cíclico y control de paso colectivo) para orientar el vector de empuje del rotor principal, los multirrotores simplifican la arquitectura del sistema de propulsión al distribuir el empuje en múltiples rotores. En su forma más común, los

rotores se encuentran acoplados a la estructura y no modifican su ángulo de ataque durante la operación; en consecuencia, el control de orientación y traslación se logra mediante la modulación de las velocidades angulares de los motores, tal como se ilustra en la Figura (1.4). Esta simplificación reduce la complejidad mecánica y facilita la construcción y el mantenimiento; sin embargo, traslada parte de la complejidad al sistema de control, el cual debe asegurar la estabilidad de una plataforma inherentemente inestable y de dinámica rápida.

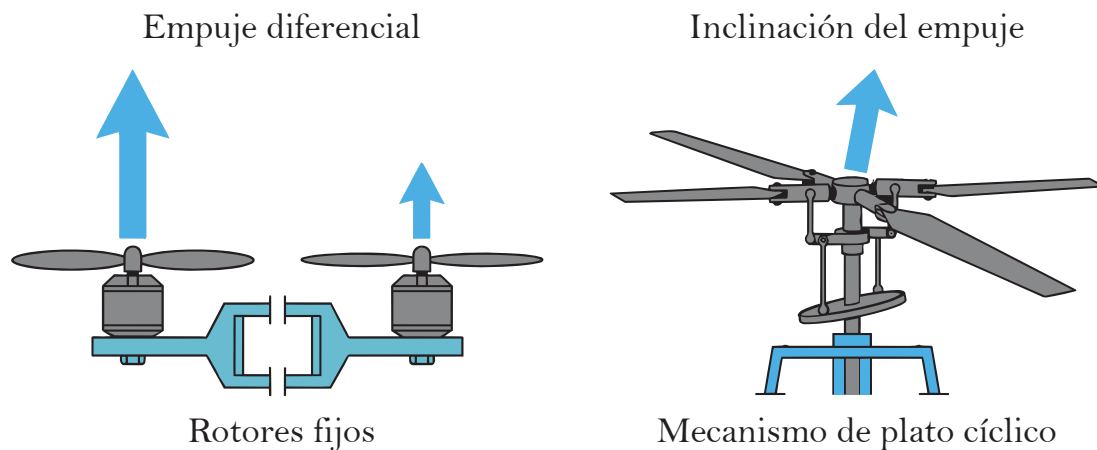


Figura 1.4: Mecanismos de control de empuje. A la izquierda, el multirrotor genera empuje mediante la variación de la velocidad angular de los rotores fijos. A la derecha, el helicóptero convencional emplea un mecanismo de plato cíclico para inclinar el vector de empuje.

Además de las plataformas de rotores fijos, existen arquitecturas, con rotores reorientables, en donde el ángulo de inclinación del rotor es variable. En este tipo de vehículos, el conjunto motor-hélice puede cambiar su orientación con respecto a uno o más ejes, de modo que la dirección del empuje no permanece alineada con un eje fijo del cuerpo. En consecuencia, el control puede realizarse mediante la combinación de: modulación de las velocidades angulares (magnitud del empuje) y variación de los ángulos de los rotores (dirección del empuje). Esta extensión incrementa la capacidad de maniobra y habilita regímenes de vuelo que requieren componentes laterales de empuje, a costa de una mayor complejidad electromecánica y de control. Un ejemplo común de esta arquitectura son los vehículos de rotores inclinables (*tilt-rotors*) en los que la orientación de los rotores se restringe a un solo grado de libertad.

Configuraciones y disposición de rotores

Los multirrotores se presentan en una amplia variedad de configuraciones, cuyas diferencias se asocian principalmente con: el número de rotores (tricópteros, cuadricópteros, hexacópteros, etc.); su disposición geométrica (X, +, Y, H, etc.); y la disposición de los planos y ejes de rotación (arquitecturas coplanares, coaxiales, entre otras), como se ilustra en la Figura (1.5).

En una arquitectura *coplanar* los ejes de los rotores son paralelos entre sí y los rotores se distribuyen en un mismo plano estructural. En contraste, en una arquitectura

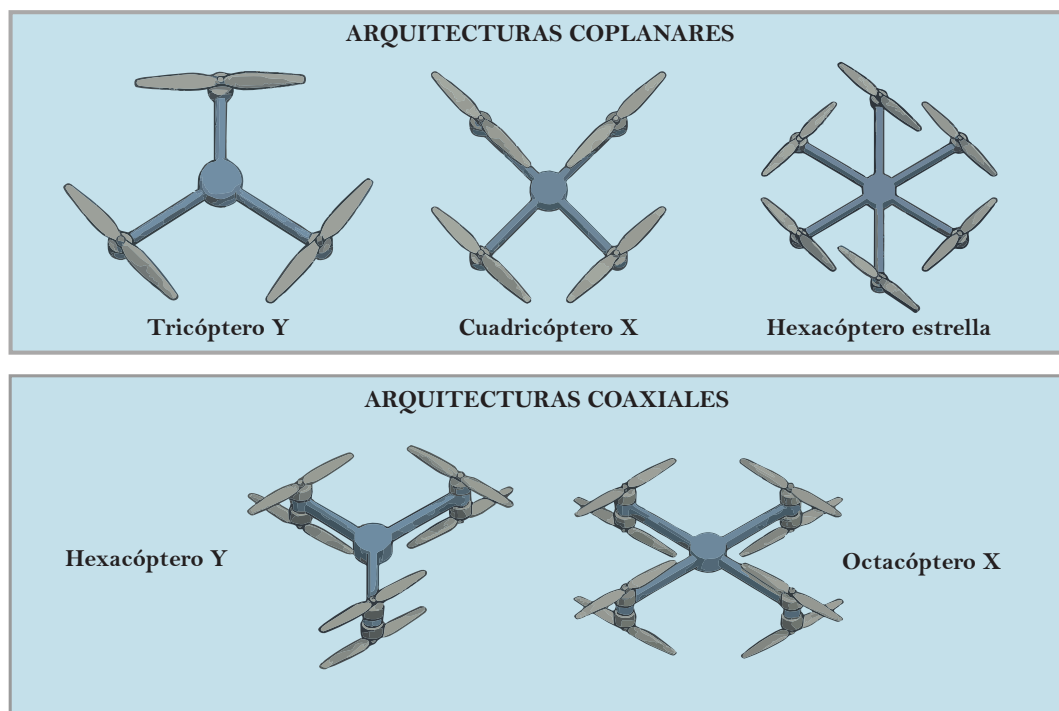


Figura 1.5: Configuraciones topológicas comunes en multirrotores, clasificadas en arquitecturas **coplanares** (fila superior) y **coaxiales** (fila inferior).

coaxial los rotores se agrupan en pares que comparten un mismo eje de rotación, típicamente con sentidos de giro opuestos para compensar el par de reacción. Estas topologías modifican la forma en que las fuerzas y los momentos de control se generan a partir de los actuadores.

No obstante, independientemente de la configuración, el movimiento del vehículo se describe mediante un conjunto común de ecuaciones de dinámica de sólido rígido, tal como se detallará en el capítulo de modelado. En términos generales, las diferencias entre plataformas se reflejan en la manera en que la geometría de los rotores (posición y orientación) determina la combinación de acciones de control requerida para producir fuerzas y momentos deseados. Esta distribución influye directamente en la eficiencia energética, la agilidad para ejecutar maniobras y, en ciertos arreglos, en la redundancia de actuación, permitiendo mantener la estabilidad ante la falla de un motor [27].

En síntesis, el principio de operación de los multirrotores dota a estas plataformas de características altamente atractivas, tales como la capacidad de despegue y aterrizaje Vertical (VTOL), el vuelo estacionario y una notable maniobrabilidad en entornos confinados. Si bien su uso inicial se restringió a la fotografía recreativa, la madurez tecnológica actual ha propiciado su integración en sectores críticos, abarcando desde la agricultura de precisión y el monitoreo de infraestructura, hasta operaciones de búsqueda y rescate y tareas de manipulación aérea. Por lo que en las últimas décadas el estudio de dichas plataformas ha sido un tema de particular interés en áreas de la ingeniería como aeronáutica, robótica y control.

1.3.2. Estado del arte

Modelado, control y estimación

En la literatura, el modelado y control de estas aeronaves ha evolucionado rápidamente para responder a demandas de mayor autonomía y robustez. Los primeros trabajos se centraron en la derivación de modelos dinámicos completos para simulación de plataformas de tipo cuadirrotor [12, 35], seguidos de estrategias de simplificación de los modelos mediante linealización alrededor del punto de equilibrio (vuelo estacionario). Este enfoque permitió la implementación exitosa de controladores clásicos, tales como PID y LQR, demostrando que vehículos aéreos de pequeña escala podían integrar los sistemas de cómputo necesarios para el vuelo autónomo [10, 13, 45]. Posteriormente, estos enfoques migraron a plataformas con más rotores como los hexacópteros, los cuales resultaban ideales para tareas que requerían más carga. Trabajos como los de [2, 7] abordaron el modelado y control de estas aeronaves.

Sin embargo, el desempeño de los controladores lineales se degrada ante maniobras agresivas o perturbaciones significativas que alejan al sistema de su zona de operación lineal. Para superar estas limitaciones, las investigaciones han avanzado hacia estrategias de control no lineal. En este sentido, destacan técnicas como *Backstepping* [37] y Modos Deslizantes para el control de posición y seguimiento de trayectorias [14]; leyes de control robusto tipo H_∞ , diseñadas para mitigar perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas [47] y métodos de saturaciones anidadas enfocados en acotar las señales de control [16]. A la par de estos trabajos, se ha abordado el desafío de la estimación de estados mediante la integración de algoritmos como filtros de Kalman [39, 50] o filtros complementarios para el procesamiento de unidades de medición inercial [21], así como el uso de sistemas de visión para determinar la posición y orientación del vehículo [3]. Adicionalmente, en trabajos como [11, 22, 53] se han desarrollado observadores que permiten reconstruir los estados del sistema ante la ausencia o falla de sensores, complementar las mediciones a bordo e incluso estimar perturbaciones externas como las asociadas al viento.

Colaboración y manipulación Aérea

La madurez alcanzada en las estrategias de control y estimación de estados, sumada a la integración de tecnologías como la impresión 3D y los sistemas microelectromecánicos (MEMS), han permitido que los UAVs trasciendan las tareas de vuelo para abordar tareas complejas de interacción física con el entorno y actividades cooperativas. La literatura reporta aplicaciones que aprovechan la agilidad de los multirrotores para tareas de agarre y manipulación aérea [4, 59, 61]. En este sentido se han desarrollado plataformas bioinspiradas que exhiben capacidades de adherencia (o agarre) a superficies para ahorrar energía (*perching*) [59], así como configuraciones que optimizan la eficiencia en operaciones de manipulación (*grasping*) mediante el uso de rotores basculantes (*tilt-rotors*) o estructuras transformables [61]. No obstante, estas operaciones introducen dinámicas acopladas y efectos ambientales complejos, tales como fuerzas de Coriolis y perturbaciones aerodinámicas inducidas por la cercanía a superficies, las cuales han comenzado a ser abordadas mediante enfoques basados en observadores [32, 58] y control óptimo [26].

Por otro lado, otra vertiente crucial de investigación es la coordinación multi-agente

y la robótica de enjambre (*swarm robotics*). A diferencia de los sistemas individuales, los enjambres ofrecen mayor robustez mediante redundancia y eficiencia en la cobertura de áreas extensas. Proyectos pioneros como SFly han demostrado la viabilidad de la navegación autónoma descentralizada basada en visión para enjambres de micro-UAVs en entornos sin GPS [1]. Asimismo, la colaboración entre múltiples vehículos ha permitido abordar el transporte de cargas pesadas que exceden la capacidad de un solo agente, empleando estrategias de control cooperativo y cables suspendidos [17, 62].

Arquitecturas *tilt-rotor* y retardos temporales

Los vehículos aéreos multirrotores se han consolidado como plataformas versátiles debido a su simplicidad mecánica, capacidad de vuelo estacionario y maniobrabilidad. Sin embargo, las configuraciones convencionales con rotores fijos y coplanares presentan una naturaleza intrínsecamente subactuada: la arquitectura de actuación limita el subespacio de fuerzas y momentos generables de manera independiente, lo cual restringe el desempeño en tareas que demandan desacoplamiento traslación–rotación, seguimiento agresivo o interacción con el entorno. En este sentido, las arquitecturas con vectorización de empuje, y en particular los sistemas *tilt-rotor*, han ganado relevancia al permitir modificar la dirección del empuje y, con ello, ampliar la capacidad de actuación y la cobertura del espacio de trabajo. Investigaciones recientes han explorado desde control para vuelo estacionario [49] hasta la integración con manipuladores robóticos [40, 41] y arquitecturas transformables e híbridas [60].

No obstante, la incorporación de mecanismos de reorientación de los rotores introduce un elemento práctico que suele subestimarse en el análisis: la presencia de retardos y dinámicas asociadas a la cadena sensado–cómputo–actuación. En plataformas reales, los retardos provienen de la adquisición y filtrado de datos, del tiempo de cómputo de los algoritmos de estimación y control, así como de la respuesta dinámica de los actuadores (por ejemplo, servomecanismos de inclinación). En particular, en sistemas *tilt-rotor* estos efectos se vuelven más relevantes debido a que la reorientación del empuje se realiza mediante actuadores adicionales, cuyo comportamiento puede introducir retardos efectivos en la acción de control. Dichos retardos pueden comprometer severamente la estabilidad y el desempeño transitorio cuando la ley de control ha sido diseñada bajo hipótesis sin retardo. Aunque se han propuesto estrategias de compensación basadas en PID [18], métodos geométricos [28] o sintonización en el dominio de la frecuencia [56], persisten desafíos abiertos relacionados con criterios de estabilidad y con metodologías de diseño que incorporen explícitamente retardos y restricciones de implementación [55].

1.4. Planteamiento del problema

En la última década se han reportado múltiples desarrollos y validaciones experimentales de leyes de control para vehículos aéreos no tripulados del tipo multirrotor, incluyendo pruebas en entornos reales y escenarios exteriores. No obstante, aún en presencia de implementaciones exitosas, persisten desafíos que dificultan lograr un desempeño consistente y garantías formales de estabilidad cuando el sistema opera bajo condiciones no ideales. Entre los factores más relevantes se encuentran: perturbaciones externas (p. ej., ráfagas de viento), variación paramétrica, limitaciones y saturaciones de actuadores, y retardos temporales en el lazo cerrado.

En particular, los retardos de tiempo aparecen de manera inevitable en plataformas reales como resultado de la cadena completa sensado–procesamiento–actuación: adquisición y filtrado de sensores, latencias de comunicación, tiempos de cómputo y respuesta dinámica de actuadores. Si bien en muchas aplicaciones dichos retardos son pequeños, su efecto acumulado puede degradar márgenes de estabilidad, inducir oscilaciones persistentes o incluso provocar inestabilidad, especialmente cuando se demanda seguimiento rápido o cuando la plataforma opera cerca de límites físicos.

El problema se vuelve más pronunciado en arquitecturas emergentes con vectorización de empuje, tales como los *tilt-rotor*. A diferencia de los multirrotores convencionales de rotores fijos, estas plataformas incorporan actuadores adicionales para reorientar el empuje, típicamente mediante servomecanismos. En consecuencia, además de las fuentes habituales de retardo, aparecen retardos y dinámicas asociadas al mecanismo de inclinación que impactan directamente la acción de control efectiva. Aunque existe un cuerpo de trabajo amplio para rotores fijos, una parte importante de dichas metodologías no se ha trasladado de forma completa a arquitecturas *tilt-rotor*, particularmente en lo referente a criterios de estabilidad y procedimientos de diseño que incorporen explícitamente retardos y restricciones de implementación.

Por lo tanto, el reto central consiste en desarrollar estrategias de diseño y validación que integren, de manera explícita, el efecto de los retardos temporales en el análisis de estabilidad y en la selección de ganancias/leyes de control, manteniendo como objetivo final el vuelo estacionario y el seguimiento de trayectorias bajo condiciones realistas, incluyendo operación en exteriores.

En este trabajo, el énfasis se coloca en establecer criterios analíticos y procedimientos de síntesis que permitan caracterizar regiones de estabilidad y desempeño en presencia de retardo, como paso necesario para una implementación confiable en plataformas reales, incluyendo arquitecturas emergentes *tilt-rotor*.

1.4.1. Justificación

En aplicaciones reales, como fotografía y video aéreo, los multirrotores suelen operar en ambientes no controlados o en exteriores, donde están expuestos a perturbaciones aerodinámicas y variaciones de carga que afectan el desempeño del lazo cerrado. Adicionalmente, la tendencia hacia mayor autonomía promueve la ejecución a bordo de algoritmos de estimación y control. Sin embargo, las limitaciones de cómputo y las latencias inherentes a la adquisición y filtrado de sensores se traducen en retardos efectivos en el sistema. El impacto de estos retardos puede manifestarse como oscilaciones, degradación del seguimiento o pérdida de estabilidad, con riesgos directos para la integridad de la plataforma.

Aunque la literatura reporta numerosas implementaciones experimentales, el tratamiento de los retardos suele abordarse de forma implícita (p. ej., ajustes heurísticos) o mediante aproximaciones que no siempre proporcionan criterios sistemáticos de estabilidad con garantías, especialmente cuando los retardos varían o cuando el sistema opera cerca de sus límites físicos. En el caso de arquitecturas *tilt-rotor*, esta necesidad es aún más marcada, debido a la presencia de actuadores de inclinación y a su dinámica asociada, lo cual introduce fuentes de retardo adicionales y acoplamientos que no aparecen en el caso de rotores fijos.

En consecuencia, resulta pertinente desarrollar un marco de análisis y diseño que

incorpore explícitamente retardos temporales y que permita sintetizar controladores con garantías de estabilidad y desempeño, así como validar dichos resultados mediante simulaciones y experimentación. Esta aproximación contribuye a cerrar la brecha entre controladores diseñados bajo hipótesis idealizadas y su operación en condiciones realistas, particularmente en plataformas emergentes con vectorización de empuje.

1.5. Objetivo

Desarrollar una metodología que permita diseñar controladores para vehículo aéreos multirrotores (con énfasis en vehículos de rotores inclinables) que garantice la estabilidad exponencial ante la presencia de retardos en el sistema, garantizando la optimización de la tasa de decaimiento exponencial (σ) y asegurando la no-fragilidad del sistema.

1.5.1. Objetivos específicos

- Obtener un modelo matemático general para vehículos multirrotores, con énfasis en plataformas con rotores reorientables.
- Caracterizar las regiones de estabilidad en el espacio de parámetros del controlador (PD) para sistemas lineales con retardo.
- Desarrollar una metodología con enfoque geométrico para determinar el máximo decaimiento exponencial (σ).
- Implementar algoritmos de optimización (Centro de Chebyshev) para identificar el punto de operación más robusto dentro de la región de estabilidad, garantizando la **no-fragilidad** del controlador ante variaciones paramétricas.
- Validar mediante simulaciones el desempeño del esquema de control propuesto en un modelo longitudinal del *tilt-rotor*, evaluando la convergencia ante diferentes márgenes de σ -estabilidad.
- Diseñar y construir una arquitectura de hardware y software en tiempo real (DCM/Kalman) capaz de procesar los algoritmos de estimación y control.
- Identificar experimentalmente los retardos físicos del lazo de control para aplicar la metodología propuesta y evaluar el desempeño de la plataforma en condiciones de operación real.

1.6. Organización del documento

Capítulo 1. Introducción. Se revisan conceptos fundamentales sobre aeronaves, su definición y clasificación, así como los principios de sustentación que permiten distinguir entre aerostatos y aerodinos. Posteriormente, se enfoca el estudio en los vehículos aéreos no tripulados, con énfasis en plataformas multirrotor, a fin de delimitar el alcance de la investigación. Finalmente, se establece el planteamiento del problema, su justificación, y se formulan el objetivo general y los objetivos específicos. Al cierre del capítulo se sintetizan los productos académicos derivados del trabajo de investigación.

Capítulo 2. Fundamentos de modelado de robots aéreos. Se desarrollan los fundamentos de modelado requeridos para el análisis del sistema y el diseño de control. Se introduce la cinemática del sólido rígido, incluyendo la definición de coordenadas generalizadas (posición y orientación) y marcos de referencia. Con base en lo anterior, se construye la dinámica general (traslacional y rotacional), se incorporan fuerzas externas relevantes y se establece el sistema de ecuaciones general aplicable a cualquier aeronave. A partir de este modelo, se presenta el modelado específico de vehículos multirrotores, culminando con la derivación del modelo para una arquitectura tipo tilt-rotor.

Capítulo 3. Fundamentos de sistemas dinámicos. Se presenta el marco teórico necesario para abordar la estabilidad de sistemas dinámicos. Se introduce la definición de retardo, tipos de retardos, así como sus representaciones matemáticas, y se discute su impacto en el desempeño y la estabilidad de sistemas de control. Se presentan metodologías que abordan el diseño de controladores para sistemas con retardos basados en enfoques geométricos que garantizan la estabilidad de dichos sistemas.

Capítulo 4. Diseño de controladores con garantía de convergencia exponencial. Se presentan la contribución metodológica principal de este trabajo: el diseño de controladores para sistemas con retardos con garantía de convergencia exponencial. Se muestran las estructuras de control propuestas basadas en controladores tipo PD. Se desarrolla la metodología para determinar las ganancias del controlador, que incluye el análisis de regiones de estabilidad, criterios de σ -estabilidad y la formulación de la metodología para determinar controlador óptimo no-frágil.

Capítulo 5. Resultados numéricos. Se describen las plataformas experimentales utilizadas en el trabajo. Se muestra la validación de la plataforma ante un controlador clásico. Finalmente se reportan los resultados numéricos de la aplicación de la metodología presentada en el capítulo anterior.

Capítulo 6. Conclusiones. Se presentan las conclusiones del trabajo, se resumen las contribuciones originales de la tesis y propone líneas de investigación futura derivadas de los resultados obtenidos y de las limitaciones identificadas.

1.7. Contribuciones Principales

- Marco de modelado estructural basado en la matriz de asignación y su rango, que formaliza la capacidad de actuación (subactuación vs. actuación completa).
- Metodología sistemática para la construcción de regiones de estabilidad y σ -estabilidad en el espacio de parámetros (k_p, k_d) para vehículos multirrotores con retardo.
- Algoritmo para la determinación de la tasa máxima de decaimiento exponencial ($\sigma_{\text{máx}}$) mediante el análisis geométrico de la contracción de regiones estables.
- Algoritmo para la obtención de controladores óptimos no-frágiles empleando aproximaciones poligonales convexas y el cálculo del centro de Chebyshev.
- Validación numérica y experimental en un caso de estudio tipo tilt-rotor, mostrando contracción de regiones con τ y la relación entre σ , rapidez de respuesta y esfuerzo de control.

1.8. Productos académicos obtenidos

En el marco de este trabajo de investigación, se obtuvieron los siguientes productos académicos en torno al análisis de estabilidad y el diseño de estrategias de control para vehículos aéreos no tripulados de tipo multirrotor, con énfasis en arquitecturas subactuadas (multirrotor clásico) y completamente actuadas (*tilt-rotor*) bajo la presencia de retardos en la retroalimentación del sistema:

- **Artículo en revista (2025)**. López-Hernández, J. C., Méndez-Barrios, C. F., & Guel-Cortez, A. J. “Stability and optimal control of a fully-actuated tilt-rotor with delayed feedback.” *Optimization and Engineering*, (2025). doi:10.1007/s11081-025-09995-8.
- **Artículo en congreso (2019)**. López-Hernández, J., et al. “A Comparative Stability Analysis of Underactuated Versus Fully-Actuated Rotorcrafts Having Time-Delay Feedback.” En: *2019 6th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)*, Paris, France, 2019, pp. 1640–1645. doi:10.1109/CoDIT.2019.8820372.

Capítulo 2

Fundamentos de modelado de robots aéreos

Índice

2.1. Cinemática del sólido rígido	31
2.2. Dinámica de los vehículos aéreos	38
2.3. Modelado de vehículos aéreos multirrotores . . .	41
2.4. Configuraciones de multirrotores	48
2.5. Modelado de retardos en plataformas multirrotor	57

Este capítulo establece el marco teórico para describir el comportamiento dinámico de los vehículos aéreos no tripulados mediante el formalismo de Newton-Euler. El desarrollo analítico parte de las ecuaciones generales de movimiento para un cuerpo rígido y se particulariza de manera progresiva hasta definir la dinámica de las plataformas tipo multirrotor. Para ello, se formula un modelo generalizado que unifica el análisis de las configuraciones con vectorización de empuje (rotores re-orientables) y las arquitecturas tradicionales de rotores fijos. A partir de esta formulación, se deducen casos de estudio representativos para evaluar propiedades fundamentales de la plataforma, tales como el grado de actuación y la autoridad de control. Finalmente, se presenta el modelo de los retardos temporales inherentes a los sistemas físicos, con el objetivo de preparar el terreno para el diseño de controladores que garanticen la estabilidad de la aeronave ante dichos fenómenos.

2.1. Cinemática del sólido rígido

El análisis cinemático constituye la etapa preliminar y fundamental en el modelado de cualquier sistema mecánico. De acuerdo con la literatura clásica en robótica y mecánica [20], la cinemática se define formalmente como la descripción geométrica del movimiento de los cuerpos respecto a un sistema de referencia, sin considerar las fuerzas y momentos que lo originan. Para describir este movimiento, se asume que la aeronave se comporta como un *cuerpo rígido*; es decir, un sistema de partículas en el

cual la distancia entre ellas permanece constante en el tiempo, independientemente de las fuerzas aplicadas. Bajo esta premisa, la posición y orientación del vehículo en el espacio tridimensional quedan completamente determinadas mediante la definición de dos marcos de referencia ortonormales orientados según la regla de la mano derecha (Figura (2.1)):

- **Marco inercial (\mathcal{I}):** Se define fijo a la tierra. Se adopta la convención aeronáutica estándar NED (North-East-Down), denotado por la base $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$, donde el eje \mathbf{z}_i se alinea con el vector de gravedad \mathbf{g} .
- **Marco del cuerpo (\mathcal{B}):** Se define fijo al centro de masa del vehículo. Se denota por la base $(\mathbf{x}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b)$, donde \mathbf{x}_b apunta al frente de la aeronave y \mathbf{z}_b hacia la parte inferior.

La *configuración* (o *pose*) de un cuerpo rígido se define como la descripción completa de su posición y orientación con respecto a un marco de referencia. Mientras que su *espacio de configuración* determina el conjunto de todas las posibles posiciones y orientaciones del cuerpo [52].

Para un vehículo aéreo, la posición se describe mediante el vector $\boldsymbol{\xi} = [x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$, expresado en el marco inercial, el cual representa la ubicación de su centro de masa. En la Figura (2.1) se ilustra dicho vector, así como sus componentes proyectadas sobre los ejes del marco inercial.

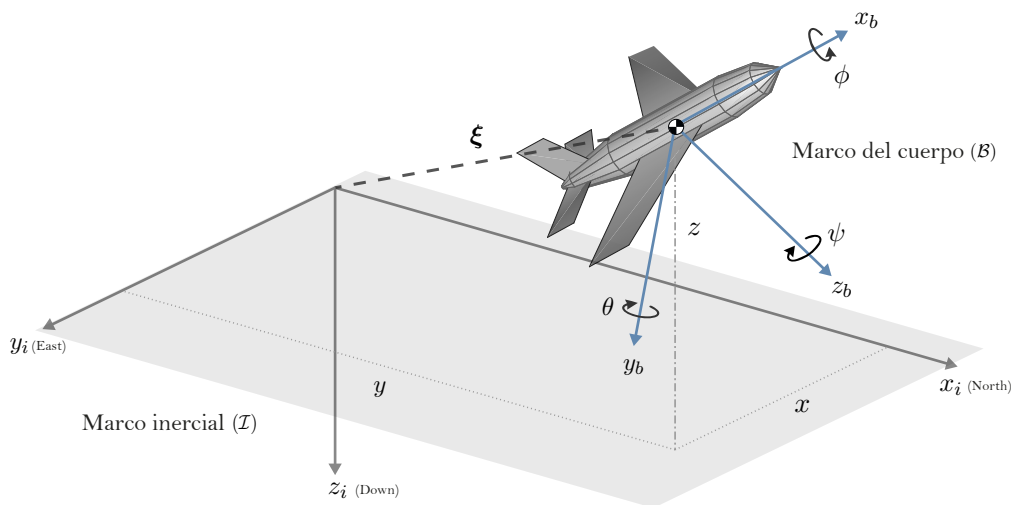


Figura 2.1: Representación de los sistemas de coordenadas. Se ilustra el marco inercial \mathcal{I} (fijo en tierra bajo la convención NED) y el marco del cuerpo \mathcal{B} (fijo al vehículo). El vector de posición $\boldsymbol{\xi}$ y los ángulos de orientación (ϕ, θ, ψ) definen la configuración de la aeronave.

Orientación: matrices de rotación y grupo $SO(3)$

A diferencia de la posición, la orientación se define como la relación angular entre el marco de referencia móvil \mathcal{B} e inercial \mathcal{I} , la cual se representa a través de la matriz

de rotación $R_b^i \in SO(3)$. Dado que el marco móvil se mantiene fijo al cuerpo de la aeronave, esta transformación lineal determina la orientación del vehículo en el espacio.

Bajo la premisa fundamental de la mecánica del cuerpo rígido, las distancias relativas entre cualquier par de puntos del vehículo deben permanecer constantes durante el movimiento (ausencia de deformaciones). Para modelar matemáticamente este comportamiento, la transformación lineal empleada debe ser una isometría que preserve tanto las distancias euclidianas como la orientación de los ejes (quiralidad). En consecuencia, la matriz de rotación R_b^i debe pertenecer al *Grupo Especial Ortogonal de dimensión 3*, denotado como $SO(3)$, el cual exige el cumplimiento de las siguientes condiciones fundamentales:

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid R^T R = I, \det(R) = 1\}. \quad (2.1)$$

Aunque la matriz R_b^i posee nueve elementos, la condición de ortogonalidad impone seis restricciones algebraicas, reduciendo los grados de libertad efectivos a tres.

Geoméricamente, $SO(3)$ es un espacio no lineal y no conmutativo. Esto implica que la suma de matrices no es una operación válida dentro de este conjunto ($R_1 + R_2 \notin SO(3)$), ya que el resultado algebraico representaría físicamente la deformación del sólido. En su lugar, la operación interna de este grupo es el producto matricial, el cual modela la composición de rotaciones sucesivas, las cuales se analizan en las secciones posteriores.

2.1.1. Parametrización de la orientación

Existen diversas formas de representar los elementos de la matriz de rotación: ángulos de Euler, matriz de cosenos directores, cuaterniones, etc. La elección de la parametrización esta determinada por la aplicación y, en general, es un compromiso entre la carga computacional y la presencia de singularidades matemáticas. A continuación se presentan las representaciones empleadas en este trabajo.

Matriz de Cosenos Directores (DCM)

La Matriz de Cosenos Directores, denotada como R_b^i , constituye la representación fundamental de la orientación dentro del grupo especial ortogonal $SO(3)$. A diferencia de otras parametrizaciones que utilizan un conjunto mínimo de coordenadas, esta formulación emplea nueve elementos para proyectar los vectores base del marco del cuerpo \mathcal{B} sobre el marco inercial \mathcal{I} . Dichos elementos corresponden a los cosenos de los ángulos que se forman entre los ejes de ambos marcos de referencia (conocidos como cosenos directores), tal y como se ilustra en la Figura (2.2). En consecuencia, esta matriz de rotación queda definida analíticamente como:

$$R_b^i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{x_b}^{x_i}) & \cos(\theta_{y_b}^{x_i}) & \cos(\theta_{z_b}^{x_i}) \\ \cos(\theta_{x_b}^{y_i}) & \cos(\theta_{y_b}^{y_i}) & \cos(\theta_{z_b}^{y_i}) \\ \cos(\theta_{x_b}^{z_i}) & \cos(\theta_{y_b}^{z_i}) & \cos(\theta_{z_b}^{z_i}) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Algebraicamente, la DCM actúa como un operador lineal que transforma cualquier vector \mathbf{a}_b del marco móvil a su representación en el marco inercial \mathbf{a}_i :

$$\mathbf{a}_i = R_b^i \mathbf{a}_b. \quad (2.3)$$

La principal ventaja de esta matriz es que es una representación libre de singularidades. Sin embargo, su implementación numérica requiere la aplicación constante de algoritmos de ortonormalización para corregir la deriva de los errores de truncamiento, lo que incrementa significativamente el costo computacional.

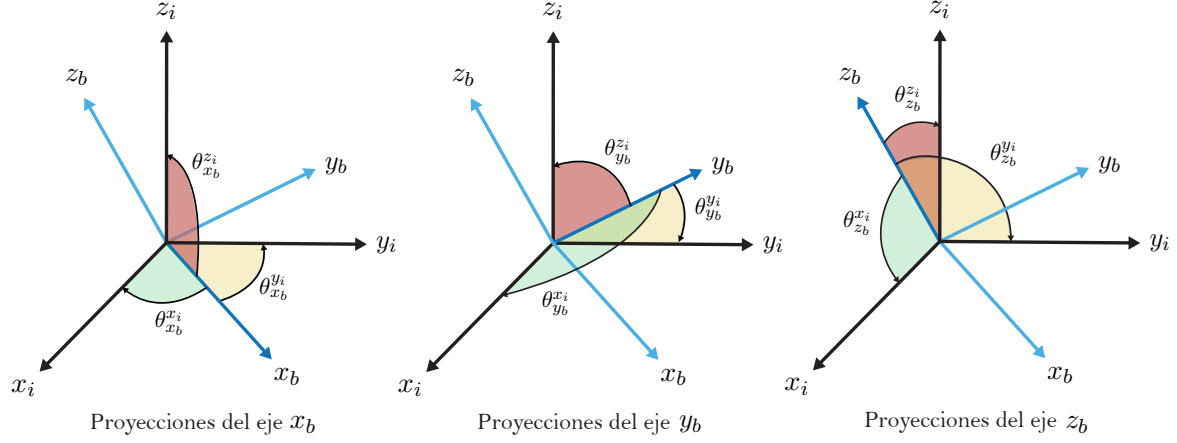


Figura 2.2: Representación geométrica de los cosenos directores. Se ilustra una orientación arbitraria del marco del cuerpo \mathcal{B} con respecto al marco inercial \mathcal{I} . Se detallan los ángulos θ_{kb}^{ji} que definen la proyección ortogonal de los tres ejes del cuerpo ($\mathbf{x}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b$) sobre los respectivos ejes inerciales ($\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i$).

Ángulos de Euler

Para obtener una representación mínima computacionalmente eficiente, se emplean los ángulos de Euler, los cuales parametrizan la orientación mediante un conjunto de parámetros que representan el ángulo de rotación alrededor de un eje base de un marco de referencia específico.

Para un marco inercial, se definen las matrices de rotación básicas (R_x, R_y, R_z) que representan rotaciones individuales sobre los ejes x_i, y_i y z_i respectivamente. Estas matrices se deducen como casos particulares de la Matriz de Cosenos Directores (DCM) al restringir la rotación a un solo eje:

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}, \quad R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El teorema de Euler establece que la composición de rotaciones básicas respecto a ejes concurrentes (mismo origen) es equivalente a una única rotación resultante [24]. Por consiguiente, la orientación de un vehículo aéreo puede ser descrita mediante rotaciones básicas sucesivas modeladas a través del producto matricial. Dado que el grupo $SO(3)$ es no conmutativo, el orden en el que se ejecutan los productos dará lugar a diferentes orientaciones, tal como se ilustra en la Figura (2.3).

Como consecuencia de esta no conmutatividad, existe una amplia variedad de secuencias posibles. No obstante, la literatura aeronáutica adopta por convención los ángulos intrínsecos de Tait-Bryan, secuencia que define tres rotaciones sucesivas sobre los ejes móviles (Figura (2.4)):

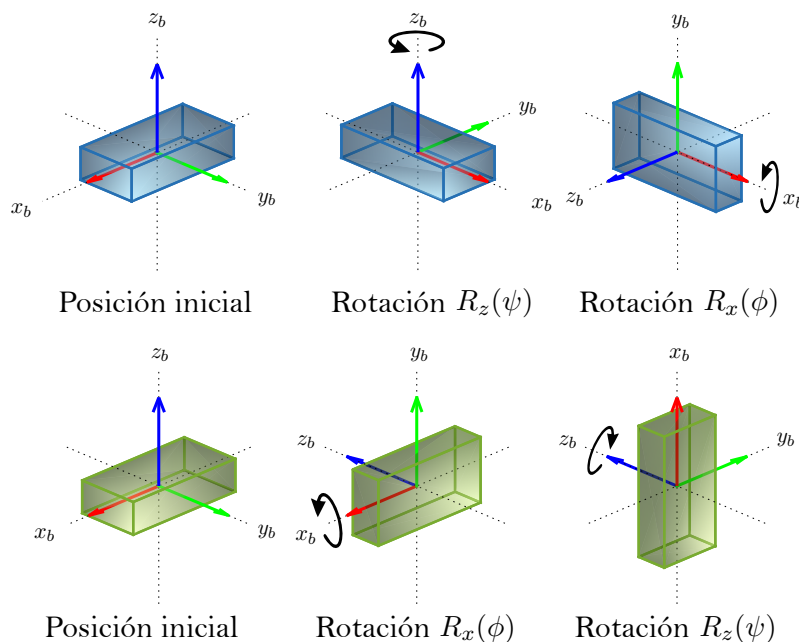


Figura 2.3: Visualización de la propiedad no conmutativa en $SO(3)$. La secuencia superior aplica primero una rotación de 90° alrededor del eje z ($R_z(\psi)$) seguida de una rotación de 90° alrededor de x ($R_x(\phi)$), mientras que la secuencia inferior invierte el orden de aplicación. La diferencia en la orientación final demuestra que la composición de rotaciones depende de la secuencia de ejecución.

1. **Rotación de guiñada (*yaw*):** rotación alrededor del eje z_i del marco inercial, parametrizada por el ángulo ψ .
2. **Rotación de cabeceo (*pitch*) θ :** rotación alrededor del eje móvil intermedio y' , (conocido frecuentemente como eje de nodos) parametrizada por el ángulo θ .
3. **Rotación de alabeo (*roll*) ϕ :** rotación alrededor del eje móvil x_b parametrizada por el ángulo ψ .

La matriz resultante se obtiene post-multiplicando las matrices básicas en el orden descrito:

$$R_b^i = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$$

Al desarrollar el producto matricial, se obtiene la matriz de rotación completa que relaciona el marco móvil con el marco inercial:

$$R_b^i(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & s_\phi s_\psi + c_\phi s_\theta c_\psi \\ s_\psi c_\theta & s_\phi s_\psi s_\theta + c_\phi c_\psi & -s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

donde $c_\phi = \cos \phi$, $s_\phi = \sin \phi$, $c_\theta = \cos \theta$, $s_\theta = \sin \theta$, $c_\psi = \cos \psi$, $s_\psi = \sin \psi$. Dado que la matriz de rotación depende únicamente de los ángulos de Euler la orientación queda completamente definida por el vector de estado.

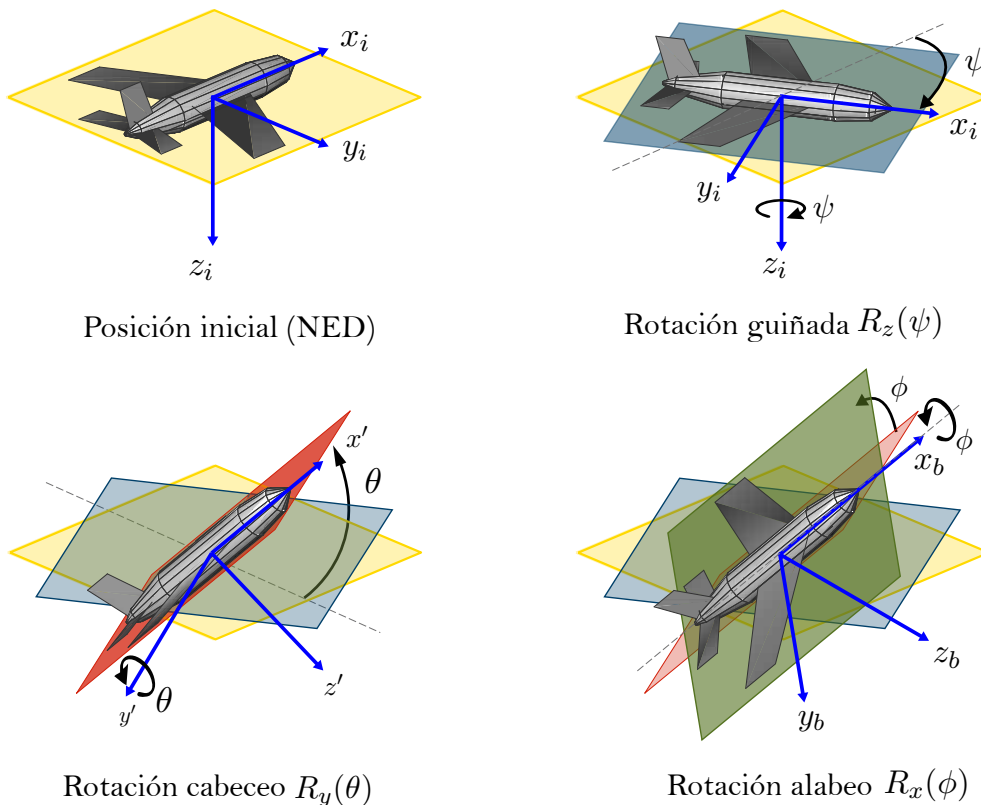


Figura 2.4: Secuencia de rotaciones intrínsecas de Tait-Bryan ZYX . El proceso ilustra la transición desde la orientación inicial en el marco inercial (NED) hasta su orientación final en el marco del cuerpo \mathcal{B} mediante las rotaciones sucesivas de guiñada (ψ), cabeceo (θ) y alabeo (ϕ).

$$\eta = [\phi \ \theta \ \psi]^T \in \mathbf{R}^3 \quad (2.5)$$

Esta parametrización mínima presenta una singularidad topológica (*gimbal lock*) cuando $\theta = \pm\pi/2$, estado en el cual los ejes de alabeo y guiñada se alinean y el sistema pierde un grado de libertad. No obstante, los ángulos de Euler ofrecen ventajas prácticas: utilizan únicamente tres parámetros (frente a los nueve de la DCM) y proporcionan una interpretación física directa. Para su aplicación, es necesario garantizar que el régimen operativo del sistema permanezca alejado de la singularidad.

2.1.2. Cinemática Diferencial

La cinemática diferencial establece la relación entre las velocidades físicas del vehículo (medidas localmente en el marco del cuerpo \mathcal{B}) y la tasa de cambio de sus coordenadas generalizadas (observadas desde el marco inercial \mathcal{I}). Esta distinción es fundamental para el modelado, ya que los sensores a bordo registran magnitudes relativas a \mathcal{B} , mientras que las tareas de control y seguimiento de trayectorias requieren un conocimiento de la configuración de la aeronave en \mathcal{I} .

Velocidad lineal

La velocidad de traslación en el marco inercial, definida como la derivada del vector de posición $\dot{\boldsymbol{\xi}} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^\top$, se relaciona directamente con la velocidad lineal medida en el cuerpo, $\mathbf{v}_b = [v_x, v_y, v_z]^\top$, a través de la matriz de rotación R_b^i :

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = R_b^i \mathbf{v}_b. \quad (2.6)$$

Velocidad angular

A diferencia de la traslación, el vector de velocidad angular del cuerpo, denotado como $\boldsymbol{\omega}_b = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^\top$, no equivale a la derivada directa de los ángulos de Euler ($\boldsymbol{\omega}_b \neq \dot{\boldsymbol{\eta}}$). Mientras que $\boldsymbol{\omega}_b$ representa una rotación instantánea sobre la base ortonormal de \mathcal{B} , la cual puede ser medida por un sensor a bordo, el vector $\dot{\boldsymbol{\eta}} = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^\top$ está compuesto por derivadas que actúan sobre los ejes de rotación generados durante la secuencia ZYX (Figura (2.5)).

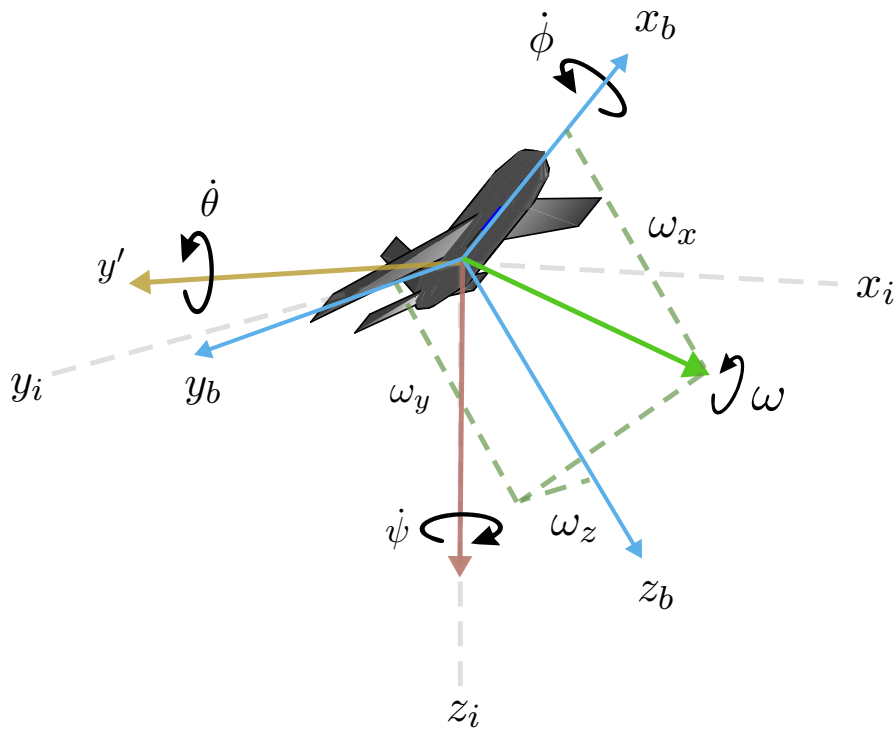


Figura 2.5: Representación geométrica de las tasas de cambio de los ángulos de Euler y el vector de velocidad angular. Las derivadas temporales $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ actúan sobre ejes intermedios (x_b, y', z_i) no necesariamente ortogonales. El vector de velocidad angular instantánea $\boldsymbol{\omega}_b$ (color verde) se descompone en proyecciones sobre la base ortonormal del cuerpo \mathcal{B} .

Al proyectar las contribuciones individuales de cada tasa de Euler $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ sobre los ejes del marco del cuerpo, se obtiene la ecuación cinemática rotacional:

$$\boldsymbol{\omega}_b = W(\boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}}, \quad (2.7)$$

donde la matriz de transformación cinemática $W(\boldsymbol{\eta})$ se define como:

$$W(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}$$

Para propósitos de simulación y diseño de leyes de control, se requiere la relación cinemática inversa:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = W(\boldsymbol{\eta})^{-1} \boldsymbol{\omega}_b. \quad (2.8)$$

Esta matriz es útil durante la implementación física ya que permite calcular las derivadas de los ángulos de Euler por medio de las velocidades angulares obtenidas de los giroscopios u otros sensores.

2.2. Dinámica de los vehículos aéreos

El modelo dinámico relaciona las fuerzas (\mathbf{F}) y momentos (\mathbf{M}) externos con la evolución temporal de la configuración espacial del vehículo, fundamentado en las leyes de Newton-Euler [23]:

- **Primera ley (Momento lineal):** Establece que la tasa de cambio del momento lineal ($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$) en un sólido rígido, es igual a la suma de todas las fuerzas (F_i) externas que actúan sobre él.

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (2.9)$$

- **Segunda ley (Momento angular):** Establece que la tasa de cambio del momento angular (h) alrededor de un punto (centro de masa) es igual a la suma de los pares (momento de fuerzas) externos aplicados al sólido (M_i).

$$\sum_i \mathbf{M}_i = \frac{d\mathbf{h}}{dt} \quad (2.10)$$

2.2.1. Dinámica traslacional

La traslación de la aeronave está gobernada por cuatro fuerzas principales representadas por los vectores que se ilustran en la Figura (2.6): el peso (\mathbf{W}_i), expresado en el marco de referencia inercial \mathcal{I} ; así como el empuje (\mathbf{T}_b), la sustentación (\mathbf{L}_b) y el arrastre aerodinámico (\mathbf{D}_b), magnitudes que dependen de la orientación y la aerodinámica local, por lo que se definen en el marco móvil \mathcal{B} .

Para formular la ecuación de movimiento en el espacio inercial \mathcal{I} , condición necesaria para tareas de navegación y seguimiento de trayectoria, las fuerzas expresadas en el marco del cuerpo deben proyectarse al marco móvil mediante la matriz de rotación R_b^i . Asumiendo que la masa m de la aeronave permanece constante, y partiendo de la Ecuación (2.9), la dinámica traslacional queda representada como:

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{m} \mathbf{W}_i + \frac{1}{m} R_b^i (\mathbf{T}_b + \mathbf{L}_b + \mathbf{D}_b). \quad (2.11)$$

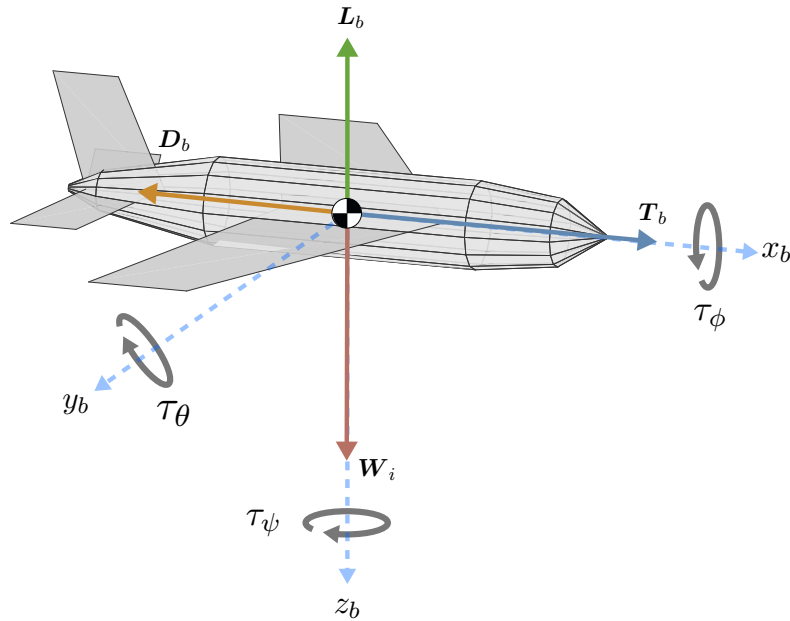


Figura 2.6: Diagrama de cuerpo libre de la aeronave. Se ilustran las principales fuerzas responsables de la traslación (\mathbf{W}_i , \mathbf{T}_b , \mathbf{L}_b , \mathbf{D}_b) referenciadas a los marcos \mathcal{I} y \mathcal{B} , así como los pares de control rotacional de alabeo (τ_ϕ), cabeceo (τ_θ) y guiñada (τ_ψ) aplicados sobre los ejes principales de la aeronave.

2.2.2. Dinámica rotacional

La dinámica rotacional de la aeronave está regida por la segunda ley del movimiento de Euler (Ecuación (2.10)). Dado que los pares externos y de control se aplican directamente sobre la estructura de la aeronave, y que su tensor de inercia (\mathbf{J}) permanece invariante en el tiempo cuando se define con respecto al marco móvil \mathcal{B} , es una práctica común expresar la Ecuación (2.10) en términos de dicho marco de referencia. Para ello, se utiliza el teorema del transporte [8] que permite relacionar la derivada del momento angular, en términos de los marcos inercial y móvil:

$$\left(\frac{d\mathbf{h}_b}{dt}\right)_i = \left(\frac{d\mathbf{h}_b}{dt}\right)_b + \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{h}_b, \quad (2.12)$$

donde $\mathbf{h}_b = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_b$ representa momento angular total con respecto al centro de masa. La matriz $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ corresponde al tensor de inercia del cuerpo rígido, el cual agrupa los momentos y productos de inercia que describen la distribución espacial de su masa. Sustituyendo la definición del momento angular en la Ecuación (2.12), y considerando que para un cuerpo rígido el tensor de inercia es invariante en el tiempo respecto al marco móvil ($\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{0}$), la ecuación rotacional de Euler adopta la forma:

$$\sum \mathbf{M}_b = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b + \boldsymbol{\omega}_b \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_b), \quad (2.13)$$

donde $\sum \mathbf{M}_b$ representa el vector de pares externos aplicados al centro de masa de la aeronave, expresados en el marco \mathcal{B} .

De manera general, los pares externos aplicados al cuerpo de una aeronave se pueden definir de la siguiente forma:

$$\sum M_b = \tau_c + \tau_a + \tau_g, \quad (2.14)$$

donde:

- **τ_c (pares de control):** representa los momentos generados por la propia aeronave a través de su sistema de actuadores para modificar la orientación del vehículo, los cuales se ilustran en la Figura (2.6). Dependiendo de la configuración de la aeronave, estos provienen de superficies aerodinámicas (alergones, timones), o del par diferencial de los rotores.
- **τ_a (pares aerodinámicos):** pares resultantes de la interacción del flujo de aire con la estructura del fuselaje (arrastre rotacional) y perturbaciones externas del viento.
- **τ_g (pares giroscópicos):** efectos reactivos ocasionados por el cambio de orientación del vector de momento angular de los rotores, los cuales rotan a alta velocidad mientras se mantienen fijos al marco del cuerpo.

Finalmente, al sustituir los pares externos y la derivada del momento angular expresada en el marco móvil (Ecuación (2.12)), se obtiene la ecuación diferencial que gobierna la dinámica rotacional de la aeronave:

$$\dot{\omega}_b = \mathbf{J}^{-1} [\tau_c + \tau_a + \tau_g - \omega_b \times (\mathbf{J}\omega_b)]. \quad (2.15)$$

2.2.3. Sistema de ecuaciones

Para obtener una representación en espacio de estados del sistema dinámico, definimos el vector de estado que agrupa las variables asociadas al movimiento de la aeronave como:

$$\zeta = [\xi \quad v_i \quad \eta \quad \omega_b]^\top,$$

Dadas las ecuaciones que describen la cinemática ((2.6)-(2.7)) y la dinámica ((2.11) - (2.15)) del sistema, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales, ampliamente utilizado en la literatura (ver [34]), que describe el movimiento de un vehículo aéreo:

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{v}_i \\ \dot{\eta} \\ \dot{\omega}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i \\ \frac{1}{m} \mathbf{W}_i + \frac{1}{m} R_b^i (\mathbf{T}_b + \mathbf{L}_b + \mathbf{D}_b) \\ W(\boldsymbol{\eta})^{-1} \omega_b \\ \mathbf{J}^{-1} [-\omega_b \times (\mathbf{J}\omega_b) + \tau_c + \tau_a + \tau_g] \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

La Figura (2.7) ilustra el diagrama de bloques que representa este sistema de ecuaciones. Se observa que el sistema está compuesto por: el subsistema rotacional, que controla la orientación de la aeronave a través de los pares externos, y el subsistema traslacional que controla la posición del vehículo mediante las fuerzas externas, proyectadas por medio de su orientación.

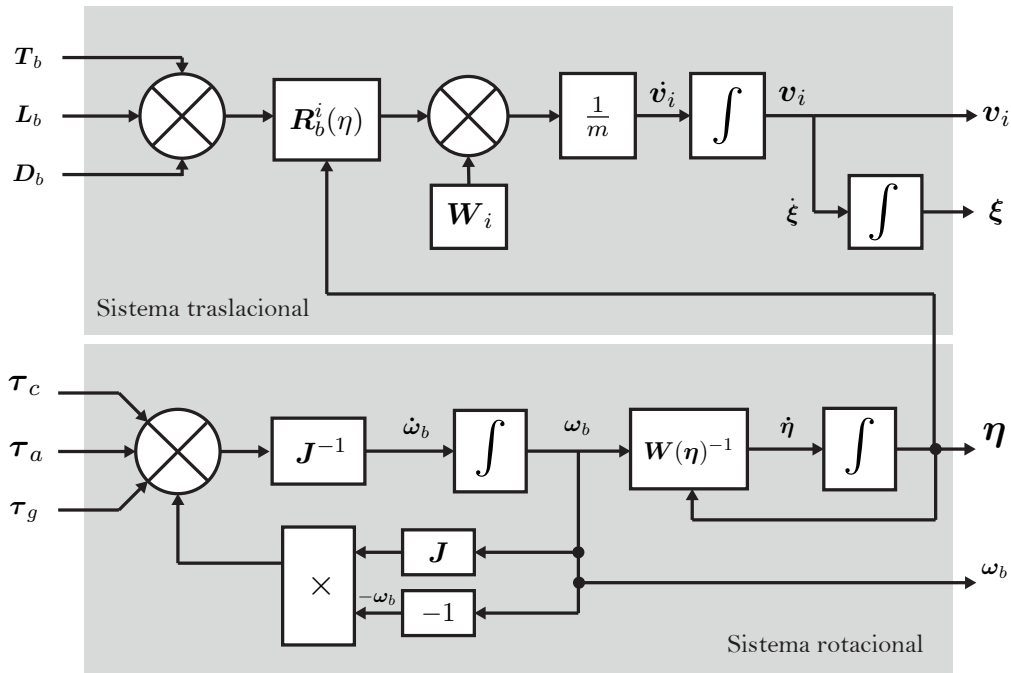


Figura 2.7: Diagrama de bloques del modelo dinámico de una aeronave. El diagrama muestra el acoplamiento entre los subsistemas, donde la dinámica rotacional (inferior) gobierna la orientación η , la cual a su vez proyecta las fuerzas que actúan sobre el subsistema traslacional (superior).

2.3. Modelado de vehículos aéreos multirrotores

Una vez establecidas las ecuaciones generales que gobiernan el movimiento de una aeronave en el espacio tridimensional, en esta sección se desarrolla la formulación que permite modelar el movimiento de un vehículo aéreo no tripulado del tipo multirrotor. A diferencia de las formulaciones clásicas que asumen una configuración de rotores fijos a la estructura de la aeronave, en este trabajo se plantea un modelo matemático generalizado basado en rotores reorientables (vectorización de empuje).

Como se discutió en la introducción, el sistema de propulsión basado en rotores es el elemento principal de este tipo de aeronaves, ya que genera las fuerzas responsables del movimiento traslacional, así como los momentos requeridos para controlar la orientación del vehículo. Por ello, comprender la dinámica asociada a los rotores, así como especificar la estructura física de la aeronave, resulta indispensable para completar la descripción del modelo dinámico general del multirrotor.

2.3.1. Dinámica del sistema de rotores

En los vehículos aéreos multirrotores, la unidad fundamental de actuación es el conjunto motor-hélice (rotor), el cual cumple simultáneamente las funciones de sustentación y propulsión. Al girar a una velocidad angular Ω_i , el i -ésimo rotor genera una fuerza de empuje (f_i) perpendicular a su plano de rotación, así como un par

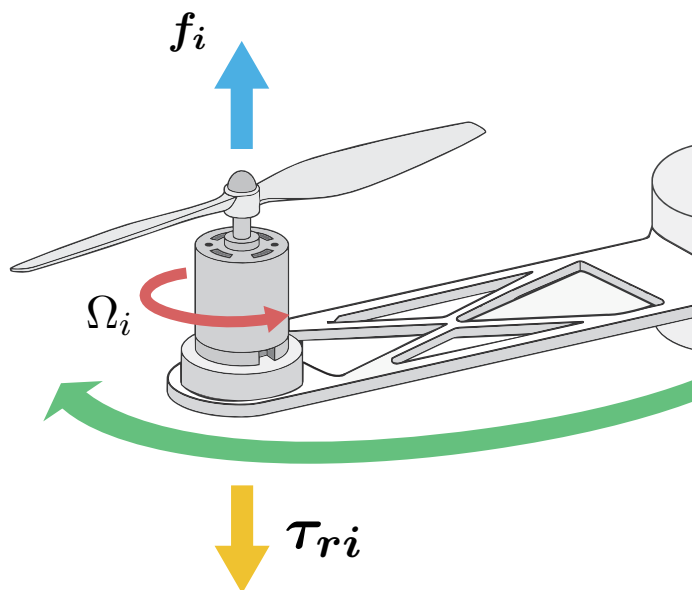


Figura 2.8: Dinámica del rotor. La rotación de la hélice a una velocidad Ω_i genera una fuerza de empuje f_i y un torque de arrastre aerodinámico. Este último se manifiesta como un torque de reacción τ_{ri} que se transfiere a la estructura del vehículo haciendo rotar el brazo en dirección contraria al sentido de giro del rotor.

de reacción aerodinámica (τ_{ri}), los cuales se ilustran en la Figura (2.8). Este par se transfiere directamente a la estructura del vehículo, induciendo un momento en sentido opuesto al giro de la hélice. Una aproximación ampliamente utilizada en la literatura [51] consiste en modelar dichas magnitudes bajo un régimen de vuelo cuasi-estacionario de la siguiente forma:

$$f_i = k_f \Omega_i^2, \quad (2.17)$$

$$\tau_{ri} = k_m \Omega_i^2, \quad (2.18)$$

donde $k_f > 0$ es el coeficiente de empuje [$\text{N} \cdot \text{s}^2/\text{rad}^2$] y $k_m > 0$ es el coeficiente de resistencia aerodinámica [$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2/\text{rad}^2$]. Estos parámetros dependen de la geometría de la hélice así como de la densidad del aire, y suelen caracterizarse de forma experimental.

2.3.2. Configuración de rotores reorientables

En el contexto de los multirrotores, la *vectorización de empuje* es un concepto que describe la capacidad de cambiar la dirección del vector de fuerza de cada rotor de manera independiente a la orientación del vehículo. Esto es posible gracias al uso de articulaciones móviles acopladas a los rotores, accionadas, generalmente, por servomecanismos. Esta acción introduce grados de libertad adicionales en el control, lo cual puede reducir el acoplamiento entre traslación y rotación, dotando a la aeronave de la capacidad de actuación completa sobre los seis grados de libertad (6-DOF), o en su defecto, aumentando la redundancia y la autoridad de control en ejes específicos.

Al desarrollar las ecuaciones de movimiento bajo este enfoque generalizado de rotores reorientables, el modelo matemático adquiere la flexibilidad necesaria para describir configuraciones complejas. Por lo tanto, la arquitectura estándar de rotores fijos se deduce de manera directa como un caso especial restrictivo, donde los ángulos de inclinación de los rotores son cero. La Figura (2.9) ilustra ambas configuraciones: rotor fijo y rotor con vectorización de empuje.

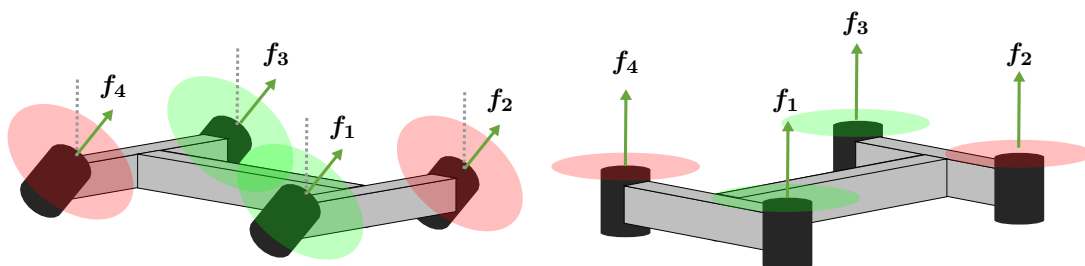


Figura 2.9: Se ilustran las configuraciones principales de multirrotores. **Derecha:** Configuración clásica de rotores fijos. Las fuerzas de empuje individuales apuntan siempre en la misma dirección. **Izquierda:** Configuración con vectorización de empuje. La dirección de las fuerzas de empuje varían de acuerdo a las articulaciones de la aeronave.

2.3.3. Fuerzas y momentos en el multirrotor

Habiendo establecido el modelo general para una aeronave, la particularización para un vehículo multirrotor radica principalmente en la caracterización de las fuerzas y los pares generados debido a su arquitectura, los cuales se definen con respecto al marco de referencia móvil \mathcal{B} e inercial \mathcal{I} , tal y como se ilustran en la Figura (2.10).

Fuerzas externas

De acuerdo con el modelo dinámico traslacional general (Ecuación (2.11)), las principales fuerzas que actúan sobre la aeronave son el peso, el empuje, la sustentación y la resistencia aerodinámica. Sin embargo, las fuerzas aerodinámicas de sustentación y resistencia (\mathbf{L} y \mathbf{D}) resultan despreciables debido a la baja velocidad longitudinal que suelen alcanzar este tipo de vehículos para la mayoría de sus aplicaciones. Por tal motivo, para propósitos de control, dichas fuerzas suelen agruparse en un vector de perturbaciones aerodinámicas definido como:

$$\mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Por el contrario, las dos fuerzas principales que actúan sobre esta aeronave son el peso y el empuje, las cuales se ilustran en la Figura (2.10). Bajo la convención adoptada, el eje z_i del marco inercial apunta en la dirección positiva hacia abajo. En consecuencia, el vector de peso expresado en el marco inercial se define como:

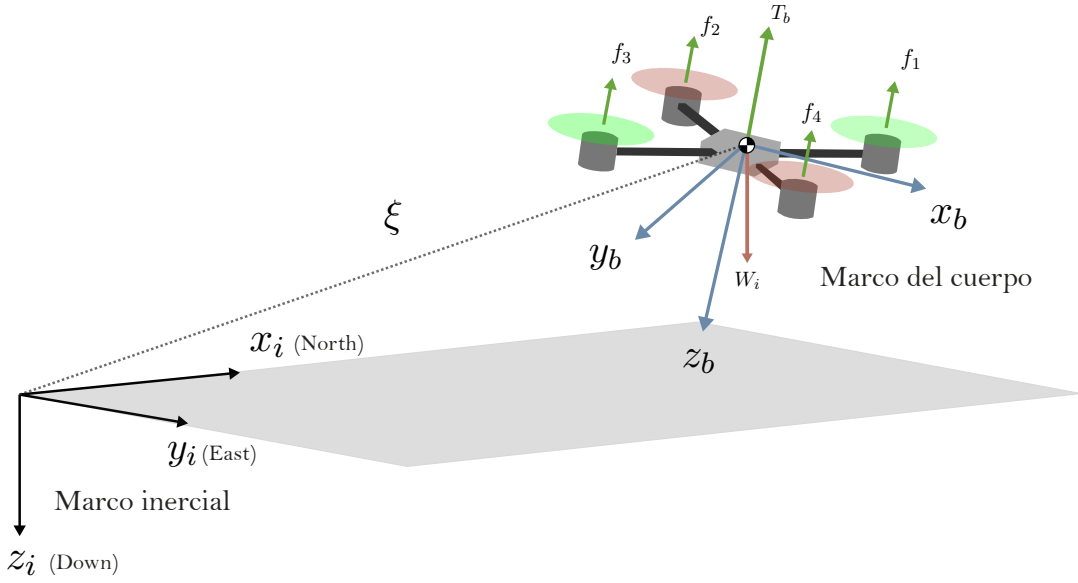


Figura 2.10: Definición de los marcos de referencia y coordenadas generalizadas del multirrotores (tipo cuadricóptero). Se ilustra el marco inercial \mathcal{I} bajo la convención NED (Norte-Este-Abajo) y el marco del cuerpo \mathcal{B} . El vector ξ describe la posición del centro de masa del vehículo respecto al origen inercial, mientras que W_i representa la acción del peso, T_b el empuje total y $(f_1 \dots f_4)$ las fuerzas individuales de los rotores

$$W_i = m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

donde g representa la magnitud de la aceleración de la gravedad y m la masa del vehículo. Como se muestra en el diagrama de la Figura (2.10), al estar alineado con el eje z_i , el vector de peso se opone al movimiento ascendente de la aeronave.

En un multirrotores, el empuje total (T_b), generado a partir de la suma de las fuerzas individuales (f_i) de los n rotores constituye la fuerza dominante, ya que es el principal mecanismo para compensar el peso y dirigir el movimiento de la aeronave. Por su parte, las fuerzas de empuje generadas de manera individual por cada rotor, actúan en dirección perpendicular a su plano de rotación, el cual puede cambiar de orientación.

Por lo tanto, para describir los efectos de la vectorización del empuje, se introduce un conjunto de marcos de referencia locales. Cada rotor cuenta con un marco fijo \mathcal{R}_i , cuyo origen coincide con el centro de masa del i -ésimo rotor y se mueve con él (Figura (2.11)). Dado que la fuerza de empuje apunta en la dirección negativa del eje vertical (convención estándar en sistemas NED), el vector unitario que define la dirección del empuje, expresado en términos del marco del rotor, se define como $e_{r_i} = [0, 0, -1]^T$.

Asumiendo que el mecanismo de articulación posee k grados de libertad, la orientación del vector e_{r_i} con respecto al marco del cuerpo \mathcal{B} se determina mediante la matriz de rotación $R_{r_i}^b(\alpha_i) \in SO(3)$, la cual mapea los vectores del marco del rotor al marco

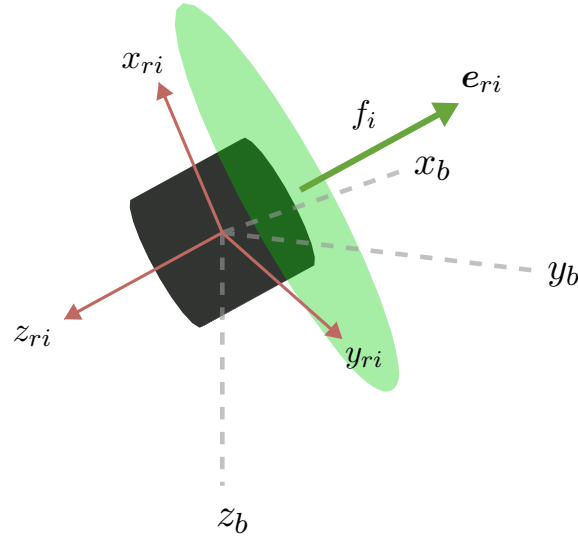


Figura 2.11: Representación esquemática del i -ésimo rotor re-orientable. Se ilustra la magnitud (f_i) y el vector de dirección de la fuerza de empuje (e_{ri}). Así como la relación entre el marco del cuerpo $\mathcal{B} = (x_b, y_b, z_b)$ y el marco del rotor $\mathcal{R}_i = (x_{ri}, y_{ri}, z_{ri})$.

del cuerpo. De este modo, el vector unitario de dirección se expresa en términos del marco del vehículo como:

$$\mathbf{e}_{b_i} = R_{r_i}^b(\boldsymbol{\alpha}_i) \mathbf{e}_{r_i}, \quad (2.21)$$

donde $\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbb{R}^k$ agrupa las coordenadas generalizadas (ángulos de orientación) de la i -ésima articulación, siendo $k \leq 3$ el número de grados de libertad del mecanismo.

Bajo este enfoque, el vector de fuerza de empuje del i -ésimo rotor queda definido por:

$$\mathbf{f}_i = f_i R_{r_i}^b(\boldsymbol{\alpha}_i) \mathbf{e}_{r_i}, \quad (2.22)$$

donde f_i es la magnitud del empuje. En consecuencia, por el principio de superposición, el empuje total \mathbf{T}_b , expresado en el marco del cuerpo, se formula de la siguiente manera:

$$\mathbf{T}_b = \sum_{i=1}^n f_i R_{r_i}^b(\boldsymbol{\alpha}_i) \mathbf{e}_{r_i}. \quad (2.23)$$

Pares externos

En la dinámica de multirrotores, los momentos aplicados son determinantes, ya que gobiernan directamente la evolución de la orientación del vehículo. Como se estableció previamente, estos momentos se agrupan en tres categorías: pares de control ($\boldsymbol{\tau}_c$), pares aerodinámicos ($\boldsymbol{\tau}_a$) y efectos giroscópicos ($\boldsymbol{\tau}_g$).

El vector de pares de control, definido como $\boldsymbol{\tau}_c = [\tau_\phi \quad \tau_\theta \quad \tau_\psi]^\top$, permite generar movimiento rotacional a partir de los actuadores de la aeronave. Cada rotor proporciona

dos contribuciones al par de control aplicado al cuerpo del vehículo:

- **Par debido al empuje (τ_{f_i}).** La aplicación de una fuerza de empuje a una distancia (l_i) del centro de masa del vehículo produce un par que se modela como el resultado del producto cruz (ver Figura (2.12)):

$$\tau_{f_i} = \mathbf{l}_i \times \mathbf{f}_i, \quad (2.24)$$

donde $\mathbf{l}_i = [l_{xi} \ l_{yi} \ l_{zi}]^\top$ representa el vector de posición que va desde el centro de masa hasta el punto de aplicación de la fuerza del i -ésimo rotor, expresado en el marco cuerpo.

- **Par de reacción (τ_{r_i}).** El par de reacción se opone al giro del motor y es colineal con su eje de rotación. A partir de las relaciones $\tau_{r_i} = k_m \Omega_i^2$ y $f_i = k_f \Omega_i^2$, derivadas de la dinámica del rotor, el vector de par de reacción puede expresarse como:

$$\tau_{r_i} = \sigma_i c f_i \mathbf{e}_{bi}, \quad (2.25)$$

donde $c = \frac{k_m}{k_f}$ es el factor de proporcionalidad entre par y empuje, y $\sigma_i \in \{+1, -1\}$ determina el signo del par en función del sentido de giro del rotor, tal y como se ilustra en la Figura (2.12) .

Por lo tanto, el par total aportado por el i -ésimo rotor τ_i se expresa como:

$$\tau_i = \tau_{f_i} + \tau_{r_i}. \quad (2.26)$$

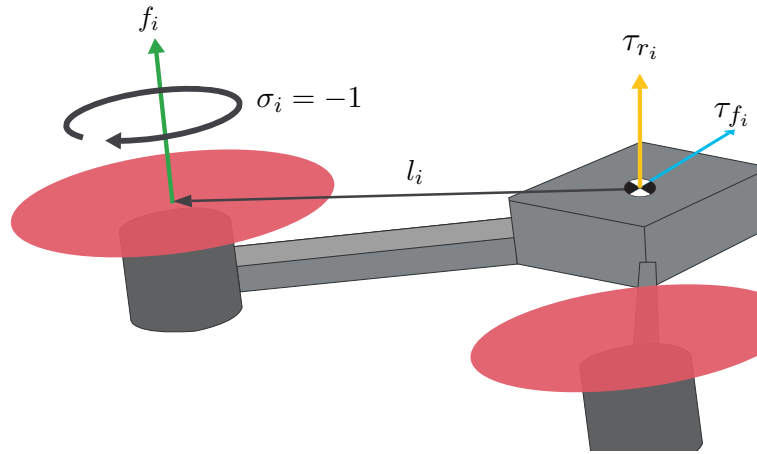


Figura 2.12: Componentes del par de control generadas por el i -ésimo rotor. Se ilustra el momento (τ_{f_i}) generado por la fuerza de empuje f_i debido al brazo de palanca l_i , y el par de reacción aerodinámica (τ_{r_i}) inducido por la rotación del rotor.

En consecuencia, para un multirrotor de n rotores y considerando la vectorización del empuje, el par de control total aplicado al cuerpo del vehículo se obtiene mediante la suma de las componentes individuales del par:

$$\tau_c = \sum_{i=1}^n (\mathbf{l}_i \times f_i R_{r_i}^b(\alpha_i) \mathbf{e}_{r_i} + \sigma_i c_i f_i R_{r_i}^b(\alpha_i) \mathbf{e}_{r_i}). \quad (2.27)$$

Para facilitar el análisis, resulta conveniente reescribir el producto cruz mediante el operador de matriz antisimétrica. Para esto se define la matriz $[\mathbf{l}_i]_{\times} \in \mathfrak{so}(3)$ a partir de las componentes del vector de posición \mathbf{l}_i , como:

$$[\mathbf{l}_i]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -l_{zi} & l_{yi} \\ l_{zi} & 0 & -l_{xi} \\ -l_{yi} & l_{xi} & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, sustituyendo $[\mathbf{l}_i]_{\times}$ en la Ecuación (2.27) y factorizando en términos de la fuerza de empuje se obtiene la forma compacta:

$$\boldsymbol{\tau}_c = \sum_{i=1}^n (\mathbf{M}_i R_{r_i}^b(\boldsymbol{\alpha}_i) \mathbf{e}_{r_i}) f_i, \quad (2.28)$$

donde $\mathbf{M}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es una matriz que agrupa los efectos del par inducido por el empuje y el par de reacción de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}_i = [\mathbf{l}_i]_{\times} + \sigma_i c_i \mathbf{I}_3,$$

siendo \mathbf{I}_3 la matriz identidad de dimensión 3×3 .

En cuanto a los pares aerodinámicos, debido a la baja inercia del vehículo, estos pueden ser agrupados junto con las perturbaciones en un vector de torque aerodinámico $\boldsymbol{\tau}_a$. Finalmente, la alta rotación de las hélices induce un par de precesión giroscópica que acopla la dinámica transversal del vehículo. Este efecto puede modelarse como:

$$\boldsymbol{\tau}_g = \sum_{i=1}^n \sigma_i J_r \Omega_i (\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{e}_{bi}), \quad (2.29)$$

donde J_r es el momento de inercia del rotor alrededor de su eje de giro.

Sistema de ecuaciones

A partir de la ecuación general de movimiento (2.16) y de las expresiones para las fuerzas externas, la dinámica traslacional de un multirrotores se describe como:

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}}_{f_v(\zeta)} + \frac{1}{m} R_b^i \mathbf{A}_b + \underbrace{\frac{1}{m} R_b^i \mathbf{T}_b}_{b_v(\zeta)}. \quad (2.30)$$

De manera similar, para la dinámica rotacional se obtiene:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = \underbrace{J^{-1} [-\boldsymbol{\omega}_b \times (J \boldsymbol{\omega}_b) + \boldsymbol{\tau}_d + \boldsymbol{\tau}_g]}_{f_{\omega}(\zeta)} + J^{-1} \boldsymbol{\tau}_c. \quad (2.31)$$

Se define el vector de entradas de control virtuales expresadas en el marco del cuerpo:

$$\mathbf{u}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_b \\ \boldsymbol{\tau}_c \end{bmatrix} = [T_x \quad T_y \quad T_z \quad \tau_{\phi} \quad \tau_{\theta} \quad \tau_{\psi}]^{\top} \in \mathbb{R}^6, \quad (2.32)$$

donde T_x y T_y representan las componentes de la fuerza de empuje laterales (ejes x_b y y_b , respectivamente) y T_z la componente de fuerza de empuje vertical (a lo largo del eje z_b). Agrupando los términos en forma matricial, se obtiene:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\xi}} \\ \dot{v}_i \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_b \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{\zeta}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ f_v(\boldsymbol{\zeta}) \\ W(\boldsymbol{\eta})^{-1}\boldsymbol{\omega}_b \\ f_\omega(\boldsymbol{\zeta}) \end{bmatrix}}_{f(\boldsymbol{\zeta})_m} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ b_v(\boldsymbol{\zeta}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & J^{-1} \end{bmatrix}}_{B(\boldsymbol{\zeta})_m} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_b \\ \boldsymbol{\tau}_c \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_m}. \quad (2.33)$$

El sistema de ecuaciones (2.33) modela la dinámica de un vehículo aéreo multirrotores de n rotores mediante el vector de estado $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^{12}$ y el vector de entradas virtuales $\mathbf{u}_m \in \mathbb{R}^6$. El término $f(\boldsymbol{\zeta})_m \in \mathbb{R}^{12}$ representa la dinámica natural del sistema, mientras que la matriz $B(\boldsymbol{\zeta})_m \in \mathbb{R}^{12 \times 6}$, conocida como matriz de entrada, define la manera en que las acciones de control afectan la evolución de los estados.

Finalmente, para completar el modelo dinámico es necesario establecer la relación entre las fuerzas de empuje individuales generadas por los n rotores y las entradas de control virtual que actúan sobre el cuerpo del vehículo. Para esto, las ecuaciones (2.23) y (2.28) se expresan de forma matricial como sigue:

$$\mathbf{u}_m = \mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{F}, \quad (2.34)$$

donde $\mathbf{F} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^\top \in \mathbb{R}^n$ es el vector de magnitudes de las fuerzas de empuje de los rotores, y $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ es la matriz de asignación (o matriz de mezcla) definida como:

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} R_r^b(\boldsymbol{\alpha}_i) \mathbf{e}_{r_i} & \dots & R_r^b(\boldsymbol{\alpha}_n) \mathbf{e}_{r_n} \\ \mathbf{M}_i R_r^b(\boldsymbol{\alpha}_i) \mathbf{e}_{r_i} & \dots & \mathbf{M}_n R_r^b(\boldsymbol{\alpha}_n) \mathbf{e}_{r_n} \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

que mapea el espacio de fuerzas de los actuadores hacia el espacio de fuerzas y momentos generalizados del cuerpo. Es importante notar que esta matriz de asignación depende de los vectores de coordenadas generalizadas de los rotores $\boldsymbol{\alpha}_i$, por lo que para un sistema con vectorización de empuje la matriz varía con respecto a dichos parámetros.

Con la formulación general establecida en la Ecuación (2.33), el modelado de distintas plataformas multirrotores puede abordarse de manera unificada: la estructura del sistema dinámico ($f(\boldsymbol{\zeta})_m \in \mathbb{R}^{12}$) y la matriz de entrada ($B(\boldsymbol{\zeta})_m \in \mathbb{R}^{12 \times 6}$) permanecen invariantes, mientras que la información específica de cada aeronave se incorpora mediante la matriz de asignación de control (\mathcal{M}), la cual codifica la arquitectura del vehículo: número de rotores, disposición geométrica \mathbf{l}_i y la orientación de los ejes de la fuerza empuje.

2.4. Configuraciones de multirrotores

El objetivo de esta sección es llevar el modelo dinámico general del multirrotores a diferentes configuraciones, lo que nos permite mostrar las diferencias entre diferentes arquitecturas. En este sentido, se adopta la ecuación general de movimiento Ecuación (2.33) previamente formulada y se introduce la información específica de la plataforma mediante la matriz de asignación de control Ecuación (2.34).

2.4.1. Configuración de rotores fijos

En esta arquitectura clásica, los motores se encuentran anclados fijamente a la estructura del vehículo, y carecen de mecanismos de inclinación para los rotores. Por lo tanto, el eje de rotación de cada rotor permanece paralelo al eje vertical del cuerpo (z_b) provocando que la matriz de rotación de los servomecanismos se reduzca a la matriz identidad, $R_{r_i}^b(\boldsymbol{\alpha}_i) = \mathbf{I}_3$.

Por lo tanto, la matriz de asignación de control para una plataforma de n rotores fijos queda definida explícitamente como:

$$\mathcal{M}_{\text{fix}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -l_{y1} & -l_{y2} & \cdots & -l_{yn} \\ l_{x1} & l_{x2} & \cdots & l_{xn} \\ -\sigma_1 c_1 & -\sigma_2 c_2 & \cdots & -\sigma_n c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times n}. \quad (2.36)$$

Matemáticamente, la capacidad de control del vehículo está intrínsecamente ligada al rango de la matriz de asignación ($\text{rank}(\mathcal{M})$). Este rango define la dimensión del subespacio de fuerzas y momentos que el sistema de propulsión puede generar de forma independiente. Para una configuración general de rotores fijos, el rango máximo está acotado por:

$$\text{rank}(\mathcal{M})_{\text{max}} = \text{mín}(\delta - \kappa, n), \quad (2.37)$$

donde $\delta = 6$ representa los grados de libertad del cuerpo rígido, n es el número de rotores y κ cuantifica el número de restricciones estructurales de la plataforma. En términos de álgebra lineal, κ corresponde al número de filas en la matriz de asignación que son nulas o linealmente dependientes.

En el caso específico de multirrotores con rotores fijos, el análisis estructural de la matriz de asignación revela que las filas correspondientes a las fuerzas laterales T_x y T_y son nulas. Esta condición refleja la incapacidad física de la plataforma para generar esfuerzos de control de forma directa en el plano horizontal, introduciendo dos restricciones estructurales al sistema ($\kappa = 2$). En consecuencia, el rango máximo para este tipo de vehículo es igual a:

$$\text{rank}(\mathcal{M})_{\text{max}} = \text{mín}(6 - 2, n) = 4, \quad \forall n \geq 4. \quad (2.38)$$

Este resultado demuestra analíticamente que, independientemente del número de rotores que se añadan, el sistema de propulsión solo puede actuar de forma directa sobre un subespacio de dimensión 4, correspondiente al empuje vertical total y los pares de alabeo y guiñada.

Por razones de eficiencia computacional y claridad en el diseño de los controladores, se omiten las filas nulas y se redefine la matriz de asignación para vehículos de rotores fijos como una matriz reducida $\mathcal{M}_{\text{fix}} \in \mathbb{R}^{4 \times n}$:

$$\mathcal{M}_{\text{fix}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -l_{y1} & -l_{y2} & \cdots & -l_{yn} \\ l_{x1} & l_{x2} & \cdots & l_{xn} \\ c_\tau & -c_\tau & \cdots & -\sigma_n c_\tau \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times n}. \quad (2.39)$$

De la misma forma, el vector de entradas de control virtuales se redefine en el espacio reducido \mathbb{R}^4 como $\mathbf{u}_{\text{fix}} = [T_z \ \tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi]^\top$, asumiendo implícitamente que $T_x = 0$ y $T_y = 0$.

Esta reducción dimensional resalta la naturaleza del vehículo como un **sistema subactuado**: el espacio de configuración requiere gobernar 6 grados de libertad, pero el sistema solo dispone de 4 entradas de control independientes. Por lo tanto, para controlar la posición completa del vehículo ($\zeta \in \mathbb{R}^{12}$), es indispensable recurrir al acoplamiento dinámico descrito en las ecuaciones generales de movimiento. Físicamente, esto implica que para trasladarse horizontalmente, el controlador debe inclinar el vehículo (modificando ϕ o θ), permitiendo que la matriz de rotación proyecte una componente del vector de empuje principal sobre los ejes inerciales deseados.

Finalmente, la Ecuación (2.37) establece un criterio de diseño fundamental: para garantizar la controlabilidad total del subespacio reducido \mathbb{R}^4 , la plataforma debe contar con un mínimo de cuatro actuadores independientes ($n \geq 4$). En el caso hipotético de un multirroto de tres rotores fijos ($n = 3$), el rango máximo sería 3, lo que implicaría que el sistema, ya de por sí subactuado, perdería la capacidad de controlar uno de sus ejes rotacionales (típicamente la guiñada) de forma independiente. Por esta razón, las configuraciones funcionales de rotores fijos inician con el cuadricóptero ($n = 4$), donde la matriz es cuadrada y de rango completo, y se extienden hacia configuraciones redundantes ($n > 4$) como el hexacóptero, las cuales se analizan como casos particulares en las siguientes secciones.

Cuadricóptero tipo X

Esta configuración se caracteriza por la disposición simétrica de sus cuatro rotores formando una estructura en "X". Los brazos del vehículo se ubican a un ángulo φ con respecto al eje longitudinal x_b , sobre los cuales se colocan los rotores a una distancia radial d con respecto al centro de gravedad (Figura (2.13)). Para compensar los pares de reacción, y garantizar el equilibrio, se adopta la topología de giro estándar: los rotores impares $\{1, 3\}$ giran en sentido antihorario ($\sigma_i = 1$), mientras que los pares $\{2, 4\}$ lo hacen en sentido horario ($\sigma_i = -1$).

Con base en esta geometría, los vectores de posición \mathbf{l}_i de cada rotor expresados en el marco del cuerpo se definen mediante la proyección trigonométrica de la distancia d de la siguiente forma:

$$\mathbf{l}_1 = \begin{bmatrix} d \cos \varphi \\ d \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_2 = \begin{bmatrix} d \cos \varphi \\ -d \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_3 = \begin{bmatrix} -d \cos \varphi \\ -d \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_4 = \begin{bmatrix} -d \cos \varphi \\ d \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Sustituyendo los elementos de dichos vectores en la matriz reducida (2.39), se obtiene la matriz de asignación para el cuadricóptero:

$$\mathcal{M}_X = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -d \sin \varphi & d \sin \varphi & d \sin \varphi & -d \sin \varphi \\ d \cos \varphi & d \cos \varphi & -d \cos \varphi & -d \cos \varphi \\ c & -c & c & -c \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

la cual mapea el vector de empujes individuales hacia el vector de entradas de control virtuales $\mathbf{u} = [T_z, \tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi]^\top$:

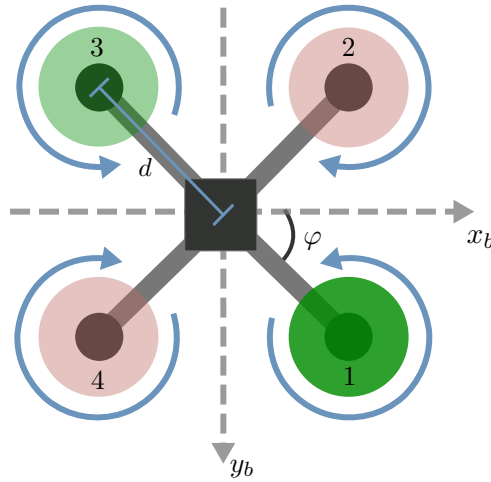


Figura 2.13: Representación del cuadricóptero en configuración X. Se ilustran los parámetros geométricos d y φ que definen la posición de los rotores, así como su numeración y sus respectivos sentidos de giro.

$$\begin{bmatrix} T_z \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) \\ d \sin \varphi (-f_1 + f_2 + f_3 - f_4) \\ d \cos \varphi (f_1 + f_2 - f_3 - f_4) \\ c(f_1 - f_2 + f_3 - f_4) \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Para interpretar el significado físico de este mapeo, las acciones de control se analizan de forma individual:

- Fuerza de empuje vertical (T_z): Es la suma de las cuatro fuerzas de empuje apuntando en dirección contraria a la gravedad. Bajo la convención NED adoptada, su signo es negativo, indicando una fuerza neta ascendente a lo largo del eje z_b :

$$T_z = -(f_1 + f_2 + f_3 + f_4)$$

- Par de alabeo (τ_ϕ): Se genera por la diferencia entre las fuerzas de empuje de los motores que se encuentran a los lados del eje x_b , ver Figura (2.14). Cuando $f_2 + f_3 > f_1 + f_4$ el par resultante induce una rotación positiva en alabeo.

$$\tau_\phi = d \sin \varphi (-f_1 + f_2 + f_3 - f_4)$$

- Par de cabeceo (τ_θ): Se produce por la diferencia entre las fuerzas de empuje de los motores que se encuentran a los lados del eje y_b , ver Figura (2.15). Cuando $f_1 + f_2 > f_3 + f_4$ se genera un momento de cabeceo positivo.

$$\tau_\theta = d \cos \varphi (f_1 + f_2 - f_3 - f_4)$$

- Par de guiñada (τ_ψ): Resulta del en los pares de reacción. Se genera al aumentar el empuje de los motores que giran en un sentido mientras se disminuye el

de los opuestos (Figura (2.16)), manteniendo constante el empuje total T_z . Si $f_1 + f_3 > f_2 + f_4$, la aeronave experimenta una rotación positiva en guiñada.

$$\tau_\psi = c(f_1 - f_2 + f_3 - f_4)$$

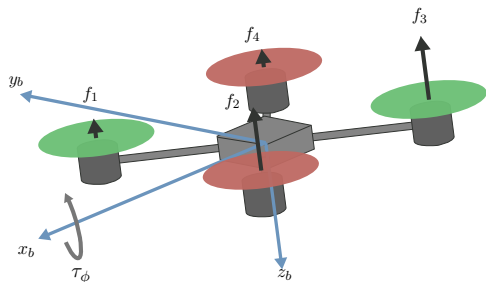


Figura 2.14: Generación del par de alabeo (τ_ϕ) mediante la diferencia de empuje entre los rotores laterales respecto al eje longitudinal x_b .

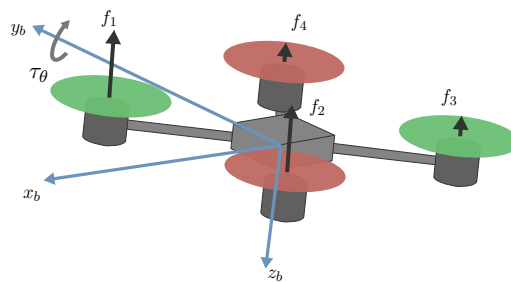


Figura 2.15: Generación del par de cabeceo (τ_θ) mediante la diferencia de empuje entre los rotores frontales y traseros con respecto al eje y_b .

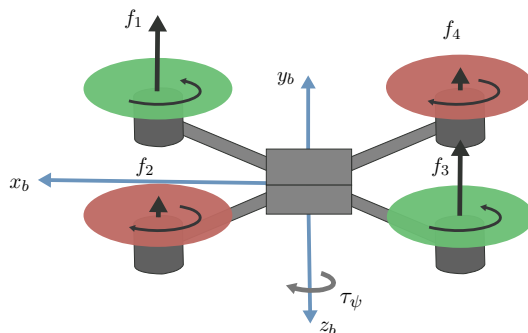


Figura 2.16: Generación del par de guiñada (τ_ψ) mediante la diferencia de empuje entre los rotores que giran en sentido horario contra los que giran en sentido antihorario

Para asegurar la independencia lineal de las cuatro acciones de control del vehículo, la matriz de asignación \mathcal{M}_X debe ser de rango completo, es decir, $\text{rango}(\mathcal{M}_X)_{\max} = 4$. De lo contrario, existiría al menos una señal de control que el sistema no puede generar de manera independiente. Un caso ilustrativo ocurre cuando todos los rotores giran en el mismo sentido o ante la pérdida de uno de los rotores.

Cuadricóptero tipo cruz +

A diferencia de la configuración en X, esta configuración alinea sus rotores directamente sobre los ejes principales del cuerpo x_b y y_b , tal como se muestra en la Figura (2.17). Para un brazo de longitud d , y observando la disposición geométrica de la Figura (2.17), los vectores de posición \mathbf{l}_i en el marco del cuerpo se definen como:

$$\mathbf{l}_1 = \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_3 = \begin{bmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Manteniendo la convención de giro alternada, la matriz de asignación \mathcal{M}_+ se define de la siguiente forma:

$$\mathcal{M}_+ = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -d & 0 & d \\ d & 0 & -d & 0 \\ c & -c & c & -c \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

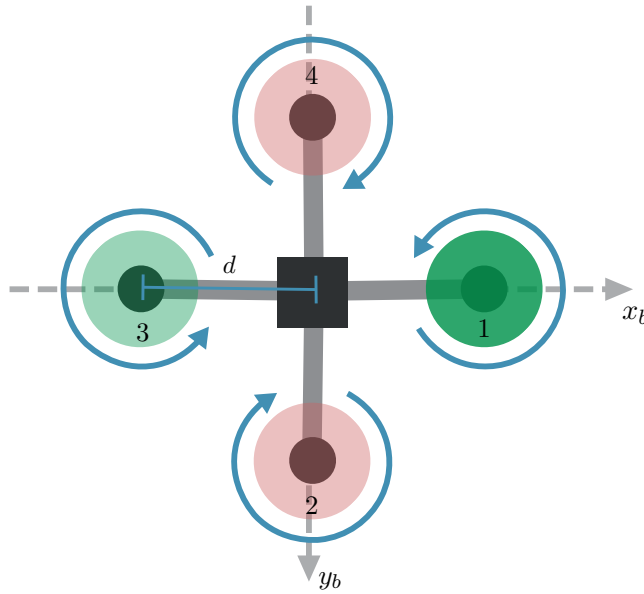


Figura 2.17: Representación del cuadricóptero en configuración cruz. Se ilustra el parámetro d que define la posición de los rotores, así como la numeración de los motores y sus respectivos sentidos de giro.

Al contrastar ambas topologías, la diferencia principal radica en la distribución del esfuerzo de control. En la configuración cruz (+), los pares de alabeo y cabeceo dependen de rotores individuales, concentrando el estrés mecánico en actuadores específicos durante maniobras puras. En contraste, la configuración en X distribuye equitativamente la demanda de empuje entre los cuatro motores. Esta eficiencia dinámica, sumada a la ventaja estructural de mantener el eje frontal (x_b) libre de obstrucciones para la instrumentación y sensores de navegación, ha consolidado a la arquitectura en X como el estándar predominante en la robótica aérea.

Hexacóptero

En esta sección se particulariza el modelo general (Ecuación. (2.33)) para un hexacóptero. Se asume una estructura con rotores fijos y seis brazos de longitud d , distribuidos uniformemente en el plano x_b - y_b , tal como se observa en la Figura (2.18). Sea α_i el ángulo del rotor i medido desde el eje x_b ; para una distribución simétrica se

define $\alpha_i = (i - 1)\frac{\pi}{3}$, lo que implica un espaciamento constante de 60° entre rotores adyacentes.

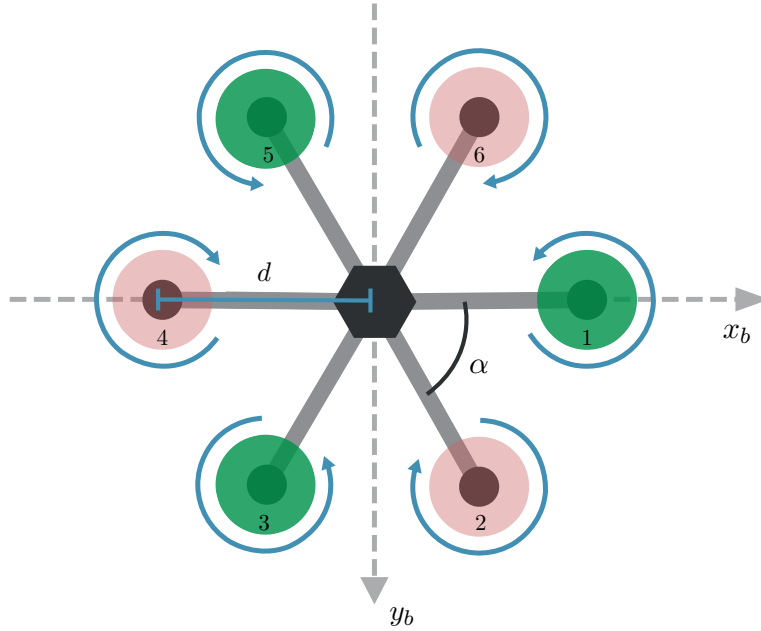


Figura 2.18: Configuración geométrica del hexacóptero. Se ilustra la distribución coplanar y simétrica de los seis rotores, definidos por la distancia radial d y el espaciamento angular constante de 60° .

Bajo esta geometría, los vectores de posición \mathbf{l}_i de cada rotor con respecto al marco del cuerpo quedan definidos como:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_1 &= \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{l}_2 &= \begin{bmatrix} \frac{d}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}d \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{l}_3 &= \begin{bmatrix} -\frac{d}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}d \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{l}_4 &= \begin{bmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{l}_5 &= \begin{bmatrix} -\frac{d}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}d \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{l}_6 &= \begin{bmatrix} \frac{d}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}d \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Por lo tanto, la matriz de asignación del hexacóptero $\mathcal{M}_H \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$ queda definida como:

$$\mathcal{M}_H = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}d & -\frac{\sqrt{3}}{2}d & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}d & \frac{\sqrt{3}}{2}d \\ d & \frac{d}{2} & -\frac{d}{2} & -d & -\frac{d}{2} & \frac{d}{2} \\ c & -c & c & -c & c & -c \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Para esta configuración, la matriz de asignación posee dimensiones 4×6 , lo que indica que el número de actuadores supera al de los grados de libertad controlables ($6 > 4$); por lo tanto, el sistema presenta redundancia de actuación. Matemáticamente, esto implica que la ecuación de asignación $\mathbf{u} = \mathcal{M}_H \mathbf{f}$ constituye un sistema subdeterminado que admite infinitas soluciones.

Dado que el rango de \mathcal{M}_H es 4, la dimensión del espacio nulo es $\dim(\mathcal{N}(\mathcal{M}_H)) = 6 - 4 = 2$. Físicamente, la existencia de este subespacio de dimensión 2 significa

que existen combinaciones de fuerzas de empuje que se anulan entre sí, generando fuerzas internas que no afectan la fuerza neta ni los pares de control del vehículo. Esta característica es la que define la redundancia del sistema, ya que a través del espacio nulo es posible reconfigurar las fuerzas de empuje ante fallas de motores o redistribuir la carga para evitar la saturación de los actuadores [46].

2.4.2. Configuración de rotores con un grado de libertad

Habiendo definido los casos de estudio para rotores fijos, se procede a derivar el modelo específico para una configuración donde los actuadores poseen movilidad restringida. Tomando como base el concepto de vectorización de empuje introducido previamente, se analiza el caso en el que cada rotor i puede inclinarse con un ángulo α_i de forma unidireccional (1-DoF).

Configuración *Tilt-rotor* y

Esta configuración restringe la orientación del grupo de rotores a una rotación (inclinación) alrededor del eje de cabeceo (y_{ri}), de ahí que de forma particular reciba el nombre de *tilt-rotor*. Como se observa en la Figura (2.19), esta disposición permite dirigir el vector de empuje en el plano longitudinal del rotor $x_{ri} - z_{ri}$.

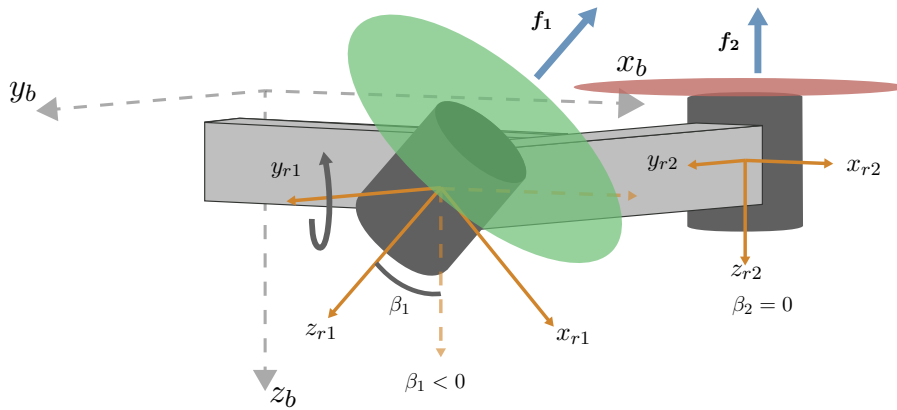


Figura 2.19: Ejemplo de inclinación en un multirrotor *tilt-rotor*: el rotor 1 presenta una inclinación $\beta_1 < 0$ (alrededor del eje y_{r1}) respecto a su orientación inicial, mientras que el rotor 2 se mantiene en $\beta_2 = 0$. Se muestran los marcos asociados $\mathcal{R}_1 = (x_{r1}, y_{r1}, z_{r1})$ y $\mathcal{R}_2 = (x_{r2}, y_{r2}, z_{r2})$, así como la dirección de empuje f_1 y f_2 alineada con $-z_{r1}$ y $-z_{r2}$, respectivamente.

Definiendo β_i como el ángulo de inclinación del rotor i alrededor del eje y_b , la matriz de rotación $R_{r_i}^b$ que proyecta el vector de dirección del rotor al marco del cuerpo se reduce a la matriz de rotación básica:

$$R_y(\beta_i) = \begin{bmatrix} \cos \beta_i & 0 & \sin \beta_i \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta_i & 0 & \cos \beta_i \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Sustituyendo esta transformación en la Ecuación (2.35) se obtiene la matriz de asignación $\mathcal{M}_T(\boldsymbol{\beta}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ para un vehículo de n rotores:

$$\mathcal{M}_T(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} -\sin \beta_1 & \cdots & -\sin \beta_n \\ 0 & \cdots & 0 \\ -\cos \beta_1 & \cdots & -\cos \beta_n \\ -(l_{y1} \cos \beta_1 + \sigma_1 c_1 \sin \beta_1) & \cdots & -(l_{yn} \cos \beta_n + \sigma_n c_n \sin \beta_n) \\ l_{x1} \cos \beta_1 - l_{z1} \sin \beta_1 & \cdots & l_{xn} \cos \beta_n - l_{zn} \sin \beta_n \\ l_{y1} \sin \beta_1 - \sigma_1 c_1 \cos \beta_1 & \cdots & l_{yn} \sin \beta_n - \sigma_n c_n \cos \beta_n \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

El análisis de esta matriz de asignación revela tres propiedades fundamentales de esta arquitectura *tilt-rotor*:

- **Desacoplamiento longitudinal** ($T_x \neq 0$): La primera fila no nula indica que el vehículo puede generar empuje directo sobre el eje longitudinal x_b variando los ángulos de inclinación (β_i).
- **Subactuación lateral** ($T_y = 0$): Al inclinar los rotores exclusivamente sobre el eje local y_{r_i} , la proyección de fuerza hacia el eje transversal y_b es cero. En consecuencia, la traslación lateral sigue acoplada al ángulo de alabeo (ϕ), por lo tanto, el sistema permanece subactuado.
- **Mejora en el control de guiñada** (τ_ψ): A diferencia de las configuraciones fijas, la guiñada en este modelo es dominada por la proyección horizontal del empuje ($l_{y_i} \sin \beta_i$). Dado que dicha fuerza es mucho mayor al par de reacción ($f_i \gg \tau_{r_i}$), la autoridad de control sobre el eje vertical z_b se incrementa drásticamente.

Para la definición completa de la matriz de asignación, se considera como caso de estudio la plataforma de cuatro rotores en configuración H, cuya geometría se ilustra en la Figura (2.20). Asumiendo que los cuatro rotores son coplanares ($l_{z_i} = 0$), los vectores de posición \mathbf{l}_i se definen como:

$$\mathbf{l}_1 = \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_2 = \begin{bmatrix} l_x \\ -l_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_3 = \begin{bmatrix} -l_x \\ -l_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_4 = \begin{bmatrix} -l_x \\ l_y \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Al sustituir estos vectores y sus sentidos de giro correspondientes en la matriz de asignación (Ecuación (2.48)), se obtiene:

$$\mathcal{M}_T(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} -\sin \beta_1 & -\sin \beta_2 & -\sin \beta_3 & -\sin \beta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \beta_1 & -\cos \beta_2 & -\cos \beta_3 & -\cos \beta_4 \\ -(l_y c_{\beta_1} + c_1 s_{\beta_1}) & (l_y c_{\beta_2} + c_2 s_{\beta_2}) & (l_y c_{\beta_3} - c_3 s_{\beta_3}) & -(l_y c_{\beta_4} - c_4 s_{\beta_4}) \\ l_x c_{\beta_1} & l_x c_{\beta_2} & -l_x c_{\beta_3} & -l_x c_{\beta_4} \\ l_y s_{\beta_1} - c_1 c_{\beta_1} & -(l_y s_{\beta_2} - c_2 c_{\beta_2}) & -(l_y s_{\beta_3} + c_3 c_{\beta_3}) & l_y s_{\beta_4} + c_4 c_{\beta_4} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

donde se utiliza la notación compacta $c_{\beta_i} = \cos \beta_i$ y $s_{\beta_i} = \sin \beta_i$.

De manera análoga, el desarrollo analítico para una configuración *tilt-rotor* basada en la rotación de los actuadores alrededor del eje longitudinal (x_{r_i}) sigue un procedimiento similar, empleando en este caso la matriz de transformación elemental $R_x(\beta_i)$. El resultado principal de esta variante es la obtención de un sistema capaz de vectorizar el empuje lateralmente; esto otorga a la aeronave la capacidad de generar esfuerzos de control directos sobre el eje transversal y_b , permitiendo traslaciones laterales puras sin la necesidad de acoplar la dinámica al ángulo de alabeo (ϕ) de la aeronave.

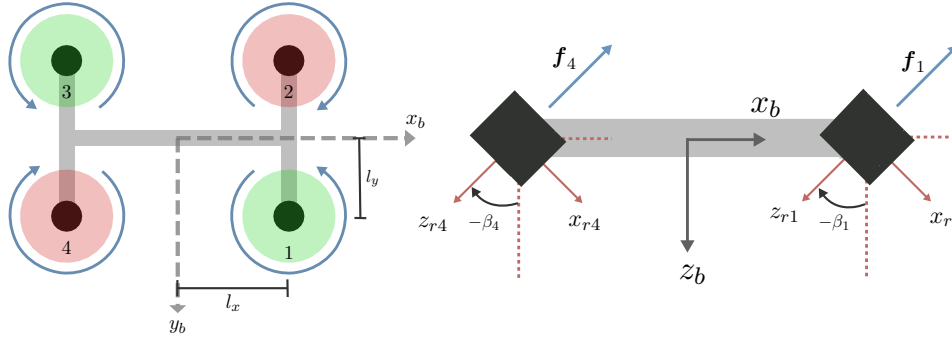


Figura 2.20: Vistas ortogonales del vehículo *tilt-rotor* en configuración H. **Izquierda:** vista superior (plano x_b-y_b) definiendo las dimensiones estructurales l_x y l_y , así como la numeración de los rotores y sus sentidos de giro (antihorario para 1 y 3; horario para 2 y 4). **Derecha:** vista longitudinal (plano x_b-z_b) ilustrando la inclinación de los rotores delantero (f_1) y trasero (f_4) a través de los ángulos de control β_1 y β_4 .

2.5. Modelado de retardos en plataformas multirrotor

En las secciones anteriores, el modelado de las plataformas multirrotor se ha desarrollado bajo la premisa de una instrumentación ideal. Dicho enfoque asume que tanto la medición de los estados del vehículo como la ejecución de las acciones mecánicas de control ocurren de manera instantánea.

En la práctica, los fenómenos físicos inherentes a la instrumentación, tales como el tiempo de cómputo requerido para la estimación de las coordenadas generalizadas o la inercia electromecánica de los servomecanismos encargados de la vectorización de empuje, introducen retardos temporales entre la planta y el sistema de control. La omisión de estos retardos durante el diseño de las leyes de control, puede degradar el desempeño del sistema, comprometiendo la estabilidad global de la aeronave.

Por lo tanto, para establecer una base matemática que permita la posterior síntesis y análisis de controladores robustos ante estos fenómenos, en esta sección se presenta el modelado de las principales fuentes de retardo presentes en la plataforma.

2.5.1. Retardos de medición

Para controlar la evolución de la configuración espacial de la aeronave, es indispensable conocer su orientación y posición actual, tal y como se deduce de las ecuaciones dinámicas generales (2.33). En este sentido, los sensores juegan un papel fundamental, sin embargo, las mediciones en bruto (*raw data*) generalmente requieren de un procesamiento digital antes de ser utilizadas.

Por ejemplo, para determinar la orientación del vehículo, las mediciones obtenidas a través de giroscopios y acelerómetros embebidos en Unidades de Medición Inercial (IMU), requieren ser procesadas por medio de algoritmos de fusión sensorial (tales como filtros complementarios o filtros de Kalman) que permiten estimar los ángulos de manera confiable. El tiempo de procesamiento, empleado por los sistemas de cómputo para realizar estos cálculos, sumado al tiempo de muestreo, induce un retardo de procesamiento en la lectura de los estados, lo cual se ilustra en la Figura (2.21)

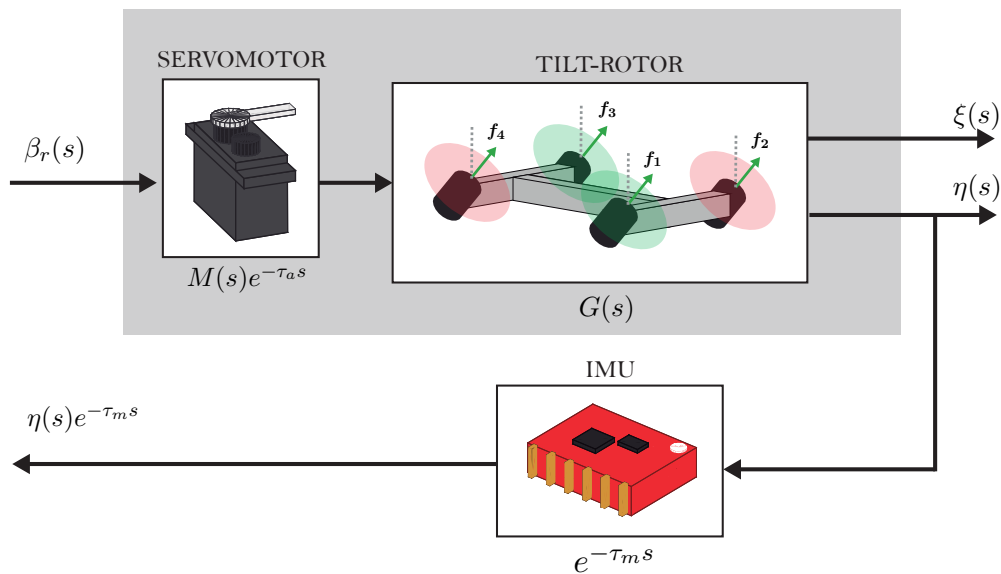


Figura 2.21: Representación de los retardos del sistema en el dominio de la frecuencia. Se ilustra un retardo de actuación (τ_a) debido a la dinámica del servomotor y un retardo de medición (τ_m) debido al tiempo de procesamiento de una unidad de medición inercial (IMU)

Desde la perspectiva de la teoría de control, este fenómeno implica que el estado retroalimentado no corresponde al estado instantáneo de la planta $x(t)$, sino a un estado retardado $x(t - \tau_m)$, donde $\tau_m > 0$ representa el retardo de medición. Al trasladar este comportamiento al dominio de la frecuencia, la dinámica del retardo de medición se modela directamente mediante la inclusión de un término exponencial $e^{-\tau_m s}$.

2.5.2. Dinámica de actuación en plataformas reorientables

Como se estableció en la ecuación general de la matriz de asignación (2.34), en las plataformas con vectorización de empuje, la orientación de los rotores depende de los ángulos de inclinación de sus servomotores, parametrizados por medio del vector α_i .

En el caso específico de sistemas con un grado de libertad en sus articulaciones (*tilt-rotor*), modelado mediante el ángulo β_i , suele asumirse que el cambio en la orientación se realizara de forma inmediata. No obstante, la respuesta mecánica y eléctrica del servomotor ante una señal de referencia $\beta_{ir}(t)$ no es instantánea, tal como se observa en la respuesta transitoria de la Figura (2.22). De acuerdo con los trabajos de [33] y [48], una aproximación adecuada se logra mediante una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que incorpora un retardo de transporte τ_a , expresada en el dominio del tiempo como:

$$b_3 \ddot{\beta}_i(t) + b_2 \dot{\beta}_i(t) + b_1 \beta_i(t) = b_1 \dot{\beta}_{ir}(t - \tau_a) + b_0 \beta_{ir}(t - \tau_a). \quad (2.51)$$

Los coeficientes b_0, b_1, b_2, b_3 y el valor nominal del retardo τ_a empleados en este trabajo se adoptan directamente de [48], donde fueron identificados de forma experimental

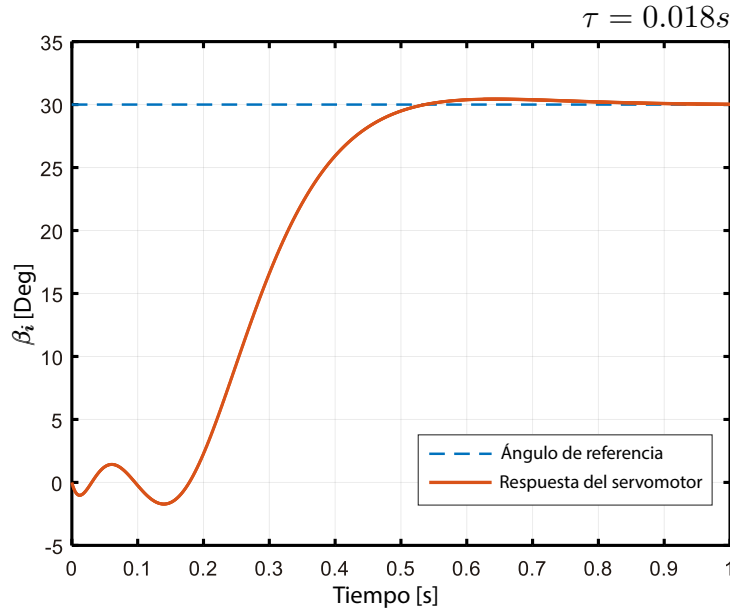


Figura 2.22: Respuesta temporal del servomotor ante una señal de referencia escalón. Se aprecia el retardo de transporte τ_a antes del inicio del movimiento, seguido de una dinámica transitoria de segundo orden característica de la inercia electromecánica del actuador.

para un servomotor comercial.

Para facilitar la integración de este subsistema en la planta generalizada de la aeronave, y preparar el terreno para el diseño de controladores, la dinámica del servomotor se modela en términos de la frecuencia de la siguiente forma:

$$\beta_i(s) = M_i(s) e^{-\tau_a s} \beta_{ir}(s), \quad (2.52)$$

donde $\beta_{ir}(s)$ es la referencia del ángulo de inclinación deseada para el i -ésimo rotor, $e^{-\tau_a s}$ representa el retardo de actuación ($\tau_a > 0$) y $M_i(s)$ caracteriza la dinámica servomotor como:

$$M_i(s) = \frac{b_1 s + b_0}{b_3 s^2 + b_2 s + b_1}. \quad (2.53)$$

En este capítulo se estableció un modelo dinámico general para vehículos del tipo multirrotor, integrando la mecánica del cuerpo rígido con la matriz de asignación de control $\mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha})$ para arquitecturas de rotores fijos y reorientables. Para garantizar la fidelidad del sistema ante condiciones de operación reales, se incorporaron explícitamente los retardos de los sistemas asociados a la inercia electromecánica de los actuadores y la adquisición de datos de los sensores de instrumentación. Con la planta caracterizada, se establece la base teórica para los siguientes capítulos, los cuales se centrarán en la síntesis de leyes de control y el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado, orientados a compensar dichos retardos y garantizar la realización de las tareas de control.

Capítulo 3

Fundamentos de sistemas dinámicos

Índice

3.1. Sistemas dinámicos	61
3.2. Estabilidad de sistemas dinámicos	64
3.3. Sistemas dinámicos con retardo	71
3.4. Estabilidad y control de sistemas con retardos . .	74

Este capítulo presenta fundamentos para el análisis y diseño de sistemas dinámicos en tiempo continuo, con énfasis en modelos que incorporan retardos temporales. Se introducen definiciones y propiedades de estabilidad (con y sin retardo), así como representaciones matemáticas típicas (espacio de estados, función de transferencia y funciones características cuasipolinómicas). Finalmente, se revisan estrategias de control para sistemas con retardo, destacando enfoques basados en análisis frecuencial, curvas de cruce y estructuras de control inspiradas en acciones clásicas tipo PID pero con términos retardados.

3.1. Sistemas dinámicos

En la literatura, la descripción del comportamiento de un sistema por medio de la relación entrada-salida (como la función de transferencia) resulta aplicable únicamente cuando se asume que el sistema se encuentra inicialmente en reposo (condiciones iniciales iguales a cero). Sin embargo, si un sistema no está en reposo en un tiempo inicial t_0 , su salida futura $y(t)$ para $t \geq t_0$ no depende de manera exclusiva de la entrada aplicada $u(t)$ en dicho intervalo. En este caso, para determinar el comportamiento del sistema de manera única, se requiere conocer también un conjunto de condiciones iniciales, que se definen de manera formal como:

Definición 3.1: Estado de un sistema [19]

El **estado** de un sistema dinámico se define como la cantidad de información (*variables de estado*) en un instante inicial t_0 tal que, junto con el conocimiento de la señal de entrada $u_{[t_0, \infty]}$, determina de manera única el comportamiento del sistema para cualquier tiempo futuro $t \geq t_0$.

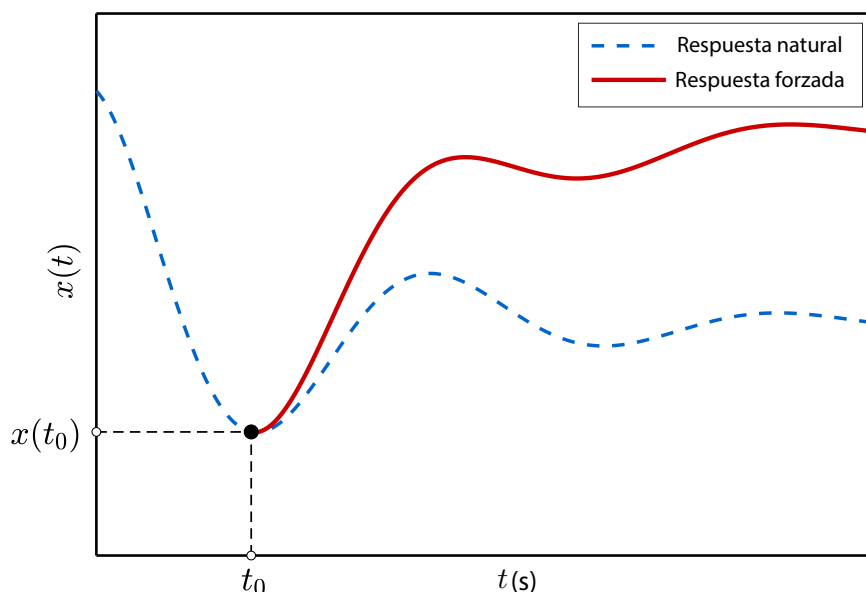


Figura 3.1: Evolución del estado $\mathbf{x}(t)$. Se ilustra la respuesta natural del estado y la respuesta forzada, bajo la acción de una entrada u , para $t \geq t_0$

A partir de lo anterior, un **sistema dinámico en tiempo continuo** se define formalmente como un operador que asigna, para cada estado inicial $x(t_0)$ y señal de entrada $u(t)$, una única trayectoria de estado $\mathbf{x}(t)$, como se ilustra en la Figura (3.1) y una trayectoria de salida $\mathbf{y}(t)$. En ausencia de retardos, esta evolución se modela mediante ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), en las que la derivada del estado en el instante t depende únicamente de variables evaluadas en ese mismo instante temporal. De forma general, este tipo de sistemas puede describirse de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) + \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(t, \mathbf{x}(t)), \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada y $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salida. Esta estructura vectorial permite interpretar la dinámica del sistema desde una perspectiva geométrica mediante la introducción del concepto de espacio de estados.

Definición 3.2: Espacio de estados [43]

El **espacio de estados** es un espacio vectorial real de dimensión n (denotado como \mathbb{R}^n), donde cada uno de los n ejes coordenados corresponde a una variable de estado específica x_1, x_2, \dots, x_n . En este espacio, cualquier estado instantáneo del sistema $\mathbf{x}(t)$ se representa geoméricamente como un punto único, y su evolución a lo largo del tiempo describe una curva continua denominada *trayectoria de estado*.

En este contexto, la **representación en el espacio de estados** consiste en formular el modelo matemático mediante un conjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas. A diferencia de las representaciones clásicas basadas exclusivamente en la relación entrada-salida, esta formulación vectorial es fundamental en la teoría de control moderno, ya que permite analizar sistemas multivariables (MIMO), dinámicas no lineales y condiciones iniciales arbitrarias bajo un marco matemático general

3.1.1. Sistema lineal invariante en el tiempo.

Un sistema se considera invariante en el tiempo si su respuesta ante una entrada específica es independiente del instante en que esta se aplica, lo que implica que los parámetros que rigen su dinámica permanecen constantes. Por otro lado, un sistema es lineal si su respuesta ante una combinación de entradas es igual a la suma de las respuestas individuales multiplicadas por sus respectivos factores de escala (principio de superposición).

Definición 3.3: Sistema Lineal e Invariante en el Tiempo (LTI) [19]

Un sistema LTI de dimensión finita n se representa en el espacio de estados como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t),\end{aligned}\tag{3.2}$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de estado, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ la matriz de entrada, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ la matriz de salida y $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ la matriz de transmisión directa. Nótese que al ser un sistema invariante en el tiempo todas las matrices son constantes.

Mientras que el espacio de estados proporciona una descripción interna completa del sistema en el dominio del tiempo, es posible obtener una representación compacta de su comportamiento externo mediante la transformada de Laplace. Al asumir que el sistema se encuentra inicialmente en reposo ($\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$), la dinámica entrada-salida se caracteriza de manera única en el dominio de la frecuencia a través de la matriz de transferencia racional $G(s)$, la cual se deriva directamente a partir de la Ecuación (3.2) como:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.\tag{3.3}$$

Para el caso SISO (una entrada, una salida), $G(s)$ se reduce al cociente de dos polinomios con coeficientes reales, $N(s)$ y $D(s)$:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}.\tag{3.4}$$

Se asume que el sistema es propio (causal), lo que implica que el grado del denominador es mayor o igual al del numerador ($n \geq m$). El *polinomio denominador* $D(s) = \det(sI - A)$, conocido como polinomio característico, es de vital importancia, pues sus raíces (polos del sistema) determinan la estabilidad del punto de equilibrio, propiedad que se analizará a continuación.

3.2. Estabilidad de sistemas dinámicos

Una vez caracterizada la estructura matemática de un sistema dinámico, la propiedad más crítica a evaluar desde la perspectiva de la ingeniería de control es la estabilidad. En términos generales, la estabilidad se refiere a la capacidad de un sistema para permanecer cerca de un punto de operación, o converger a él, después de haber sido sometido a una perturbación en sus condiciones iniciales.

Para simplificar el análisis sin pérdida de generalidad, se considera el comportamiento del sistema en ausencia de entradas externas (respuesta libre). Considérese el sistema autónomo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (3.5)$$

y sea \mathbf{x}^* un punto de equilibrio tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$. La caracterización del comportamiento de las trayectorias cerca de un punto de equilibrio es fundamental. Por lo tanto, a continuación se formalizan los tres conceptos de estabilidad utilizados ampliamente en la literatura.

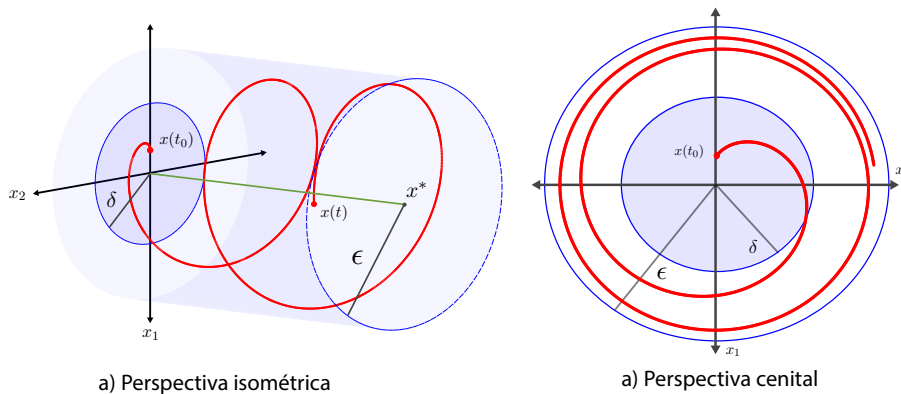


Figura 3.2: Representación geométrica de la estabilidad de Lyapunov. Se ilustran las vecindades (discos) de radio δ y ϵ centradas en el equilibrio x^* , así como la evolución de la trayectoria del estado desde su condición inicial $x(t_0)$ hasta un instante posterior $x(t)$.

Definición 3.4: Estabilidad en el sentido de Lyapunov [31]

El punto de equilibrio x^* se dice *estable* si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que:

$$\|x(t_0) - x^*\| < \delta \implies \|\mathbf{x}(t) - x^*\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.6)$$

Intuitivamente, esto implica que las trayectorias iniciadas suficientemente cerca del equilibrio (dentro de δ) permanecen confinadas dentro de una vecindad acotada (ε) para todo tiempo futuro, aunque no necesariamente converjan al origen. Lo anterior se ilustra en la Figura (3.2).

Definición 3.5: Estabilidad Asintótica [31]

El punto de equilibrio x^* es *asintóticamente estable* si es estable en el sentido de Lyapunov y, además, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|x(t_0) - x^*\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0. \quad (3.7)$$

A diferencia de la estabilidad en el sentido de Lyapunov, la estabilidad asintótica incorpora la propiedad de *atractividad*. De manera intuitiva, la atractividad describe la tendencia natural de un punto de equilibrio para actuar como un centro de convergencia que atrae las trayectorias hacia sí mismo conforme transcurre el tiempo.

Como se observa en la Figura (3.3), esta propiedad garantiza que las trayectorias no solo se mantienen confinadas en una vecindad arbitrariamente pequeña, sino que la trayectoria del estado tiende a cero conforme el tiempo tiende al infinito. Lo anterior define geoméricamente una región de atracción, la cual representa el conjunto de todas las condiciones iniciales desde las cuales el sistema es capaz de retornar al punto de equilibrio [31]. Contar con una región de atracción bien caracterizada es fundamental, ya que asegura que el sistema puede recuperarse de perturbaciones o desviaciones externas y restablecer su régimen de operación nominal sin intervención adicional.

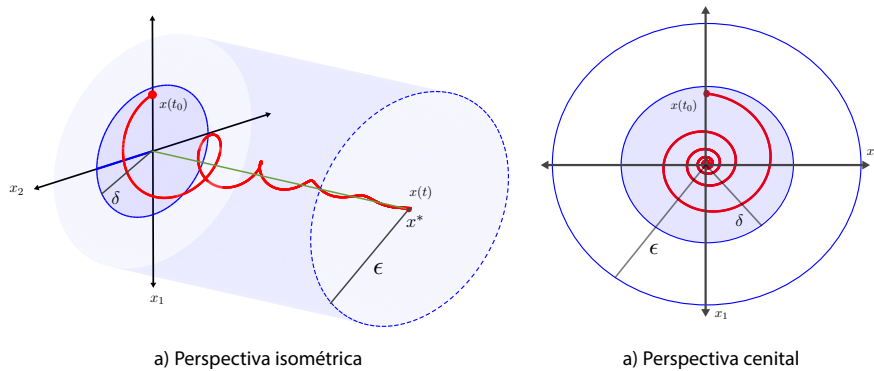


Figura 3.3: Representación geométrica de la estabilidad asintótica. Se observa que las trayectorias no solo permanecen acotadas dentro de la vecindad ε , sino que convergen de forma asintótica hacia el punto de equilibrio x^* cuando $t \rightarrow \infty$.

Definición 3.6: Estabilidad Exponencial [31]

El punto de equilibrio x^* es *exponencialmente estable* si existen constantes $\alpha \geq 1$ y $\beta > 0$ tales que:

$$\|x(t) - x^*\| \leq \alpha \|x(t_0) - x^*\| e^{-\beta(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.8)$$

A diferencia de la estabilidad asintótica simple, donde la velocidad de convergencia puede ser lenta, la estabilidad exponencial garantiza un límite superior estricto en

la evolución de la trayectoria del estado, dictado por la tasa de decaimiento β . Esta propiedad es de vital importancia, ya que no solo asegura que el sistema retornará al equilibrio, sino que lo hará bajo un desempeño dinámico específico.

Para el caso particular de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI) la estabilidad asintótica implica estabilidad exponencial [31]. Esta equivalencia permite que el análisis de la convergencia de las trayectorias pueda trasladarse del dominio temporal al dominio algebraico. En lugar de evaluar la evolución de la norma $\|\mathbf{x}(t)\|$, es posible determinar el comportamiento del sistema a través de las propiedades intrínsecas de su estructura interna.

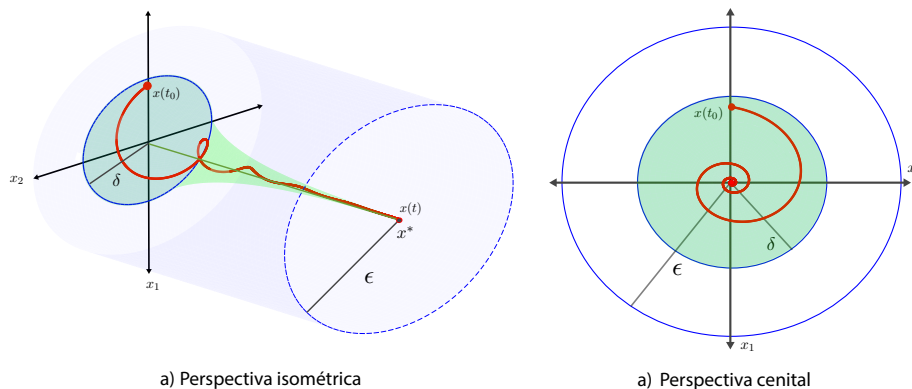


Figura 3.4: Representación geométrica de la estabilidad exponencial. Se ilustra la convergencia de las trayectorias hacia el punto de equilibrio \mathbf{x}^* , con una tasa de decaimiento acotada por una envolvente exponencial de la forma $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*\| e^{-\beta(t-t_0)}$, lo que garantiza una convergencia predecible y un desempeño dinámico superior.

3.2.1. Criterio espectral para sistemas LTI

Las definiciones de estabilidad presentadas anteriormente se basan en la evolución de las trayectorias en el dominio del tiempo. Sin embargo, dado que la dinámica de un sistema LTI está dictada analíticamente por la matriz exponencial e^{At} , es posible trasladar este análisis al dominio algebraico y determinar la estabilidad evaluando exclusivamente el espectro de la matriz de estado \mathbf{A} .

3.1: Criterio espectral de estabilidad (LTI) [19]

El sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ es *asintóticamente estable* si y solo si todos los valores propios (*autovalores*) λ_i de \mathbf{A} satisfacen

$$\Re(\lambda_i) < 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.9}$$

En este caso, el origen es además *exponencialmente estable*. Equivalentemente, todas las raíces de la ecuación característica

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - \mathbf{A}) = 0 \tag{3.10}$$

pertenecen al semiplano izquierdo abierto.

Esta condición asegura que todos los modos del sistema, cuya evolución temporal está definida por los autovalores λ_i a través de los términos $e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i$, decaigan exponencialmente hacia el equilibrio. En el análisis de la relación entrada-salida, es común referirse a estos autovalores como los polos del sistema, ya que coinciden exactamente con las raíces del denominador de la función de transferencia (asumiendo que no existen cancelaciones entre polos y ceros). Como se ilustra en la Figura (3.5), la ubicación de estos polos en el plano complejo determina la respuesta transitoria y clasifica la estabilidad en tres categorías fundamentales:

1. **Asintóticamente estable:** $\Re(\lambda_i) < 0$ para todo i . Los polos residen en el semiplano izquierdo, generando una envolvente de decaimiento exponencial.
2. **Inestable:** Existe al menos un λ_k tal que $\Re(\lambda_k) > 0$. El polo reside en el semiplano derecho, induciendo un crecimiento exponencial sin límite.
3. **Marginalmente estable:** $\Re(\lambda_i) \leq 0$ para todo i , existiendo polos sobre el eje imaginario ($\sigma_i = 0$). Estos generan oscilaciones sostenidas de frecuencia ω_i . En este caso crítico, la estabilidad estricta depende de que la multiplicidad algebraica y geométrica de dichos valores propios coincida (bloques de Jordan triviales) para evitar un crecimiento polinomial del estado.

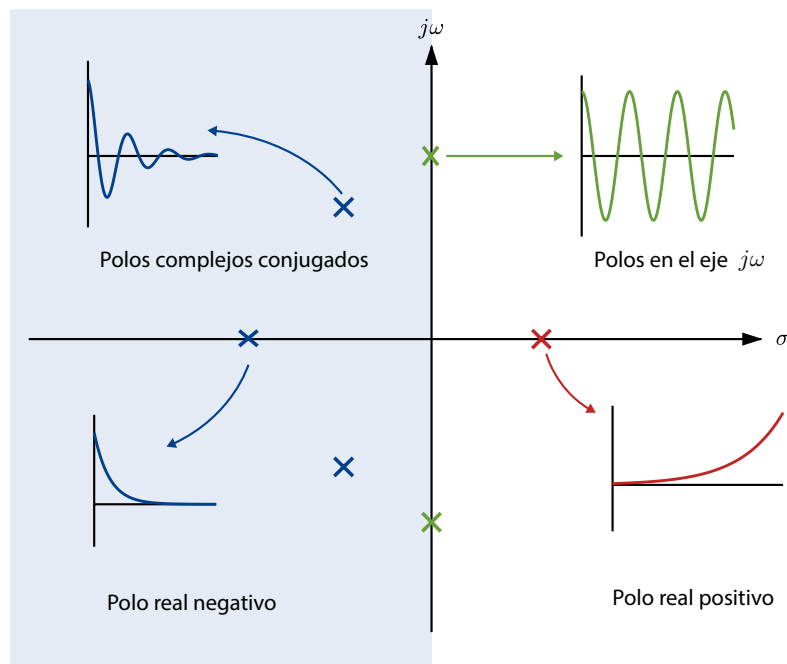


Figura 3.5: Relación entre la ubicación de los polos en el plano complejo s y la dinámica de la respuesta transitoria. El área sombreada delimita la región de estabilidad asintótica.

De forma analítica, la equivalencia estricta entre los autovalores de la matriz de estado y los polos del sistema se evidencia al obtener la matriz de transferencia $G(s)$:

$$G(s) = C(sI - \mathbf{A})^{-1}B + D. \quad (3.11)$$

Por consiguiente, en la literatura de control clásico y moderno, los términos *autovalores*, *raíces características* y *polos* se emplean de manera intercambiable para determinar la estabilidad.

3.2.2. Estabilidad Relativa y σ -estabilidad

En el estudio de sistemas dinámicos, la condición de estabilidad asintótica clásica asegura que las trayectorias convergen al equilibrio, pero no proporciona información sobre la velocidad de dicha convergencia. Para fines de diseño de control, a menudo es necesario imponer requisitos de desempeño dinámico más estrictos. En este sentido, el concepto de σ -estabilidad surge como una extensión de la estabilidad asintótica clásica y se define de la siguiente forma:

3.2: Definición de σ -estabilidad

Un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI) se define como **σ -estable** si y solo si todas las raíces s_i de su ecuación característica $\Delta(s)$ satisfacen la desigualdad:

$$\max_i \Re(s_i) < -\sigma, \quad (3.12)$$

donde $\max_i \Re(s_i)$ se conoce como abscisa espectral.

En otros términos, el sistema es σ -estable si todo su espectro reside dentro de la región abierta $\mathbb{C}_\sigma^- := \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) < -\sigma\}$.

Esta definición implica un desplazamiento de la frontera de estabilidad hacia la izquierda del plano complejo, imponiendo un acotamiento estricto sobre la ubicación de los polos del sistema. Desde una perspectiva física, situar los polos a la izquierda de la frontera $s = -\sigma$ garantiza que la respuesta transitoria del lazo cerrado decaerá, en el peor de los casos, con una tasa de decaimiento dictada por la envolvente exponencial $e^{-\sigma t}$. En consecuencia, σ se constituye como un parámetro de diseño fundamental que permite establecer analíticamente la rapidez de convergencia del estado según los requisitos de la tarea.

Como se ilustra en la Figura (3.6), este margen se traduce directamente en un límite superior predecible para el tiempo de asentamiento. Asimismo, este desplazamiento proporciona un margen de robustez esencial ante incertidumbres paramétricas o dinámicas no modeladas que, de otro modo, podrían desplazar los polos hacia el eje imaginario, comprometiendo la estabilidad asintótica del sistema.

3.2.3. Tasa máxima de decaimiento exponencial ($\sigma_{\text{máx}}$)

Como se estableció anteriormente, la σ -estabilidad asegura un desempeño dinámico mínimo siempre que el espectro del sistema pueda confinarse dentro de la región \mathbb{C}_σ^- . En la práctica, identificar el límite físico de esta capacidad de respuesta es de vital interés, ya que representa el desempeño óptimo alcanzable por la arquitectura del sistema (ver Figura (3.6)).

Para formalizar este límite, se introduce el concepto de la tasa máxima de decaimiento exponencial, denotada como $\sigma_{\text{máx}}$.

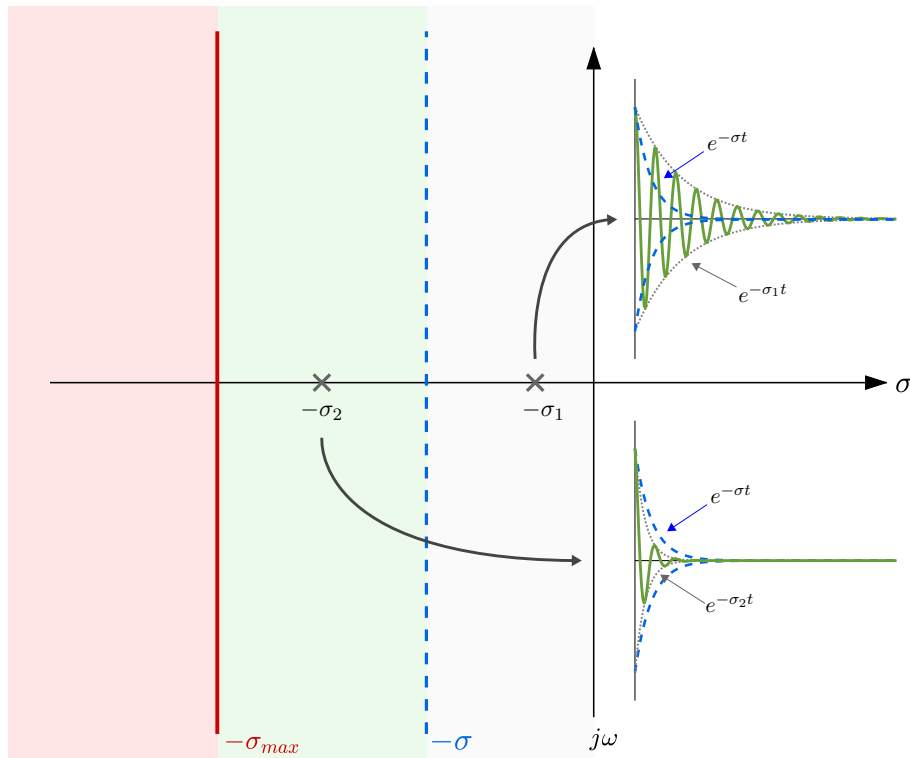


Figura 3.6: Relación entre la ubicación de los polos en el plano complejo s y la dinámica de la respuesta transitoria. Se ilustra una región de σ -estabilidad (verde) acotada por la derecha por el parámetro de decaimiento $-\sigma$. El parámetro $-\sigma_{max}$ determina el límite de decaimiento para el sistema. Las gráficas de la derecha ilustran un polo fuera de la región de diseño ($-\sigma_1$) con una respuesta lenta $e^{-\sigma_1 t}$, frente a un polo ($-\sigma_2$) que se encuentra dentro de la región cuya envolvente real $e^{-\sigma_2 t}$ decae más rápido que la cota de diseño $e^{-\sigma t}$.

3.3: Tasa máxima de decaimiento ($\sigma_{\text{máx}}$)

Se define a $\sigma_{\text{máx}}$ como el límite superior (supremo) del conjunto de todas las tasas de decaimiento σ para los cuales existe una ley de control admisible (representada por sus parámetros \mathbf{k}) que haga al sistema en lazo cerrado σ -estable:

$$\sigma_{\text{máx}} = \sup\{\sigma \in \mathbb{R}^+ \mid \exists \mathbf{k} \text{ tal que } \max_i \Re(\lambda_i) < -\sigma\}. \quad (3.13)$$

El parámetro $\sigma_{\text{máx}}$ cuantifica la máxima velocidad de respuesta que puede exigírsele al sistema antes de que las limitaciones físicas, estructurales o los retardos temporales en los lazos de realimentación hagan imposible estabilizar la planta. Cualquier intento de forzar al sistema a operar con una tasa de decaimiento $\sigma > \sigma_{\text{máx}}$ resultará en la degradación de la estabilidad del lazo cerrado.

En el siguiente capítulo se establece una metodología para determinar dicho parámetro para una familia de funciones de transferencia, cuya estructura permite describir la respuesta dinámica de vehículos multirrotores.

3.3. Sistemas dinámicos con retardo

A diferencia de los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), los sistemas con retardo se modelan mediante ecuaciones diferenciales funcionales (FDE), en particular ecuaciones diferenciales con retardo (DDE) [29]. La diferencia fundamental radica en que la derivada del estado $\dot{\mathbf{x}}(t)$ depende no solo del estado actual, sino también de valores pasados, por ejemplo $\mathbf{x}(t - \tau)$.

Una representación típica de un sistema lineal con un retardo fijo $\tau > 0$ en el estado es:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t). \quad (3.14)$$

A diferencia del caso sin retardo, la especificación de condiciones iniciales ya no se reduce a un punto $\mathbf{x}(t_0)$, sino a una historia del estado. Es decir, se define una función inicial ϕ tal que $\mathbf{x}(t) = \phi(t)$ para todo $t \in [t_0 - \tau, t_0]$. De manera equivalente, puede definirse el *segmento de estado* $\mathbf{x}_t(\theta) := \mathbf{x}(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$, el cual se ilustra en la Figura (3.7), de modo que el estado en el instante t se interpreta como el elemento funcional \mathbf{x}_t .

Una implicación directa de la Ecuación (3.14) es que el espacio de estados deja de ser de dimensión finita (\mathbb{R}^n) y pasa a ser un espacio funcional, lo que le da al sistema un carácter de dimensión infinita. En consecuencia, su análisis involucra típicamente un espectro con infinitas raíces y ecuaciones características no polinómicas (cuasi-polinomios), aspecto que se precisa en las secciones siguientes al clasificar los retardos y establecer representaciones matemáticas orientadas al análisis de estabilidad y control.

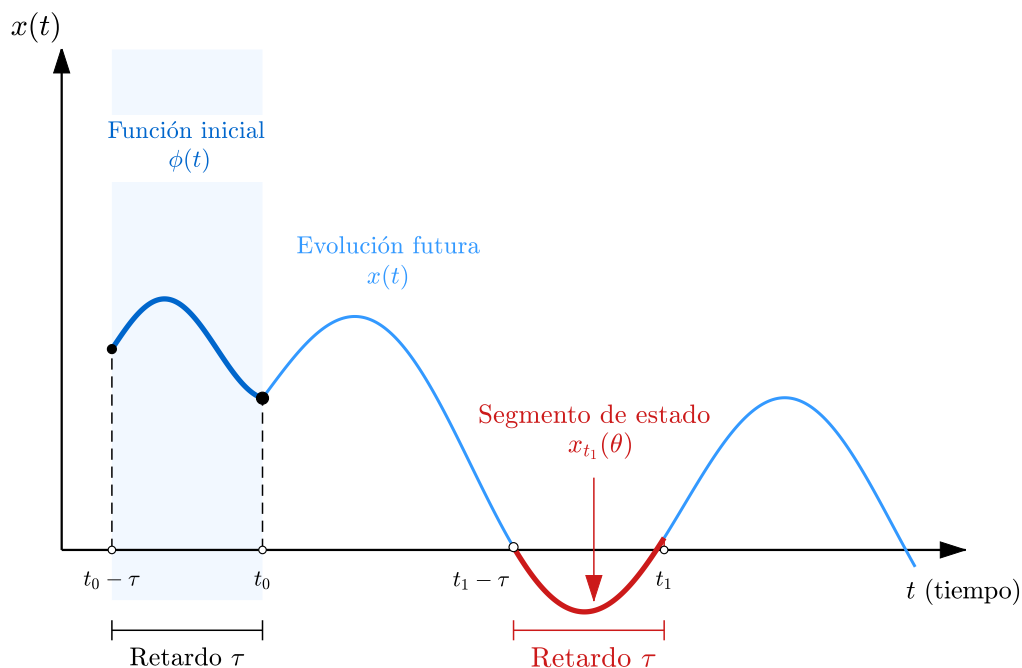


Figura 3.7: Representación del estado funcional en un sistema con retardo τ . Se ilustra la función inicial $\phi(t)$ y el segmento de estado x_t definido sobre el intervalo de memoria $[t_1 - \tau, t_1]$.

3.3.1. Definición y tipos de retardos

Los retardos de tiempo aparecen en sistemas debido a fenómenos de transporte de masa o energía, tiempos de computación en sistemas digitales y latencias en redes de comunicación. Su clasificación es útil tanto para modelado como para análisis de estabilidad y diseño de control.

Clasificación por ubicación en el lazo.

- **Retardo de entrada (actuación):** la señal aplicada al proceso se retrasa, $u(t - \tau_u)$.
- **Retardo de salida o de retroalimentación (medición):** la señal medida se retrasa, por ejemplo $y(t) = C x(t - \tau_y)$ o se emplea $y(t - \tau_y)$ en la ley de control.
- **Retardo de estado (dinámica interna):** la evolución depende de estados pasados, $x(t - \tau_x)$.

Clasificación por estructura de la ecuación.

- **Tipo retardado:** la derivada de mayor orden aparece solo en el tiempo actual; el retardo afecta términos de menor orden, e.g. $\dot{x}(t) = f(\mathbf{x}(t), x(t - \tau))$.
- **Tipo neutral:** la derivada de mayor orden aparece también retardada, (ej. $\dot{x}(t) = -x(t - \tau)$). Estos sistemas suelen requerir consideraciones adicionales en estabilidad.

En este trabajo, nos enfocamos principalmente en retardos de tipo retardado constantes, denotados por $\tau \in \mathbb{R}_+$.

3.3.2. Sistemas de dimensión infinita

En el dominio de Laplace, un retardo temporal fijo τ introduce el término trascendente $e^{-\tau s}$. En consecuencia, la ecuación característica asociada a un sistema con retardos discretos deja de ser un polinomio para convertirse en un **cuasipolinomio**.

Definición 3.7: Cuasipolinomio

Se denomina *cuasipolinomio* a una función característica con retardos discretos de la forma

$$\Delta(s) = P_0(s) + \sum_{\ell=1}^q P_\ell(s) e^{-\tau_\ell s}, \quad (3.15)$$

donde $\tau_\ell \in \mathbb{R}_+$ y $P_\ell(s)$ son polinomios reales en la variable compleja s . En el caso particular de un único retardo τ , (3.15) se reduce a

$$\Delta(s) = P(s) + Q(s)e^{-\tau s}$$

Para el modelo lineal en espacio de estados con retardos puntuales $\dot{x}(t) = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) + \sum_{j=1}^q \mathbf{A}_j x(t - \tau_j)$ (con entrada nula), la ecuación característica se obtiene como [54]:

$$\Delta(s) = \det \left(sI - \mathbf{A}_0 - \sum_{j=1}^q \mathbf{A}_j e^{-\tau_j s} \right) = 0. \quad (3.16)$$

La estructura (3.15) es central porque separa la contribución no retardada (términos polinómicos) de la contribución retardada (términos exponenciales). Las raíces de $\Delta(s)$ determinan la estabilidad. Debido al carácter trascendente de $e^{-\tau s}$, Δ posee un número infinito de raíces. En sistemas de *tipo retardado*, dichas raíces se desplazan hacia el semiplano izquierdo y, si el sistema es inestable, el número de raíces con parte real positiva es finito para un τ fijo, tal como se ilustra en la Figura (3.8).

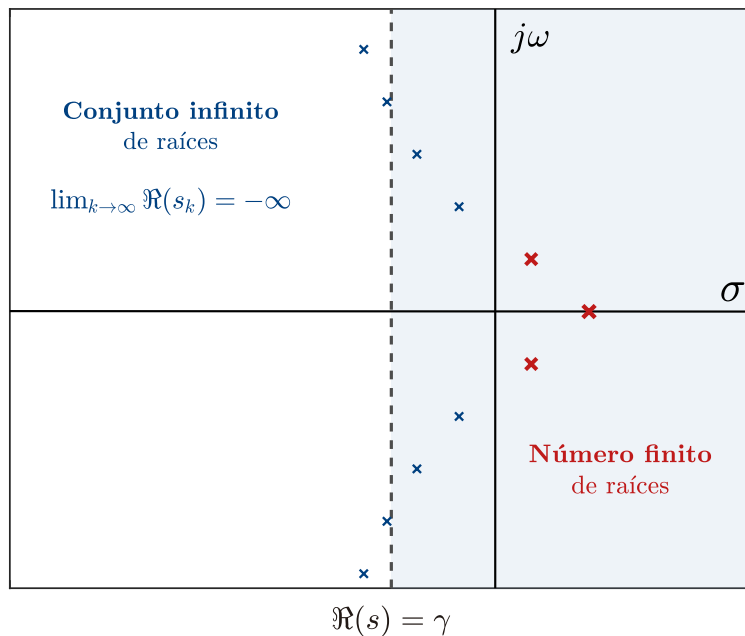


Figura 3.8: Distribución de las raíces de un cuasipolinomio de tipo retardado. Se ilustra la naturaleza infinita de las raíces las cuales se extienden hacia el semiplano izquierdo del plano complejo (LHP). Además, se observa que para cualquier $\gamma \in \mathbb{R}$ existe un numero finito de raíces que satisfacen $\Re(s) > \gamma$.

3.4: Propiedad espectral de sistemas con retardo tipo retardado

La ecuación característica cuasi-polinómica de un sistema con retardo *tipo retardado* posee un conjunto infinito (contable) de raíces en el plano complejo. Sin embargo, para cualquier $\gamma \in \mathbb{R}$ existe solo un número *finito* de raíces que satisfacen $\Re(s) > \gamma$. En particular, para un retardo fijo τ , el número de raíces inestables ($\Re(s) > 0$) es finito.

3.4. Estabilidad y control de sistemas con retardos

La presencia de un retardo τ en un lazo de control tiende a degradar los márgenes de estabilidad y a imponer limitaciones de desempeño. En particular, el factor $e^{-s\tau}$ introduce un desfase en frecuencia $e^{-j\omega\tau}$ que crece linealmente con ω , lo cual restringe el ancho de banda alcanzable y aumenta la sensibilidad a incertidumbres y a ganancias elevadas. En casos específicos, el retardo puede explotarse como un grado de libertad de diseño pero ello requiere un análisis espectral cuidadoso.

3.4.1. Estabilidad de sistemas dinámicos con retardos

Sea $\Delta(s; \mathbf{k}, \tau) = 0$ la ecuación característica asociada al lazo cerrado, donde \mathbf{k} agrupa los parámetros del sistema y/o del controlador. A diferencia del caso sin retardo, Δ es un *cuasi-polinomio* que, debido a la naturaleza trascendente de los términos $e^{-s\tau}$, posee un conjunto infinito de raíces. En consecuencia, la estabilidad del sistema se formula en términos de la ubicación de *todo* su espectro en el plano complejo.

Un mecanismo fundamental para el análisis de estos sistemas es la **continuidad de las raíces** respecto a sus parámetros.

Proposición 3.1: Continuidad de las raíces [38]

Dada una raíz característica s^* con multiplicidad ℓ para un conjunto de parámetros (\mathbf{k}^*, τ^*) , ante variaciones infinitesimales de dichos parámetros, existen exactamente ℓ raíces en un entorno pequeño de s^* .

Esta propiedad implica que un sistema solo puede cambiar su estado de estabilidad (pasar de estable a inestable o viceversa) cuando al menos una raíz cruza el eje imaginario. A partir de aquí surgen las siguientes definiciones:

Definición 3.8: Frecuencias de cruce [36]

Para un retardo fijo $\tau > 0$, el *conjunto de frecuencias de cruce* $\Omega \subset \mathbb{R}$ es el conjunto de todas las $\omega \in \mathbb{R}$ tal que existe al menos una dupla (k_p, k_d) para la cual

$$\Delta(j\omega; k_p, k_d) = 0. \quad (3.17)$$

Observación 3.1. Del hecho de que N y D son polinomios reales, es fácil observar que se cumple la siguiente igualdad

$$\overline{\Delta(j\omega; k_p, k_d)} = \Delta(-j\omega; k_p, k_d).$$

Por lo tanto, en lo sucesivo, consideraremos únicamente frecuencias no negativas, es decir, $\Omega \subset \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Definición 3.9: Curvas de cruce de estabilidad [36]

Las *curvas de cruce de estabilidad* \mathcal{T} son el conjunto de todos los parámetros $\mathbf{k} := [k_p \ k_d]^\top \in \mathbb{R}^2$ para los cuales existe al menos una $\omega \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ tal que $\Delta(j\omega; k_p, k_d) = 0$.

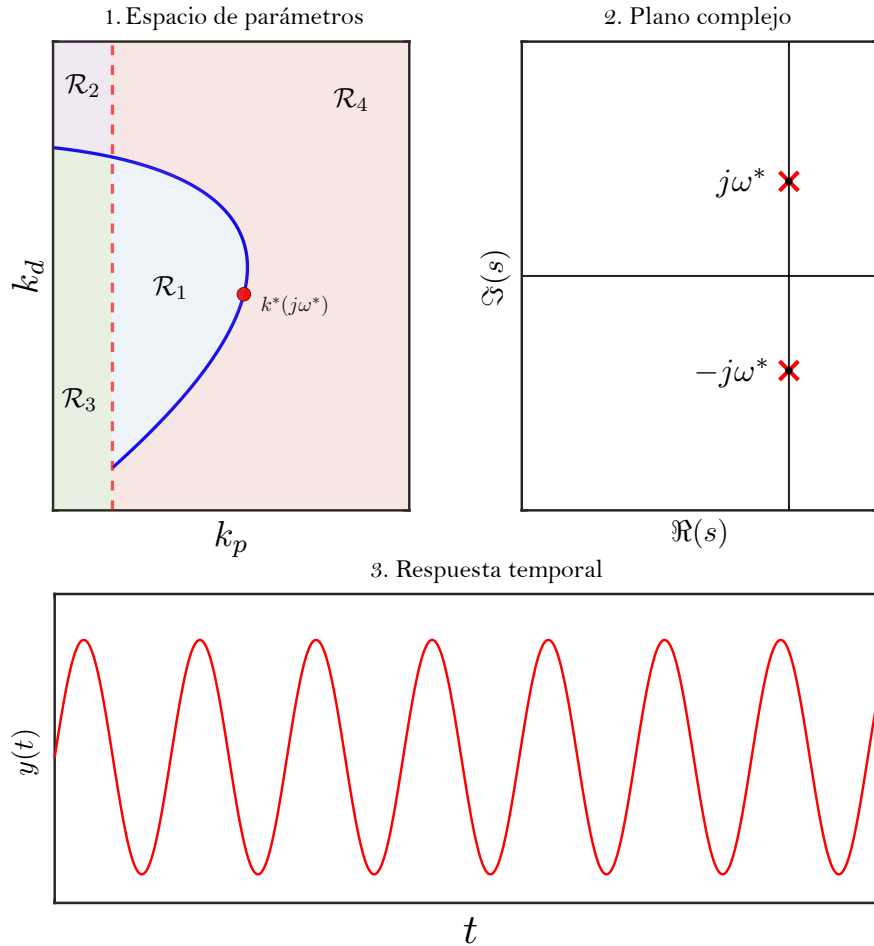


Figura 3.9: Representación conceptual de un punto de cruce en los diferentes planos de análisis. **1. Espacio de parámetros:** Se ilustran las curvas de cruce \mathcal{T}_0 y \mathcal{T}_ω que particionan el espacio en regiones de estabilidad, así como el punto de cruce $\mathbf{k}^* \in \mathcal{T}_\omega$. **2. Plano complejo:** Se muestran las raíces asociadas al punto de cruce sobre el eje imaginario. **3. Plano temporal:** Se observa la evolución temporal del sistema en lazo cerrado el cual es marginalmente estable.

Para un valor de retardo fijo $\tau \in \mathbb{R}_+$, cualquier punto $\mathbf{k} \in \mathcal{T}$ se conoce como un punto de cruce. Además, el conjunto \mathcal{T} se describe también como la combinación del conjunto \mathcal{T}_ω , que representa los puntos de cruce a través del eje imaginario del plano complejo, y el conjunto \mathcal{T}_0 , que representa los puntos de cruce a través del origen del plano complejo, es decir:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_\omega \cup \mathcal{T}_0.$$

La Figura (3.9) presenta un ejemplo conceptual en donde se ilustran los diferentes planos de análisis para un sistema en lazo cerrado, con control PD y retardo fijo

$\tau > 0$. En el plano k_p-k_d (espacio de parámetros) se identifican las curvas de cruce de estabilidad \mathcal{T}_ω y \mathcal{T}_l que particionan el espacio de parámetros. A su vez se muestra un punto de cruce \mathbf{k}^* (frecuencia de cruce) sobre la curva \mathcal{T}_ω . En el plano complejo, se observan las raíces asociadas al punto de cruce, lo cual demuestra que cualquier punto a lo largo de \mathcal{T}_ω representa un punto de cruce en el eje imaginario. Finalmente en el plano temporal se ilustra el comportamiento de la salida del sistema el cual, de acuerdo a la posición de sus raíces en el plano complejo, es críticamente estable.

Las curvas de cruce particionan el espacio de parámetros en un conjunto de regiones dentro de las cuales el sistema puede ser estable y al abandonar dichas regiones dejar de serlo. Estos conjuntos de parámetros reciben el nombre de regiones de estabilidad [54]. Sin embargo, la simple existencia de la frontera no indica de qué lado se encuentra la región de estabilidad; para ello, es necesario analizar la **dirección de cruce** de las raíces, la cual determina si una raíz entra o sale del semiplano izquierdo al atravesar la frontera \mathcal{T} , tal y como se observa en la Figura (3.10).

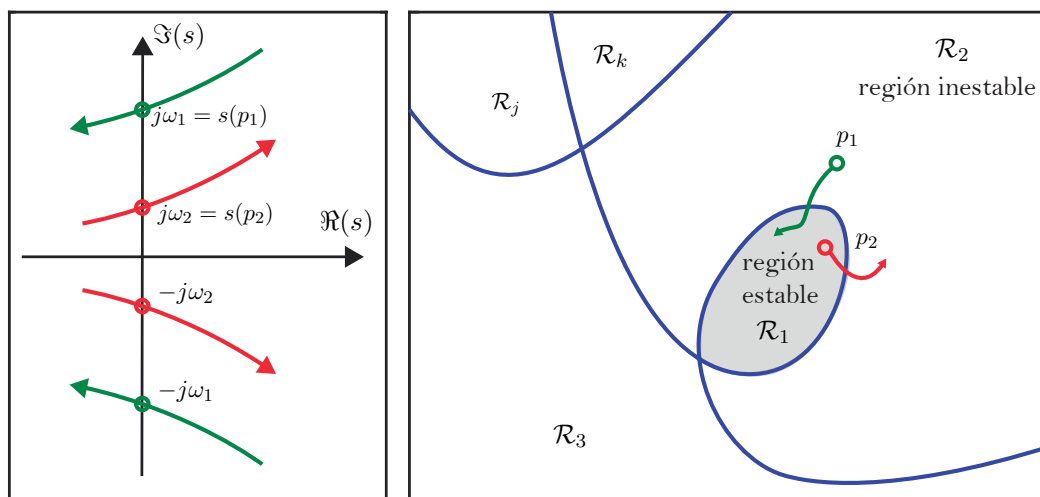


Figura 3.10: Representación gráfica del comportamiento de los valores propios y las fronteras de estabilidad.

σ -estabilidad en sistemas de dimensión infinita

En el contexto de los sistemas con retardos, el concepto de σ -estabilidad adquiere un nivel de complejidad superior. A diferencia de los sistemas LTI convencionales, donde se analiza el desplazamiento de un número finito de polos, en las ecuaciones diferenciales con retardo se debe garantizar que el **espectro infinito** de raíces quede confinado estrictamente dentro de la región \mathbb{C}_σ^- . Gracias a la propiedad espectral de los sistemas de tipo retardado (Propiedad 3.3.2), se asegura que para cualquier margen de diseño $\sigma > 0$, solo existirá un número finito de raíces candidatas que no cumplan esta condición, como se ilustra en la Figura (3.8). Esto permite que el problema de control se pueda abordar mediante el desplazamiento de las fronteras de estabilidad hacia el eje vertical $\Re(s) = -\sigma$. No obstante, este desplazamiento espectral conlleva un compromiso en el diseño de control: exigir una mayor velocidad de convergencia (incrementar el valor de σ) impone restricciones más severas a las ganancias del controlador. Geométricamente,

en el espacio de parámetros, esto se manifiesta como una contracción progresiva de las regiones de estabilidad. Lo anterior se analiza mas a detalle en el siguiente capítulo.

Este capítulo ha establecido el marco teórico para el análisis de sistemas con retardo, demostrando que su estabilización exige herramientas geométricas basadas en la continuidad de las raíces y en el mapeo de fronteras paramétricas. Habiendo planteado estos conceptos y la medida de σ -estabilidad, en el **Capítulo 4** se desarrolla la metodología para su cálculo y análisis. En él se formularán las ecuaciones paramétricas para trazar dichas fronteras, se optimizará la tasa máxima de decaimiento ($\sigma_{\text{máx}}$) y se aplicará el centro de Chebyshev para sintetizar controladores que sean simultáneamente óptimos y no frágiles.

Capítulo 4

Diseño de controladores con garantía de convergencia exponencial

Índice

4.1. Análisis de estabilidad	80
4.2. Controlador óptimo no-frágil	96

El objetivo principal de este capítulo es obtener herramientas que permitan determinar las regiones de estabilidad en el espacio de parámetros \mathbf{k} que garanticen la estabilidad de sistemas ante la presencia de retardos. Para tal fin, se emplea un enfoque geométrico basado en el método de descomposición D , el cual permite identificar de manera exacta las fronteras de estabilidad (curvas de cruce) así como la caracterización de las direcciones de cruce de las raíces características. De igual manera se introduce el concepto de σ -estabilidad para reformular las regiones de estabilidad en función de un margen de desempeño σ . Esta extensión tiene como propósito restringir la ubicación de los polos de lazo cerrado para garantizar una tasa de decaimiento exponencial mínima, asegurando así una respuesta dinámica más rápida.

Sobre esta base teórica, se desarrollan metodologías de síntesis para seleccionar controladores que maximicen dicha tasa de convergencia exponencial. Asimismo, se integran algoritmos de optimización convexa orientados a obtener controladores óptimos en el sentido de la fragilidad (*non-fragile control*). *Todo lo anterior confluye en una estrategia de diseño que garantiza no solo la estabilidad asintótica ante retardos, sino también un desempeño dinámico robusto, tal como se detalla en las siguientes secciones.*

4.1. Análisis de estabilidad

El análisis de estabilidad desarrollado en este trabajo considera una familia de plantas cuya función de transferencia $P(s)$ puede expresarse de la forma general:

$$P(s) = \frac{N(s)}{s^2 D(s)}, \quad (4.1)$$

donde $N(s)$ y $D(s)$ son polinomios que modelan la dinámica nominal del sistema.¹

Para estabilizar esta clase de sistemas, se propone un esquema de control proporcional-derivativo (PD), denotado como $C(s)$, con la estructura:

$$C(s) := k_p + sk_d, \quad (4.2)$$

donde $\mathbf{k} := [k_p, k_d]^T \in \mathbb{R}^2$ representa el vector de ganancias del controlador, siendo k_p la ganancia proporcional y k_d la ganancia derivativa.

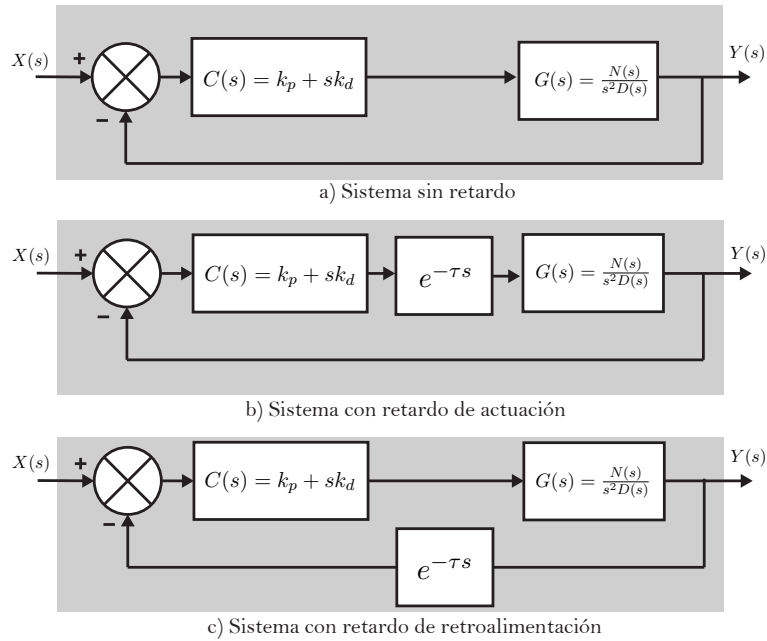


Figura 4.1: Diagramas de bloques del sistema en lazo cerrado con realimentación negativa. (a) Caso ideal sin retardo. (b) Sistema con retardo de transporte τ en la rama directa (retardo de actuación) modelado por el término $e^{-\tau s}$ entre $C(s)$ y $P(s)$. (c) Sistema con retardo de transporte τ en la retroalimentación (sensor ideal), modelado por $H(s) = e^{-\tau s}$.

Al cerrar el lazo de control con realimentación negativa, la estabilidad del sistema queda determinada por las raíces de la ecuación característica asociada al denominador de la función de transferencia en lazo cerrado. Para el caso sin retardo ($\tau = 0$), la dinámica resulta de orden finito y el problema se reduce a un análisis polinomial convencional. En particular, si $\tau = 0$, la función característica adopta la forma:

¹En el marco de este trabajo, la aparición de retardos se modela mediante términos exponenciales en s y conduce a funciones cuasi-polinomiales en la ecuación característica; por ello, $N(s)$ y $D(s)$ se mantienen polinomiales y el retardo se incorpora explícitamente como $e^{-\tau s}$.

$$\Delta(s; k_p, k_d, 0) := s^2 D(s) + (k_d s + k_p) N(s). \quad (4.3)$$

El interés central de este trabajo recae en sistemas con retardo de transporte $\tau > 0$ en el lazo, ya sea en la rama directa (retardo de actuación) o en la retroalimentación (sensor ideal), como se ilustra en la Figura (4.1). Si bien estas ubicaciones conducen a funciones de transferencia entrada-salida distintas, la estabilidad interna queda gobernada por una misma ecuación característica. En particular, al colocar el retardo en la rama directa se obtiene $C(s)e^{-\tau s}P(s)$, mientras que al colocarlo en la retroalimentación se tiene $H(s) = e^{-\tau s}$; en ambos casos, la ecuación característica adopta la forma unificada:

$$\Delta(s; k_p, k_d, \tau) := s^2 D(s) + (k_d s + k_p) N(s) e^{-\tau s}. \quad (4.4)$$

La función $\Delta(\cdot)$ es cuasi-polinomial y, en consecuencia, posee un conjunto infinito de raíces. El análisis de estabilidad desarrollado en las siguientes secciones se centra en caracterizar la localización de estas raíces en el plano complejo y en establecer condiciones sobre \mathbf{k} y τ que garanticen estabilidad asintótica y maximicen el decaimiento exponencial del sistema.

4.1.1. Regiones de estabilidad

De acuerdo con el teorema de la continuidad de las raíces (Proposición 3.1), propiedad inherente de los cuasipolinomios de tipo retardado², la transición de un sistema estable hacia la inestabilidad ocurre exclusivamente cuando al menos una raíz cruza el eje imaginario, que en el espacio de parámetros se traduce como atravesar una curva de cruce de estabilidad. Por lo tanto, el problema de diseño se aborda localizando analíticamente dichas fronteras para el modelo específico de la planta. Aplicando las definiciones de frecuencias de cruce (Ω) y curvas de cruce de estabilidad (\mathcal{T}), el objetivo consiste en resolver la condición $\Delta(j\omega; k_p, k_d, \tau) = 0$ derivada de la Ecuación (4.4). La extracción explícita de los parámetros k_p y k_d en función de ω permitirá trazar las curvas \mathcal{T}_0 y \mathcal{T}_ω en el espacio de parámetros. La intersección y disposición geométrica de estas fronteras delimita las regiones de estabilidad. Las siguientes proposiciones caracterizan el conjunto de curvas de cruce para el polinomio característico.

Proposición 4.1:

Sea $\tau \in \mathbb{R}_+$ un retardo fijo y asuma que $|N(0)| > 0$. Entonces, $\omega \in \mathbb{R}_+$ es una frecuencia de cruce de la ecuación característica (4.4) si y solo si $\mathbf{k}(\omega) := [k_p(\omega) \ k_d(\omega)]^\top$, donde

$$k_p(\omega) = \omega^2 \left(\Re \left[\frac{D(\omega)}{N(\omega)} \right] \cos(\tau\omega) - \Im \left[\frac{D(\omega)}{N(\omega)} \right] \sin(\tau\omega) \right), \quad (4.5)$$

$$k_d(\omega) = \omega \left(\Re \left[\frac{D(\omega)}{N(\omega)} \right] \sin(\tau\omega) + \Im \left[\frac{D(\omega)}{N(\omega)} \right] \cos(\tau\omega) \right), \quad (4.6)$$

define un punto de cruce $\mathbf{k}(\omega) \in \mathcal{T}_\omega$.

²Los cuasipolinomios de tipo retardado surgen cuando se consideran sistemas para los cuales el término con la derivada de mayor orden no incluye un retardo de tiempo.

Demostración. Considere la función característica Δ . Es claro que todos los puntos de cruce $\mathbf{k} \in \mathcal{T}_\omega$ están caracterizados por el conjunto de todos los puntos $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$ que resuelven (4.4). Por lo tanto, tomando $s = i\omega$ y considerando sus partes real e imaginaria, se obtiene:

$$\Re[\Delta(i\omega; k_p, k_d)] = 0, \quad (4.7)$$

$$\Im[\Delta(i\omega; k_p, k_d)] = 0. \quad (4.8)$$

Así, resolviendo las ecuaciones anteriores para k_p y k_d , después de algunas manipulaciones algebraicas simples, se obtienen las expresiones (4.5) y (4.6). Finalmente, observe que por hipótesis $N(0) \neq 0$, lo cual implica que k_p y k_d están bien definidos para todo $\omega \in \mathbb{R}_+$. \square

Proposición 4.2

Sea $\tau \in \mathbb{R}_+$ un retardo fijo y asuma que $|N(0)| > 0$. Entonces, la línea \mathbf{k}_0 está definida como:

$$\mathbf{k}_0 := \left\{ [0 \quad k_d]^\top \in \mathbb{R}^2 : k_d \in \mathbb{R} \right\}. \quad (4.9)$$

Demostración. Para determinar \mathcal{T}_0 tomemos $s = 0$ en la función característica (4.4), lo cual conduce a:

$$\Delta(0; k_p, k_d) = 0, \quad (4.10)$$

$$\Rightarrow k_p N(0) = 0. \quad (4.11)$$

Dado que por hipótesis $N(0) \neq 0$, se sigue que $s = 0$ es una frecuencia de cruce si y solo si $k_p = 0$ y $k_d \in \mathbb{R}$, lo cual prueba el resultado. \square

4.1.2. Direcciones de cruce

Como se estableció en el Capítulo 3, la construcción de las curvas \mathcal{T}_0 y \mathcal{T}_ω mediante las Proposiciones 4.1 y 4.2 logra particionar el espacio de parámetros (k_p, k_d) en regiones con un número fijo de raíces inestables. Sin embargo, para identificar cuáles de estas regiones garantizan la estabilidad asintótica, es necesario evaluar analíticamente la **dirección de cruce** sobre estas fronteras. En lugar de depender de una inspección gráfica o de un barrido paramétrico exhaustivo, es posible discriminar si una raíz entra o sale del semiplano izquierdo evaluando la sensibilidad geométrica de su parte real respecto a las variaciones en las ganancias del controlador. Para este fin, se define formalmente la tendencia de cruce, la cual permite cuantificar el sentido del movimiento de las raíces en $s = j\omega$ al atravesar \mathcal{T} . La siguiente proposición proporciona el mecanismo algebraico para determinar esta dirección y, consecuentemente, aislar las regiones que contienen los pares estabilizantes (k_p, k_d) .

Proposición 4.3

Sea $s^* := i\omega$ con $\omega > 0$, una raíz simple del polinomio característico (4.4) para un $\mathbf{k}^* = [k_p^* \ k_d^*]^\top \in \mathbb{R}^2$ fijo. Entonces, s^* se moverá del SPI al SPD mientras k_p o k_d cruzan \mathcal{T} en (k_p^*, k_d^*) en la dirección creciente de k_χ para $\chi \in \{p, d\}$ si:

$$\mathcal{C}_\chi(s^*, k_p^*, k_d^*) > 0, \quad (4.12)$$

donde la función de dirección de cruce \mathcal{C}_χ está definida por:

$$\mathcal{C}_\chi(s^*, \mathbf{k}^*) := \begin{cases} \Re\{\varphi(s^*, \mathbf{k}^*)\} & \text{si } \chi \equiv p \\ \Im\{\varphi(s^*, \mathbf{k}^*)\} & \text{si } \chi \equiv d \end{cases}, \quad (4.13)$$

donde

$$\varphi(s, \mathbf{k}) := \frac{(\tau C(s) - k_d)N(s) - C(s)N'(s) - D'(s)e^{\tau s}}{N(s)}.$$

Además, el cruce es del SPD al SPI si la desigualdad (4.12) se invierte.

Demostración. Por hipótesis, $s^* = i\omega$ (con $\omega > 0$) es una solución simple de Δ para \mathbf{k}^* . Por lo tanto, por la Proposición 3.1, cualquier solución $s(\mathbf{k})$ cruzará el eje imaginario del SPI al SPD (o del SPD al SPI) a través de una trayectoria compleja continua. Así, teniendo en cuenta tal observación mientras se asume que \mathbf{k} cruzará \mathcal{T} en la dirección creciente de k_χ , el cruce será del SPI al SPD (o del SPD al SPI) si se cumple la siguiente desigualdad:

$$\Re\left\{\frac{ds}{dk_\chi}\right\} > 0, \quad (< 0).$$

Ahora, considerando el *teorema de la función implícita* (ver, por ejemplo, [25]), tenemos que

$$\frac{ds}{dk_p} = -\frac{\frac{\partial \Delta(s^*; \mathbf{k})}{\partial k_p} \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}^*}}{\frac{\partial \Delta(s; \mathbf{k}^*)}{\partial s} \Big|_{s=s^*}} \quad \text{y} \quad \frac{ds}{dk_d} = -\frac{\frac{\partial \Delta(s^*; \mathbf{k})}{\partial k_d} \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}^*}}{\frac{\partial \Delta(s; \mathbf{k}^*)}{\partial s} \Big|_{s=s^*}}.$$

Por lo tanto, la prueba se completa al notar que

$$\Re\left\{-\frac{\frac{\partial \Delta(s^*; \mathbf{k})}{\partial k_p} \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}^*}}{\frac{\partial \Delta(s; \mathbf{k}^*)}{\partial s} \Big|_{s=s^*}}\right\} \equiv \Re\{\varphi(s^*, \mathbf{k}^*)\},$$

y

$$\Re\left\{-\frac{\frac{\partial \Delta(s^*; \mathbf{k})}{\partial k_d} \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}^*}}{\frac{\partial \Delta(s; \mathbf{k}^*)}{\partial s} \Big|_{s=s^*}}\right\} \equiv \Im\{\varphi(s^*, \mathbf{k}^*)\}.$$

□

Corolario 4.1

Sea $|N(0)| > 0$. Entonces, una raíz real simple de (4.4), se mueve del SPI al SPD mientras k_p cruza \mathcal{T}_0 en $s = j\omega$ ($\omega > 0$).

4.1.3. Ejemplo ilustrativo: Regiones de estabilidad

Con el propósito de ilustrar la aplicación numérica de las proposiciones anteriores, se considera una planta de ejemplo cuya función de transferencia está dada por:

$$P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^2 + s}. \quad (4.14)$$

Para un retardo de retroalimentación fijo $\tau = 0,5$ s y un controlador $C(s) = k_p + k_d s$, el objetivo consiste en determinar las curvas de cruce de estabilidad en el espacio de parámetros del controlador.

De acuerdo con las Proposiciones 4.1 y 4.2, se derivan las ecuaciones paramétricas que definen la frontera de cruce por el eje imaginario (\mathcal{T}_ω) y la frontera de cruce por el origen (\mathcal{T}_0). Como se aprecia en la gráfica de la izquierda de la Figura 4.2, al graficar estas ecuaciones para un barrido de frecuencias $\omega \in [0, \infty)$, se generan las curvas que particionan el espacio de parámetros en diversas subregiones denotadas como \mathcal{R}_i .

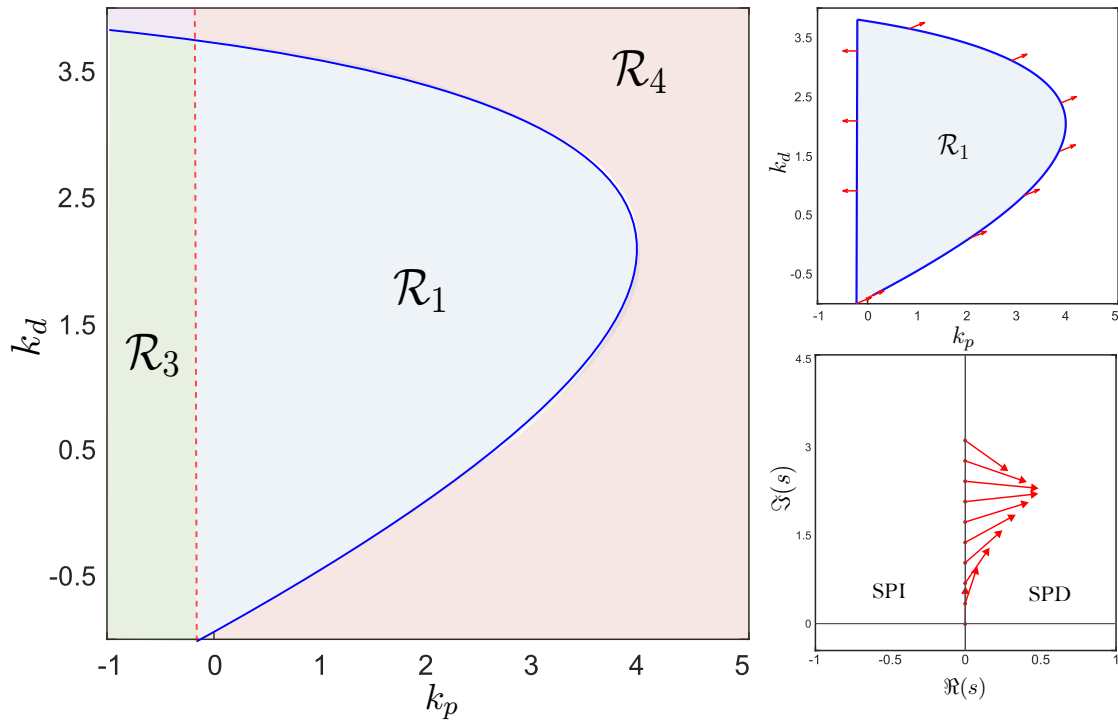


Figura 4.2: Análisis de fronteras de estabilidad y direcciones de cruce para la planta de ejemplo (4.14) con $\tau = 0,5$ s . **Izquierda:** Partición del espacio paramétrico (k_p, k_d) en subregiones \mathcal{R}_i mediante las curvas \mathcal{T}_ω y \mathcal{T}_0 . **Superior derecha:** Tendencia de cruce en \mathcal{R}_1 , donde los vectores rojos indican la dirección geométrica de inestabilidad. **Inferior derecha:** Verificación en el plano complejo del tránsito de raíces desde el Semiplano Izquierdo (SPI) hacia el Derecho (SPD).

Una vez trazadas las fronteras, se identifican las regiones que garantizan la estabilidad asintótica. Tomando la función de la Ecuación (4.14) con $\tau = 0,5$ s, y aplicando la Proposición 4.3, se obtiene la siguiente función de dirección de cruce:

$$\mathcal{C}_\chi(j\omega, \mathbf{k}^*) := \begin{cases} \tau k_p - k_d - (\cos(\tau\omega) - 2\omega \sin(\tau\omega)) & \text{si } \chi \equiv p \\ \tau\omega k_d - (\sin(\tau\omega) + 2\omega \cos(\tau\omega)) & \text{si } \chi \equiv d \end{cases} \quad (4.15)$$

Al evaluar un punto fijo $\mathbf{k}^* = [k_p^*, k_d^*]^\top \in \mathcal{T}_\omega$ y su frecuencia asociada ω^* , la Ecuación (4.15) arroja los signos que definen la dirección del cruce de las raíces ante variaciones en las ganancias.

En las gráficas de la derecha de la Figura 4.2 se ilustran los resultados de este análisis. En la imagen superior derecha, los vectores rojos sobre la frontera indican explícitamente la tendencia de pérdida de estabilidad al abandonar la región \mathcal{R}_1 . Simultáneamente, la imagen inferior derecha confirma en el plano complejo que dicho desplazamiento vectorial concuerda de forma exacta con el movimiento de las raíces desde el Semiplano Izquierdo (SPI) hacia el Semiplano Derecho (SPD). En consecuencia, se concluye analíticamente que \mathcal{R}_1 constituye la región de estabilidad del sistema; cualquier configuración paramétrica contenida en su interior garantiza la estabilidad asintótica de la planta definida en (4.14).

4.1.4. σ -estabilidad

Partiendo de la definición formal de σ -estabilidad establecida en el capítulo anterior, garantizar un desempeño transitorio estricto exige que el espectro infinito del sistema con retardo se confine en la región abierta \mathbb{C}_σ^- . Matemáticamente, el problema de diseño consiste en trasladar la frontera de análisis desde el eje imaginario puro hacia el *eje- σ* , definido por la línea vertical $\mathbf{L}_\sigma := \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) = -\sigma\}$.

Sea $\sigma \in \mathbb{R}_+$ la tasa de decaimiento exigida por los requerimientos de desempeño. El *problema de σ -estabilidad* consiste en determinar el conjunto de ganancias del controlador \mathbf{k} que sitúen la raíz dominante de la ecuación característica exactamente sobre \mathbf{L}_σ , asegurando que el resto del espectro permanezca a su izquierda.

Bajo este enfoque, definimos a las curvas de cruce de σ -estabilidad, denotadas como \mathcal{T}_σ , como el conjunto de todas las ganancias \mathbf{k} para las cuales la ecuación cuasipolinómica (4.4) posee al menos una raíz que satisface $s = -\sigma + j\omega$. El conjunto de frecuencias de cruce correspondiente se define como:

$$\Omega_\sigma := \{\omega \in \mathbb{R}_+ \mid N(-\sigma + j\omega) \neq 0\}.$$

Proposición 4.4

Sean $\omega \in \Omega_\sigma$ y sean $\tau \in \mathbb{R}_+$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ valores fijos. Entonces, las curvas de cruce de σ -estabilidad \mathcal{T}_σ pueden calcularse como

$$\mathcal{T}_\sigma = \mathcal{T}_{\bar{\sigma}} \cup \mathcal{T}_{\sigma,0}, \quad (4.16)$$

con,

$$\mathcal{T}_{\sigma,0} := \left\{ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^2 : \sigma k_d = k_p + \frac{\sigma^2 D(-\sigma)}{N(-\sigma)} e^{-\tau\sigma} \right\}, \quad (4.17)$$

$$\mathcal{T}_{\bar{\sigma}} := \left\{ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{k} = \mathbf{k}_\sigma(\sigma, \omega) \right\}, \quad (4.18)$$

donde $\mathbf{k}_\sigma(\sigma, \omega) := [k_p(\sigma, \omega) \quad k_d(\sigma, \omega)]^\top$, con $k_p(\sigma, \omega)$ y $k_d(\sigma, \omega)$ definidos por

$$\begin{aligned} k_p(\sigma, \omega) &= -e^{-\tau\sigma} \left[\left(\cos(\tau\omega) + \frac{\sigma}{\omega} \sin(\tau\omega) \right) \Re \left[\frac{\widehat{s}^2 D(\widehat{s})}{N(\widehat{s})} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\sigma}{\omega} \cos(\tau\omega) - \sin(\tau\omega) \right) \Im \left[\frac{\widehat{s}^2 D(\widehat{s})}{N(\widehat{s})} \right] \right], \\ k_d(\sigma, \omega) &= -\frac{e^{-\tau\sigma}}{\omega} \left[\sin(\tau\omega) \Re \left[\frac{\widehat{s}^2 D(\widehat{s})}{N(\widehat{s})} \right] + \cos(\tau\omega) \Im \left[\frac{\widehat{s}^2 D(\widehat{s})}{N(\widehat{s})} \right] \right], \end{aligned}$$

donde $\widehat{s} := -\sigma + j\omega$.

Demostración. Al establecer $s = \widehat{s}$ en (4.4), el resultado se prueba siguiendo pasos similares a los presentados en la prueba de la Proposición 4.1. \square

De acuerdo con la Proposición 3.1, las curvas de cruce de σ -estabilidad \mathcal{T}_σ se deforman continuamente a medida que σ aumenta, hasta un valor máximo admisible conocido como la *tasa de decaimiento exponencial máxima*. Para analizar esta deformación, examinamos el punto inicial de la curva \mathcal{T}_σ . El resultado que se presenta a continuación caracteriza este comportamiento.

Proposición 4.5

Sea $\mathbf{k}_\sigma(\sigma, \omega) \in \mathbb{R}^2$ como en la Proposición 4.4. $\mathbf{k}_0(\sigma) := \lim_{\omega \rightarrow 0} \mathbf{k}_\sigma(\sigma, \omega)$ está dado por:

$$\mathbf{k}_0(\sigma) \equiv -e^{-\tau\sigma} \begin{bmatrix} \frac{(\tau\sigma + 1)D(-\sigma)}{N(-\sigma)} + \sigma f_0(-\sigma) \\ \frac{\tau D(-\sigma)}{N(-\sigma)} + f_0(-\sigma) \end{bmatrix}$$

donde

$$f_0(-\sigma) \triangleq \frac{D'(-\sigma)N(-\sigma) - D(-\sigma)N'(-\sigma)}{N^2(-\sigma)}$$

Demostración. Para simplificar la presentación, introduzcamos la función $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$\varphi(s) := \frac{s^2 D(s)}{N(s)}.$$

A continuación, dado que tanto D como N son polinomios, es claro ver que

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(-\sigma + i\omega) &= \frac{\sigma^2 D(-\sigma)}{N(-\sigma)}, \\ \Rightarrow \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} \Re \{ \varphi(-\sigma + i\omega) \} = \frac{\sigma^2 D(-\sigma)}{N(-\sigma)}, \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \Im \{ \varphi(-\sigma + i\omega) \} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

De la observación anterior, se sigue que

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin(\tau\omega) \Re\{\varphi(-\sigma + i\omega)\}}{\omega} &= \frac{\tau\sigma^2 D(-\sigma)}{N(-\sigma)}, \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \cos(\tau\omega) \Re\{\varphi(-\sigma + i\omega)\} &= \frac{\sigma^2 D(-\sigma)}{N(-\sigma)}, \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \sin(\tau\omega) \Im\{\varphi(-\sigma + i\omega)\} &= 0.\end{aligned}$$

Ahora, para calcular el límite

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\Im\{\varphi(-\sigma + i\omega)\}}{\omega},$$

observamos que

$$\begin{aligned}\varphi(-\sigma + i\omega) &= \varphi(-\sigma) + i f_0(-\sigma)\omega + \mathcal{O}(\omega^2), \\ \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\Im\{\varphi(-\sigma + i\omega)\}}{\omega} &= f_0(-\sigma).\end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en $k_p(\sigma, \omega)$ y $k_d(\sigma, \omega)$, resulta

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \mathbf{k}_\sigma(\sigma, \omega) \equiv \mathbf{k}_0(\sigma),$$

lo cual completa la prueba. \square

Ejemplo ilustrativo: σ -estabilidad

Para visualizar el efecto de este desplazamiento espectral, se retoma la planta de ejemplo definida en (4.14). A partir de la Proposición 4.4, es posible derivar las funciones paramétricas que describen las curvas de cruce de σ -estabilidad en el plano (k_p, k_d) en función del retardo τ y la tasa deseada σ .

Para la caracterización paramétrica de la frontera en el rango de frecuencias $\omega > 0$, denotada como $\mathcal{T}_{\sigma, \omega}$, se derivan las siguientes expresiones:

$$k_p(\sigma, \omega) = -e^{-\tau\sigma} \left[\cos(\tau\omega)(a_1) + \frac{\sin(\tau\omega)}{\omega}(a_2) \right], \quad (4.19)$$

$$k_d(\sigma, \omega) = e^{-\tau\sigma} \left[\cos(\tau\omega)(a_3) - \frac{\sin(\tau\omega)}{\omega}(a_4) \right], \quad (4.20)$$

donde, para compactar la notación, se definen los polinomios auxiliares en ω :

$$\begin{aligned}a_1 &:= \omega^4 + 2\sigma(1 - \sigma)\omega^2 + \sigma^3(2 - 3\sigma), \\ a_2 &:= \sigma^4(\sigma - 1) - 2\sigma^3\omega^2 + (1 - 3\sigma)\omega^4, \\ a_3 &:= \sigma^2(4\sigma - 3) + \omega^2(1 - 4\sigma), \\ a_4 &:= \omega^4 + 3\sigma(1 - 2\sigma)\omega^2 + \sigma^3(\sigma - 1).\end{aligned}$$

Adicionalmente, el límite inferior de la región, asociado a las raíces que cruzan por el eje real (frontera $\mathcal{T}_{\sigma, 0}$), está regido por la recta:

$$k_{d0}(\sigma) = \frac{k_{p0}}{\sigma} + \sigma(\sigma^2 - \sigma)e^{-\tau\sigma}, \quad (4.21)$$

cuyo vértice de intersección $\mathbf{k}_0(\sigma)$, establecido por la Proposición 4.5, es:

$$\mathbf{k}_0(\sigma) = -e^{-\tau\sigma} \begin{bmatrix} \tau\sigma^3 - (\tau + 1)\sigma^2 \\ \tau\sigma^2 - (\tau + 2)\sigma + 1 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

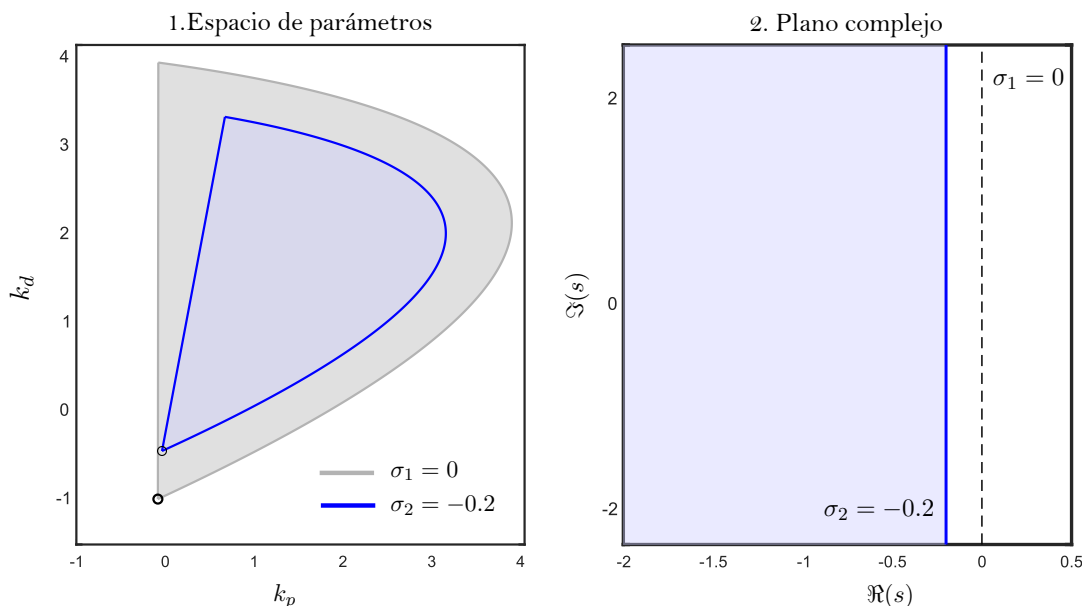


Figura 4.3: Efecto del parámetro de decaimiento σ en las regiones de estabilidad para $\tau = 0,5$ s. **Izquierda:** Espacio de parámetros (k_p, k_d) , evidenciando la contracción geométrica de la región de estabilidad al exigir un decaimiento $\sigma = 0,2$ (azul) frente al caso límite $\sigma = 0$ (gris). Los marcadores circulares indican el vértice $\mathbf{k}_0(\sigma)$ asociado al límite $\omega \rightarrow 0$. **Derecha:** Plano complejo, ilustrando el desplazamiento de la barrera de estabilidad de $\Re(s) = 0$ a $\Re(s) = -0,2$.

Suponiendo un retardo fijo $\tau = 0,5$ s, se analizan dos escenarios operativos: el límite de estabilidad asintótica clásica ($\sigma = 0$) y un requerimiento de desempeño estricto ($\sigma = 0,2$). La evaluación de las Ecuaciones (4.19)–(4.22) bajo estos parámetros permite construir el mapa de estabilidad de la Figura 4.3, en donde además se observa la contracción de las regiones de sigma estabilidad como efecto del parámetro σ .

4.1.5. Tasa máxima de decaimiento exponencial.

Partiendo de la definición formal de $\sigma_{\text{máx}}$ establecida en el Capítulo 3, esta sección aborda el problema de su determinación analítica y computacional en el espacio de parámetros. Para lograrlo, es necesario analizar cómo evoluciona la región de estabilidad conforme se incrementa el parámetro de diseño σ .

Como se mencionó anteriormente, la σ -estabilidad asegura una tasa de decaimiento específica cuando las ganancias del controlador se encuentran dentro de una región- σ . Por lo tanto, identificar las ganancias que producen la máxima tasa de decaimiento exponencial es de interés práctico.

Proposición 4.6

Sea $\tau > 0$ un retardo fijo, y considere la función característica $\Delta(s; \mathbf{k})$ dada por (4.4). Suponga que Δ es estable para una ganancia dada \mathbf{k} , y denote por \mathcal{R}_0 la región de estabilidad correspondiente al caso $\sigma_0 := \sigma = 0$. Sea σ_{max} la tasa máxima de decaimiento exponencial, y sea $(\sigma_\ell) \in \mathbb{R}_+$ una secuencia creciente que converge a $\sigma_{m\acute{a}x}$, es decir, $(\sigma_\ell) \rightarrow \sigma_{max}$ cuando $\ell \rightarrow \infty$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, denote por \mathcal{R}_k la región de estabilidad con frontera \mathcal{T}_{σ_k} . Entonces, se cumplen las siguientes inclusiones anidadas:

$$\mathcal{R}_0 \supseteq \mathcal{R}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{R}_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.23)$$

Además, la intersección de todas las regiones de estabilidad está dada por:

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{R}_k = \overline{\mathcal{R}}, \quad (4.24)$$

donde $\overline{\mathcal{R}} := \mathcal{R}_{\sigma_{max}}$.

Demostración. Por hipótesis, tanto \mathcal{R}_0 como $\overline{\mathcal{R}}$ son no vacíos. Por lo tanto, la cadena de inclusiones (4.23) se sigue directamente de la Proposición ???. Dado que $\overline{\mathcal{R}}$ contiene el conjunto de parámetros del controlador que garantizan la máxima tasa de decaimiento exponencial, se sigue que $\mathcal{R}_k \rightarrow \overline{\mathcal{R}}$, lo cual implica (4.24). \square

Observación 4.1. La Proposición 4.6 implica que a medida que $\sigma_k \rightarrow \sigma_{max}$, las regiones \mathcal{R}_k se contraen continuamente hacia $\overline{\mathcal{R}}$.

La Proposición 4.6 establece que, al incrementar σ , las regiones de σ -estabilidad \mathcal{R}_σ se contraen monótonamente. En consecuencia, existe un umbral $\sigma_{m\acute{a}x} := \sup\{\sigma \geq 0 : \mathcal{R}_\sigma \neq \emptyset\}$ tal que al acercarse $\sigma \rightarrow \sigma_{m\acute{a}x}$ la región límite $\overline{\mathcal{R}} = \bigcap_{k \geq 0} \mathcal{R}_{\sigma_k}$ (sea $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = \sigma_{m\acute{a}x}$) describe las ganancias que maximizan la tasa de decaimiento. En el caso particular considerado a continuación, dicha contracción conduce a un colapso de \mathcal{R}_σ y permite caracterizar $\sigma_{m\acute{a}x}$ mediante una condición de multiplicidad en la ecuación característica.

Proposición 4.7

Considérese la clase de sistemas de control en lazo cerrado descritos por la siguiente ecuación característica cuasi-polinomial:

$$\Delta(s; k_p, k_d, \tau) := s^2 + (k_d s + k_p) e^{-\tau s} = 0, \quad (4.25)$$

donde $k_p, k_d \in \mathbb{R}_+$ y $\tau > 0$ es un retardo fijo tal que $0 < \tau < \tau_c$, donde τ_c está dado por:

$$\tau_c := \frac{1}{\eta} \arctan \left[\frac{k_d}{k_p} \eta \right], \quad \text{con } \eta := \sqrt{\frac{k_d^2 + \sqrt{k_d^4 + 4k_p^2}}{2}}.$$

Bajo estas condiciones, la tasa máxima de decaimiento exponencial ($\sigma_{m\acute{a}x}$) que es posible imponer a las soluciones del sistema mediante la selección de ganancias

(k_p, k_d) está acotada por:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\tau}. \quad (4.26)$$

Demostración. La condición $0 < \tau < \tau_c$ asegura la existencia de ganancias estabilizantes $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$. Para $\sigma = 0$, observe de (4.11) que $\mathcal{T}_{\sigma,0}$ se describe mediante una línea vertical (ver Figura (4.4)). Usando la Proposición 4.4, se puede mostrar que para ω suficientemente pequeño ($0 < \omega < \omega_c$), ambas ganancias k_p y k_d son positivas. Específicamente, se cumplen los siguientes límites:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0, \omega \rightarrow \omega_c} k_p(\sigma, \omega) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0, \omega \rightarrow \omega_c} k_d(\sigma, \omega) = \frac{\pi}{2\tau},$$

donde $\omega_c := \frac{\pi}{2\tau}$. Estas observaciones confinan la primera región de estabilidad \mathcal{R}_0 al primer cuadrante (ver Figura (4.4)). Al calcular las direcciones de cruce del Corolario 4.1, a medida que \mathbf{k} cruza \mathcal{T}_0 en la dirección creciente de k_p , una raíz se mueve del SPD al SPI. Un fenómeno similar ocurre cuando \mathbf{k} cruza \mathcal{T}_ω desde abajo, donde un par de raíces cruza a través de $\pm j\omega$ (ver Figura (4.4)). Usando la Proposición 4.6, la región de estabilidad \mathcal{R}_0 comienza a contraerse a medida que σ aumenta. De (4.18), a medida que σ aumenta, la frontera $\mathcal{T}_{\sigma,0}$ se mueve hacia la derecha, mientras que $\mathcal{T}_{\bar{\sigma}}$ se desplaza hacia la izquierda (ver Figura (4.7)).

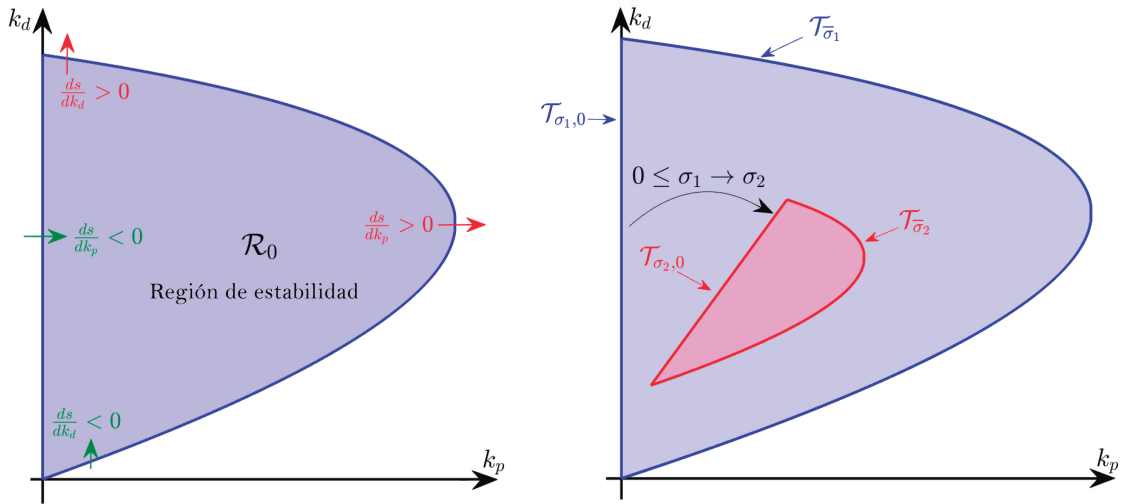


Figura 4.4: Visualización de la región de estabilidad \mathcal{R}_0 delimitada por \mathcal{T} y la evolución de las curvas \mathcal{T}_σ a medida que el parámetro σ cambia en el intervalo $0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2$.

Teniendo en cuenta los argumentos anteriores, tenemos que en el caso límite, la región de σ -estabilidad \mathcal{R}_k colapsará a un único punto \mathbf{k}^{opt} . Además, tal punto estará compuesto por la intersección de las curvas $\mathcal{T}_{\sigma,0}$ y $\mathcal{T}_{\bar{\sigma}}$. Como consecuencia, dicho punto debe corresponder a una solución de multiplicidad tres. Para determinar σ_{max} , es claro que tal caso límite implica que $\omega = 0$ y que deben satisfacerse las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \Delta(-\sigma; \mathbf{k}) = 0, \\ \frac{d}{ds}\Delta(s; \mathbf{k}) \Big|_{s=-\sigma} = 0, \\ \frac{d^2}{ds^2}\Delta(s; \mathbf{k}) \Big|_{s=-\sigma} = 0. \end{cases} \quad (4.27)$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas, (4.27) se puede reescribir como:

$$\sigma^2 + (k_p - k_d\sigma)e^{\sigma\tau} = 0, \quad (4.28a)$$

$$e^{\sigma\tau}(k_d - (k_p - \sigma k_d)\tau) - 2\sigma = 0, \quad (4.28b)$$

$$2 + e^{\sigma\tau}[k_p\tau^2 - k_d\tau(2 + \sigma\tau)] = 0. \quad (4.28c)$$

Ahora, resolviendo las ecuaciones (4.28a) y (4.28b) para k_p y k_d , resulta:

$$k_p = \sigma^2 e^{-\sigma\tau}(1 - \sigma\tau), \quad (4.29)$$

$$k_d = \sigma e^{-\sigma\tau}(2 - \sigma\tau). \quad (4.30)$$

Finalmente, sustituyendo (4.29) y (4.30) en (4.28c) y resolviendo para σ derivamos (4.26). Esto completa la prueba. \square

Observación 4.2. *La Proposición 4.7 es aplicable a cualquier lazo cerrado cuya ecuación característica pueda reducirse a la forma (4.25).*

El resultado anterior (Proposición 4.7) establece que, bajo ciertas condiciones estructurales (típicamente asociadas a sistemas de orden reducido o integradores puros), la tasa máxima de decaimiento exponencial σ_{\max} se alcanza mediante un único par de ganancias $(k_p^{\text{opt}}, k_d^{\text{opt}})$. Sin embargo, para una clase más amplia de funciones de transferencia, la optimización del decaimiento no necesariamente converge a una solución única. En estos casos, el conjunto de parámetros que logran σ_{\max} forma una región $\mathcal{R}_{\min} \subset \mathbb{R}^2$ con medida no nula (un área en lugar de un punto). Este fenómeno está intrínsecamente relacionado con la interacción entre los ceros y polos de la planta general $G(s) = N(s)/s^2 D(s)$ y el retardo.

Con el fin de caracterizar estas regiones límites para un sistema general, es necesario introducir una formulación vectorial que describa la sensibilidad de la frontera de estabilidad. Definamos las funciones auxiliares complejas $g_d, g : \overline{\mathbb{R}}_+^2 \rightarrow \mathbb{C}$ en términos de los polinomios de la planta:

$$g_d(\sigma, \omega) \triangleq i \frac{(\widehat{s}^2 D'(\widehat{s}) + 2\widehat{s}D(\widehat{s}))N(\widehat{s}) - \widehat{s}^2 D(\widehat{s})N'(\widehat{s})}{N^2(\widehat{s})},$$

$$g(\sigma, \omega) \triangleq \frac{\widehat{s}^2 D(\widehat{s})}{N(\widehat{s})}, \quad \widehat{s} := -\sigma + i\omega,$$

Asimismo, definimos los vectores $\mathbf{u}_d, \mathbf{v}_d, \mathbf{u}, \mathbf{v} : \overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$, los cuales capturan la dependencia geométrica respecto al retardo y la frecuencia:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_d(\sigma, \omega) &\triangleq \begin{bmatrix} \frac{\sigma (\sin(\tau\omega) - \tau\omega \cos(\tau\omega)) + \tau\omega^2 \sin(\tau\omega)}{\omega^2 e^{\tau\sigma}} \\ \frac{\sigma (\tau\omega \sin(\tau\omega) + \cos(\tau\omega)) + \tau\omega^2 \cos(\tau\omega)}{\omega^2 e^{\tau\sigma}} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{v}_d(\sigma, \omega) &\triangleq \begin{bmatrix} \frac{\sin(\tau\omega) - \tau\omega \cos(\tau\omega)}{\omega^2 e^{\tau\sigma}} \\ \frac{\tau\omega \sin(\tau\omega) + \cos(\tau\omega)}{\omega^2 e^{\tau\sigma}} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{u}(\sigma, \omega) &\triangleq \begin{bmatrix} \frac{\omega \cos(\tau\omega) + \sigma \sin(\tau\omega)}{\omega e^{\tau\sigma}} \\ \frac{\omega \sin(\tau\omega) - \sigma \cos(\tau\omega)}{\omega e^{\tau\sigma}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(\sigma, \omega) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{-e^{-\tau\sigma} \sin(\tau\omega)}{\omega} \\ \frac{-e^{-\tau\sigma} \cos(\tau\omega)}{\omega} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

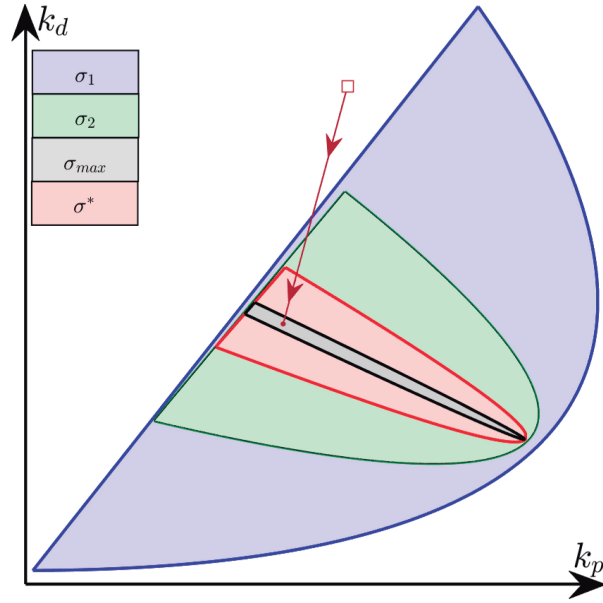


Figura 4.5: Regiones de estabilidad en el espacio de parámetros para diferentes valores de σ donde $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_{max} < \sigma^*$.

Finalmente, definimos los vectores de proyección $\mathbf{h}_d, \mathbf{h} : \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ que descomponen la respuesta en sus partes real e imaginaria:

$$\mathbf{h}_d(\sigma, \omega) \triangleq \begin{bmatrix} -\Im \{g_d(\sigma, \omega)\} \\ \Re \{g_d(\sigma, \omega)\} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{h}(\sigma, \omega) \triangleq \begin{bmatrix} \Re \{g(\sigma, \omega)\} \\ \Im \{g(\sigma, \omega)\} \end{bmatrix}.$$

Para un $\sigma \in \mathbb{R}_+$ dado, sea \mathcal{R}_σ la región de σ -estabilidad correspondiente y $\partial\mathcal{R}_\sigma$ su respectiva frontera. Con estas nociones establecidas, considere el siguiente resultado.

Proposición 4.8

Sea $\tau \in \mathbb{R}_+$ un valor de retardo fijo y considere un sistema de control cuya ecuación característica en lazo cerrado depende de una planta racional $G(s) = N(s)/s^2D(s)$ (ec.4.4). Para cualquier $\sigma \geq 0$, $\omega > 0$ y vector de ganancias $\mathbf{k} \in \mathcal{T}_{\bar{\sigma}}$ fijos, asuma que las raíces de $\Delta(-\sigma + i\omega; \mathbf{k})$ son simples y que $\partial\mathcal{R}_{\sigma} \cap \mathcal{T}_{\sigma,0} \neq \emptyset$.

Bajo estas condiciones, la tasa máxima de decaimiento exponencial alcanzable, σ_{\max} , se determina como la solución al siguiente problema de optimización:

$$\sigma_{\max} = \operatorname{argmin}_{\sigma \geq 0} \vartheta(\sigma), \quad (4.31)$$

donde la función $\vartheta : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ se define como

$$\vartheta(\sigma) := \int_0^{\omega_f(\sigma)} (\mathcal{F}^2(\sigma, \omega) + \mathcal{G}^2(\sigma, \omega)) d\omega + \|\mathbf{k}_{\sigma}(\sigma, \omega) - \mathbf{k}_0(\sigma)\|_2, \quad (4.32)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\sigma, \omega) &:= \langle \mathbf{u}_d(\sigma, \omega), \mathbf{h}(\sigma, \omega) \rangle + \langle \mathbf{u}(\sigma, \omega), \mathbf{h}_d(\sigma, \omega) \rangle, \\ \mathcal{G}(\sigma, \omega) &:= \langle \mathbf{v}_d(\sigma, \omega), \mathbf{h}(\sigma, \omega) \rangle + \langle \mathbf{v}(\sigma, \omega), \mathbf{h}_d(\sigma, \omega) \rangle, \end{aligned}$$

y la frecuencia $\omega_f(\sigma) > 0$ está dada por

$$\omega_f(\sigma) := \min \omega \in \mathbb{R}_+ : f(\omega, \sigma, \tau) = 0, \quad (4.33)$$

donde $f : \mathbb{R}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ se define como:

$$f(\omega, \sigma, \tau) := \sigma k_d(\sigma, \omega) - k_p(\sigma, \omega) - \frac{\sigma^2 D(-\sigma)}{N(-\sigma)} e^{-\tau\sigma}. \quad (4.34)$$

Demostración. Siguiendo argumentos similares a los presentados en la Proposición 4.7, concluimos que la región de estabilidad \mathcal{R}_0 correspondiente a $\sigma = 0$ yace en el primer cuadrante. Además, de acuerdo con la Proposición 4.6, sabemos que para cualesquiera σ_j y σ_k (para $j, k \in \mathbb{N}$) que satisfagan $\sigma_j < \sigma_k \leq \sigma_{\max}$, su región de σ -estabilidad correspondiente (\mathcal{R}_j y \mathcal{R}_k , respectivamente) satisfacen la relación

$$\mathcal{R}_j \supset \mathcal{R}_k. \quad (4.35)$$

Las observaciones anteriores se resumen en la Figura 4.5. Así, si ec.(4.35) no se cumple para un σ^* dado, se sigue que $\sigma^* > \sigma_{\max}$.

Teniendo en mente tal observación y considerando la hipótesis de que cualquier solución de $\Delta(-\sigma + i\omega; \mathbf{k}) = 0$ es simple, se sigue que la frontera $\mathcal{T}_{\bar{\sigma}}$ es continuamente diferenciable, lo que implica que una variación continua de σ corresponderá a una contracción suave de \mathcal{T}_{σ} , esto es, sin la presencia de singularidades. En este sentido, considerando $\sigma^* = \sigma_{\max} + \delta$ para un δ suficientemente pequeño, es decir, $0 < \delta \ll 1$, los argumentos anteriores nos permiten concluir que $\mathcal{R}_{\sigma^*} \not\subseteq \mathcal{R}_{\sigma_{\max}}$. En esta línea,

denotando la longitud de una región de estabilidad dada por $\ell(\mathcal{R})$, si para un $\sigma_j > \sigma_k$ dado su región de estabilidad correspondiente \mathcal{R}_{σ_j} satisface

$$\ell(\mathcal{R}_{\sigma_j}) > \ell(\mathcal{R}_{\sigma_k}), \quad (4.36)$$

tal relación implica que $\sigma_j > \sigma_{max}$. Notando que $\partial\mathcal{R}_\sigma \cap \mathcal{T}_{\sigma,0} \neq \emptyset$ implica $\ell(\mathcal{R}_\sigma) \equiv \vartheta(\sigma)$, tomar el caso límite conduce a la σ_{max} presentada en (4.37). \square

El resultado anterior permite el cálculo de la tasa máxima de decaimiento exponencial para sistemas generales descritos por la función característica (4.4). Sin embargo, su alto costo computacional es una limitación clave. El siguiente resultado ofrece una alternativa más simple y de bajo costo para estimar $\sigma_{m\acute{a}x}$. Vale la pena mencionar que, en algunos casos, la región de estabilidad puede consistir únicamente en el conjunto $\mathcal{T}_{\bar{\sigma}}$. En tales situaciones, la tasa máxima de decaimiento exponencial σ_{max} se alcanza en un punto donde la ecuación característica admite una raíz compleja múltiple. Para estos casos, el resultado establecido anteriormente puede modificarse ligeramente como sigue:

Corolario 4.2

Sea $\tau \in \mathbb{R}_+$ un retardo fijo y considere un sistema general descrito por la ecuación característica $\Delta(s; \mathbf{k}, \tau) = 0$. Para cualquier $\sigma \geq 0$, $\omega > 0$, y $\mathbf{k} \in \mathcal{T}_{\bar{\sigma}}$ fijos asuma que todas las raíces de $\Delta(-\sigma + i\omega; \mathbf{k})$ son simples y que la vecindad $\partial\mathcal{R}_\sigma$ es un contorno cerrado simple parametrizado por $\mathcal{C} : [\underline{\omega}(\sigma), \bar{\omega}(\sigma)] \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $(\underline{\omega}(\sigma)) = \mathcal{C}(\bar{\omega}(\sigma))$. Entonces, el máximo decaimiento exponencial σ_{max} está dado por:

$$\sigma_{max} = \operatorname{argmin}_{\sigma \geq 0} \vartheta(\sigma), \quad (4.37)$$

donde la función $\vartheta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ se define como

$$\vartheta(\sigma) := \int_{\underline{\omega}(\sigma)}^{\bar{\omega}(\sigma)} (\mathcal{F}^2(\sigma, \omega) + \mathcal{G}^2(\sigma, \omega)) d\omega \quad (4.38)$$

con \mathcal{F} y \mathcal{G} definidas en la proposición 4.8.

Proposición 4.9

Sea $\tau \in \mathbb{R}_+$ un retardo fijo y considere un sistema de control general descrito por la ecuación característica $\Delta(s; \mathbf{k}, \tau) = 0$. Para cualquier $\sigma \geq 0$, $\omega > 0$ y vector de parámetros $\mathbf{k} \in \mathcal{T}_{\bar{\sigma}}$ fijos, asuma que las raíces de $\Delta(-\sigma + i\omega; \mathbf{k})$ son simples. Denote el conjunto de tasas de decaimiento admisibles como Γ , definido como

$$\Gamma := \{\sigma \in \mathbb{R}_+ : \sigma < \sigma_{max}\}.$$

Entonces, para cualquier cota superior de Γ , se cumple la siguiente desigualdad:

$$|\mathbf{k}_0(\sigma)|_2 \geq |\mathbf{k}\sigma(\sigma, \omega_u)|_2, \quad (4.39)$$

donde la frecuencia ω_u está dada por

$$\omega_u := \min \{ \omega \in \mathbb{R}_+ : f(\omega, \sigma) = 0 \},$$

con f definida en (4.34).

Demostración. La prueba sigue ideas similares a las presentadas en la Proposición 4.8. \square

El Algoritmo 1 resume la implementación de las Proposiciones 4.8–4.9 para calcular la tasa máxima de decaimiento exponencial σ_{\max} . Para un sistema descrito por (4.4), toma como entrada una estimación inicial σ_0 , el retardo de tiempo τ , y la tasa de decaimiento admisible Γ . El algoritmo utiliza dos funciones centrales: `Cost $_{\vartheta}$` para evaluar la integral en (4.38), y `Get σ_{\max}` para resolver el problema de optimización (4.37). Se utilizan `fzero` y `fmincon` de MATLAB para calcular ω_f y σ_{\max} , respectivamente [57].

Algoritmo 1: Máximo Decaimiento exponencial σ_m .

```

Datos: El valor inicial  $\sigma_0$ , el retardo  $\tau$  y la tasa de decaimiento  $\Gamma$ .
Resultado: El valor del decaimiento exponencial máximo  $\sigma_m$ .
/* Función de costo de  $\vartheta$  (4.33) */
Función Cost $_{\vartheta}(\sigma, \tau)$ :
|    $w_f \leftarrow \text{fzero}(@(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}, \sigma, \tau))$  // Método fzero
|    $f \leftarrow @(\mathbf{x}) \dots$  // Función a integrar
|    $I \leftarrow \text{integral}(f, 0, \omega_f)$  // Integral (4.38)
|   retornar  $I$ 
fin
/* Resolución de (4.37) */
Función Obtener $\sigma_{\max}(\sigma_0, \tau, \Gamma)$ :
|    $sol \leftarrow \text{fmincon}(@(\mathbf{x}) \text{Cost}_{\vartheta}(\mathbf{x}, \tau), \sigma_0, \Gamma)$  // Optimización fmincon
|   retornar  $sol$ 
fin
 $\sigma_m \leftarrow sol$ 
retornar  $\sigma_m$ 

```

4.2. Controlador óptimo no-frágil

4.2.1. Fragilidad

Sea $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ una región de estabilidad delimitada por las curvas de cruce de estabilidad \mathcal{T} . Dado un $\mathbf{k}^* \in \mathcal{R}$ fijo, el *problema de fragilidad óptima* consiste en determinar la desviación paramétrica máxima $d > 0$ tal que el sistema en lazo cerrado permanezca estable siempre que los parámetros del controlador $\mathbf{k} := [k_p \ k_d]^\top \in \mathcal{R}$ satisfagan:

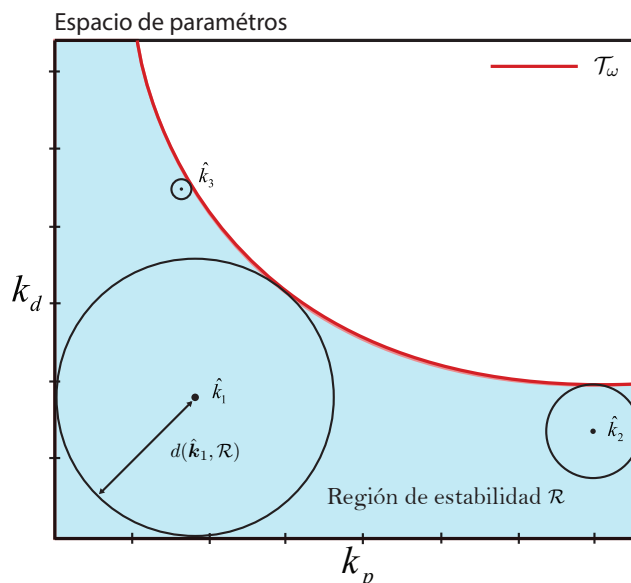


Figura 4.6: Desviación paramétrica máxima para las ganancias del controlador: $\hat{\mathbf{k}}_1$, $\hat{\mathbf{k}}_2$ y $\hat{\mathbf{k}}_3$.

$$\sqrt{(k_p - k_p^*)^2 + (k_d - k_d^*)^2} < d(\mathbf{k}^*). \quad (4.40)$$

Así, la desviación paramétrica d también puede verse como el radio máximo del círculo euclidiano centrado en \mathbf{k}^* que está contenido en \mathcal{R} . La Figura 4.6 ilustra este concepto. Ahora introducimos definiciones y resultados para derivar el controlador óptimo no frágil. Algunos de estos resultados están relacionados con métodos de optimización.

Definición 4.1: Controlador óptimo no frágil

El controlador óptimo no frágil, definido como $\mathbf{k}^{opt} \in \mathcal{R}$, es un controlador estable con la máxima d .

Observe que, desde una perspectiva geométrica, calcular el *controlador óptimo no frágil* equivale a encontrar las coordenadas \mathbf{k}^* del centro de la bola euclidiana más grande completamente contenida dentro de la región de estabilidad \mathcal{R} . Una idea clave para abordar este problema es la noción del *centro de Chebyshev*. En este contexto, dado que \mathcal{R} es compacto, denotamos la región inestable como $\mathcal{U} := \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{R}$. El *centro de Chebyshev* de \mathcal{R} es entonces el punto de máxima *profundidad*, es decir,

$$\mathbf{k}^* := \arg \max_{\mathbf{k} \in \mathcal{R}} \text{depth}(\mathbf{k}, \mathcal{U}),$$

donde $\text{depth}(\mathbf{k}, \mathcal{U})$ denota la distancia Euclidiana desde el punto \mathbf{k} al conjunto \mathcal{U} (para más detalles sobre el centro de Chebyshev, ver [5, 9, 15]). Este concepto se ilustra en la Figura (4.7).

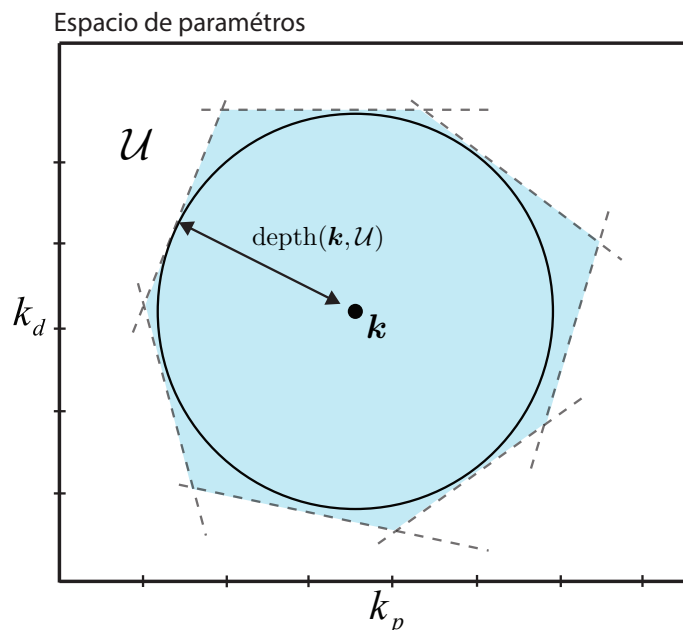


Figura 4.7: El centro de Chebyshev y la bola euclidiana más grande contenida en el poliedro Φ .

4.2.2. Discretización de la frontera de estabilidad

El enfoque para calcular el controlador óptimo no frágil \mathbf{k}^* implica discretizar la frontera de cruce de estabilidad \mathcal{T}_σ (típicamente para un decaimiento exponencial deseado σ). Para realizar esta discretización, sea $N \in \mathbb{N}$ el número de pares de ganancias a lo largo de \mathcal{T}_σ , es decir, $k_{p,i} = k_p(\omega_i, \sigma)$ y $k_{d,i} = k_d(\omega_i, \sigma)$ para $i = 0, 1, \dots, N$, donde $\omega_i \in \Omega$ satisface:

$$\omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_N < \omega_f,$$

donde $\omega_0 := 0$ y $\omega_f := \omega_f(\sigma)$ se define en (4.33). Para un $N \in \mathbb{N}$ dado, construimos el conjunto ordenado Ω_N^D como:

$$\Omega_N^D := (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N, \omega_f). \quad (4.41)$$

Además, cualquier refinamiento $N_i \in \mathbb{N}$ de (4.41) debe tomarse satisfaciendo las siguientes inclusiones anidadas:

$$\Omega_{N_i}^D \subseteq \Omega_{N_j}^D \subseteq \Omega_{N_k}^D \subseteq \dots,$$

para $N_i \leq N_j \leq N_k \leq \dots$.

Bajo esta construcción, la discretización de \mathcal{T}_σ se realizará componiendo la matriz $\mathbf{K}_{N_i} \in \mathbb{R}^{2 \times (N_i+2)}$, donde su j -ésima entrada está dada por el vector $\mathbf{k}_j := [k_{p,j} \ k_{d,j}]^\top$, es decir, la matriz \mathbf{K}_{N_i} tiene la siguiente estructura:

$$\mathbf{K}_{N_i} := [\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{N_i}, \mathbf{k}_{\omega_f}], \quad (4.42)$$

donde $\mathbf{k}_0 := \mathbf{k}_0(\sigma)$ dada por la Proposición 4.5 y $\mathbf{k}_{\omega_f} := [k_{p,\omega_f} \ k_{d,\omega_f}]^\top$.

4.2.3. Aproximación convexa de la región de estabilidad

La discretización de \mathcal{T}_σ produce $N_i + 2$ hiperplanos, definidos como sigue:

Definición 4.2: Hiperplano [15]

En el espacio de parámetros (k_p, k_d) un *hiperplano* se define como el conjunto

$$\mathcal{L}_j = \mathbf{k} \in \mathbb{R}^2 | k_d = \mu_j k_p + b_j, \quad \forall j = 0, 1, \dots, N_i, \omega_f \quad (4.43)$$

donde

$$\mu_0 := \frac{k_{d,\omega_f} - k_{d,0}}{k_{p,\omega_f} - k_{p,0}}, \quad b_0 := k_{d,\omega_f} - \mu_0 k_{p,\omega_f}, \quad (4.44)$$

$$\mu_j := \frac{k_{d,j} - k_{d,j-1}}{k_{p,j} - k_{p,j-1}}, \quad b_j := k_{d,j} - \mu_j k_{p,j}, \quad \text{para } j \in \mathbb{N}. \quad (4.45)$$

Cada hiperplano \mathcal{L}_j particiona el espacio de parámetros en dos subconjuntos cerrados, llamados *semiespacios cerrados*, denotados como $\mathcal{H}_{r,j}$ y $\mathcal{H}_{\ell,j}$ y que se observan en la Figura (4.8):

$$\mathcal{H}_{r,j} := \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2 : k_d - \mu_j k_p \geq b_j\}, \quad (4.46)$$

$$\mathcal{H}_{\ell,j} := \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2 : k_d - \mu_j k_p \leq b_j\}. \quad (4.47)$$

Ahora, usando (4.46) y (4.47), definimos un *poliedro convexo* Φ_{N_i} , donde Φ_{N_i} puede usarse como una aproximación de la región de estabilidad \mathcal{R} , es decir, tal que $\Phi_{N_i} \subseteq \mathcal{R}$.

Definición 4.3: Poliedros convexos [15]

Un poliedro convexo $\Phi_{N_i} \subset \mathbb{R}^2$ se define como la intersección de un número finito de semiespacios cerrados $\mathcal{H}_{r,i}, \mathcal{H}_{\ell,i} \subset \mathbb{R}^2$:

$$\Phi_{N_i} := \bigcap_{j=1}^{N_i} \mathcal{H}_{r,j} \bigcap_{j=1}^{N_i} \mathcal{H}_{\ell,j}. \quad (4.48)$$

Es importante aclarar que, dado que todo semiespacio cerrado es, por definición, un conjunto convexo, y considerando que la intersección de cualquier colección de conjuntos convexos preserva la convexidad [15], el poliedro resultante Φ_{N_i} es estrictamente convexo por construcción. La Figura (4.9) ilustra la construcción de un poliedro convexo mediante la intersección sucesiva de sus hiperplanos.

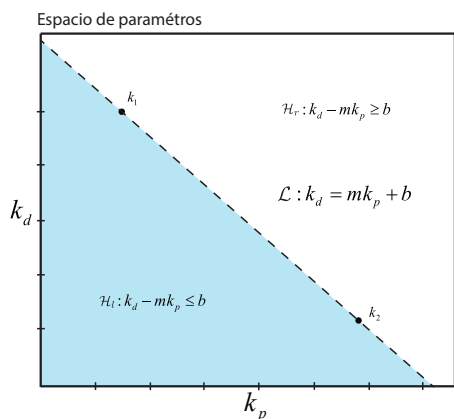


Figura 4.8: Semiespacios \mathcal{H}_r y \mathcal{H}_l formados por el hiperplano \mathcal{L} .

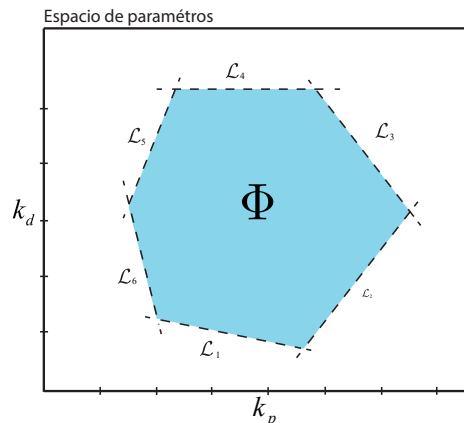


Figura 4.9: El poliedro Φ se define como la intersección entre los semiespacios generados por los hiperplanos \mathcal{L}_j para $j = 1, 2, \dots, N$.

4.2.4. Algoritmo de optimización convexa para el controlador óptimo no frágil

Ahora podemos obtener un controlador óptimo no frágil utilizando el siguiente resultado:

Proposición 4.10

Sea \mathcal{R} una región de estabilidad convexa, $\mathbf{k}^* \in \mathcal{R}$ y denote por $\mathbf{k}^{opt} \in \mathbb{R}^2$ el controlador óptimo no frágil. Sea $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $N_i > 2$ y $\mathbf{k}^{(i)}$ sea la solución del siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} & \text{maximize: } d \\ & \text{s.t. } \mathbf{a}_i^\top \mathbf{k}^{(i)} + d \|\mathbf{a}_j\|_2 \leq b_j, \quad j = 0, \dots, N_i, \omega_f, \end{aligned} \quad (4.49)$$

donde $\mathbf{a}_j := \phi_j [-\mu_j \quad 1]^\top$ y

$$\phi_j := \begin{cases} 1 & k_d^* - \mu_j k_p^* < b_j \\ -1 & k_d^* - \mu_j k_p^* > b_j \end{cases}, \quad \forall j = 0, 1, \dots, N_i, \omega_f, \quad (4.50)$$

con variables d y $\mathbf{k}^{(i)}$. Entonces, $\mathbf{k}^{(i)}$ satisface la desigualdad

$$\|\mathbf{k} - \mathbf{k}^{opt}\|_2 \geq \|\mathbf{k} - \mathbf{k}^{(i)}\|_2, \quad \forall \mathbf{k} \in \partial \mathcal{R} \quad (4.51)$$

Además, haciendo tender $i \rightarrow \infty$ resulta:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{k}^{(i)} = \mathbf{k}^{opt}. \quad (4.52)$$

Demostración. Primero, observe que el poliedro Φ_{N_i} puede ser determinado por el siguiente conjunto de desigualdades:

$$\Phi_{N_i} \equiv \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{A}\mathbf{k} \leq \mathbf{b}\}, \quad (4.53)$$

donde $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(N_i+2) \times 2}$, \mathbf{a}_j^\top es la j -ésima fila de la matriz \mathcal{A} , y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N_i+2}$ está dada por $\mathbf{b} := [\phi_0 b_0, \phi_1 b_1, \phi_2 b_2, \dots, \phi_{N_i} b_{N_i}, \phi_{\omega_f} b_{\omega_f}]^\top$. De la construcción de Φ_{N_i} , observe que cualquier N_i satisface

$$\Phi_{N_i} \subseteq \mathcal{R}.$$

Además, cualesquiera N_i y N_{i+k} con $i, k \in \mathbb{N}$ satisfacen

$$\Phi_{N_i} \subseteq \Phi_{N_{i+k}} \subseteq \mathcal{R}. \quad (4.54)$$

Así, (4.51) se sigue directamente de (4.54). Finalmente, notando que

$$\Phi_{N_i} \xrightarrow[N_i \rightarrow \infty]{} \mathcal{R},$$

obtenemos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{k}^{(i)} = \mathbf{k}^{\text{opt}} \quad (4.55)$$

□

El Algoritmo 2 presenta el pseudocódigo para aplicar la Proposición 4.10. Toma como entrada la curva de cruce de estabilidad discretizada \mathcal{T} y su σ_{\max} estimada (codificada en la matriz \mathbf{K} de (4.42)), una ganancia estabilizante inicial $\hat{\mathbf{k}}$, y el número de lados N para el poliedro Φ . El algoritmo llama primero a `GetPCoefficients` para generar la matriz \mathbf{A} y el vector \mathbf{b} que definen Φ (ver (4.53)). Luego utiliza `GetChebyshevCenter` para resolver el problema de optimización (4.49) basado en el método en [15]. La salida es el controlador óptimo no frágil \mathbf{k}^{opt} .

Algoritmo 2: Control óptimo no frágil con tasa máxima de decaimiento exponencial σ_m .

Datos: Considere la discretización de la curva de cruce de estabilidad \mathcal{T} con la tasa máxima de decaimiento exponencial σ_m dada por la matriz \mathbf{K} (ver ec. (4.42)), un par inicial de ganancias $\hat{\mathbf{k}} = [\hat{k}_p \ \hat{k}_d]^\top$ dentro de la región de estabilidad \mathcal{R} y el número de lados N en el poliedro Φ .

Resultado: El valor de las ganancias de control $\mathbf{k}^{opt} = [k_p^{opt} \ k_d^{opt}]^\top$ que corresponden a la respuesta óptima no frágil del sistema en lazo cerrado.

Función ObtenerCoeficientes($\mathbf{K}, \hat{\mathbf{k}}$):

```

     $m_0 \leftarrow \frac{k_{d,\omega_f} - k_{d,0}}{k_{p,\omega_f} - k_{p,0}}$ 
     $b(0) \leftarrow -m_0 k_{p,\omega_f} + k_{d,\omega_f}$ 
     $\mathbf{A}(0, :) \leftarrow [-m_0, 1]$ 
    para  $i \in (1, 2, \dots, N_i, \omega_f)$  hacer
         $m_i \leftarrow \frac{k_{d,i} - k_{d,i-1}}{k_{p,i} - k_{p,i-1}}$  // Pendiente del  $i$ -ésimo hiperplano
         $b_i \leftarrow -m_i k_{p,i} + k_{d,i}$  // Intersección en  $y$ 
        si  $\hat{k}_d - b_i < 0$  entonces
             $\phi \leftarrow 1$ 
        sino
             $\phi \leftarrow -1$ 
        fin
         $\mathbf{A}(i, :) \leftarrow \phi[-m_i, 1]$ 
         $b(i) \leftarrow b_i$ 
    fin
    retornar  $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ 
fin
```

Función ObtenerCentroChebyshev(\mathbf{A}, \mathbf{b}):

```

     $\mathbf{x}^* \leftarrow \text{máx } d(\mathbf{k})$  //  $d$  definido por (4.40)
    s.a.  $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{k}^* + d(\hat{\mathbf{k}}) \|\mathbf{a}_i\|_2 \leq \mathbf{b}_i$  con variables  $d(\hat{\mathbf{k}})$  y  $\mathbf{k}^*$ 
     $r \leftarrow d(\mathbf{x}^*)$ 
    retornar  $\mathbf{x}^*, r$ 
fin
 $\hat{\mathbf{k}} \leftarrow \mathbf{x}^*$ 
retornar  $\hat{\mathbf{k}} = [\hat{k}_p \ \hat{k}_d]^\top$ 
```

Capítulo 5

Resultados numéricos y experimentales

Índice

5.1. Modelo Longitudinal de un bi-rotor de tipo <i>Tilt-Rotor</i>	103
5.2. Estructuras de control	106
5.3. Análisis de estabilidad	109
5.4. Plataforma experimental y validación preliminar	119

Con el fin de ilustrar la aplicación y el alcance práctico de los resultados teóricos obtenidos, en este capítulo se presenta un estudio numérico sobre un modelo longitudinal simplificado de una aeronave tipo *tilt-rotor*. El caso de estudio incorpora parámetros identificados experimentalmente, incluyendo la dinámica del servomecanismo y retardos efectivos de actuación, con el objetivo de contrastar la teoría con un escenario representativo de implementación. En particular, se construyen las curvas de cruce y regiones de estabilidad en el espacio de parámetros (k_p, k_d) para los subsistemas con retardo, se analiza la contracción de dichas regiones al incrementar τ , y se evalúa la σ -estabilidad mediante la determinación de $\sigma_{\text{máx}}$. Con base en estas regiones, se calculan controladores PD óptimos no frágiles y se valida su desempeño mediante simulaciones en lazo cerrado, tanto en regulación a referencias constantes como en seguimiento de trayectorias, destacando el compromiso entre rapidez de convergencia y esfuerzo de control bajo restricciones físicas de los actuadores.

5.1. Modelo Longitudinal de un bi-rotor de tipo *Tilt-Rotor*

Esta sección introduce el caso de estudio utilizado para aplicar y validar la metodología desarrollada en el capítulo anterior. Se considera un modelo dinámico reducido de un vehículo aéreo bi-rotor de rotores inclinables (*tilt-rotor*), restringido al movimiento longitudinal en el plano $x-z$ y a la dinámica de cabeceo θ . La motivación de este modelo es doble: por un lado, conserva el acoplamiento esencial entre traslación y orientación característico de la dinámica longitudinal; por otro, permite incorporar

de forma explícita los retardos de actuación asociados al mecanismo de inclinación, así como la dinámica identificada del servomecanismo, aislando el efecto del retardo sobre la estabilidad y el desempeño. A partir de la linealización del modelo se obtienen subsistemas con y sin retardo, lo que facilita aplicar directamente las proposiciones de curvas de cruce, regiones de estabilidad y σ -estabilidad, además de evaluar el diseño no frágil mediante el centro de Chebyshev.

Para la derivación de las ecuaciones de movimiento, se adoptan las siguientes hipótesis de simplificación:

1. **Restricción de movimiento:** el movimiento está confinado al plano $x-z$, permitiendo desplazamientos a lo largo de los ejes x y z , así como variación de la orientación mediante el ángulo de cabeceo θ . En consecuencia, los estados laterales (y, ϕ, ψ) y sus derivadas se consideran nulos.
2. **Número reducido de actuadores:** como resultado de la restricción longitudinal, únicamente se consideran activos los rotores 1 y 4, como se ilustra en la Figura 5.1.
3. **Mecanismo de inclinación acoplado:** Ambos rotores comparten el mismo ángulo de inclinación, tal que $\beta_1 = \beta_4 = \beta$.
4. **Cuerpo rígido:** La estructura del vehículo se asume indeformable, con masa m e inercia constante I_{yy} .
5. **Aproximación de ángulo pequeño:** se asume operación cercana al equilibrio de *hover* (vuelo estacionario); por tanto, θ y β permanecen lo suficientemente pequeños para justificar la linealización posterior.
6. **Modelo del servomecanismo:** la inclinación del rotor se modela mediante la dinámica del servomotor, incorporando explícitamente el retardo de actuación τ dentro del sistema de ecuaciones.

5.1.1. Derivación del modelo simplificado

Con el objetivo de aislar la dinámica longitudinal y facilitar el diseño de las leyes de control, se propone un modelo reducido restringido al plano vertical $X_i - Z_i$. Como se ilustra en la Figura 5.1, esta simplificación asume simetría estructural y desprecia los movimientos laterales y de guiñada, reduciendo el sistema a tres grados de libertad: posición horizontal x , altitud z y ángulo de cabeceo θ . De la restricción de movimiento longitudinal en el plano $x-z$ se tiene $\ddot{y} = 0$. Adicionalmente, la orientación del vehículo queda parametrizada por un único grado de libertad, el ángulo de cabeceo θ (rotación alrededor del eje y). En consecuencia, la matriz de rotación del marco cuerpo b al marco inercial i , restringida al plano $x-z$, se expresa como:

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

A partir de la Ecuación (2.33), la dinámica traslacional en el marco inercial se escribe de forma simplificada como:

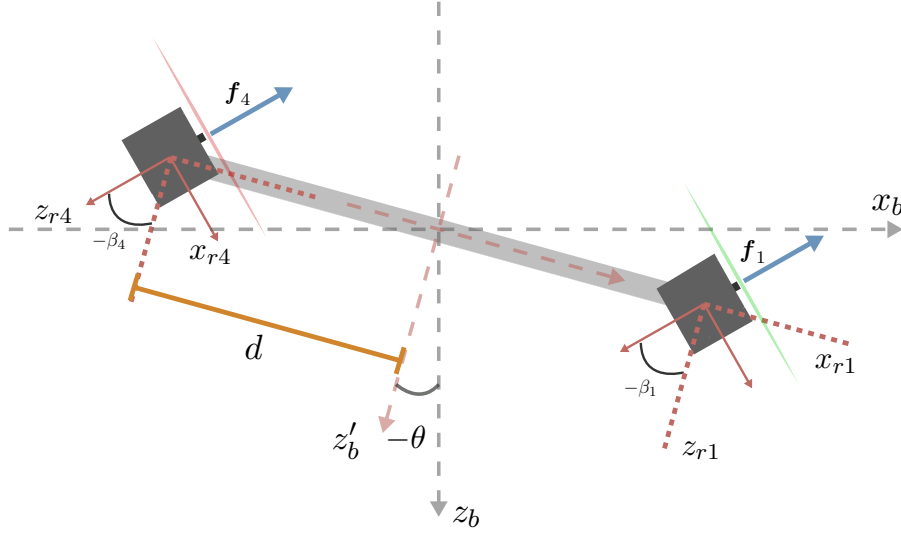


Figura 5.1: Diagrama de cuerpo libre del bi-rotor tipo *tilt-rotor*. Se ilustra el cambio de orientación de los vectores de fuerza de empuje f_1 y f_4 en función del ángulo de inclinación β y la orientación de cabeceo θ .

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}} + \frac{1}{m} R_y(\theta) \underbrace{\begin{bmatrix} T_{x_b} \\ T_{z_b} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_b}, \quad (5.2)$$

donde m es la masa total y \mathbf{T}_b denota el vector de fuerzas de empuje en el marco cuerpo.

Para el movimiento rotacional, dado que únicamente existe rotación alrededor del eje y , se cumple $\omega_x = 0$ y $\omega_z = 0$, con $\boldsymbol{\omega}_b = [0 \ \dot{\theta} \ 0]^\top$. En este caso, de la Ecuación (2.33), se observa que el término $-\boldsymbol{\omega}_b \times J \boldsymbol{\omega}_b$ se anula, y los efectos giroscópicos $\boldsymbol{\tau}_g$ se desprecian en el modelo simplificado. Por tanto, la dinámica de cabeceo queda dada por:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_{yy}} \tau_\theta, \quad (5.3)$$

donde I_{yy} es el momento de inercia alrededor del eje y y τ_θ es el par alrededor de dicho eje.

Por otro lado, a partir de la matriz de asignación (Ecuación (2.48)) y de la geometría del vehículo, ver Figura 5.1, con dos rotores ubicados en $l_{x1} = d$ y $l_{x4} = -d$, y ángulos de inclinación iguales $\beta_1 = \beta_4 = \beta$, se define el vector de entradas virtuales como:

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} T_{x_b} \\ T_{z_b} \\ \tau_{y_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \beta & -\sin \beta \\ -\cos \beta & -\cos \beta \\ d \cos \beta & -d \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_4 \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

donde f_1 y f_4 son las magnitudes de empuje generadas por cada rotor. Definiendo $U_T := f_1 + f_4$ y $U_\Delta := f_1 - f_4$, y sustituyendo en las ecuaciones traslacionales y

rotacionales, se obtiene el siguiente sistema no lineal simplificado:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{U_T}{m} \sin(\beta + \theta), \\ \ddot{z} &= g - \frac{U_T}{m} \cos(\beta + \theta), \\ \tau_{y_b} &= d U_\Delta \cos \beta.\end{aligned}\tag{5.5}$$

Para el diseño de las leyes de control lineal (estructuras clásicas como PD, PI o PID), se asume que el vehículo opera en la vecindad del punto de equilibrio de vuelo estacionario (*hover*). En este régimen operativo, los ángulos de cabeceo (θ) y de inclinación de los rotores (β) son suficientemente pequeñas para justificar el uso de aproximaciones de primer orden. En particular, para el desarrollo de este trabajo se define un rango de operación acotado en el intervalo $[-15^\circ, 15^\circ]$, suficiente para la realización de las tareas de vuelo propuestas. Por lo tanto, se aplican las siguientes simplificaciones trigonométricas:

$$\sin(\gamma) \approx \gamma, \quad \cos(\gamma) \approx 1.\tag{5.6}$$

A partir de lo anterior, la dinámica acoplada se reduce, y el modelo linealizado resultante que describe el comportamiento del vehículo multirrotor en la cercanía del punto de operación es:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{U_T}{m}(\theta + \beta), \\ \ddot{z} &= g - \frac{U_T}{m}, \\ \ddot{\theta} &= \frac{d}{I_{yy}} U_\Delta.\end{aligned}\tag{5.7}$$

5.2. Estructuras de control

Esta sección describe la estrategia para la estabilización del vehículo *tilt-rotor* en sus coordenadas longitudinales (x, z) y de orientación (θ), empleando controladores de bajo orden sobre el modelo linealizado expresado por el sistema de ecuaciones (5.7). Para abordar el acoplamiento inherente del sistema, el diseño se estructura bajo un enfoque de desacoplamiento secuencial, dividiendo la tarea en dos etapas: (i) un lazo interno para el control concurrente de la altitud z y el cabeceo θ , y (ii) un lazo externo posterior para el control de la posición lateral x , asumiendo la convergencia previa de la primera etapa.

5.2.1. Lazo de altitud y orientación (Subsistema p)

Para controlar simultáneamente la posición vertical y la orientación, se define el vector de estado del subsistema como $p := [\theta \ z]^\top$. Recordando que el empuje total es $U_T = f_1 + f_2$ y el torque es proporcional a la diferencia de los rotores, la dinámica extraída del sistema de ecuaciones (5.7) puede reescribirse en forma matricial como:

$$\ddot{p} = g_v + A_p u,\tag{5.8}$$

donde los vectores y la matriz de acoplamiento se definen como:

$$g_v := \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}, \quad u := \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \quad A_p := \begin{bmatrix} \frac{d}{I_{yy}} & -\frac{d}{I_{yy}} \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Para linealizar y desacoplar este subsistema, se propone la siguiente ley de control:

$$u := A_p^{-1}(-g_v + v_p), \quad (5.10)$$

donde $v_p = [v_\theta \ v_z]^\top$ es un vector de entradas virtuales de control. Al sustituir la Ecuación (5.10) en la Ecuación (5.8), se obtiene el sistema desacoplado $\ddot{p} = v_p$. En el dominio de la frecuencia, las entradas virtuales se definen mediante leyes de control lineal de la forma $V(s) = C(s)E(s)$.

Considerando que los sensores inerciales presentan un retardo de medición τ_θ , la matriz de transferencia de lazo cerrado resultante se expresa como:

$$p(s) = \begin{bmatrix} G_\theta(s) & 0 \\ 0 & G_z(s) \end{bmatrix} p_r(s), \quad (5.11)$$

con funciones de transferencia individuales dadas por:

$$G_\theta(s) = \frac{C_\theta(s)}{s^2 + C_\theta(s)e^{-s\tau_\theta}}, \quad (5.12)$$

$$G_z(s) = \frac{C_z(s)}{s^2 + C_z(s)}. \quad (5.13)$$

Dada la estructura de doble integrador en $G_z(s)$, se propone $C_z(s)$ como un controlador PD clásico, sintonizado mediante asignación de polos. Por su parte, la presencia del término trascendente en $G_\theta(s)$ exige que el controlador $C_\theta(s)$ sea diseñado contemplando explícitamente el retardo $\tau_\theta > 0$, tarea que se abordará en la siguiente sección utilizando el marco metodológico de la σ -estabilidad.

5.2.2. Lazo de traslación lateral (Subsistema x)

El control de la posición x se aborda bajo la suposición de que el subsistema p ha convergido a su estado estacionario. En esta condición, el empuje total requerido para mantener el vuelo compensa exactamente a la gravedad ($U_T \approx mg$, asumiéndolo constante). Asimismo, si el objetivo primario de θ era mantener la horizontalidad o apuntar a una referencia fija, se asume $\theta \approx 0$ para efectos de la traslación pura.

Bajo estas premisas, el movimiento lateral queda gobernado exclusivamente por el ángulo de inclinación de los rotores (β). Aplicando la transformada de Laplace a la primera ecuación de (5.7), la dinámica se simplifica a:

$$s^2 X(s) = -\frac{U_T}{m} \beta(s). \quad (5.14)$$

Sustituyendo el modelo dinámico del servomotor (Ecuación (2.52)) en la expresión anterior, se incorpora el retardo mecánico de actuación τ_x :

$$s^2 X(s) = -\frac{U_T}{m} M(s) e^{-s\tau_x} \beta_r(s), \quad (5.15)$$

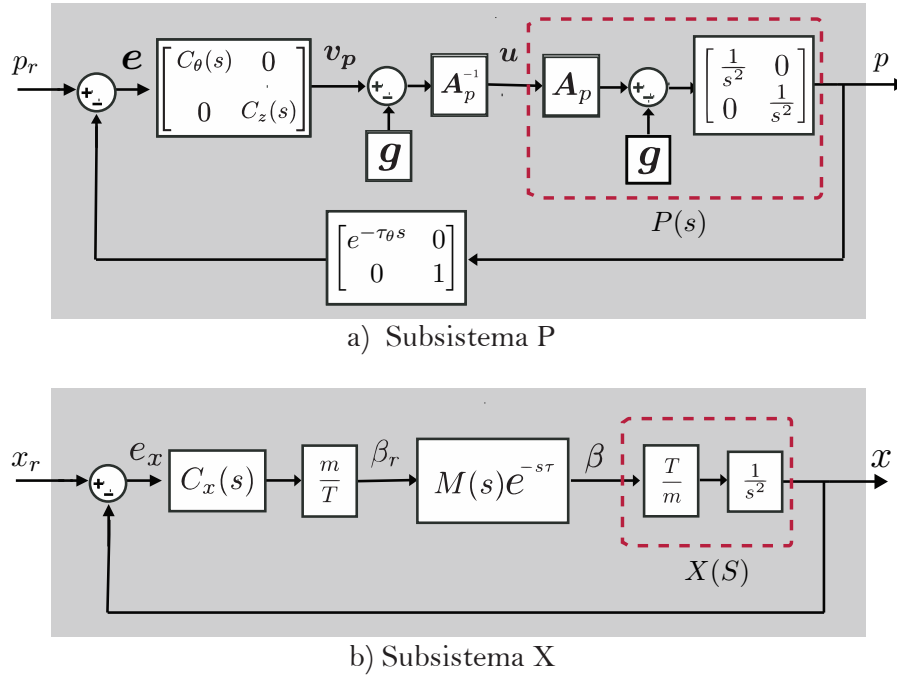


Figura 5.2: Diagramas de bloques de los subsistemas: **a) Subsistema de P.** Describe la dinámica de la posición a lo largo del eje z y la orientación en función del ángulo de cabeceo θ , dentro de la cual se considera un retardo de retroalimentación. **a) Subsistema de X.** Describe la dinámica de la posición a lo largo del eje x . En este sistema se considera el efecto del retardo de actuación del servomecanismo de inclinación.

donde $\beta_r(s)$ es la señal de control comandada al servo. Para compensar la ganancia del sistema físico y el cambio de signo, se selecciona la siguiente ley de control:

$$\beta_r(s) = -\frac{m}{U_T} C_x(s) E_x(s). \quad (5.16)$$

Sustituyendo la Ecuación (5.16) en la Ecuación (5.15), la función de transferencia en lazo cerrado para la posición horizontal resulta:

$$G_x(s) = \frac{M(s)C_x(s)e^{-s\tau_x}}{s^2 + M(s)C_x(s)e^{-s\tau_x}}. \quad (5.17)$$

La arquitectura de este ambos lazos de control se ilustran en los diagramas de la Figura 5.2. Al igual que en el caso del cabeceo, el diseño de $C_x(s)$ deberá garantizar la estabilidad y el margen de decaimiento ante la presencia de τ_x .

5.3. Análisis de estabilidad

En esta sección se aplica la metodología propuesta en el capítulo anterior al sistema longitudinal del *tilt-rotor* descrito al inicio del presente capítulo. En particular, primero se calculan las *curvas de cruce de estabilidad* de los subsistemas; posteriormente, se evalúa su σ -estabilidad y se determina la *tasa máxima de decaimiento exponencial*. Con base en dichos resultados, se estiman los controladores óptimos no frágiles y, finalmente, se valida el desempeño del controlador propuesto mediante simulaciones en lazo cerrado, considerando tanto la regulación ante referencias constantes como el seguimiento de trayectorias.

A partir del modelo linealizado presentado en la sección anterior, se identifican tres subsistemas dinámicos: la dinámica de cabeceo (G_θ), la dinámica de altura (G_z) y la dinámica longitudinal (G_x). El diseño se realiza mediante un controlador PD de la forma $C(s) = k_p + k_d s$, con el propósito de garantizar la estabilidad del lazo cerrado en cada subsistema. Nótese que las ecuaciones características asociadas presentan la misma estructura que las analizadas en el capítulo anterior: el subsistema $G_z(s)$ conduce al caso sin retardo ($\tau = 0$), descrito por la ecuación característica (4.3); mientras que los subsistemas $G_x(s)$ y $G_\theta(s)$ corresponden al caso con retardo de actuación y de retroalimentación ($\tau > 0$), respectivamente, descrito por la Ecuación (4.4). En consecuencia, los resultados establecidos en el capítulo anterior son directamente aplicables al cálculo de curvas de cruce, a la caracterización de σ -estabilidad y a la obtención de la tasa máxima de decaimiento para estas tres estructuras.

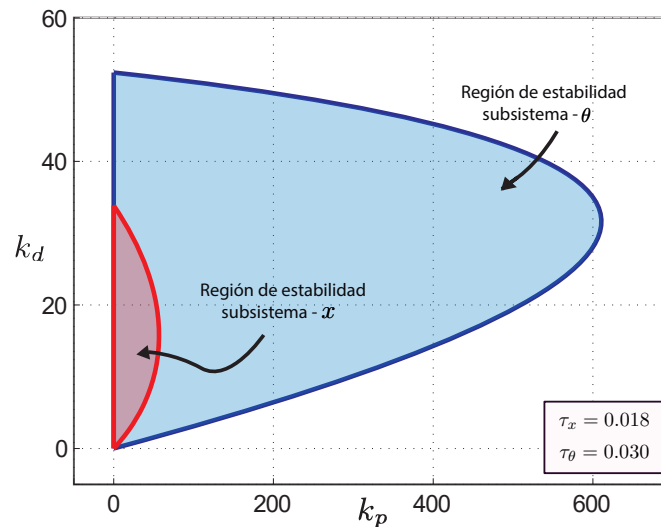


Figura 5.3: Curvas de estabilidad bajo retardos nominales: $\tau_x = 0,018$ y $\tau_\theta = 0,030$.

5.3.1. Regiones de Estabilidad.

Para analizar la estabilidad de los sistemas con retardo descritos por las funciones de transferencia $G_x(s)$ y $G_\theta(s)$, se incorporan los parámetros del modelo de servomotor y los retardos de actuación identificados experimentalmente. Los valores empleados en el estudio se resumen en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1: Parámetros de los servomotores y retardos del sistema.

Descripción	Símbolo	Valor
<i>Retardos de tiempo</i>		
Retardo en x	τ_x	0.018 s
Retardo en θ	τ_θ	0.030 s
<i>Coefficientes servomotor</i>		
Numerador	b_1	0.4
	b_0	6.0
Denominador	a_2	0.06
	a_1	1.0
	a_0	6.0

Usando las Proposiciones 4.1 y 4.2, se obtienen las ecuaciones paramétricas ($k_p(\omega)$, $k_d(\omega)$) y $k_p(0)$, las cuales permiten trazar las *curvas de cruce de estabilidad* asociadas a $G_x(s)$ y $G_\theta(s)$. Dichas curvas, mostradas en la Figura 5.3 para los valores nominales de retardo, particionan el plano de ganancias (k_p, k_d) en regiones sobre las cuales la estabilidad puede determinarse mediante la función de dirección de cruce \mathcal{C}_χ , aplicando la Proposición 4.3. En consecuencia, se definen las regiones de estabilidad de cada subsistema (áreas sombreadas en la Figura 5.3), de manera que cualquier elección de (k_p, k_d) en su interior garantiza estabilidad para el retardo considerado.

Como se observa en la Figura 5.3, aunque ambos subsistemas comparten la misma estructura de ecuación característica, sus dinámicas, capturadas por los polinomios $N(s)$ y $D(s)$, determinan la geometría y el área de la región de estabilidad. En el caso particular considerado, a pesar de que el subsistema $G_\theta(s)$ presenta un retardo nominal mayor, su región de estabilidad resulta más amplia que la correspondiente a $G_x(s)$, lo cual evidencia que el tamaño de la región no está determinado únicamente por τ , sino también por la dinámica propia de cada subsistema.

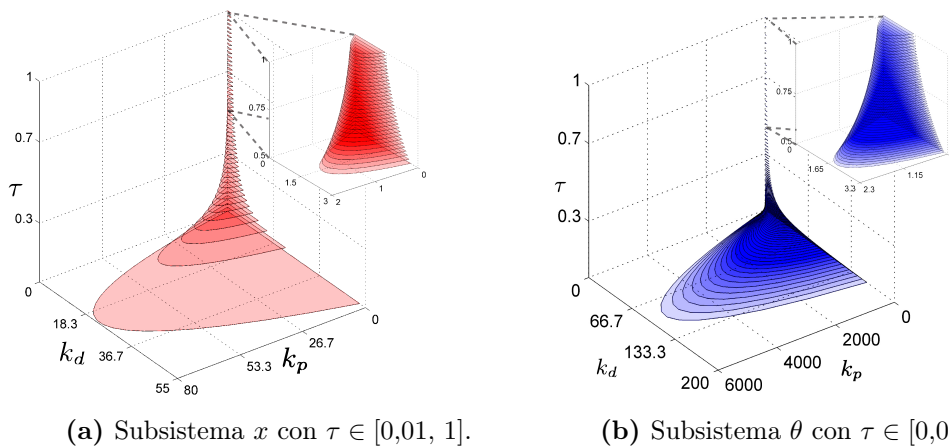
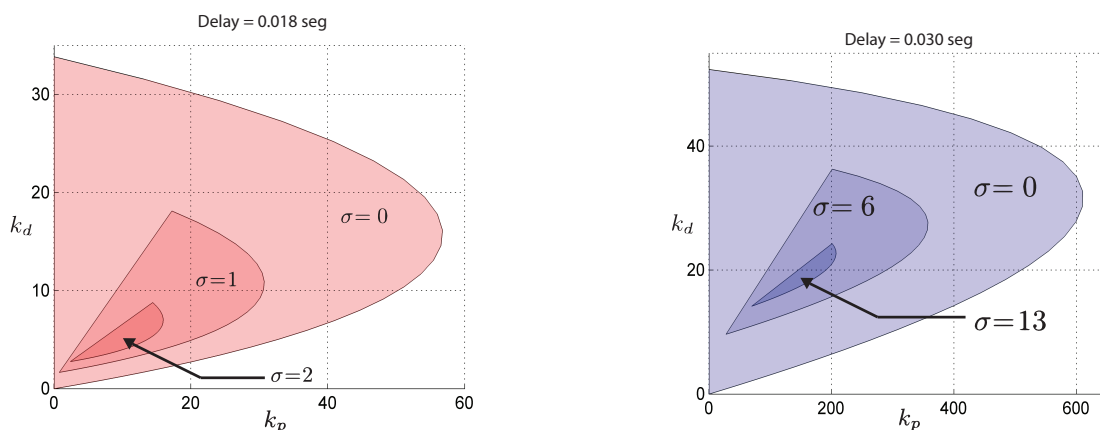


Figura 5.4: Análisis de estabilidad de los subsistemas retardados x y θ . (a) Mapa de estabilidad 3D para el subsistema x a través de un rango de valores de retardo. (b) Mapa de estabilidad 3D para el subsistema θ a través del mismo rango de retardo.

Para examinar el impacto del retardo sobre las regiones de estabilidad, las Figuras 5.4a y 5.4b muestran la evolución de dichas regiones para los subsistemas x y θ conforme el retardo varía en el intervalo $\tau \in [10 \text{ ms}, 1 \text{ s}]$. En ambos casos, el incremento del retardo contrae progresivamente la región de estabilidad hasta su eventual desaparición. Asimismo, se observa que cada subsistema admite un retardo máximo distinto antes de perder la estabilidad, lo cual subraya la necesidad de incorporar explícitamente el retardo de tiempo en el análisis de estabilidad y en el diseño del controlador.

5.3.2. Sigma estabilidad

A continuación, analizamos cómo el parámetro σ influye en las regiones de estabilidad de los sistemas con retardo. Para este análisis, los retardos de tiempo se fijan en sus valores nominales: $\tau_x = 0.018$ y $\tau_\theta = 0.030$. Evaluamos tres valores representativos de σ para cada subsistema. Aplicando la Proposición 4.4, derivamos las ecuaciones paramétricas correspondientes que definen las curvas de cruce de estabilidad en función de ω y σ . Las regiones de estabilidad resultantes se ilustran en las Figuras 5.5a y 5.5b, las cuales muestran claramente que las regiones de estabilidad se contraen a medida que σ aumenta, tal y como se plantea en la Proposición 4.6.



(a) Regiones de estabilidad para el subsistema x con retardo fijo $\tau_x = 0.018$.

(b) Regiones de estabilidad para el subsistema θ con retardo fijo $\tau_\theta = 0,030$.

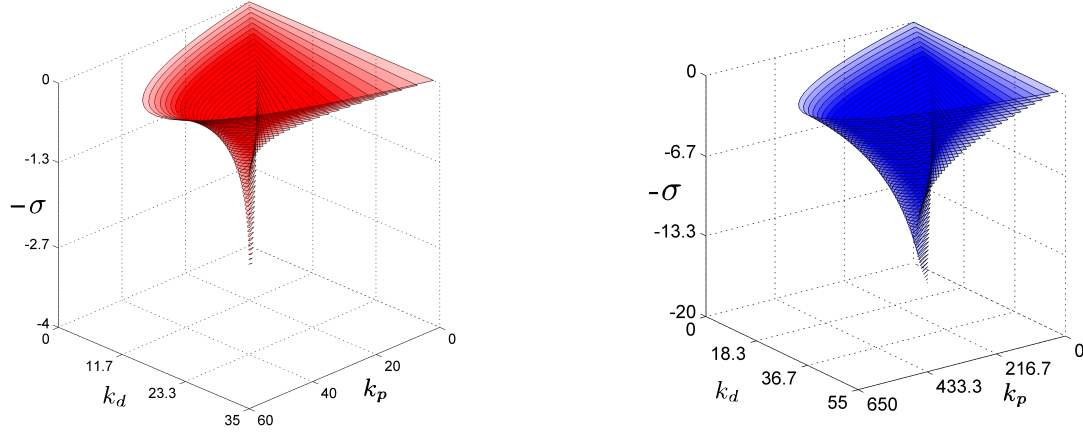
Figura 5.5: Regiones de estabilidad de los subsistemas x y θ para valores variables de σ , con retardos de tiempo mantenidos constantes en sus valores nominales.

5.3.3. Tasa máxima de decaimiento exponencial

Como se discutió en el capítulo anterior, los sistemas con retardo presentan un límite superior para la tasa de decaimiento exponencial alcanzable. Los subsistemas considerados ilustran las dos situaciones descritas previamente: para el subsistema $G_\theta(s)$ es posible obtener un valor específico de $\sigma_{\text{máx}}$, mientras que para $G_x(s)$ el análisis conduce a un conjunto compacto $\mathcal{R}_{\text{mín}} \subset \mathbb{R}^2$ asociado a la región de estabilidad de área mínima.

En particular, al aplicar la Proposición 4.7 al subsistema θ con retardo nominal $\tau_\theta = 0,030 \text{ s}$, se obtiene una tasa máxima de decaimiento $\sigma_{\text{máx}} = 19,52$. Para validar

este resultado e ilustrar la influencia de σ sobre la estabilidad, se calcularon las regiones de estabilidad para $\sigma \in [0, \sigma_{\text{máx}}]$ manteniendo fijo el retardo nominal. El panorama resultante se muestra en la Figura 5.6.



(a) Regiones de estabilidad para el subsistema x con $\sigma \in [0, 4,0476]$ y un retardo fijo $\tau_x = 0,018$ s.

(b) Regiones de estabilidad para el subsistema θ con $\sigma \in [0, 19,52]$ y retardo $\tau_\theta = 0,030$ s.

Figura 5.6: Regiones de estabilidad para los subsistemas x y θ bajo un retardo de tiempo fijo τ y un σ variable.

En contraste, el subsistema x presenta un comportamiento distinto: los parámetros del controlador asociados al incremento de σ no convergen a un único punto conforme $\sigma \rightarrow \sigma_{\text{máx}}$. Para caracterizar este fenómeno, se calcularon regiones de estabilidad para valores crecientes $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_4$ y se construyó un lugar de las raíces con el fin de ilustrar la evolución de los polos dominantes. Los resultados se presentan en la Figura 5.7.

Para precisar el comportamiento de los polos dominantes, la Figura 5.7(b) traza explícitamente la trayectoria de las raíces más a la derecha en el plano complejo a medida que los parámetros del controlador varían a lo largo de la ruta roja resaltada en la Figura 5.7(a). Los valores de σ empleados para calcular las regiones de estabilidad en la Figura 5.7(a) se indican mediante líneas discontinuas verticales en la Figura 5.7(b).

Como se ilustra en la Fig. 5.7(a), el incremento de σ de σ_1 a σ_3 contrae la región de estabilidad. De manera relevante, para σ_4 la región comienza a expandirse; sin embargo, dicha expansión no implica una mejora en la tasa de decaimiento, como se evidencia en la Fig. 5.7(b). En particular, tres de los cuatro polos (trayectorias azul, verde y roja) se desplazan hacia la derecha, lo que reduce el margen disponible respecto a la recta vertical $\Re\{s\} = -\sigma$. En σ_3 todos los polos permanecen a la izquierda de $\Re\{s\} = -\sigma_3$, por lo que la configuración es válida. En cambio, en σ_4 al menos dos polos cruzan hacia la derecha de $\Re\{s\} = -\sigma_4$, indicando que $\sigma_{\text{máx}}$ debe ubicarse en el intervalo (σ_3, σ_4) . El valor preciso $\sigma_{\text{máx}}$ se alcanza cuando los polos dominantes más a la derecha satisfacen $\Re\{s\} = -\sigma_{\text{máx}}$; cualquier incremento adicional de σ provoca que al menos un polo ingrese al semiplano inestable.

Como se discutió anteriormente, para el subsistema x las regiones de estabilidad no convergen a un único punto, sino que tienden a un conjunto compacto de área

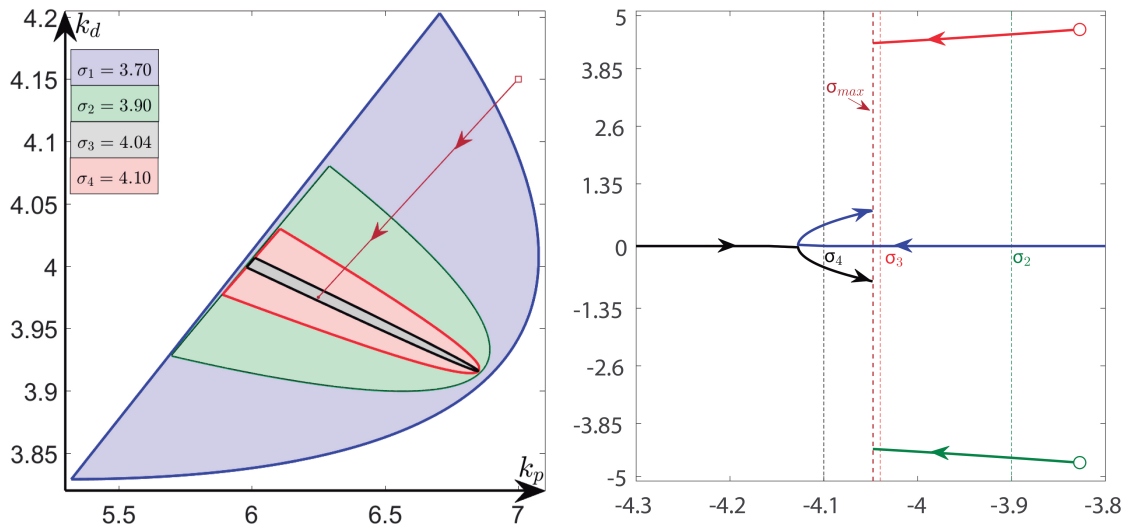


Figura 5.7: a) Regiones de estabilidad en el espacio de parámetros y b) comportamiento de las raíces del polinomio característico para el subsistema x usando diferentes valores de σ donde $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_4$.

mínima. Para calcular el valor exacto de $\sigma_{m\acute{a}x}$ se emplea el Algoritmo 1, derivado de la Proposición 4.8. La Tabla 5.2 muestra cinco iteraciones representativas, incluyendo el valor actual σ_k , el área correspondiente $\vartheta(\sigma_k)$ y el error relativo e_r .

En la iteración 18, el algoritmo alcanza el menor error relativo, obteniéndose la estimación final $\sigma_{m\acute{a}x} = 4,0476$. La Fig. 5.8 muestra la relación entre σ y el área $\vartheta(\sigma_k)$, confirmando que el valor obtenido satisface la condición establecida en (4.37). Finalmente, la Fig. 5.6b presenta las regiones de estabilidad del subsistema x para $\sigma \in [0, 4,0476]$.

k -iter	σ_k	$\vartheta(\sigma_k)$	Error [%]
3	3.750	2.38	33.3
7	3.984	1.26	1.96
11	4.038	1.09	0.12
15	4.042	1.08	0.0075
18	4.047	1.0732	0.0003

Nota: Error = $\left(\frac{|\sigma_k - \sigma_{k-1}|}{\sigma_k} \times 100\right)$

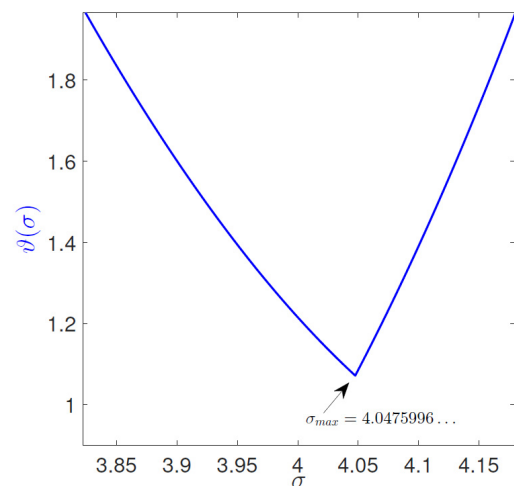


Tabla 5.2: Desempeño del Algoritmo 1 para el cálculo de $\sigma_{m\acute{a}x}$.

Figura 5.8: Sigma (σ) vs. el área de estabilidad (ϑ).

5.3.4. Controlador Óptimo No Frágil

Esta sección se centra en el cálculo de la ganancia óptima \mathbf{k}^{opt} asociada a una región de estabilidad delimitada por un conjunto de curvas de cruce de estabilidad \mathcal{T} , para los subsistemas x y θ . Para ello, se consideran los retardos nominales $\tau_x = 0,018$ s y $\tau_\theta = 0,030$ s, así como el caso $\sigma = 0$ en ambos subsistemas. Las curvas de cruce \mathcal{T}_x y \mathcal{T}_θ , junto con sus regiones de estabilidad asociadas, se obtuvieron en la sección anterior y se muestran en la Fig. 5.3.

Con el fin de construir el poliedro que encierra estas regiones de estabilidad, se calculan los parámetros m_i y b_i que definen cada hiperplano (recta) para $i = 1, \dots, N$, empleando los puntos de cruce de \mathcal{T}_x y \mathcal{T}_θ , de acuerdo con las Ecs. (4.43)–(4.45). Estas constantes permiten representar la región como intersección de semiespacios, según la Ecuación (4.53). A partir de esta representación, la ganancia óptima \mathbf{k}^{opt} se obtiene resolviendo el problema de optimización lineal establecido en la Proposición 4.10. El Algoritmo 2 resume el procedimiento completo, mientras que las Figs. 5.9 y 5.10 proporcionan visualizaciones complementarias del efecto de la discretización sobre la región aproximada.

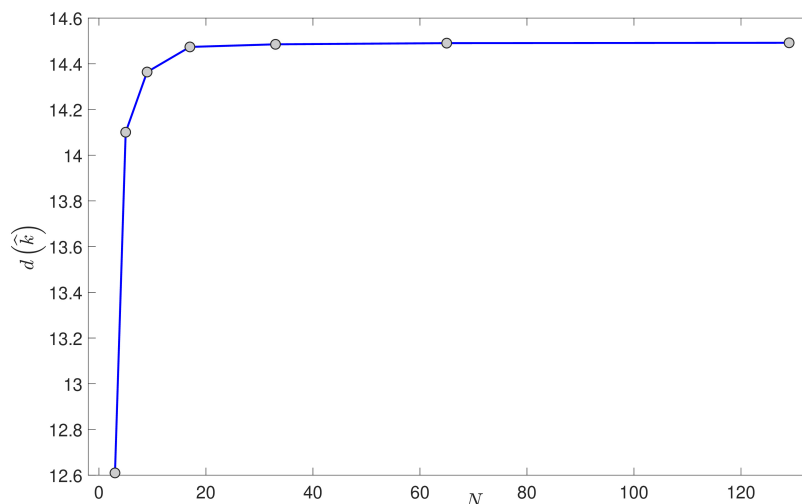


Figura 5.9: Número de hiperplanos (N) que delimitaron la región de estabilidad vs la profundidad del centro de Chebyshev $d(\hat{\mathbf{k}})$ calculada por el Algoritmo 2.

La Fig. 5.9 muestra que, al incrementar el número de hiperplanos (N), la profundidad del centro de Chebyshev $d(\hat{\mathbf{k}})$ converge hacia un valor prácticamente constante. Para valores pequeños de N , la estimación de $d(\hat{\mathbf{k}})$ presenta variaciones apreciables debido a la aproximación inicial burda de la región de estabilidad. Conforme N aumenta, las mejoras se vuelven marginales y $d(\hat{\mathbf{k}})$ se estabiliza. Por su parte, la Fig. 5.10 ilustra, para el subsistema x con $\sigma = 0$ y $\tau_x = 0,018$ s, cómo el aumento de N refina la aproximación de las curvas de cruce y modifica la profundidad calculada del centro de Chebyshev.

Como resultado de la aplicación de esta metodología, se obtuvieron las ganancias óptimas para los controladores PD de los subsistemas x y θ , considerando sus retardos nominales y dos especificaciones de desempeño: $\sigma = 0$ y $\sigma = \sigma_{\text{máx}}$. Las ganancias resultantes se resumen en la Tabla 5.3. Asimismo, las Figs. 5.11b y 5.11a ilustran los resultados obtenidos. En dichas figuras se muestra, dentro de cada región de estabilidad, el disco euclidiano máximo centrado en la ganancia óptima \mathbf{k}^{opt} . Esta elección reduce

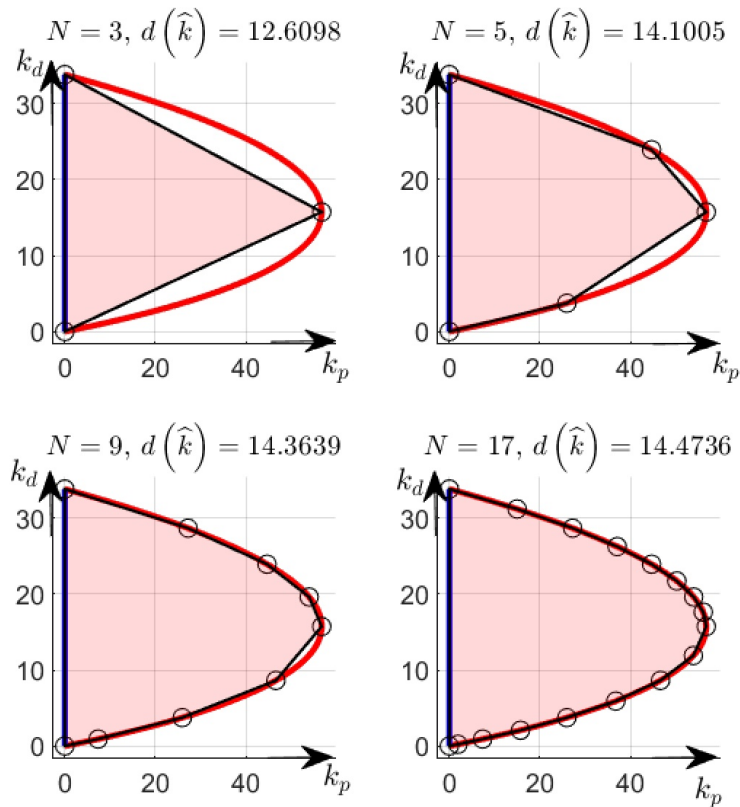
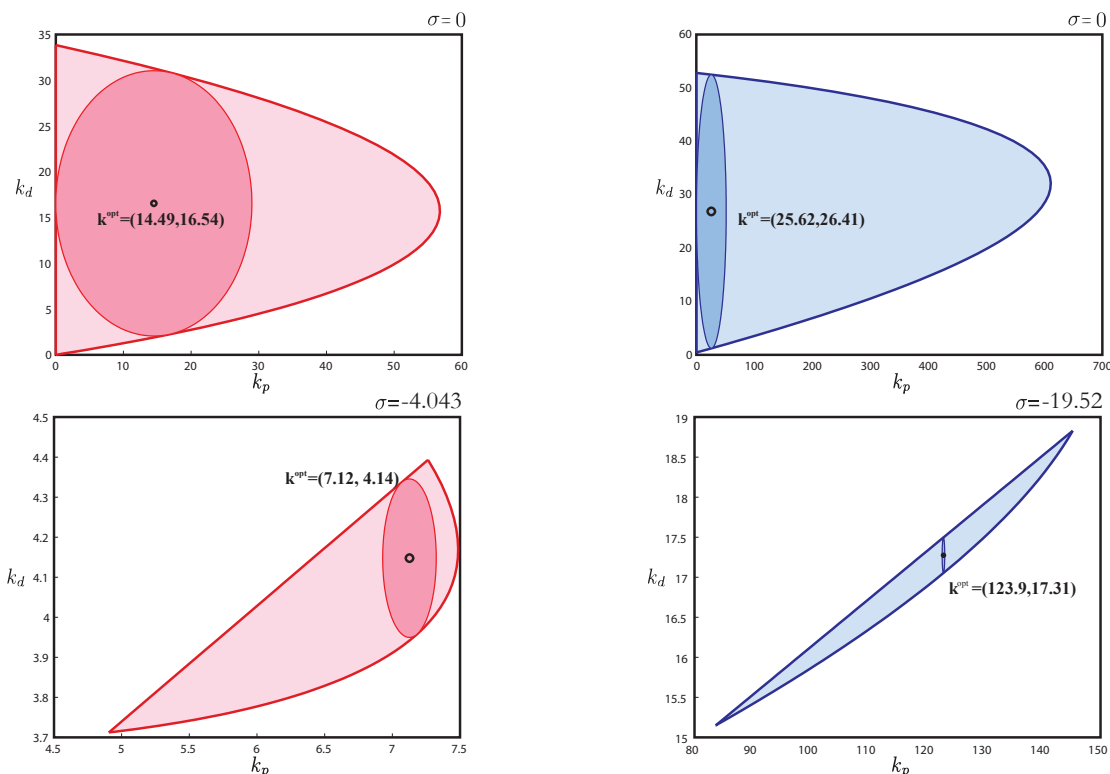


Figura 5.10: Regiones de estabilidad para el subsistema x calculadas para diferentes números de hiperplanos (N) y el círculo Euclidianos más grande yaciendo en esta región.

la fragilidad del controlador, al permitir desviaciones paramétricas de implementación sin pérdida de estabilidad. Las diferencias en el desempeño temporal de los subsistemas al emplear estas ganancias se discuten en la Sección Desempeño del seguimiento de trayectoria.

Tabla 5.3: Ganancias óptimas de los controladores PD para los subsistemas x y θ .

Subsistema	Retardo nominal	σ	k_p	k_d
$G_x(s)$	$\tau_x = 0,018$ s	0	14.491	16.542
		-4.043	7.127	4.148
$G_\theta(s)$	$\tau_\theta = 0,030$ s	0	25.62	26.41
		-19.5	123.9	17.31



(a) Ganancias óptimas para dos regiones de estabilidad del subsistema x bajo un retardo $\tau_x = 0,018$ s.

(b) Ganancias óptimas para dos regiones de estabilidad del subsistema θ bajo un retardo $\tau_\theta = 0,030$ s.

Figura 5.11: Ganancias óptimas para los subsistemas x y θ . Las ganancias óptimas son los centros de las bolas Euclidianas más grandes dentro de cada región de estabilidad.

5.3.5. Desempeño del seguimiento de trayectoria

Se realizaron simulaciones de la respuesta temporal del sistema completo con el fin de validar los resultados analíticos presentados en las secciones anteriores. La Tabla 5.4 resume los parámetros físicos considerados, así como las ganancias de control empleadas en las simulaciones.

Tabla 5.4: Parámetros físicos y ganancias de control utilizadas en la simulación.

Descripción	Símbolo	Valor
<i>Parámetros Físicos</i>		
Masa del vehículo	m	1.0 kg
Momento de inercia (y)	I_y	0.02 kg·m ²
Longitud del brazo	l	0.10 m
Aceleración de la gravedad	g	9.81 m/s ²
<i>Ganancias de Control PD</i>		
Subsistema longitudinal (x)	k_{p_x}, k_{d_x}	14.491, 16.542
Subsistema de cabeceo (θ)	$k_{p_\theta}, k_{d_\theta}$	25.62, 26.41
Subsistema de altura (z)	k_{p_z}, k_{d_z}	16.0, 8.0

En el primer conjunto de simulaciones, la tarea de control consiste en moverse desde las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $z(0) = 0$ y $\theta(0) = 5^\circ$ hacia un punto de referencia constante definido por $x_r = 2$, $z_r = 3$ y $\theta_r = 0$, manteniendo posteriormente dicha referencia. Los resultados se presentan en la Fig. 5.12, donde se muestran las respuestas temporales de los estados del sistema. En la fila superior se emplean las ganancias óptimas no frágiles obtenidas para $\sigma_x = \sigma_\theta = 0$. En la fila inferior se emplean las ganancias asociadas a la máxima tasa de decaimiento exponencial, manteniendo el mismo criterio de diseño no frágil dentro de las regiones σ -estables correspondientes.

Como se observa en la Fig. 5.12, el objetivo de control se alcanza en ambos casos. No obstante, la convergencia al punto de referencia es más rápida al emplear las ganancias asociadas a $\sigma_{\text{máx}}$ en los subsistemas con retardo (x y θ). Cabe destacar que la especificación σ no se impuso al subsistema z , el cual corresponde al caso sin retardo; por tanto, su desempeño permanece esencialmente inalterado entre ambas simulaciones.

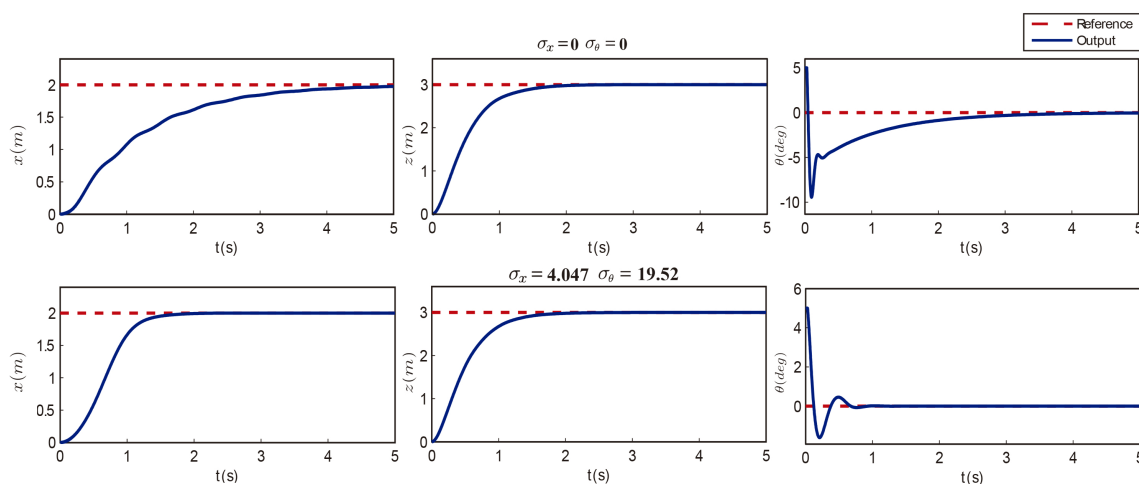


Figura 5.12: Respuesta temporal del movimiento longitudinal para el *tilt-rotor*. Gráficas superiores: se usan las ganancias óptimas calculadas para $\sigma_x = 0$ y $\sigma_\theta = 0$. Gráficas inferiores: se usan las ganancias óptimas calculadas para la tasa máxima de decaimiento exponencial σ_{max} .

Para el segundo conjunto de simulaciones, la tarea de control consiste en el seguimiento de trayectoria a lo largo de una ruta tipo flor definida por las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = 5 + 5 \cos\left(\frac{5\pi t}{100}\right) \cos\left(\frac{\pi t}{100}\right), \quad z(t) = 5 + 5 \cos\left(\frac{5\pi t}{100}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{100}\right).$$

La Fig. 5.13 presenta las respuestas temporales de los estados del sistema (x , z y θ) y las entradas de control requeridas para seguir la trayectoria deseada. Con el fin de evitar demandas impulsivas de control al inicio, la referencia se construye incorporando una curva *spline* que conecta suavemente el origen con el punto inicial de la trayectoria tipo flor. Como se observa en la Fig. 5.13, el sistema sigue de manera satisfactoria la ruta de referencia mientras las señales de control se mantienen dentro de límites factibles.

La Figura 5.13 presenta las respuestas temporales de los estados del sistema (x , z , y θ) y las entradas de control correspondientes requeridas para seguir la trayectoria deseada. Para asegurar que las entradas de control permanezcan dentro de las limitaciones físicas del sistema, la ruta de referencia comienza con una *spline* que conecta suavemente el origen con el inicio de la trayectoria de la flor. Como se muestra en la Figura 5.13, el sistema sigue exitosamente la ruta de referencia, mientras que las señales de control permanecen dentro de límites aceptables y realizables.

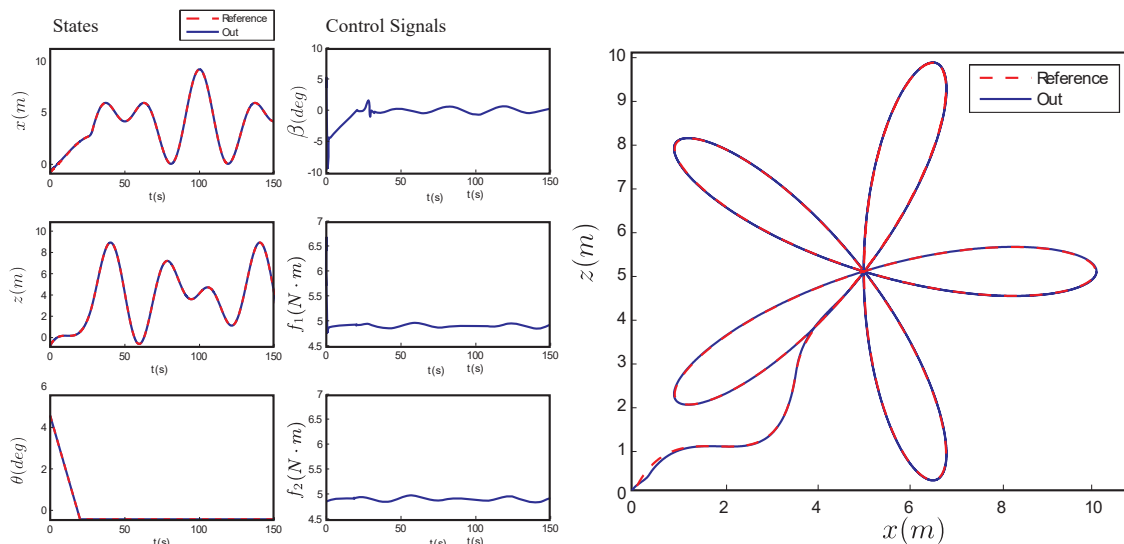


Figura 5.13: Análisis de trayectoria tipo flor. **Izquierda:** señales de estado y control. **Derecha:** ruta de la trayectoria.

Aunque los resultados de la Fig. 5.13 muestran un desempeño de seguimiento razonablemente bueno, es relevante analizar el efecto de seleccionar ganancias asociadas a tasas de decaimiento elevadas. En particular, las ganancias \mathbf{k}^{opt} obtenidas para $\sigma_x = \sigma_{x,\text{máx}} \approx 4,05$ y $\sigma_\theta = \sigma_{\theta,\text{máx}} \approx 19,52$ producen una respuesta más rápida; sin embargo, dicha especificación no impone restricciones explícitas sobre el esfuerzo de control. Esta limitación se evidencia en la Fig. 5.14, donde se compara el seguimiento y el esfuerzo de control para tres conjuntos de ganancias calculados con distintos valores de σ . En particular, el uso de ganancias asociadas a un valor de σ elevado, aunque mejora la rapidez de seguimiento, conduce a entradas de control excesivas y potencialmente inviables desde el punto de vista de saturación de actuadores.

En consecuencia, si bien maximizar σ puede interpretarse como una estrategia para acelerar la dinámica dominante, no captura restricciones prácticas tales como límites de actuadores. En muchos casos, seleccionar valores intermedios $\sigma \in (0, \sigma_{\text{máx}})$ proporciona un compromiso más conveniente entre desempeño y factibilidad. De hecho, la Fig. 5.14 confirma que es posible alcanzar un seguimiento satisfactorio con valores reducidos de σ en los subsistemas x y θ , manteniendo simultáneamente el esfuerzo de control dentro de rangos aceptables.

Por lo tanto, mientras que maximizar la tasa de decaimiento puede servir como una estrategia para mejorar la velocidad de respuesta, no toma en cuenta restricciones prácticas como los límites de los actuadores. En muchos casos, seleccionar un valor de $\sigma \in (0, \sigma_{\text{max}})$ ofrece un equilibrio más deseable entre rendimiento y factibilidad. De

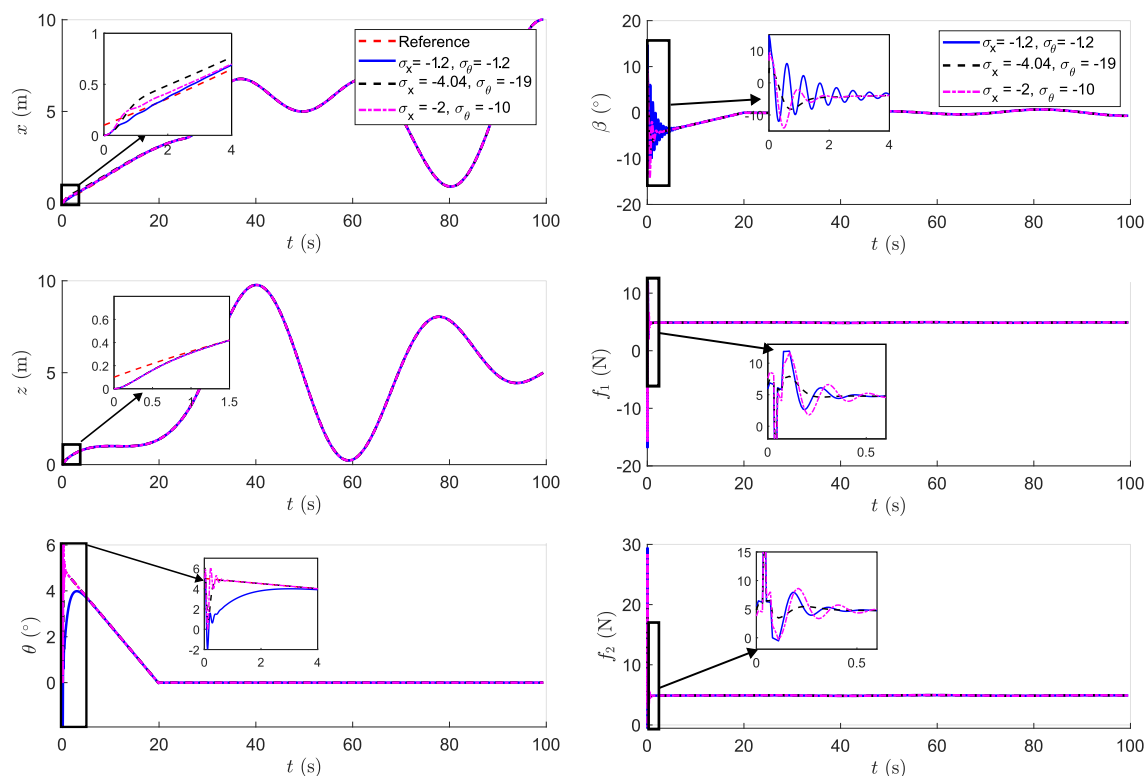


Figura 5.14: Respuesta temporal del movimiento longitudinal del cuadricóptero basculante usando tres conjuntos de ganancias de controlador, cada uno calculado para un valor diferente de σ . La figura ilustra el compromiso entre el rendimiento de seguimiento y el esfuerzo de control.

hecho, la Figura 5.14 confirma que se puede lograr un comportamiento de seguimiento satisfactorio con valores reducidos de σ en los subsistemas x y θ , manteniendo al mismo tiempo los esfuerzos de control dentro de límites aceptables.

5.4. Plataforma experimental y validación preliminar

Aunque el enfoque principal de este trabajo radica en la síntesis geométrica y optimización de leyes de control robustas ante retardos, la viabilidad física de estas metodologías descansa sobre una arquitectura de hardware y software capaz de operar en tiempo real. Debido a la complejidad inherente de la dinámica de vuelo libre, durante las etapas tempranas de esta investigación se desarrolló una plataforma experimental de evaluación. El objetivo de esta fase fue caracterizar la instrumentación, implementar rutinas de estimación de estado y validar arquitecturas de control clásicas que permitieran aislar y cuantificar los retardos del sistema.

5.4.1. Banco de pruebas de orientación y vehículo aéreo

La validación experimental de las leyes de control de orientación requiere de una plataforma capaz de aislar la dinámica rotacional del vehículo de su dinámica traslacio-

nal. Durante el desarrollo de esta investigación, se trabajó de forma experimental con tres configuraciones de aeronaves: un hexacóptero, un birotor de rotores inclinables (*tilt-rotor*) y un cuadricóptero convencional. No obstante, debido a su simetría estructural y madurez tecnológica, las pruebas de validación de estimación y de leyes de control presentadas en este trabajo se concentraron primordialmente en la plataforma de cuatro rotores, la cual se ilustra en la Figura (5.16).

La validación experimental de las leyes de control de orientación exige una plataforma capaz de aislar la dinámica rotacional del vehículo de su dinámica traslacional. Como se estableció en el modelado matemático, el multirrotor es un sistema subactuado por lo que su posición depende de la orientación del mismo; por lo tanto, cualquier variación en los ángulos de orientación (ϕ, θ, ψ) induce inmediatamente un cambio en la traslación espacial.

Garantizar un desempeño robusto y estable en el lazo de control de orientación es un requisito indispensable antes de abordar el seguimiento de trayectorias lineales. Para satisfacer este requerimiento y garantizar la integridad física de la aeronave durante la sintonización preliminar de los controladores, se diseñó e instrumentó un banco de pruebas de orientación de tres grados de libertad (3-GDL).

Este mecanismo, basado en un soporte de cardan (tipo giroscopio), proporciona al vehículo aéreo total libertad de rotación en sus tres ejes principales, pero restringe por completo sus desplazamientos de traslación. El ensamble mecánico, ilustrado en la Figura 5.15, está compuesto por los siguientes elementos estructurales:

- **Aro exterior:** Articulado a la base fija, permite la rotación alrededor del eje vertical z , emulando el movimiento de guiñada (*yaw*, ψ).
- **Aro interior:** Acoplado ortogonalmente al aro exterior, provee el eje de rotación alrededor del eje longitudinal x , correspondiente al movimiento de alabeo (*roll*, ϕ).
- **Eje central (Barra interna):** Sujeta rígidamente al centro de masa del multirrotor y articulada al aro interior, facilita el movimiento sobre el eje transversal y , definiendo el ángulo de cabeceo (*pitch*, θ).

De manera complementaria a la restricción cinemática, la estructura del banco de pruebas fue instrumentada con un sistema de medición mecánica auxiliar para los desplazamientos angulares en cada uno de los ejes. Este subsistema de calibración permite obtener referencias físicas absolutas, las cuales resultan fundamentales para corroborar y validar la precisión de las estimaciones arrojadas por la Unidad de Medición Inercial (IMU) y los algoritmos de fusión sensorial abordados en las secciones posteriores.

5.4.2. Evolución y diseño de la arquitectura electrónica

A lo largo del desarrollo de esta investigación, la arquitectura de hardware evolucionó progresivamente para satisfacer las demandas computacionales y de retardo del sistema, transitando por tres etapas fundamentales de validación.



Figura 5.15: Banco de pruebas de orientación basado en el soporte de cardán. El mecanismo dota al multirroto de tres grados de libertad de orientación (ϕ, θ, ψ) mientras anula la dinámica de traslación, garantizando un entorno seguro para la validación de las leyes de control de orientación.

Validación de latencias: De microcomputadoras a microcontroladores

En las etapas iniciales de prototipado, se evaluó el uso de microcomputadoras de propósito general (plataforma Raspberry Pi ejecutando scripts en Python) para centralizar la adquisición de datos I²C, la modulación PWM y el registro de telemetría vía SSH. Sin embargo, el análisis empírico del desempeño en lazo cerrado expuso las grandes limitaciones de los sistemas operativos no concebidos para tiempo real (RTOS). La latencia del lazo de control presentó una varianza extrema, oscilando aleatoriamente entre 40 ms y picos de hasta 2 s, lo cual imposibilitó la estabilización de los ángulos de dinámica θ y ϕ generando oscilaciones no acotadas.

Para resolver este comportamiento estocástico del retardo, se migró la arquitectura hacia un entorno embebido basado en un microcontrolador AVR de 8 bits (plataforma Arduino Mega). Esta transición permitió la ejecución directa de las interrupciones de hardware, estabilizando el tiempo de muestreo del lazo de control en $\Delta t \approx 25$ ms, con una fluctuación marginal de ± 4 ms. Bajo esta arquitectura, fue posible validar la integridad de la Unidad de Medición Inercial (IMU) y ejecutar satisfactoriamente las primeras de control de orientación utilizando controladores PD clásicos.

Diseño de la Unidad de Control de Vuelo (FCU) de altas prestaciones

Si bien el microcontrolador de 8 bits fue suficiente para el control aislado de orientación, la integración del Sistema de Navegación Inercial (INS), el procesamiento de matrices para el Filtro de Kalman y la futura implementación de controladores tolerantes al retardo, exigían una capacidad de cómputo superior. Por consiguiente, el diseño final de la plataforma experimental se basó en la tarjeta de desarrollo *Delfino*

F28377S (Texas Instruments).

Este procesador digital de señales (DSP) de 32 bits opera a una frecuencia de 200 MHz, integra una Unidad de Punto Flotante (FPU) por hardware y cuenta con un co-procesador paralelo independiente (CLA - *Control Law Accelerator*), características ideales para aislar la carga computacional de las leyes de control del manejo de periféricos de telemetría.

Para lograr la integración electrónica del multirrotor con esta unidad de procesamiento, se diseñó e imprimió una placa de circuito impreso (PCB), la cual opera como un escudo de expansión (*shield*). Como se observa en la Figura 5.16, esta tarjeta centraliza y resuelve los requerimientos de potencia y señal de la aeronave.

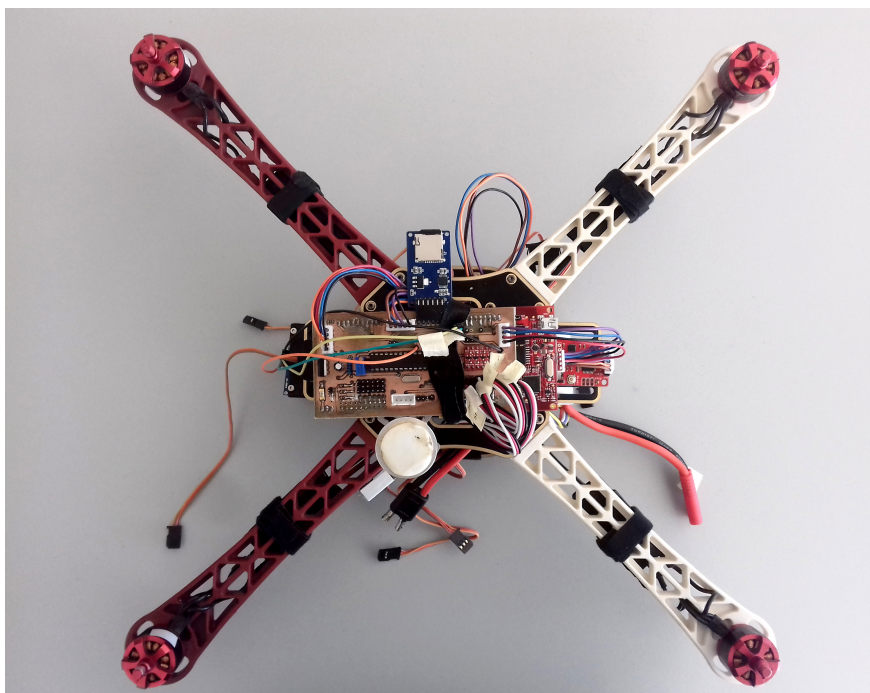


Figura 5.16: Se ilustra la plataforma experimental de tipo cuadricóptero con su unidad de control basada en el procesador F28377S de Texas Instruments.

5.4.3. Estimación de estados y algoritmos de navegación

Para que las leyes de control operen correctamente, es importante contar con una estimación robusta de la orientación y posición del vehículo. A continuación, se detallan los algoritmos de fusión sensorial implementados para acondicionar las señales en crudo de los sensores y transformarlas en variables de estado útiles para el lazo de control.

Cinemática de orientación: Algoritmo DCM

La estimación de la orientación se fundamenta en el algoritmo de la Matriz de Cosenos Directores (DCM), el cual permite representar la rotación del marco inercial respecto al marco solidario al cuerpo (*body frame*). Para la implementación física, se utilizó una unidad de medición inercial 9DOF Razor IMU, la cual integra un microcontrolador ATmega328 dedicado al preprocesamiento de un magnetómetro, un acelerómetro y un giroscopio triaxiales.

El núcleo del algoritmo DCM se basa en la integración de la velocidad angular para actualizar la matriz de rotación R mediante la ecuación cinemática:

$$\dot{R}(t) = R(t)\Omega_{\times}(t), \quad (5.18)$$

donde Ω_{\times} es la matriz antisimétrica de las velocidades angulares medidas por el giroscopio. Debido a la acumulación de errores de redondeo y truncamiento en la integración numérica, la matriz R tiende a perder sus propiedades de ortonormalidad. Para mitigar este efecto, se aplica un proceso recursivo de **renormalización** que fuerza a los vectores de la matriz a mantenerse dentro del grupo especial ortogonal $SO(3)$.

Adicionalmente, para corregir el error de deriva (*drift*) inherente a los giroscopios, el algoritmo emplea un esquema de realimentación basado en un controlador Proporcional-Integral (PI). Este mecanismo toma como referencia el vector de gravedad proporcionado por el acelerómetro (para corregir alabeo y cabeceo) y el vector de campo magnético (para corregir la guiñada), ajustando la matriz DCM en cada paso de tiempo ($\Delta t = 20$ ms). El flujo completo de este procesamiento se ilustra en el diagrama de bloques de la Figura 5.17.

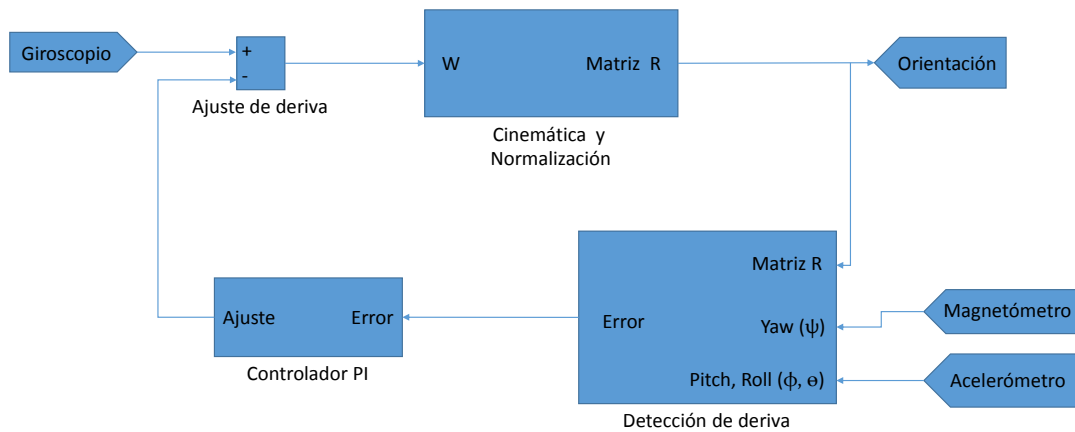


Figura 5.17: Estructura del algoritmo DCM implementado en la IMU Razor. Incluye la integración de giroscopio, corrección de deriva mediante lazo PI con referencias de acelerómetro/magnetómetro y normalización matricial.

Transformación de velocidades angulares a derivadas de Euler

Una etapa crítica en la implementación de la ley de control es la obtención de las derivadas temporales de los ángulos de orientación ($\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$), las cuales no son medidas directamente por los sensores, ya que el giroscopio registra velocidades angulares en el marco del cuerpo ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$). Para transformar estas velocidades a las razones de cambio de los ángulos de Euler, se implementó la relación cinemática presentada en el Capítulo 2:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sec \theta \sin \phi & \sec \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

Esta transformación es esencial para el cálculo del error derivativo en los controladores PD/PID. Cabe destacar que esta matriz presenta una singularidad cuando el ángulo de cabeceo alcanza $\theta = \pm 90^\circ$; sin embargo, dado que el rango de operación del vehículo se mantiene en el intervalo de ángulos pequeños definido previamente ($|\gamma| \leq 15^\circ$), la matriz se mantiene bien condicionada para el procesamiento en tiempo real.

Filtro de Kalman Vectorial para la Estimación de Orientación

A pesar de los resultados satisfactorios en el banco de pruebas estático, la transición hacia pruebas con motores en operación reveló limitaciones críticas en el Filtro Complementario y en los algoritmos DCM básicos. Como se documenta en la Figura 5.18, la activación de los actuadores induce vibraciones mecánicas de alta frecuencia que afectan al acelerómetro y campos electromagnéticos que distorsionan el magnetómetro, produciendo picos de ruido de hasta 17° en la estimación de orientación. Para mitigar este fenómeno sin introducir retardos de fase excesivos (propios de los filtros pasa-bajas tradicionales), se implementó un Filtro de Kalman orientado a la estimación de los vectores de referencia en el marco móvil.

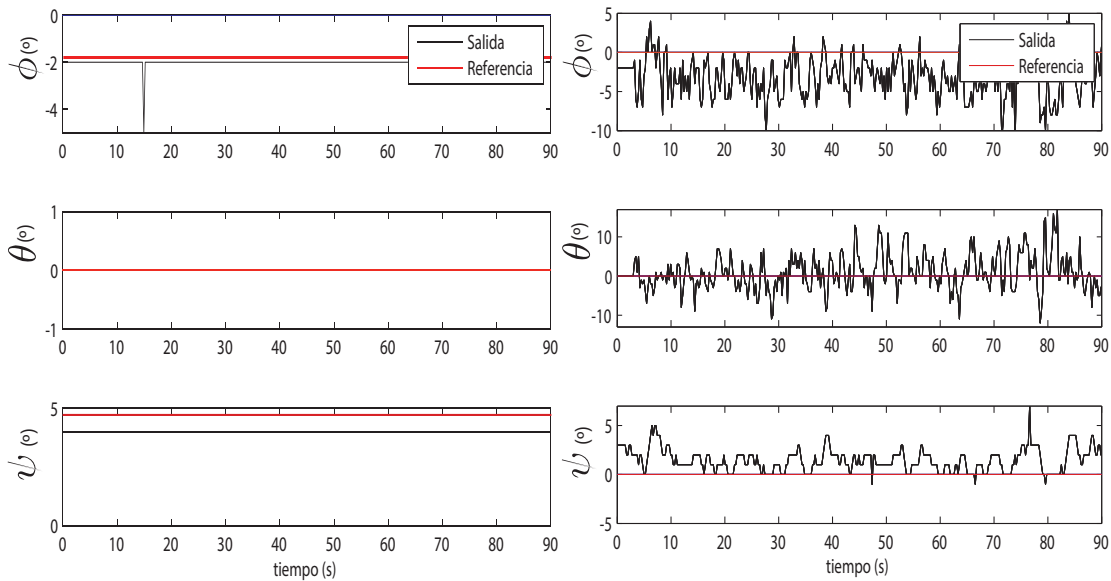


Figura 5.18: Comparativa de la señal de orientación con motores en reposo (izquierda) frente a la señal bajo operación nominal (derecha) empleando un Filtro Complementario. Se observa la inducción de ruido severo que compromete la estabilidad del lazo de control.

A diferencia de las arquitecturas que filtran los ángulos de Euler directamente, este enfoque estima el vector de gravedad (\mathbf{g}_b) y el vector de campo magnético (\mathbf{m}_b) en el marco de referencia móvil (*body frame*). La dinámica de estos vectores está gobernada

por la rotación del vehículo, definida por la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_b$. Se define el vector de estados extendido como $\mathbf{S}^b = [\mathbf{m}_b^\top \ \mathbf{g}_b^\top]^\top \in \mathbb{R}^6$. La evolución temporal del sistema se describe mediante la ecuación diferencial:

$$\dot{\mathbf{S}}^b = \begin{bmatrix} -\Omega_b & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\Omega_b \end{bmatrix} \mathbf{S}^b, \quad (5.20)$$

donde Ω_b es la matriz antisimétrica construida a partir de las componentes de velocidad angular medidas por el giroscopio. Para su implementación en el microcontrolador F28377S, se utilizó la aproximación discreta de la matriz de transición Φ_k :

$$\Phi_k = \mathbf{I}_{6 \times 6} + \begin{bmatrix} -\Omega_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\Omega_b \end{bmatrix} T + \begin{bmatrix} -\Omega_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\Omega_b \end{bmatrix}^2 \frac{T^2}{2!}, \quad (5.21)$$

siendo T el periodo de muestreo. Dado que los estados son directamente observables a través de la IMU, la ecuación de medición se define como $\mathbf{y}_k = \mathbf{S}_k^b + \mathbf{V}_k$, donde \mathbf{V}_k representa el ruido de medición caracterizado previamente.

Resultados de la implementación en la arquitectura CLA. Para garantizar que la complejidad computacional del filtro de Kalman (operaciones matriciales de 6x6) no incrementara el retardo de ejecución, el algoritmo se programó en el *Control Law Accelerator* (CLA) del microcontrolador TI F28377S. Esta implementación en paralelo permitió elevar la frecuencia de actualización del lazo de orientación de 16 Hz a 50 Hz.

Como se detalla en la Tabla ??, la implementación del filtro de Kalman vectorial logró reducir drásticamente la varianza del error en los tres ejes. La capacidad del filtro para asignar pesos dinámicos a la predicción inercial frente a las mediciones ruidosas permitió obtener señales de orientación limpias (ver Figura 5.19).

Tabla 5.5: Comparativa de las varianzas de los ángulos de orientación: Filtro Complementario vs. Filtro de Kalman.

Ángulo	Varianza (Filtro Complementario)	Varianza (Filtro de Kalman)
Roll (ϕ)	7.048	0.1276
Pitch (θ)	22.16	0.7845
Yaw (ψ)	1.426	0.1088

5.4.4. Validación experimental del control de orientación (PID)

Habiendo consolidado la plataforma experimental y los algoritmos de estimación de estado, la etapa final de la experimentación consistió en validar el desempeño de la ley de control Proporcional-Integral-Derivativa (PID) sobre el vehículo multirroto. Esta fase tiene como objetivo evaluar la efectividad de la plataforma integrada ante consignas estáticas, seguimiento de trayectorias dinámicas y rechazo a perturbaciones externas.

Cabe destacar que la implementación del término derivativo evita el uso de una derivada numérica directa sobre los ángulos estimados; en su lugar, se emplea la relación cinemática entre las velocidades angulares del giroscopio y las razones de cambio de los ángulos de Euler, lo que garantiza una señal de control más limpia y una respuesta dinámica superior.

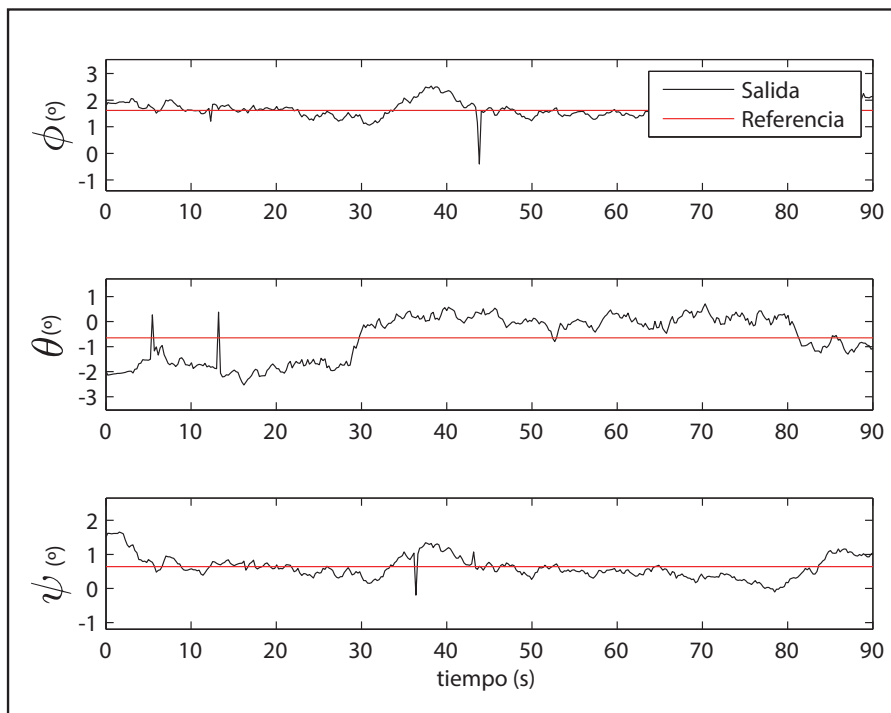


Figura 5.19: Evolución temporal de los ángulos de orientación estimados mediante el Filtro de Kalman Vectorial. A pesar del ruido electromagnético y vibratorio inducido por los motores, se observa una señal con variaciones de amplitud pequeñas para referencias igual a cero en los tres ángulos.

Estabilización ante referencia fija

La primera prueba de desempeño consistió en evaluar la capacidad del controlador para mantener el vehículo en vuelo estacionario (*hover*) con referencias igual a cero para los tres ángulos de orientación ($\phi_r, \theta_r, \psi_r = 0^\circ$). Gracias al procesamiento en paralelo en la unidad CLA a una frecuencia de 50 Hz y a la reducción de ruido lograda por el Filtro de Kalman, el sistema demuestra una estabilidad robusta.

Como se observa en la Figura 5.20, el controlador permite compensar las perturbaciones constantes y los desequilibrios físicos de la aeronave, logrando que los ángulos de alabeo y cabeceo converjan a la referencia con una varianza reducida.

Seguimiento de trayectorias y rechazo a perturbaciones

Para evaluar la agilidad y robustez del sistema, se realizaron pruebas de seguimiento de señales de referencia variables comandadas a distancia por medio de un control remoto.

En las gráficas de la Figura 5.21 se aprecia que, aunque el vehículo sigue la referencia, existe un retraso temporal medible en la respuesta. Este fenómeno es una manifestación directa del retardo acumulado por el procesamiento digital y la dinámica de los actuadores ($\tau \approx 50$ ms). A pesar de este desfase, el PID mantiene la estabilidad global, validando la arquitectura propuesta para maniobras de navegación básica.

Finalmente, se sometió al vehículo a una prueba de perturbación continua mediante

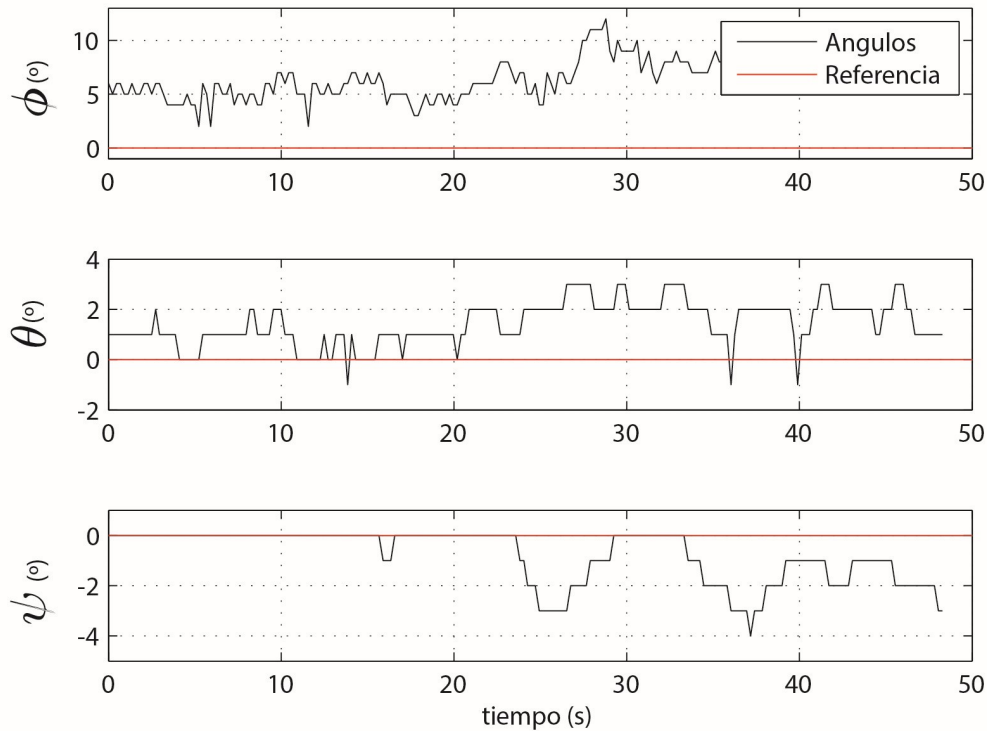


Figura 5.20: Estabilización del vehículo multirrotor ante referencias igual a cero (*hovering*). Se observa la estabilización del sistema manteniendo los ángulos de orientación con variaciones mínimas.

la adición de una carga asimétrica en uno de los brazos del multirrotor (Figura 5.22). Esta condición extrema de desbalance paramétrico puso a prueba la robustez del controlador.

Los resultados muestran que, tras un transitorio inicial, el controlador logra estabilizar el sistema cerca de la referencia. La presencia de oscilaciones residuales, particularmente en el eje de guiñada (ψ), se atribuye al movimiento pendular de la carga suspendida. No obstante, la capacidad de recuperar el equilibrio bajo estas condiciones confirma que la plataforma experimental es apta para la implementación de leyes de control más sofisticadas que aborden explícitamente el retardo y la incertidumbre paramétrica, tales como las desarrolladas en el marco de la σ -estabilidad.

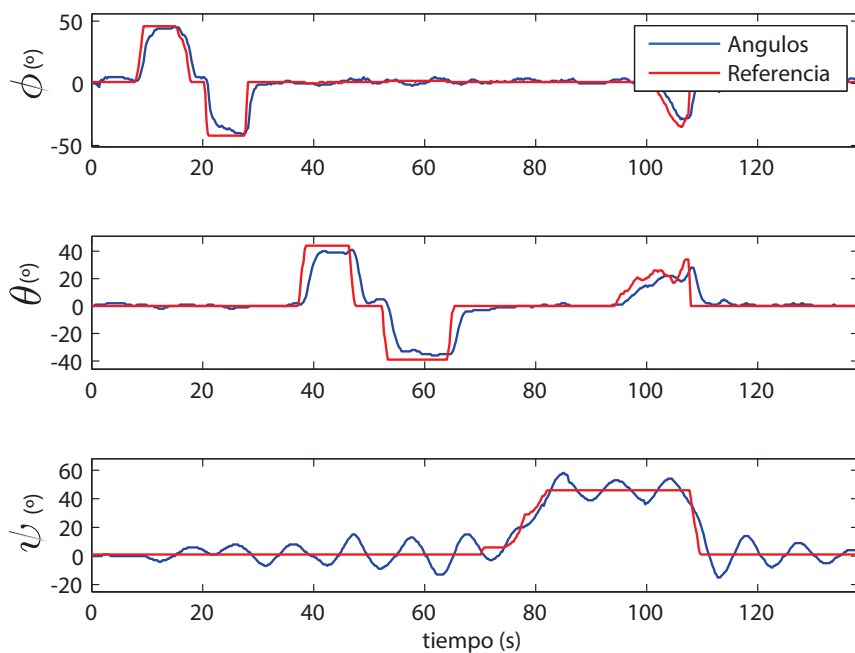


Figura 5.21: Respuesta del sistema ante cambios en la referencia de orientación (línea roja). El controlador PID logra seguir la trayectoria de referencia con un desempeño aceptable en los tres ejes, evidenciando el tiempo de respuesta característico del sistema realimentado.

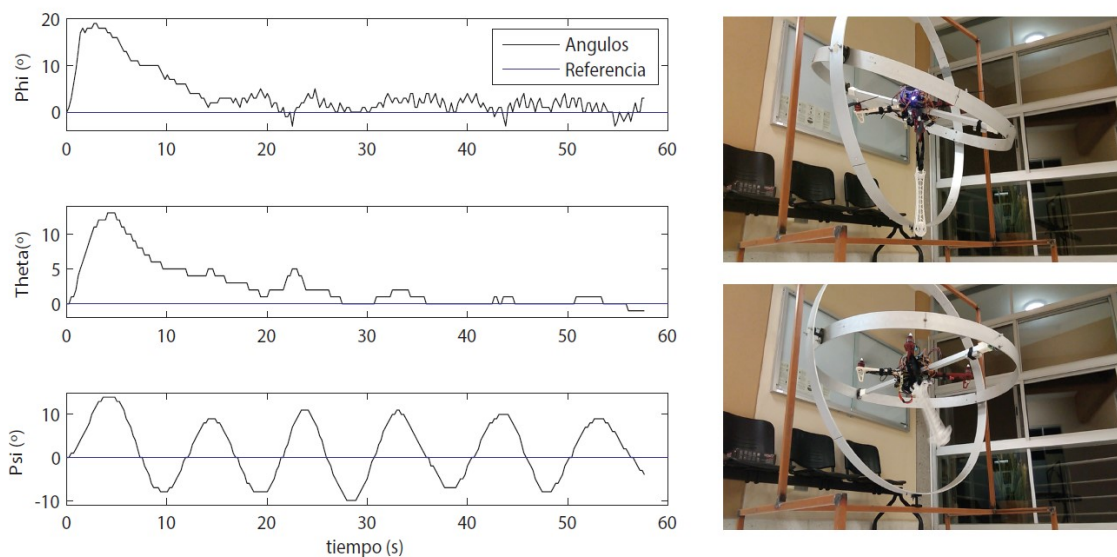


Figura 5.22: Validación experimental de rechazo a perturbaciones. A la izquierda se observa la evolución de los ángulos durante la aplicación de la carga; a la derecha, el estado físico del cuadricóptero antes y después de que la acción de control compense el desbalance.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

6.1. Conclusiones

Este trabajo de tesis presentó el desarrollo de una metodología sistemática para el análisis y diseño de controladores con garantía de estabilidad exponencial para vehículos aéreos multirrotores. El enfoque principal se centró en sistemas donde la dinámica se ve afectada por retardos de tiempo ($\tau > 0$) inherentes a la actuación y la medición, factores que tradicionalmente restringen el desempeño y la robustez en aeronaves no tripuladas. A diferencia de enfoques puramente heurísticos, esta investigación consolidó un enfoque geométrico que permite caracterizar las regiones de estabilidad en el espacio de parámetros, proporcionando una herramienta analítica transparente para la síntesis de leyes de control.

Un componente fundamental en el desarrollo fue el modelado estructural basado en la matriz de asignación presentado en el Capítulo 2. El análisis de rango permitió clarificar la subactuación inherente a diversas configuraciones y, a su vez, estableció el papel de los mecanismos de vectorización de empuje para incrementar la capacidad de actuación. Esta caracterización permitió tratar al vehículo como un multirrotores completamente actuado, lo que justifica la descomposición de la dinámica longitudinal y relaciona de forma directa la respuesta de los servomecanismos con el problema del diseño ante la presencia del retardo (*delay-aware*).

A nivel metodológico, se consolidó una representación general de la ecuación característica para sistemas en lazo cerrado con control PD. Se demostró que, independientemente de la ubicación del retardo en el lazo, la dinámica interna del sistema puede ser caracterizada mediante la partición del plano de ganancias (k_p, k_d) a través de curvas de cruce de estabilidad. Este resultado constituye un mecanismo que permite delimitar el conjunto de ganancias estabilizantes y analizar la contracción de la región conforme se incrementan los retardos del sistema.

En términos de desempeño, el trabajo demostró que los sistemas con retardo exhiben un límite físico en la rapidez de su respuesta. Mediante el análisis de σ -estabilidad, se propuso un algoritmo para el cálculo de la tasa máxima de decaimiento exponencial ($\sigma_{\text{máx}}$) fundamentado en la contracción monotónica de las regiones de estabilidad. Esta herramienta permite identificar la garantía de convergencia exponencial óptima alcanzable, diferenciando entre casos donde el límite es un punto específico del espacio de parámetros y casos donde la región converge a un conjunto compacto de área mínima.

Sobre la base de estas regiones, se desarrolló un enfoque de diseño de controladores

no-frágiles. Mediante la construcción de una aproximación poligonal convexa y la determinación del **centro de Chebyshev**, se maximiza la robustez del sistema. Este criterio asegura que las ganancias seleccionadas posean una fragilidad reducida frente a las desviaciones paramétricas propias de la implementación física, garantizando la estabilidad incluso ante variaciones en los componentes . La validación numérica y experimental en el caso de estudio del vehículo tipo *tilt-rotor* confirmó que las ganancias diseñadas bajo el marco de la σ -estabilidad aceleran significativamente la respuesta transitoria. Sin embargo, los resultados también evidenciaron que la búsqueda de la tasa máxima de decaimiento debe equilibrarse con la factibilidad física, ya que valores de σ extremadamente elevados pueden inducir esfuerzos de control que saturan los actuadores. Por lo tanto, la metodología propuesta ofrece un criterio de compromiso óptimo entre rapidez de seguimiento y límites de operación.

6.1.1. Limitaciones y trabajo futuro

A pesar de la robustez de la metodología sistemática propuesta, el trabajo presenta limitaciones que definen oportunidades de extensión. Actualmente, el análisis se fundamenta en la linealización del sistema alrededor de puntos de equilibrio operativos; futuras investigaciones podrían extender estas herramientas geométricas hacia modelos no lineales para cubrir envolventes de vuelo más agresivas. Asimismo, aunque la técnica de optimización geométrica garantiza la rápida convergencia, no incorpora de manera explícita restricciones de saturación en los actuadores durante la fase de diseño. La integración de estas restricciones dentro del problema de optimización para la obtención del sigma máximo permitiría automatizar la selección de σ sin comprometer la integridad física de los motores. Finalmente, el marco desarrollado se aplica a un modelo simplificado de vehículo multirrotor, el cual puede ser extendido a un modelo completo de 6 grados de libertad.

Por lo anterior, este trabajo abre varias líneas de investigación y desarrollo. Entre ellas destacan:

- Extender el análisis a modelos multivariables acoplados de seis grados de libertad, incorporando explícitamente acoplamientos aerodinámicos y términos no lineales.
- Extender el análisis a otro tipo de controladores.
- Integrar restricciones de actuadores y saturación directamente en el proceso de diseño.
- Ampliar la validación experimental en plataformas instrumentadas, evaluando robustez ante perturbaciones y condiciones de vuelo más exigentes.

Estas extensiones permitirían cerrar aún más la brecha entre los resultados analíticos, el desempeño transitorio deseado y las limitaciones físicas inherentes a sistemas aéreos reales.

Bibliografía

- [1] Achtelik, M., Achtelik, M., Brunet, Y., Chli, M., Chatzichristofis, S., et al.: Sfly: Swarm of micro flying robots. In: 2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 2649–2650. IEEE (2012)
- [2] Alaimo, A., Artale, V., Milazzo, C., Ricciardello, A., Trefiletti, L.: Mathematical modeling and control of a hexacopter. In: 2013 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), pp. 1043–1050. IEEE, Atlanta, GA, USA (2013). DOI 10.1109/ICUAS.2013.6564793. 28–31 May 2013
- [3] Alatise, M.B., Hancke, G.P.: Pose estimation of a mobile robot based on fusion of imu data and vision data using an extended kalman filter. *Sensors* **17**(10), 2164 (2017). DOI 10.3390/s17102164. URL <https://www.mdpi.com/1424-8220/17/10/2164>. Published: 21 September 2017
- [4] Ali, Z.A., Li, X.: Modeling and controlling of quadrotor aerial vehicle equipped with a gripper. *Measurement and Control* **52**(5-6), 577–587 (2019)
- [5] Amir, D.: Best Simultaneous Approximation (Chebyshev Centers), pp. 19–35. Birkhäuser Basel, Basel (1985)
- [6] Anderson John D., J.: *Fundamentals of Aerodynamics*, 7 edn. McGraw Hill (2024). ISBN-10: 1264151926
- [7] Artale, V., Barbaraci, G., Milazzo, C., Orlando, C., Ricciardello, A.: Dynamic analysis of a hexacopter controlled via lqr-pi. In: AIP Conference Proceedings, vol. 1558, pp. 1212–1215 (2013). DOI 10.1063/1.4825728. ICNAAM 2013 (11th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics), Rhodes, Greece, 21–27 Sep 2013
- [8] Baruh, H.: *Analytical Dynamics*. WCB/McGraw-Hill, Boston, MA, USA (1999)
- [9] Beck, A., Eldar, Y.C.: Regularization in regression with bounded noise: A chebyshev center approach. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* **29**(2), 606–625 (2007)
- [10] Béjar, M., Ollero, A.: Modelado y control de helicópteros autónomos: revisión del estado de la técnica. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI)* **5**(4), 5–16 (2008). DOI 10.1016/S1697-7912(08)70172-9. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1697791208701729>

- [11] Benzemrane, K., Santosuosso, G.L., Damm, G.: Unmanned aerial vehicle speed estimation via nonlinear adaptive observers. In: Proceedings of the 2007 American Control Conference (ACC 2007), pp. 985–990. IEEE, New York City, NY, USA (2007). DOI 10.1109/ACC.2007.4282827. URL <https://doi.org/10.1109/ACC.2007.4282827>. 11–13 July 2007
- [12] Bouabdallah, S., Becker, M., Siegwart, R.: Autonomous miniature flying robots: coming soon! - research, development, and results. IEEE Robotics & Automation Magazine **14**(3), 88–98 (2007). DOI 10.1109/MRA.2007.901323. URL <https://doi.org/10.1109/MRA.2007.901323>. Consultado el 28-01-2026
- [13] Bouabdallah, S., Noth, A., Siegwart, R.: Pid vs lq control techniques applied to an indoor micro quadrotor. In: Proceedings of the 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2004), vol. 3, pp. 2451–2456. IEEE, Sendai, Japan (2004). DOI 10.1109/IROS.2004.1389776. 28 September–2 October 2004
- [14] Bouadi, H., Bouchoucha, M., Tadjine, M.: Sliding mode control based on backstepping approach for an uav type-quadrotor. World Academy of Science, Engineering and Technology: International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering **1**(2), 39–44 (2007). URL <https://publications.waset.org/11524/sliding-mode-control-based-on-backstepping-approach-for-an-uav-type-quadrotor>. Consultado el 29-01-2026
- [15] Boyd, S., Boyd, S.P., Vandenberghe, L.: Convex optimization. Cambridge university press (2004)
- [16] Castillo, P., García, P., Lozano, R., Albertos, P.: Modelado y estabilización de un helicóptero con cuatro rotores. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI) **4**(1), 41–57 (2007)
- [17] Castillo-Zamora, J., Escareno, J.A., Boussaada, I., Labbani, Q., Camarillo, K.: Modeling and control of an aerial multi-cargo system: Robust acquiring and transport operations. In: 2019 European Control Conference (ECC), pp. 1708–1713. IEEE (2019)
- [18] Castillo-Zamora, J.J., Hernández-Díez, J.E., Boussaada, I., Escareno, J., Alvarez-Muñoz, J.U.: A preliminary parametric analysis of pid delay-based controllers for quadrotor uavs. In: 2021 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), pp. 28–37 (2021)
- [19] Chen, C.T.: Linear System Theory and Design, 3rd edn. Oxford University Press, New York, NY, USA (1999)
- [20] Craig, J.J.: Introduction to Robotics: Mechanics and Control, 4 edn. Pearson (2017)
- [21] Euston, M., Coote, P., Mahony, R., Kim, J., Hamel, T.: A complementary filter for attitude estimation of a fixed-wing uav. In: 2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2008), pp. 340–345. IEEE,

-
- Nice, France (2008). DOI 10.1109/IROS.2008.4650766. URL <https://doi.org/10.1109/IROS.2008.4650766>
- [22] Falconí, G.P., Heise, C.D., Holzapfel, F.: Fault-tolerant position tracking of a hexacopter using an extended state observer. In: 6th International Conference on Automation, Robotics and Applications (ICARA 2015), pp. 550–556. IEEE, Queenstown, New Zealand (2015). DOI 10.1109/ICARA.2015.7081207. URL <https://doi.org/10.1109/ICARA.2015.7081207>. 17–19 February 2015
- [23] Fossen, T.I.: Guidance and Control of Ocean Vehicles. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, UK (1994). Hardcover; ISBN-10: 0471941131
- [24] Goldstein, H., Poole, C.P., Safko, J.L.: Classical Mechanics, 3 edn. Addison-Wesley, San Francisco, CA, USA (2002)
- [25] Guggenheimer, H.: Differential Geomtry. Dover Publications, Inc., New York, NY (1977)
- [26] Guo, M., Gu, D., Zha, W., Zhu, X., Su, Y.: Controlling a quadrotor carrying a cable-suspended load to pass through a window. *Journal of Intelligent & Robotic Systems* **98**(2), 387–401 (2020). DOI 10.1007/s10846-019-01038-6
- [27] Hamandi, M., Usai, F., Sablé, Q., Staub, N., Tognon, M., Franchi, A.: Design of multirotor aerial vehicles: A taxonomy based on input allocation. *The International Journal of Robotics Research* **40**(8-9), 1015–1044 (2021). DOI 10.1177/02783649211025998. URL <https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/02783649211025998>. Published online 22 Jul 2021
- [28] Hernández-Díez, J.E., Méndez-Barrios, C.F., Mondié, S., Niculescu, S.I., González-Galván, E.J.: Proportional-delayed controllers design for lti-systems: a geometric approach. *International Journal of Control* **91**(4), 907–925 (2018)
- [29] Hernández-Díez, J.E., Méndez-Barrios, C.F., Mondié, S., Niculescu, S.I., González-Galván, E.: Proportional-delayed controllers design for lti-systems: a geometric approach. *International Journal of Control* **91**(4), 907–925 (2018). DOI 10.1080/00207179.2017.1299943. URL <https://doi.org/10.1080/00207179.2017.1299943>
- [30] International Organization for Standardization (ISO): ISO 8373:2021 — Robotics — Vocabulary, 3 edn. (2021). URL <https://www.iso.org/standard/75539.html>. International Standard. Fuente de la definición de “robot” (cláusula/entrada 3.1).
- [31] Khalil, H.K.: Nonlinear Systems, 3rd edn. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ (2002)
- [32] Lu, K., Yang, Z., Liao, L., Jiang, Y., Xu, C., Xu, H., Zhang, Q.: Extended state observer-based robust control of an omnidirectional quadrotor with tiltable rotors. *Transactions of the Institute of Measurement and Control* **43**(5), 1143–1155 (2021)

- [33] López-Hernández, J., Escareno, J., Méndez-Barrios, C.F., Labbani, O., Ramírez-Rivera, V., Coronado, J., Méndez-Azúa, H.: A comparative stability analysis of underactuated versus fully-actuated rotorcrafts having time-delay feedback. In: 2019 6th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT), pp. 1640–1645 (2019)
- [34] Mahony, R., Kumar, V., Corke, P.: Multirotor aerial vehicles: Modeling, estimation, and control of quadrotor. *Robotics Automation Magazine*, IEEE **19**, 20–32 (2012). DOI 10.1109/MRA.2012.2206474
- [35] McKerrow, P.J.: Modelling the draganflyer four-rotor helicopter. In: Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '04), vol. 4, pp. 3596–3601. IEEE, New Orleans, LA, USA (2004). DOI 10.1109/ROBOT.2004.1308810. 26 April–1 May 2004
- [36] Mendez-Barrios, C., Niculescu, S.I., Morarescu, C.I., Gu, K.: On the fragility of pi controllers for time-delay siso systems. In: 2008 16th Mediterranean Conference on Control and Automation, pp. 529–534 (2008). DOI 10.1109/MED.2008.4602063
- [37] Mian, A.A., Wang, D.: Modeling and backstepping-based nonlinear control strategy for a 6 dof quadrotor helicopter. *Chinese Journal of Aeronautics* **21**(3), 261–268 (2008). DOI 10.1016/S1000-9361(08)60034-5. URL [https://doi.org/10.1016/S1000-9361\(08\)60034-5](https://doi.org/10.1016/S1000-9361(08)60034-5)
- [38] Michiels, W., Niculescu, S.I.: *Stability, Control, and Computation for Time-Delay Systems: An Eigenvalue-Based Approach*. SIAM (2014)
- [39] Müller, M., Lupashin, S., D’Andrea, R.: Quadrocopter ball juggling. In: 2011 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2011), pp. 5113–5120. IEEE, San Francisco, CA, USA (2011). DOI 10.1109/IROS.2011.6094506. URL <https://doi.org/10.1109/IROS.2011.6094506>. 25–30 September 2011
- [40] Nieto-Hernández, D., Escareno, J.A., Méndez-Barrios, F., Boussaada, I., Langarica-Córdoba, D.: Modeling and control of an interactive tilt-rotor mav. In: RED-UAS 2017 - 4th International Workshop on Research, Education and Development on Unmanned Aerial Systems, pp. 270–275. IEEE (2017)
- [41] Nieto-Hernández, D., Méndez-Barrios, C.F., Escareno, J., Ramírez-Rivera, V., Torres, L., Méndez-Azúa, H.: Non-holonomic flight modeling and control of a tilt-rotor mav. In: 2019 6th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT), pp. 1947–1952 (2019)
- [42] Nonami, K., Kendoul, F., Suzuki, S., Wang, W., Nakazawa, D.: *Autonomous Flying Robots: Unmanned Aerial Vehicles and Micro Aerial Vehicles*, 1 edn. Springer Tokyo, Tokyo, Japan (2010). DOI 10.1007/978-4-431-53856-1. EBook ISBN 978-4-431-53856-1 (Published: 15 September 2010); Hardcover ISBN 978-4-431-53855-4
- [43] Ogata, K.: *Ingeniería de Control Moderna*, 3ra edn. Prentice Hall, Madrid, España (1998)

-
- [44] Organización de Aviación Civil Internacional (OACI), Montréal, QC, Canada: Anexo 1 al Convenio sobre Aviación Civil Internacional: Licencias al personal, 10 edn. (2006)
- [45] Pounds, P., Mahony, R., Corke, P.: Modelling and control of a large quadrotor robot. *Control Engineering Practice* **18**(7), 691–699 (2010). DOI 10.1016/j.conengprac.2010.02.008. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967066110000456>
- [46] Quan, Q.: *Introduction to Multicopter Design and Control*. Springer (2017)
- [47] Raffo, G.V., Ortega, M.G., Rubio, F.R.: An integral predictive/nonlinear h_∞ control structure for a quadrotor helicopter. *Automatica* **46**(1), 29–39 (2010). DOI 10.1016/j.automatica.2009.10.018. URL <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2009.10.018>
- [48] Ryll, M., Bühlhoff, H.H., Giordano, P.R.: A novel overactuated quadrotor unmanned aerial vehicle: Modeling, control, and experimental validation. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **23**(2), 540–556 (2015)
- [49] Sanchez-Orta, A., Escareno, J., Garcia Salazar, O., Lozano, R.: *Autonomous hovering of a noncyclic tiltrotor uav: Modeling, control and implementation* (2008)
- [50] Sanz, R., Ródenas, L., García, P., Castillo, P.: Improving attitude estimation using inertial sensors for quadrotor control systems. In: *2014 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pp. 895–901. IEEE, Orlando, FL, USA (2014). DOI 10.1109/ICUAS.2014.6842338. 27–30 May 2014
- [51] Siciliano, B., Khatib, O. (eds.): *Handbook of Robotics*, 1 edn. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg (2008). DOI 10.1007/978-3-540-30301-5
- [52] Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., Oriolo, G.: *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Springer, London (2009). DOI 10.1007/978-1-84628-642-1. URL <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-84628-642-1>. EBook ISBN: 978-1-84628-642-1
- [53] Sinopoli, B., Schenato, L., Franceschetti, M., Poolla, K., Jordan, M.I., Sastry, S.S.: Kalman filtering with intermittent observations. *IEEE Transactions on Automatic Control* **49**(9), 1453–1464 (2004). DOI 10.1109/TAC.2004.834121. URL <https://doi.org/10.1109/TAC.2004.834121>
- [54] Sipahi, R., Niculescu, S.I., Abdallah, C., Michiels, W., Gu, K.: Stability and stabilization of systems with time delay. *Control Systems, IEEE* **31**, 38 – 65 (2011). DOI 10.1109/MCS.2010.939135
- [55] Sipahi, R., Niculescu, S.i., Abdallah, C.T., Michiels, W., Gu, K.: Stability and stabilization of systems with time delay. *IEEE Control Systems Magazine* **31**(1), 38–65 (2011)

- [56] Steed, E., Quesada, E., Rodolfo, L., Carrillo, G., Ramírez, A., Mondié, S.: Algebraic dominant pole placement methodology for unmanned aircraft systems with time delay. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **52**(3), 1108–1119 (2016)
- [57] The MathWorks, I.: Optimization toolbox version: 9.4 (R2022b) (2022). URL <https://www.mathworks.com>
- [58] Wang, Z., Li, J., Duan, D.: Manipulation strategy of tilt quad rotor based on active disturbance rejection control. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering* **234**(3), 573–584 (2020)
- [59] Yu, P., Wang, Z., Wong, K.: Exploring aerial perching and grasping with dual symmetric manipulators and compliant end-effectors. *International Journal of Micro Air Vehicles* **11**, 1756829319877416 (2019)
- [60] Zhao, M., Anzai, T., Shi, F., Chen, X., Okada, K., Inaba, M.: Design, modeling, and control of an aerial robot dragon. *IEEE Robotics and Automation Letters* **3**(2), 1176–1183 (2018)
- [61] Zhao, M., Kawasaki, K., Anzai, T., Chen, X., Noda, S., Shi, F., Okada, K., Inaba, M.: Transformable multirotor with two-dimensional multilinks: Modeling, control, and whole-body aerial manipulation. *The International Journal of Robotics Research* **37**(9), 1085–1112 (2018)
- [62] Zhu, J., Zhu, J., Xu, C.: A simultaneous trajectory generation method for quadcopter intercepting ground mobile vehicle. *International Journal of Advanced Robotic Systems* **14**(4), 1–11 (2017). DOI 10.1177/1729881417717702