



Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Facultad de Ingeniería

**Centro de Investigación y Estudios de
Posgrado**

Título de la tesis

**Modelado y Control de un Quad-Rotor de
Tipo Basculante. Un Enfoque Basado en
Retardos**

Que para obtener el grado de:

Doctorado en Ingeniería Eléctrica

Presenta:

M.I. David Nieto Hernández

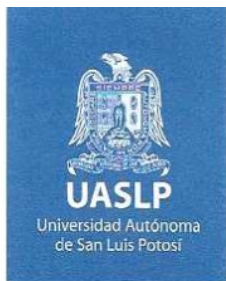
Asesor:

**Dr. César Fernando Francisco Méndez
Barrios**

San Luis Potosí, S. L. P.

Diciembre de 2025





5 de diciembre de 2024

**M.I. DAVID NIETO HERNÁNDEZ
P R E S E N T E.**

En atención a su solicitud de Temario, presentada por el **Dr. César Fernando Francisco Méndez Barrios**, Asesor de la Tesis que desarrollará Usted con el objeto de obtener el Grado de **Doctor en Ingeniería Eléctrica**, me es grato comunicarle que en la sesión del H. Consejo Técnico Consultivo celebrada el día 5 de diciembre del presente año, fue aprobado el Temario propuesto:

TEMARIO:

“Modelado y Control de un Quad-Rotor de Tipo Basculante. Un Enfoque Basado en Retardos”

1. Introducción.
2. Fundamentos Teóricos y Metodológicos.
3. Modelado Dinámico de Aeronave Tilt-Rotor en Vuelo No Holonómico.
4. Diseño y Análisis de Controladores Retardados y Observadores No Lineales.
5. Resultados Numéricos.
6. Conclusiones.

Anexos.

Referencias.

“MODOS ET CUNCTARUM RERUM MENSURAS AUDEBO”

ATENTAMENTE


DR. EMILIO JORGE GONZÁLEZ GALVÁN
DIRECTOR
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE SAN LUIS POTOSÍ
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIRECCION

Copia. Archivo.
*etn.

www.uaslp.mx

Av. Manuel Nava 8
Zona Universitaria • CP 78290
San Luis Potosí, S.L.P.
tel. (444) 826 2330 al39
fax (444) 826 2336

“UASLP, con profesionistas abiertos al mundo”



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ
FACULTAD DE INGENIERÍA
Área de Investigación y Estudios de Posgrado

D E C L A R A C I Ó N

El presente trabajo que lleva por título:

Modelado y Control de un Quad-Rotor de Tipo Basculante. Un Enfoque Basado en Retardos

se realizó en el periodo **septiembre de 2019** a **julio de 2025** bajo la dirección del Dr. **César Fernando Francisco Méndez Barrios**.

Originalidad

Por este medio aseguro que he realizado el trabajo reportado, y la escritura de este documento de tesis para fines académicos sin ayuda indebida de terceros y sin utilizar otros medios más que los indicados.

Las referencias e información tomadas directa o indirectamente de otras fuentes se han definido en el texto como tales y se ha dado el debido crédito a las mismas.

El autor exime a la UASLP de las opiniones vertidas en este trabajo escrito y asume la responsabilidad total del mismo.

Este trabajo no ha sido sometido como tesis o trabajo terminal a ninguna otra institución nacional o internacional en forma parcial o total, exceptuando el caso cuando existe un convenio específico de doble titulación celebrado entre ambas instituciones.

Se autoriza a la UASLP para que divulgue este documento para fines académicos.

El autor del trabajo escrito, **David Nieto Hernández**.

Agradecimientos

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas e instituciones que hicieron posible la realización de esta tesis doctoral.

En primer lugar, agradezco profundamente a mi director de tesis, Dr. César Fernando Francisco Méndez Barrios, por su orientación constante, su rigor académico y su invaluable apoyo durante el desarrollo de esta investigación. Su experiencia y compromiso fueron fundamentales para la consolidación de este trabajo.

Extiendo mi agradecimiento a los miembros del comité tutorial y del jurado de esta tesis, Dr. Emilio Jorge González Galván, Dr. Miguel, Dr. Miguel Ángel Lastras Montañó Dr. Juan Antonio Cárdenas Galindo, Dr. Víctor Manuel Ramírez Rivera y Dra. Elvia Ruth Palacios Hernández, por sus valiosas observaciones, comentarios críticos y sugerencias, las cuales contribuyeron de manera significativa a mejorar la calidad del manuscrito.

Agradezco a la Facultad de Ingeniería y el Centro de Investigación y Estudios de Posgrado de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí por brindarme el espacio académico y los recursos necesarios para llevar a cabo este doctorado. Asimismo, reconozco el apoyo financiero otorgado por CONACYT, el cual fue esencial para la realización de esta investigación.

De manera especial, agradezco a mi familia por su apoyo incondicional, paciencia y confianza a lo largo de esta etapa. Su respaldo fue un pilar fundamental durante todo este proceso.

Finalmente, agradezco a todas aquellas personas que, de manera directa o indirecta, contribuyeron a la culminación de este trabajo.

Índice general

1. Introducción	1
1. Planteamiento del problema	10
2. Objetivos	12
3. Hipótesis	13
4. Metodología	14
5. Productos obtenidos	16
6. Outline	16
2. Fundamentos Teóricos y Metodológicos	19
1. Modelado de aeronaves	20
2. Formalismo de Euler Lagrange	21
3. Vuelo no holónomico	27
4. Estabilidad	28
5. Cuasi polinomios	33
6. Controladores retardados	35
7. Enfoque Geométrico para el Análisis de Estabilidad	38
8. Curvas de Cruce	40
9. Observador no lineal de perturbaciones	41
3. Modelado Dinámico de Aeronave Tilt-Rotor en Vuelo No Holonómico	45
1. Vuelo no holónomico	46
2. Coordenadas generalizadas y entradas de control	48
3. Modelo dinámico mediante el enfoque de Euler-Lagrange	49
4. Diseño y Análisis de Controladores Retardados y Observadores No Lineales	57
1. El Controlador $P\delta$	58
2. El Controlador $P\delta I$	63
3. Observador no lineal de perturbaciones	67
5. Resultados Numéricos	73
1. Evaluación del Desempeño del Controlador $P\delta$	74
2. Análisis del Controlador $P\delta I$	87
3. Mitigación de Perturbaciones en el Controlador $P\delta$	93

4.	Mitigación de Perturbaciones en el Controlador $P\delta I$	98
6.	Conclusiones	101
1.	Trabajo Futuro	102

Índice de figuras

2.1. Estabilidad.	29
2.2. Estabilidad asintótica.	30
2.3. Estabilidad Exponencial	31
2.4. Estabilidad de Lyapunov	32
2.5. σ -estabilidad: Representación gráfica	39
3.1. Configuración de rotores para movimiento en Yaw	46
3.2. Vuelo no holonómico de la aeronave.	46
3.3. Fuerzas ejercidas sobre el UAV de rotores basculantes.	50
4.1. Esquema de control basado en retardo.	72
5.1. Regiones de estabilidad.	74
5.2. Principales regiones de σ -estabilidad.	75
5.3. Respuesta para distintas elecciones de σ en la sintonización del controlador.	77
5.4. Variaciones de las entradas de control para distintos valores de σ	78
5.5. Ganancias seleccionadas de acuerdo al valor de σ en las regiones de estabilidad.	80
5.6. Estados para distintas elecciones de σ en la sintonización del controlador.	81
5.7. Variaciones de las entradas de control para los distintos valores de σ	82
5.8. Respuesta del sistema ante la trayectoria circular.	83
5.9. Respuesta del sistema ante la trayectoria tipo flor.	83
5.10. Estados del sistema en trayectoria circular.	85
5.11. Errores de los estados del sistema en trayectoria circular.	86
5.12. Entradas de control para la trayectoria circular.	87
5.13. Respuesta del sistema ante la trayectoria tipo flor.	88
5.14. Entradas de control para la trayectoria tipo flor.	89
5.15. Regiones de estabilidad (k_p, k_i, τ) donde $\ell = 1, 2, \dots, 6$	89
5.16. Regiones de estabilidad (k_p, k_i) donde $0 < \sigma < 9$ y $\tau = 0,1 s$	90
5.17. Seguimiento de la trayectoria circular de la aeronave.	92
5.18. Estados de la aeronave durante el seguimiento de la trayectoria circular.	93
5.19. Errores de los estados de la aeronave durante el seguimiento de la trayectoria circular.	94

5.20. Entradas de control de la aeronave durante el seguimiento de la trayectoria circular.	95
5.21. Perturbaciones para la trayectoria circular.	96
5.22. Perturbaciones para la trayectoria tipo flor.	97
5.23. Perturbaciones aplicadas a la aeronave durante el seguimiento de la trayectoria circular.	99
5.24. Errores en la observación de la perturbación aplicada a la aeronave durante el seguimiento de la trayectoria circular.	100

Índice de Tablas

5.1. Parámetros de la aeronave.	73
5.2. Parámetros del controlador $P\delta$ y del NDO.	81
5.3. Parámetros del controlador $P\delta I$ y del NDO.	91
5.4. Índices de desempeño	98

Notación

Notación	Descripción
$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$	Conjunto de los números naturales.
$\mathbb{R}^n$	Dominio de los números reales en n dimensiones.
$\mathbb{R}_+$	Conjunto de los valores reales positivos.
$\mathbb{C}$	Conjunto de los números complejos.
$i := \sqrt{-1}$	Unidad imaginaria.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Producto interno entre dos vectores.
$span(\cdot)$	Conjunto de todas las combinaciones lineales posibles entre vectores dados.
$\perp$	Indica ortogonalidad entre vectores.
$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$	Corchete de Lie entre dos campos vectoriales f y g en una variedad suave.
$\ \cdot \ $	Norma matricial.
$card(\cdot)$	Cardinalidad: número de soluciones de un polinomio o cuasipolinomio en un dominio de tiempo dado.
q	Coordenadas generalizadas
$sign(x)$	Para $x \in \mathbb{R}$, $sign(x) \in \{-1, 0, 1\}$ representa el signo de x
LHP	Semi plano izquierdo
RHP	Semi plano derecho
A^T	Transpuesta de la matriz A
$\nabla(A)$	Gradiente de A

CAPÍTULO 1

Introducción

La movilidad aérea urbana o Urban Air Mobility (UAM) en inglés, es una área de investigación que ha atraído la atención de diversos sectores de la ingeniería en los últimos años, especialmente en el campo del transporte inteligente. Este concepto se refiere al uso de vehículos aéreos, como drones, aeronaves eléctricas de despegue y aterrizaje vertical (eVTOL, por sus siglas en inglés) y sistemas autónomos o pilotados de manera remota, cuyo propósito es facilitar el traslado de personas y/o mercancías dentro de zonas urbanas congestionadas. La UAM busca ofrecer una alternativa de transporte rápida, flexible, eficiente y sostenible que complemente o sustituya los desplazamientos terrestres en entornos metropolitanos muy transitados.

La movilidad aérea urbana se alinea con los principios establecidos en los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) de las Naciones Unidas (para mayor detalle, véase [1]), en particular con el ODS 11, que promueve la creación de ciudades y comunidades sostenibles. Si se logra incorporar vehículos eléctricos autónomos en entornos urbanos, se puede contribuir a la reducción de emisiones contaminantes, a la mejora de la eficiencia del transporte y al incremento de la seguridad vial, siempre y cuando su implementación sea planificada y tutelada con cuidado, siendo la regulación un problema a resolver.

Al integrar estos vehículos en la infraestructura urbana, se espera reducir los tiempos de traslado (hasta en un 30–50 % en trayectos punto a punto), además de contribuir a la disminución de emisiones contaminantes y aliviar la saturación vial. Es por eso que la UAM busca utilizar las tecnologías más recientes y amigables con el medio ambiente como motores eléctricos de última generación para propulsión eléctrica, computadoras de vuelo de última generación para el control de vuelo y diseño aerodinámico compacto. Estas aeronaves tienen la ventaja de que operan en

el espacio aéreo inferior al del tráfico comercial y no dependen de redes viales, lo que les permite realizar trayectos directos entre nodos urbanos mediante operaciones VTOL, sin la necesidad de pistas tradicionales [2].

Sin embargo, el impacto positivo de estas tecnologías depende de su integración efectiva con el transporte público, el uso de energías renovables y la existencia de políticas urbanas que prioricen el transporte colectivo sobre el individual. De no establecerse estos lineamientos, existe el riesgo de fomentar la individualización del transporte, el aumento del tráfico aéreo y un posible incremento en las emisiones totales, incluso con flotas eléctricas [3]. Por lo tanto, la contribución de la movilidad autónoma al desarrollo sostenible requiere una planeación bien organizada entre tecnología, planificación urbana y regulación efectiva.

A pesar de su alto potencial transformador, la movilidad aérea urbana enfrenta importantes retos tecnológicos, normativos y sociales. Entre los desafíos más relevantes se encuentran la necesidad de garantizar la seguridad de las operaciones en entornos urbanos densos, el diseño de sistemas robustos de control de tráfico aéreo a baja altitud, la certificación de aeronaves y pilotos en nuevas categorías, así como la aceptación social frente a preocupaciones relacionadas con el ruido y la privacidad. Además, la infraestructura urbana actual aún no cuenta con una red de vertipuertos ni con modelos de negocio validados, lo que implica la necesidad de desarrollar soluciones escalables y sostenibles tanto desde el punto de vista técnico como económico.

Una característica de la movilidad aérea urbana es la diversidad tecnológica de los vehículos aéreos empleados para operar en entornos urbanos, los cuales están diseñados para satisfacer las demandas del transporte moderno, como el traslado de pasajeros, la entrega de mercancías y la atención de emergencias, todo ello con una infraestructura menor en comparación con los sistemas tradicionales. Estos sistemas comprenden aeronaves pequeñas que pueden ser controladas por pilotos humanos, operadas de manera remota o autónoma. Dentro de sus aplicaciones actuales y futuras se encuentran aerotaxis, entrega de paquetería, atención médica de emergencia, vigilancia urbana y soporte logístico en situaciones críticas, integrándose en una red multimodal que contempla la creación de "vertipuertos"[4], corredores aéreos urbanos y sistemas de gestión del espacio aéreo urbano (UTM, Urban Traffic Management) [5].

Entre los principales vehículos empleados en la UAM se encuentran las aeronaves eléctricas de despegue y aterrizaje vertical, los vehículos aéreos no tripulados (UAVs o drones), los vehículos aéreos personales (PAVs) y otros sistemas de despegue y

aterrizaje vertical o corto (V/STOL). Las aeronaves eVTOL representan una de las soluciones más prometedoras para el transporte de pasajeros en zonas urbanas densas, al ofrecer despegue y aterrizaje en espacios reducidos, operar con propulsión eléctrica y presentar configuraciones variadas como multirrotores, tilt-rotor y alas fijas híbridas. Algunos ejemplos actuales son modelos como el VoloCity, Lilium Jet, CityAirbus NextGen y Joby Aviation.

Por su parte, los drones o UAVs se utilizan para tareas de logística, como la entrega de paquetes o alimentos, así como en vigilancia, monitoreo ambiental y respuesta a desastres [6]. Estas aeronaves operan de forma remota o autónoma y permiten intervenciones rápidas en zonas con acceso terrestre limitado. Los vehículos aéreos personales, también conocidos como “autos voladores”, están orientados a una movilidad individual o compartida, mientras que los V/STOL extienden las posibilidades de despegue en espacios urbanos con infraestructura restringida.

Cada una de estas clases de vehículos responde a un conjunto de aplicaciones urbanas específicas. Los eVTOL se perfilan como la opción más viable para taxis aéreos y transporte rápido de personas; los UAVs se especializan en logística urbana; los PAVs apuntan hacia soluciones de movilidad personal; y los V/STOL complementan las operaciones multimodales con despegues eficientes en áreas reducidas. Esta segmentación tecnológica no solo maximiza la funcionalidad del sistema UAM, sino que también permite una implementación escalonada adaptada a la infraestructura existente.

Estos sistemas aéreos son el elemento técnico más importante de la movilidad aérea urbana, ya que serán una forma de transporte ágil y menos contaminante. A su vez, su interconexión con sistemas inteligentes de transporte y redes de vertipuertos estratégicamente ubicados hacen posible desarrollar esquemas de conectividad multimodal más eficientes. En este sentido, la movilidad aérea urbana pone de manifiesto no solo un avance tecnológico sino una propuesta de transformación de la planificación y gestión de las ciudades inteligentes futuras.

En la actualidad, diversas empresas como Joby Aviation, Volocopter (rescatada de la quiebra [7]), Lilium (quebrada en Alemania [8]) y EHang lideran el desarrollo de prototipos funcionales que buscan satisfacer los requerimientos técnicos y operativos para la implementación de UAM. Al mismo tiempo, ciudades como Dubái, París, Los Ángeles y Seúl han establecido proyectos piloto que consideran la planificación de corredores aéreos, estaciones de recarga eléctrica y mecanismos de integración con el transporte público terrestre. Estas iniciativas son evidencia del interés global por posicionar a la movilidad aérea urbana como un componente clave en la construcción

de ciudades inteligentes frente a los retos del crecimiento urbano.

Los beneficios asociados al uso de eVTOLs abarca desde lo técnico, ambiental y funcional. Desde el punto de vista de la sostenibilidad, su propulsión eléctrica disminuye las emisiones contaminantes y los niveles de ruido en comparación con aeronaves convencionales como los helicópteros. Esta cualidad los posiciona como una opción más respetuosa con el entorno urbano y compatible con los objetivos de reducción de la huella de carbono. Además, su flexibilidad operativa permite cubrir distintas aplicaciones, que incluyen el transporte de pasajeros, la entrega de mercancías, servicios médicos de emergencia, vigilancia y operaciones de respuesta rápida. La capacidad de acceder a zonas suburbanas o de difícil conectividad amplía aún más su espectro de utilidad dentro del ámbito urbano.

No obstante, el despliegue masivo de eVTOLs enfrenta importantes retos. En el ámbito tecnológico, existen desafíos en cuanto a la autonomía energética, la fiabilidad de los sistemas de propulsión, la gestión térmica de baterías y el diseño de arquitecturas de control tolerantes a fallos. Estos elementos son fundamentales para garantizar la seguridad operacional y la viabilidad económica de los servicios aéreos urbanos. La necesidad de infraestructura especializada requiere una planificación urbana coordinada, así como inversiones significativas en redes eléctricas y sistemas de supervisión [9].

Considerando las regulaciones legislativas, la ausencia de marcos normativos específicos para este tipo de aeronaves representa un obstáculo. La certificación aeronáutica, la validación de rutas aéreas urbanas, y los protocolos de seguridad requieren una adecuada legislación en México que contemple las particularidades del entorno urbano y la interacción con otros modos de transporte. A ello se suma la aceptación social: factores como la percepción de riesgo, el nivel de ruido, la privacidad y la accesibilidad del servicio condicionan su adopción por parte del público general. Encuestas recientes revelan que apenas un tercio de la población europea se muestra dispuesta a utilizar taxis aéreos, mostrando la necesidad de estrategias de comunicación, educación y participación ciudadana en el desarrollo de estos sistemas.

Así como los eVTOL representan una de las soluciones más prometedoras en el ámbito de la movilidad aérea urbana, también enfrentan desafíos técnicos significativos que han sido objeto de atención por parte de organismos regulatorios como la Administración Federal de Aviación (FAA) y la Junta Nacional de Seguridad del Transporte (NTSB) en los Estados Unidos. Uno de los aspectos más importantes en la operación de estos vehículos es la fase de transición entre el vuelo vertical y el vuelo horizontal. Esta maniobra, correspondiente a la configuración VTOL, presenta

complejidades dinámicas que afectan la estabilidad, la fiabilidad de los sistemas de control, y la integridad estructural del sistema propulsivo.

Los reportes emitidos por la FAA y la NTSB han documentado incidentes relevantes que reflejan la vulnerabilidad de los eVTOL durante esta transición. Un primer caso es el accidente ocurrido el 16 de febrero de 2022 en Jolon, California, durante una prueba de alta velocidad de la aeronave experimental Joby JAS4-2 [10]. El siniestro fue causado por la separación de una pala del rotor en la unidad inboard del ala derecha durante la transición a vuelo nivelado. Este evento provocó fallas en cascada en múltiples unidades de propulsión y la pérdida total de control remoto. Investigaciones posteriores revelaron anomalías en el sistema de actuadores del tilt-rotor, que generaron un ángulo de inclinación de los rotores superior al comandado, propiciando condiciones aerodinámicas no calculadas que desencadenaron el colapso estructural.

Otros eventos, como el accidente del prototipo Boeing Passenger Air Vehicle (PAV) en 2019 [11], revelaron problemas asociados a vibraciones resonantes que activaron de manera errónea modos de operación terrestre en pleno vuelo, resultando en la pérdida de sustentación. Asimismo, la aeronave Kitty Hawk Heaviside 2 [12] presentó un fallo en el sistema de control vinculado a un error de temporización de software, lo que redujo la autoridad de control en vuelo y causó un aterrizaje forzoso con daños estructurales. El más reciente, el caso del prototipo VX4 de Vertical Aerospace [13] sufrió un fallo en el propulsor durante una prueba de maniobrabilidad, incidente que llevó a una reevaluación del diseño y a la implementación de mejoras posteriores.

El análisis de estos accidentes ha permitido identificar patrones recurrentes de fallos en los sistemas de propulsión, lógica de control y redundancia operacional. Entre las lecciones obtenidas destacan la necesidad de controles redundantes, pruebas rigurosas en vuelos no tripulados y marcos normativos en constante evolución que contemplen los riesgos específicos de la transición aérea. Tanto la FAA como la Agencia de Seguridad Aérea de la Unión Europea (EASA) han reconocido esta fase como un punto crítico en los procesos de certificación, exigiendo evaluaciones funcionales de riesgo (Functional Hazard Assessments, FHA) con énfasis en fallos de control y estrategias de emergencia [14].

Así, el desarrollo de eVTOL seguros y fiables requiere no solo avances en la tecnología de baterías y propulsión, sino también una coordinación efectiva entre actores industriales, autoridades reguladoras y usuarios finales [15]. La viabilidad de la movilidad aérea urbana, y en particular su alineación con los Objetivos de Desarrollo Sostenible, dependerá en gran medida de la capacidad del sector para superar los retos estructurales, regulatorios y sociales que aún persisten en el diseño y operación

de estos sistemas aéreos avanzados [16].

Como se ha mencionado anteriormente, uno de los desafíos técnicos más complejos en la operación segura de aeronaves eVTOL es la transición entre el vuelo vertical y horizontal [17]. Esta fase implica un cambio en la configuración aerodinámica del vehículo, donde se pasa de una sustentación generada por rotores (como en los helicópteros) a un vuelo sustentado por superficies alares. Aunque este proceso ocurre de manera continua, introduce una dinámica altamente no lineal, con interacciones aerodinámicas que desafían los enfoques convencionales de control. Los problemas generados por este cambio de configuración requieren algoritmos de control capaces de gestionar la complejidad inherente y de garantizar la estabilidad en presencia de perturbaciones, fallos parciales o condiciones imprevistas. Por esta razón, dicha fase ha sido objeto de especial atención tanto en la investigación académica como en los marcos de certificación propuestos por las autoridades aeronáuticas.

Durante la transición, las fuerzas de sustentación, empuje y momento sufren variaciones que dependen de la inclinación de los rotores. En el caso de plataformas multirrotor o que incorporen mecanismos de ala basculante (tilt-wing/tilt-rotor), se han observado efectos de interferencia aerodinámica entre componentes, que pueden reducir la eficiencia en la propulsión y generar comportamientos inestables si no son compensados de manera adecuada.

Además, la saturación de actuadores, como servomotores o unidades de potencia eléctrica, puede limitar la capacidad del controlador para responder ante maniobras exigentes o perturbaciones, lo cual incrementa el riesgo de pérdida de control. Esta limitación se agrava si no se mantiene una gestión precisa del centro de gravedad y del ángulo de inclinación de los elementos de propulsión, condiciones que pueden precipitar fenómenos como el “stall” aerodinámico o la pérdida de empuje simétrico.

Ante estos desafíos, el diseño de un controlador robusto [18], adaptable [19] y energéticamente eficiente [20] es importante para garantizar la seguridad y el rendimiento de los eVTOLs durante la transición. Así, los enfoques de control, que integran técnicas no lineales, así como esquemas de control robusto, se presentan como alternativas prometedoras. Estos controladores permiten compensar incertidumbres de modelado, mejorar el seguimiento de trayectorias y mantener el comportamiento del sistema dentro de márgenes seguros aún en presencia de perturbaciones externas o errores estructurales.

Estos desarrollos en control muestran el potencial de las técnicas modernas para optimizar la gestión energética y la estabilidad durante fases críticas del vuelo. No obstante, incluso con dichas mejoras, persisten desafíos significativos en situaciones

específicas como los ascensos acompañados de rotaciones en yaw. En estos escenarios, la capacidad del sistema de control para redistribuir adecuadamente el cambio de velocidades en los rotores sin comprometer la sustentación se vuelve el factor más importante, especialmente cuando se opera cerca de los límites de saturación de los actuadores. La integración de enfoques no lineales no solo permite afrontar mejor estas condiciones extremas, sino que también resalta la necesidad de diseñar algoritmos que consideren la interacción entre las señales de control para preservar tanto la seguridad como la eficiencia del vuelo, elementos indispensables para el éxito de la movilidad aérea urbana en entornos reales.

Por lo tanto el problema que se presenta cuando se realiza un ascenso simultáneo con una rotación en yaw es en la generación y distribución de la fuerza de sustentación. La rotación yaw se logra mediante un desequilibrio de par entre los rotores, para lo cual se deben realizar ajustes en el empuje generado por cada uno de los motores. Esta redistribución del empuje puede provocar una reducción transitoria en la fuerza neta ascendente disponible, especialmente cuando los actuadores se encuentran próximos a sus límites operativos. Esta condición se presenta de manera más clara durante maniobras agresivas o de alta velocidad, en las que el sistema de control debe priorizar entre mantener la altitud deseada o alcanzar la velocidad de giro especificada, lo que puede comprometer la precisión del seguimiento de trayectoria o incluso inducir pérdidas temporales de altitud [21].

En estas circunstancias, la saturación de actuadores representa un factor limitante. Si los motores alcanzan su máxima capacidad de empuje, el sistema no podrá satisfacer simultáneamente las demandas de elevación y control de yaw, comprometiendo la estabilidad del vuelo. En los últimos años se han desarrollado algoritmos avanzados de mezcla de empuje y estrategias de control que permiten una gestión más eficiente de esta dualidad, optimizando la asignación de fuerzas para estabilización y seguimiento de trayectorias, siguen existiendo compromisos inherentes entre precisión, estabilidad y consumo energético. Por eso es importante diseñar esquemas de control o modelados que ayuden a contrarrestar los efectos negativos de la rotación en yaw mientras se eleva la aeronave [22].

Diversas estrategias de control han sido propuestas para hacer frente a los retos que plantea el ascenso simultáneo con rotación en yaw. Entre las técnicas más destacadas se encuentran el Backstepping, el Control por Modo Deslizante (SMC) y el Control Predictivo Basado en Modelo (MPC), las cuales han demostrado ser eficaces para gestionar no linealidades y perturbaciones externas durante cambios rápidos en la dinámica del vuelo [23]. En particular, los enfoques no lineales como el backstepping

o sliding mode, han mostrado gran robustez frente a incertidumbres en el modelo, perturbaciones y limitaciones en los actuadores, logrando incluso convergencia en tiempo finito y seguimiento preciso de trayectorias [24, 25].

Por su parte, el control $\mathcal{H}_\infty$ [26] ha sido empleado por su capacidad para garantizar estabilidad robusta ante errores de modelado y perturbaciones no estructuradas, aunque su aplicación práctica en eVTOL ha sido menos frecuente en comparación con enfoques de backstepping o modos deslizantes. En contraste, el control predictivo basado en modelo ha ganado atención por su habilidad para gestionar restricciones multivariables y optimizar el desempeño del sistema en tiempo real. No obstante, su implementación puede resultar computacionalmente exigente, lo que limita su aplicabilidad en plataformas con recursos limitados [27].

Como se ha mencionado, diversas estrategias de control adaptativo y robusto han sido implementadas en el control de vehículos aéreos. Sin embargo, existe un área de oportunidad en el desarrollo de controladores no lineales y aquellos basados en retardos, los cuales pueden ofrecer ventajas para garantizar un seguimiento preciso de trayectorias, facilitar transiciones de vuelo eficientes y mitigar problemas asociados al despegue con rotación en yaw.

Los controladores no lineales han sido aplicados extensamente, especialmente en este tipo de sistemas aéreos. Estos controladores usualmente dependen de la velocidad como un estado conocido o fácilmente medible; sin embargo, el uso de sensores de velocidad puede presentar desafíos debido a su costo o a su posible sustitución mediante observadores. En consecuencia, los diseñadores de controladores se enfrentan a una decisión crucial: destinar más recursos de procesamiento computacional o aumentar el presupuesto para sensores costosos. Con el fin de atender estos problemas, diversos investigadores han propuesto soluciones innovadoras, como se muestra en [28]. Dentro de este contexto, se ha aplicado un filtro de “diferenciación aproximada” ampliamente utilizado para calcular la derivada en un controlador PI^2D . El objetivo es mitigar los efectos negativos asociados con el cálculo e implementación de la derivada, aliviando de esta forma algunos de los retos que conlleva el no tener sensores para la medición de la velocidad en sistemas de control no lineal.

Al mismo tiempo, los controladores basados en retardos representan un esquema novedoso para abordar la sustitución de la derivada temporal. En un estudio reciente, [29] propone el uso de un controlador tipo PD con un operador de diferencia retardada como estimador del término derivativo. Por su parte, [30] desarrolla una herramienta que permite encontrar las ganancias del controlador Proporcional-Derivativo basado en retardo que garantizan la estabilidad del sistema cuando se cuenta con retro-

alimentación. Además, en [31] se introduce un método para diseñar controladores funcionales fraccionarios para sistemas invariantes en el tiempo de orden fraccionario con retardo constante, considerando sistemas de entrada única y salida única (SISO).

Los métodos de control basados en retardo para vehículos aéreos no tripulados (UAVs) han tenido avances importantes, particularmente en lo relacionado con el seguimiento de trayectorias y la estabilidad del control. En [32] se presenta un algoritmo predictivo basado en modelo que mitiga los efectos adversos de los retardos temporales mediante predicción de estados, logrando estabilizar el UAV al predecir estados futuros a partir de un modelo de referencia. Si bien este enfoque demuestra robustez, se basa en la suposición de linealidad del sistema, lo cual puede no representar adecuadamente la dinámica no lineal y variante en el tiempo de los UAVs. De manera complementaria, en [33] se lleva a cabo un análisis paramétrico de controladores PID diseñados para control basado en retardo, demostrando que, con una sintonización cuidadosa, estos controladores pueden lograr un seguimiento confiable de trayectorias a pesar de los retardos y las incertidumbres del sistema. No obstante, el desempeño de estos controladores es altamente sensible a las fluctuaciones en el retardo y en los parámetros del sistema, lo cual introduce el riesgo de obtener un pobre rendimiento. Para afrontar estos desafíos, el estudio sugiere adoptar métodos de sintonización adaptativa, estrategias de control predictivo y técnicas robustas de optimización con el objetivo de mejorar la confiabilidad y estabilidad de los controladores basados en retardo en aplicaciones reales de UAVs.

La importancia de la robustez en la interacción de aeronaves no puede ser tomada a la ligera, particularmente al enfrentarse a fuerzas desconocidas originadas por tareas de manipulación, sensado, ambientes no explorados u otros factores impredecibles. Como resultado, se han propuesto diversas soluciones orientadas a mejorar la robustez de los UAVs. Por ejemplo, en [34] se presenta un esquema de control de altitud basado en control activo de rechazo de perturbaciones para tareas de manipulación. Adicionalmente, [35] emplea un controlador robusto $\mathcal{H}_\infty$ para lograr el desempeño deseado en un cuadricóptero tipo tilt-rotor. Asimismo, en el contexto del transporte mediante cargas suspendidas, [36] introduce un controlador adaptativo robusto e innovador diseñado para una aeronave tilt-rotor de tipo MAV. En este sentido, en [37] se ha propuesto un observador de Inmersión e Invarianza con el fin de rechazar eficazmente las perturbaciones generadas por la tarea de sensado. Estos esfuerzos de investigación subrayan la relevancia de la robustez en aplicaciones de UAVs y ofrecen soluciones valiosas para enfrentar los desafíos impuestos por entornos inciertos y tareas que implican interacciones complejas.

Asimismo, se han incorporado observadores de perturbaciones como herramienta complementaria para mejorar la robustez frente a fuerzas desconocidas o condiciones sensoriales adversas, como entornos sin GPS. Métodos como la Estimación de Incertidumbres y Perturbaciones (UDE por sus siglas en inglés) han sido implementados con éxito para compensar entradas no afines, subactuación y errores de modelado, mostrando resultados prometedores en pruebas de vuelo reales [38]. De forma análoga, estudios recientes han integrado observadores no lineales y estrategias tipo backstepping para lograr un seguimiento preciso de trayectorias incluso bajo momentos variables de inercia o cargas oscilantes [39, 40].

Los avances recientes en estrategias de control basadas en observadores de perturbaciones para UAVs tipo cuadricóptero se han enfocado en la estimación de perturbaciones externas con el fin de mejorar la robustez, la estabilidad y el seguimiento de trayectorias, incluso en presencia de incertidumbres paramétricas. En [41] se introduce un método de control no lineal basado en observador de perturbaciones que mitiga eficazmente las perturbaciones, aunque requiere una sintonización cuidadosa y puede verse limitado ante perturbaciones altamente dinámicas. En [39] se presenta una estrategia de control tipo backstepping integral combinada con un observador de perturbaciones, mostrando mejoras notables en el seguimiento de trayectorias, aunque con posibles desventajas en cuanto a complejidad computacional y sensibilidad ante inexactitudes en el modelo. El estudio presentado en [40] aborda los desafíos que implica una aeronave que transporta una carga, demostrando que una estrategia de control basada en observador de perturbaciones puede mantener la robustez incluso ante variaciones en los momentos de inercia. Sin embargo, el desempeño puede deteriorarse al tratar con fuerzas grandes o rápidamente fluctuantes. De manera colectiva, estos estudios resaltan que integrar observadores de perturbaciones con técnicas avanzadas de control, como el backstepping y la compensación de retardo, constituye una estrategia prometedora para mejorar la confiabilidad y precisión del control de UAVs tipo cuadricóptero en entornos dinámicos.

1.1. Planteamiento del problema

A pesar de los grandes avances que han existido en el diseño de plataformas eVTOL y vehículos multirrotor motivados por la necesidad de impulsar la movilidad aérea urbana, aún existen desafíos técnicos que comprometen su desempeño, seguridad y viabilidad operativa. El presente trabajo se orienta a enfrentar los desafíos identificados previamente mediante el desarrollo de soluciones innovadoras que contribuyan a

garantizar un desempeño confiable, eficiente y robusto de las aeronaves multirrotor en escenarios operativos reales. Este trabajo de tesis considera los siguientes cinco problemas a resolver.

En primer lugar, uno de los problemas identificados en las operaciones de vehículos aéreos multirrotor es la pérdida de sustentación durante maniobras de despegue acompañadas por rotaciones en yaw. Este fenómeno se origina debido a la redistribución del empuje requerida para inducir el giro, lo que puede llevar a una reducción transitoria en la fuerza neta ascendente. Es importante mencionar que cuando los actuadores operan cerca de sus límites, se reduce el margen de movimientos que los vehículos multirrotor pueden realizar comprometiendo la estabilidad imposibilitando un seguimiento preciso de trayectorias. A pesar de los avances en algoritmos de control, la necesidad de garantizar un ascenso seguro y estable sigue siendo un problema no resuelto en el diseño de sistemas de control modernos.

Después, se sabe que los controladores clásicos como el PID continúan siendo ampliamente utilizados por su simplicidad y eficacia en escenarios bien conocidos. No obstante, la implementación del término derivativo suele amplificar el ruido que se genera en los sensores. Este efecto compromete el desempeño del sistema y puede inducir oscilaciones no deseadas. Es por eso que los controladores basados en retardos han surgido como una alternativa viable, permitiendo la estimación del comportamiento dinámico sin recurrir a la derivada explícita, aunque su uso aún está en una etapa temprana de adopción en UAVs.

Otro problema a considerar es el de asegurar estabilidad exponencial sin exceder los límites operativos de los actuadores es un área de oportunidad para el diseño de los sistemas de control en condiciones reales. Aunque existen diversos enfoques que garantizan dicha estabilidad, aún existe la necesidad de determinar ganancias óptimas que equilibren robustez, precisión y velocidad de respuesta, maximizando el rendimiento del sistema sin comprometer su integridad física.

Adicionalmente, muchos de los vehículos multirrotor actuales operan bajo un esquema pasivo que restringe su capacidad de interacción con el entorno, limitando significativamente su aplicabilidad. La integración de brazos robóticos abre la posibilidad de dotar a estas plataformas de un rol activo, permitiéndoles ejecutar tareas de manipulación, inspección o intervención. No obstante, esta línea de desarrollo aún se encuentra en etapa de investigación, y plantea retos tanto en el diseño mecánico como en la adaptación de los esquemas de control.

Por último, las operaciones de los UAVs en entornos dinámicos e inciertos requieren de estrategias que les permitan responder eficazmente ante perturbaciones no

modeladas o cambios en las condiciones del entorno. Es por eso que los observadores no lineales de perturbaciones se han consolidado como herramientas importantes para mejorar la robustez de los sistemas. Sin embargo, su implementación práctica en plataformas multirrotor aún enfrenta retos relacionados con la sensibilidad a parámetros del modelo, el costo computacional y la necesidad de una sintonización cuidadosa.

1.2. Objetivos

Objetivo General

Diseñar e implementar un esquema de control avanzado para vehículos aéreos multirrotor, que permita realizar maniobras de vuelo no holonómico con estabilidad exponencial, mediante el desarrollo de controladores basados en retardos y observadores no lineales de perturbaciones, incorporando además capacidades de manipulación activa a través de un brazo robótico, con el fin de mejorar el desempeño y la robustez ante perturbaciones e incertidumbres en entornos operativos reales.

Objetivos Específicos

- Proponer un modelo matemático para maniobras de vuelo no holonómico en vehículos multirrotor, con el fin de evitar la pérdida de sustentación durante el ascenso acompañado de rotaciones en yaw, asegurando una adecuada redistribución del empuje y estabilidad en condiciones de operación cercanas a los límites de los actuadores.
- Diseñar e implementar controladores basados en retardos temporales, orientados a sustituir el término derivativo clásico en arquitecturas PID, con el propósito de mitigar la amplificación del ruido sensorial y mejorar la calidad del seguimiento de trayectorias en UAVs.
- Desarrollar estrategias de control que garanticen estabilidad exponencial y consideren los límites de operación de los actuadores.
- Explorar el diseño e integración de un brazo robótico a bordo de plataformas aéreas multirrotor, con el objetivo de dotar a los vehículos de capacidades activas de manipulación, ampliando así su funcionalidad en aplicaciones como inspección, interacción con el entorno o logística aérea.

- Mejorar la capacidad de respuesta ante perturbaciones e incertidumbres mediante el diseño de observadores no lineales de perturbaciones, capaces de estimar en tiempo real fuerzas externas y errores de modelado (incertidumbres paramétricas), con el fin de aumentar la robustez y el rendimiento del sistema de control ante escenarios desconocidos.

1.3. Hipótesis

Los objetivos planteados en la subsección anterior se vinculan con la siguiente hipótesis de investigación: 1.1

Hipótesis 1.1

El uso de esquemas de control basados en retardos, combinados con un observador no lineal de perturbaciones, permite garantizar estabilidad exponencial y un mejor desempeño en maniobras de vuelo no holonómico de un quad-rotor de tipo basculante, incluso en presencia de perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas, en comparación con estrategias de control clásico.

A partir de esta hipótesis central, se establecen las siguientes hipótesis derivadas que orientan el desarrollo teórico, el diseño del controlador y la validación numérica y experimental del sistema propuesto:

- *La incorporación explícita del vuelo no holonómico en el modelo dinámico y en el diseño del esquema de control permite mejorar el desempeño del quad-rotor de tipo basculante durante la fase de despegue, reduciendo la pérdida transitoria de sustentación y manteniendo la estabilidad exponencial aun cuando se presentan maniobras simultáneas de ascenso y rotación en yaw.*
- *Los controladores basados en retardos temporales permiten sustituir el término derivativo clásico en arquitecturas PID, reduciendo la amplificación del ruido sensorial y mejorando el seguimiento de trayectorias en UAVs multirrotor.*
- *El análisis de σ –estabilidad permite determinar una respuesta dinámica óptima del sistema controlado en términos de velocidad de convergencia y amortiguamiento; sin embargo, dicha respuesta no resulta directamente aplicable en un entorno real debido a restricciones prácticas como saturación de actuadores, ruido sensorial y limitaciones computacionales.*

- *La incorporación de observadores no lineales de perturbaciones permite estimar en tiempo real fuerzas externas e incertidumbres paramétricas, incrementando la robustez del sistema ante escenarios de operación no modelados.*

1.4. Metodología

La presente investigación adopta un enfoque cuantitativo y analítico, orientado al diseño, modelado y validación de sistemas de control avanzados para vehículos aéreos multirrotor. Se trata de un estudio de tipo experimental-simulativo, sustentado en fundamentos matemáticos rigurosos y orientado a la validación funcional de los controladores y observadores propuestos mediante pruebas de estabilidad y simulaciones numéricas.

Modelado matemático del sistema

La primera fase de este estudio consistió en la formulación del modelo dinámico del vehículo multirrotor, basado en el formalismo de Euler-Lagrange y considerando el comportamiento no holonómico durante maniobras de ascenso con rotación en yaw. Para ello, se partió de la observación estructural del sistema, incorporando las ecuaciones de energía, momentos y distribución de empuje en cada rotor. El modelo derivado esperado es una ecuación no lineal.

Diseño de controladores y observadores

A partir del modelo obtenido, se diseñaron controladores basados en retardos, orientados a reemplazar el término derivativo en esquemas tipo PD, mitigando la amplificación de ruido obtenido en sensores; estrategias de optimización, orientadas a garantizar estabilidad exponencial, considerando los límites físicos de los actuadores; observadores no lineales de perturbaciones, diseñados para estimar en tiempo real las fuerzas externas y mejorar la respuesta del sistema ante dinámicas no modeladas o condiciones inciertas.

Análisis de estabilidad

En esta etapa se realizó el análisis formal de estabilidad del sistema, utilizando herramientas como la teoría de Lyapunov. Para lo anterior, se consideró al modelo

matemático del dron en lazo cerrado con una estructura de control basada en retardos. Este análisis permitió establecer condiciones suficientes para garantizar la estabilidad global del sistema bajo distintas configuraciones y escenarios operativos.

Validación mediante simulaciones

La etapa final consistió en la implementación de simulaciones numéricas en un entorno computacional especializado (MATLAB/Simulink), donde se replicaron condiciones de vuelo realistas, incluyendo perturbaciones, incertidumbres y maniobras agresivas. Las simulaciones permitieron evaluar el desempeño dinámico de los controladores y observadores, así como validar la capacidad del sistema para ejecutar maniobras complejas como el ascenso con rotación en yaw y tareas de manipulación aérea mediante un brazo robótico.

Herramientas utilizadas

Modelado Dinámico: Enfoque de Euler-Lagrange.

Estrategias de control: Controladores basados en retardo, observadores no lineales.

Herramientas de simulación: MATLAB/Simulink.

Criterios de validación: Estabilidad, precisión de seguimiento, rechazo de perturbaciones, robustez frente a la incertidumbre.

Consideraciones éticas y replicabilidad

Dado que la investigación se desarrolló íntegramente en simulación y no implicó la intervención de personas o animales, no se requirió aprobación ética formal. No obstante, se garantizaron principios de transparencia y reproducibilidad científica, documentando todos los parámetros, condiciones iniciales y estructuras de control utilizadas, lo cual permite la replicación del estudio por otros investigadores interesados en el desarrollo de UAVs robustos y seguros.

1.5. Productos obtenidos

El trabajo desarrollado en esta tesis dio como resultado los siguientes productos científicos:

- J. U. Alvarez-Munoz, J. Escareno, F. Mendez-Barrios, I. Boussaada, S. I. Niculescu and D. Nieto-Hernández, "Time-delay Tolerant Control of an Omnidirectional Multi-agent System for Transport Operations," 2018 22nd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC), Sinaia, Romania, 2018, pp. 111-116,
- D. Nieto-Hernández, C.-F. Méndez-Barrios, J. Escareno, V. Ramírez-Rivera, L. A. Torres and H. Méndez-Azúa, "*Non-holonomic flight Modeling and Control of a Tilt-rotor MAV*," 6th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT), Paris, France, 2019, pp. 1947-1952
- D. Nieto-Hernández, M.-A. Lastras-Montaña, C. -F. Méndez-Barrios, J. S. Murguía-Ibarra, P. Martínez-Rodríguez and D. Langerica-Córdoba, "*Controller Based on Combined Tracking Error Applied in a Tilt-rotor MAV*," IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC), Ixtapa, Mexico, 2022, pp. 1-6
- D. Nieto-Hernández, J.-A. Hernández-Gallardo, L. Félix and C.-F. Méndez-Barrios, "*Enhancing Robustness: Delay-Based Control and Observer Strategies for Tilt-Rotor Quadrotors*," 10th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT), Vallette, Malta, 2024, pp. 2790-2795
- David Nieto-Hernández, César-Fernando Méndez-Barrios, "*Modeling and control of an interactive tilt-rotor MAV. A robust delay-based strategy*", Mathematics and Computers in Simulation, Volume 230, 2025, Pages 256-277

1.6. Outline

El resto de este trabajo tesis está organizado de la siguiente manera:

- En el Capítulo 1 se introduce el contexto general de la investigación, destacando la relevancia actual de la Movilidad Aérea Urbana y el papel emergente de las aeronaves eVTOL como una alternativa de transporte sostenible. Se describen los desafíos tecnológicos asociados con su operación, particularmente aquellos

relacionados con la transición entre modos de vuelo, la saturación de actuadores, la estabilidad bajo perturbaciones y la pérdida de sustentación durante maniobras simultáneas de ascenso y rotación en yaw. A partir de ello, se formula el planteamiento del problema y se establecen los objetivos general y específicos del trabajo. Asimismo, se detalla la metodología adoptada, basada en el modelado dinámico mediante el formalismo de Euler-Lagrange, el diseño de controladores basados en retardos y observadores no lineales de perturbaciones, y la validación del desempeño mediante simulaciones numéricas. El capítulo concluye presentando los productos académicos derivados de la investigación y una breve descripción de la estructura del documento.

- En el Capítulo 2 se desarrollan los fundamentos teóricos y metodológicos que sustentan el trabajo. Se revisan los principios del modelado de aeronaves y se introduce el formalismo de Euler-Lagrange como herramienta para la obtención de ecuaciones de movimiento de sistemas con múltiples grados de libertad. Posteriormente, se discute el concepto de vuelo no holonómico y las restricciones cinemáticas que caracterizan este tipo de maniobras, así como los fundamentos de estabilidad en sistemas no lineales, incluyendo estabilidad en el sentido de Lyapunov, estabilidad exponencial y el concepto de σ –estabilidad, esencial para el análisis de controladores basados en retardo. El capítulo aborda también la teoría de cuasipolinomios y curvas de cruce, herramientas necesarias para estudiar la estabilidad en sistemas retardados, y finaliza con la presentación de los observadores no lineales de perturbaciones empleados para mejorar la robustez del sistema ante fuerzas externas o incertidumbres de modelado.
- En el capítulo 3 se desarrolla el modelo dinámico de la aeronave tilt-rotor bajo condiciones de vuelo no holonómico. Se inicia describiendo formalmente la naturaleza cinemática de estas maniobras y su impacto en las restricciones del sistema. Posteriormente, se seleccionan las coordenadas generalizadas y entradas de control apropiadas, de modo que permitan capturar adecuadamente la dinámica acoplada del vehículo. Con ello, se procede a derivar el modelo mediante el formalismo de Euler-Lagrange, obteniendo un conjunto de ecuaciones no lineales que representan las fuerzas, momentos y efectos aerodinámicos asociados con el movimiento del tilt-rotor. Este modelo constituye la base para el diseño del esquema de control propuesto en capítulos posteriores.
- En el capítulo 4 se presenta el diseño y análisis de los controladores basados en retardos y los observadores no lineales de perturbaciones. En primer lugar,

se introduce el controlador $P\delta$, un esquema tipo proporcional-derivativo donde el término derivativo clásico se sustituye por un operador retardado con el fin de reducir la amplificación de ruido proveniente de los sensores. Se realiza un análisis de estabilidad mediante técnicas basadas en σ —estabilidad y en la caracterización de regiones estables derivadas de cuasipolinomios. Posteriormente, se extiende este diseño al controlador $P\delta I$, que incorpora una acción integral retardada orientada a mejorar la precisión del seguimiento. Finalmente, se plantea un observador no lineal de perturbaciones capaz de estimar fuerzas externas y errores de modelado en tiempo real, permitiendo así mejorar la robustez del esquema de control ante condiciones inciertas o perturbaciones no modeladas.

- El capítulo 5 presenta los resultados numéricos obtenidos a partir de simulaciones realizadas en un entorno computacional especializado. Se evalúa el desempeño del controlador $P\delta$, analizando sus regiones de estabilidad, su sensibilidad al parámetro σ y su comportamiento en el seguimiento de trayectorias complejas como trayectorias circulares y trayectorias tipo flor. Posteriormente, se estudia el desempeño del controlador $P\delta I$, comparando su comportamiento con el del controlador proporcional-retardado y mostrando las mejoras alcanzadas en términos de robustez y precisión. Finalmente, se analiza la capacidad del observador no lineal para mitigar perturbaciones, evaluando su efectividad tanto en escenarios con fuerzas externas aplicadas como en condiciones con incertidumbre paramétrica.
- En el capítulo 6 se presenta las conclusiones generales del trabajo, destacando las contribuciones teóricas y prácticas obtenidas: el modelado no holonómico basado en Euler-Lagrange, el diseño de controladores retardados como alternativa para mitigar los problemas asociados al término derivativo clásico, la incorporación de observadores no lineales para mejorar la robustez, y la validación numérica del desempeño mediante escenarios representativos de vuelo. Finalmente, se señalan diversas líneas de trabajo futuro, entre ellas la realización de pruebas experimentales con modelos físicos y el desarrollo de técnicas de control adaptativo o predictivo que permitan extender los resultados hacia aplicaciones reales con mayor nivel de incertidumbre.

CAPÍTULO 2

Fundamentos Teóricos y Metodológicos

El modelado y control de vehículos aéreos permite lograr un adecuado desempeño de vuelo en aeronaves autónomas, como cuadricópteros y drones eVTOL. Este tipo de sistemas se caracterizan por sus múltiples grados de libertad y dinámicas complejas, además de ser propensos a perturbaciones desconocidas generadas por factores externos como las corrientes de aire y obstáculos, así como internas originadas por las incertidumbres paramétricas.

El desarrollo de modelos matemáticos permite conocer los principios dinámicos que describen el comportamiento de este tipo de vehículos. Con el formalismo de Euler-Lagrange se pueden obtener las ecuaciones de movimiento a partir de la energías del sistema. Esta formulación puede ser aplicada en sistemas complejos o con restricciones, como los que presentan los vehículos aéreos multirrotor o las aeronaves de tipo eVTOL. A través del Lagrangiano se puede comenzar con la descripción de cualquier sistema y así poder realizar tanto el análisis como el diseño de estrategias de control adecuadas para mejorar el desempeño de los UAV.

A partir del modelo dinámico, se pueden diseñar distintos tipos de pruebas para garantizar la estabilidad y el rendimiento del vehículo aéreo. El análisis de estabilidad, basado en el teorema de Lyapunov y extensiones como el teorema de Barbashin-Krasovskii, permite determinar condiciones bajo las cuales el sistema mantiene una convergencia hacia una trayectoria deseada, incluso frente a perturbaciones. Además, con el diseño de controladores retardados ($P\delta$, $P\delta I$) podemos utilizar retardos como un parámetro de diseño, los cuales son inherentes en los sistemas reales, para poder

asegurar el seguimiento de trayectorias, mientras que el concepto de σ -estabilidad aporta herramientas para garantizar un comportamiento robusto y con decaimiento exponencial. Asimismo, la incorporación de observadores no lineales de perturbaciones permite estimar perturbaciones externas no medidas, como corrientes de aire o colisión con objetos, logrando así un desempeño seguro y la autonomía de la aeronave.

2.1. Modelado de aeronaves

Como se mencionó anteriormente, en el estudio de vehículos aéreos, el desarrollo de un modelo matemático que represente de forma precisa su comportamiento dinámico permite el análisis y diseño de estrategias de control que garanticen un vuelo seguro y preciso. Es por eso que antes de pensar en estrategias de control, es necesario comprender cómo se comporta la aeronave, qué fuerzas internas y externas actúan sobre ella, y cómo responde ante distintas entradas. Gracias al modelado, se pueden obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema conforme transcurre el tiempo, y constituye la base sobre la cual se realizan simulaciones, análisis de estabilidad y diseños de algoritmos de control.

Existen distintos enfoques para abordar el modelado de una aeronave. Uno de los más utilizados es el formalismo de Newton-Euler, que aplica directamente las leyes de Newton para describir el movimiento traslacional y rotacional del cuerpo rígido. Este enfoque resulta intuitivo y adecuado para simulaciones físicas en tiempo real, especialmente cuando se tiene una descripción detallada de las fuerzas y momentos que actúan sobre el sistema. Por otro lado, el enfoque de Euler-Lagrange ofrece una formulación más estructurada, basada en principios energéticos. A partir de la energía cinética y potencial del sistema, y mediante coordenadas generalizadas, es posible derivar las ecuaciones de movimiento sin necesidad de analizar fuerza por fuerza.

En los últimos años se ha comenzado a utilizar cuaterniones como alternativa a las representaciones clásicas mediante ángulos de Euler. El uso de cuaterniones permite describir la orientación del vehículo sin ambigüedades ni singularidades, ya que los modelos anteriores presentan singularidades en la inclinación de la aeronave a 90° . Cualquiera de estos enfoques permitirá representar fielmente la dinámica del vehículo aéreo, la cual dará una base para el diseño de controladores aplicados en aeronaves.

2.2. Formalismo de Euler Lagrange

El formalismo de Euler-Lagrange es un método utilizado para modelar la dinámica de sistemas físicos complejos, especialmente aquellos con múltiples grados de libertad. Este enfoque permite obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema a partir de una función escalar denominada Lagrangiano, la cual es definida como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial del sistema. Su principal ventaja es que evita el análisis de las fuerzas, lo que simplifica el análisis cuando se trata de sistemas con múltiples coordenadas generalizadas, como drones, aeronaves con brazos robóticos o plataformas VTOL con modos de vuelo acoplados. Debido a su formulación sistemática, el método puede aplicarse en diferentes contextos y ofrece una ecuación diferencial bien conocida donde aplicar algoritmos de control.

Para poder aplicar correctamente este formalismo, es necesario hacer una adecuada selección de las coordenadas generalizadas, que constituyen el conjunto mínimo de variables independientes necesarias para describir completamente la configuración del sistema. Estas coordenadas no están restringidas a posiciones cartesianas, sino que pueden incluir ángulos, desplazamientos relativos o cualquier otro parámetro que describa al sistema sin redundancias. Por lo general, si un sistema tiene n grados de libertad, se requieren n coordenadas generalizadas $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, las cuales definen un punto en un espacio n -dimensional que representa el estado del sistema en un instante dado. En el caso de una aeronave, se pueden considerar variables como la posición espacial, la orientación relativa de un actuador o un ángulo de navegación. El seleccionar de manera adecuada estas coordenadas facilita el cálculo del Lagrangiano, sin embargo, el hacerlo de manera inadecuada puede introducir complejidad innecesaria.

Energía cinética

El primer paso para aplicar el formalismo de Euler-Lagrange al modelado de un vehículo aéreo, es el expresar su dinámica en términos de la energía cinética, la cual representa la cantidad de energía asociada directamente al movimiento del sistema. La energía cinética es una magnitud escalar que describe la cantidad de energía asociada al movimiento de un cuerpo.

Definición 2.1: Energía cinética [42]

Sea un sistema mecánico constituido por n partículas de masa m_i con posición descrita por el vector $\mathbf{r}_i(t)$, donde $i = 1, 2, \dots, n$. La energía cinética total del sistema se define como:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i$$

donde $\dot{\mathbf{r}}_i$ representa el vector de velocidad de la partícula i y m_i la masa de la partícula.

Si el sistema se describe mediante un conjunto de k coordenadas generalizadas $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k$, la energía cinética puede expresarse como una función cuadrática en términos de las velocidades generalizadas:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k M_{jl}(\mathbf{q}) \dot{q}_j \dot{q}_l$$

donde $M_{jl}(\mathbf{q})$ es el elemento (j, l) de la matriz de inercia $\mathbf{M}(\mathbf{q})$, la cual depende de las coordenadas generalizadas $\mathbf{q}$ y refleja cómo la masa está distribuida en el sistema.

De forma general, la energía cinética es la energía que posee un cuerpo debido a su movimiento, y depende tanto de su masa como de su velocidad. A mayor masa o mayor velocidad, mayor será la cantidad de energía cinética.

En el caso más simple, correspondiente a un cuerpo puntual que se traslada en línea recta o rota en su propio eje, la energía cinética se define como

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ es la masa e inercias del objeto y $\dot{\mathbf{q}}$ su velocidad. Sin embargo, cuando se modela el comportamiento de un vehículo aéreo, la energía cinética debe considerar tanto los componentes traslacionales así como los rotacionales, ya que la energía cinética rotacional se encuentra asociada a la rotación del cuerpo rígido alrededor de su centro de masa. Por lo tanto, es importante considerar las posibles relaciones entre traslación y rotación que caracterizan su movimiento real.

La energía cinética es el trabajo necesario para acelerar un objeto desde el reposo hasta cierta velocidad. Esta interpretación permite vincular el movimiento del sistema con el esfuerzo que implica generarlo, por ejemplo, a través de los motores de una aeronave. Para el cálculo del lagrangiano, identificar correctamente las componentes

cinéticas del sistema, en función de las coordenadas generalizadas seleccionadas y sus velocidades, permite describir su dinámica, además de establecer las condiciones necesarias para su control, estabilidad y desempeño eficiente en vuelo.

Energía Potencial

Junto con la energía cinética, la energía potencial es el otro componente utilizado para describir el comportamiento dinámico de un sistema mecánico. La energía potencial representa la energía almacenada en un sistema debido a su posición o configuración dentro de un campo de fuerzas. Esta forma de energía no es evidente por sí misma a través del movimiento, pero se manifiesta como la capacidad del sistema para realizar trabajo si se modifican las condiciones que definen su estado. Así, la energía potencial puede originarse por la acción de campos gravitacionales, eléctricos, magnéticos o incluso por la deformación de elementos elásticos.

Definición 2.2: Energía Potencial [42]

Si una fuerza es conservativa, existe una función escalar U , denominada energía potencial, tal que el trabajo realizado por la fuerza al mover una partícula desde una posición inicial a una posición final depende únicamente de estos puntos y no de la trayectoria seguida. Matemáticamente, esta relación se expresa como:

$$\mathbf{F} = -\nabla U,$$

donde $\mathbf{F}$ es la fuerza conservativa y U es la energía potencial asociada. Esta magnitud representa la capacidad del sistema para realizar trabajo en virtud de su configuración espacial.

La definición de energía potencial más utilizada para el estudio de vehículos aéreos es la energía potencial gravitacional, ya que la interacción constante con el campo gravitatorio terrestre afecta directamente la dinámica vertical del vehículo. En este caso, la energía potencial se expresa como

$$U = mgh, \tag{2.2}$$

donde m es la masa del objeto, g es la aceleración debida a la gravedad y h es la altura relativa respecto a un punto de referencia. Esta expresión permite cuantificar la cantidad de energía que posee un cuerpo por encontrarse a cierta altura, energía

que puede convertirse en energía cinética en caso de descender. Es importante notar que la energía potencial es una propiedad del sistema completo, no solo del objeto individual; por ejemplo, la energía potencial del sistema depende de la distancia entre un sistema y la línea de tierra, además del campo gravitatorio en el que se encuentran.

La energía potencial almacenada se convierte en energía cinética, permitiendo una descripción de la conservación y transformación de la energía durante el vuelo. Así, la correcta formulación de la energía potencial dentro del modelo lagrangiano contribuye a una representación más precisa de las condiciones reales de operación de una aeronave.

Lagrangiano

Una vez que se han definido las expresiones correspondientes a la energía cinética y a la energía potencial de un sistema, es posible construir una función matemática que caracterice de manera compacta su comportamiento dinámico: el Lagrangiano.

Definición 2.3: Lagrangiano [43]

El Lagrangiano de un sistema mecánico es una función escalar definida como la diferencia entre la energía cinética total T y la energía potencial total U del sistema:

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}. \quad (2.3)$$

Para un sistema con n grados de libertad, expresado en términos de coordenadas generalizadas $q_1, q_2, \dots, q_n$ y sus derivadas temporales $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$, el Lagrangiano puede escribirse como:

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = \mathcal{T}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) - \mathcal{U}(q_1, \dots, q_n, t).$$

Esta función es la base para la formulación de las ecuaciones de Euler-Lagrange que describen el movimiento del sistema.

En la mecánica lagrangiana, esta función permite representar el modelo dinámico y contiene toda la información necesaria para derivar de forma sistemática las ecuaciones de movimiento de un sistema físico, incluso en presencia de múltiples grados de libertad o restricciones cinemáticas.

El Lagrangiano $\mathcal{L}$ no es una constante, sino una función que depende de las coordenadas generalizadas q_i , de sus derivadas temporales $\dot{q}_i$ y del tiempo t . Esto significa que describe cómo varía la energía del sistema en función de su configuración y velocidad generalizadas. Desde un punto de vista geométrico, esta función permite caracterizar el movimiento del sistema como la evolución de un punto en un espacio n -dimensional, donde n es el número de grados de libertad. Lo notable de este enfoque es que no exige escribir explícitamente cada fuerza que actúa sobre el sistema; basta con definir adecuadamente sus energías para que la dinámica sea descrita a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Es importante recordar que el Lagrangiano está relacionado con el principio de Hamilton, el cual establece que la trayectoria real seguida por un sistema entre dos estados en el tiempo es aquella que hace estacionaria la integral del Lagrangiano a lo largo del tiempo. Esta integral, conocida como la acción, actúa como criterio variacional para determinar la evolución del sistema. Así, en lugar de resolver directamente fuerzas y aceleraciones, el enfoque lagrangiano propone encontrar la trayectoria que optimiza el comportamiento energético del sistema. Así, se simplifica el análisis de sistemas complejos y lo hace aplicable a dominios más generales, como la relatividad, la dinámica de fluidos o la teoría cuántica de campos.

Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

Una vez definido el Lagrangiano es posible establecer la ecuación dinámica con la que se describe el comportamiento del sistema: la ecuación de Euler-Lagrange. Esta ecuación surge del cálculo vectorial y con el principio de Hamilton.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son equivalentes a las leyes de Newton en sistemas conservativos, pero con la ventaja de que este enfoque permite derivar las ecuaciones de movimiento de forma sistemática, sin necesidad de analizar explícitamente las fuerzas involucradas.

Históricamente, estas ecuaciones fueron desarrolladas de manera independiente por Euler y Lagrange a mediados del siglo XVIII, y han sido utilizadas no solo en la mecánica clásica, sino también en disciplinas modernas como la relatividad general, la teoría cuántica y la dinámica de fluidos. Así, las ecuaciones de Euler-Lagrange se resumen en ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del sistema.

Teorema 2.1: Teorema de Euler-Lagrange [43]

Sea el funcional definido por

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, t) dt, \quad (2.4)$$

donde $\mathcal{L}$ es el Lagrangiano del sistema, que esta en función de las coordenadas generalizadas $\mathbf{q}_i$, sus derivadas temporales $\dot{\mathbf{q}}_i$ y del tiempo t .

De acuerdo con el Principio de Hamilton, el movimiento real de un sistema mecánico entre los instantes t_1 y t_2 es aquel para el cual la variación primera del funcional I es nula, es decir:

$$\delta I = 0. \quad (2.5)$$

Para determinar esta condición, se considera una variación infinitesimal de las coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{q}_i(t) \rightarrow \mathbf{q}_i(t) + \delta \mathbf{q}_i(t), \quad (2.6)$$

donde las funciones $\delta \mathbf{q}_i(t)$ son continuas, poseen derivadas continuas en el intervalo $[t_1, t_2]$ y satisfacen las condiciones de frontera:

$$\delta \mathbf{q}_i(t_1) = \delta \mathbf{q}_i(t_2) = 0. \quad (2.7)$$

Sustituyendo en la integral y desarrollando el integrando en serie de Taylor, se obtiene que la variación de la acción es:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_i} \delta \mathbf{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \delta \dot{\mathbf{q}}_i \right) dt. \quad (2.8)$$

Aplicando integración por partes al término que involucra $\delta \dot{\mathbf{q}}_i$, y considerando que las variaciones se anulan en los extremos, se obtiene:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) \right] \delta \mathbf{q}_i dt. \quad (2.9)$$

Dado que las variaciones $\delta \mathbf{q}_i(t)$ son independientes y arbitrarias dentro del intervalo de integración, la única manera de que la integral anterior se anule para toda variación admisible es que el término dentro de los corchetes sea idénticamente cero. Por tanto, las funciones $\mathbf{q}_i(t)$ que hacen estacionaria la acción deben satisfacer las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.10)$$

En el caso particular de sistemas conservativos, donde la energía total se conserva y no existen disipaciones, las ecuaciones de Euler–Lagrange equivalen a las ecuaciones obtenidas mediante la segunda ley de Newton, pero expresadas en coordenadas generalizadas.

De esta manera, el Teorema de Euler–Lagrange generaliza el principio de mínima acción y proporciona una formulación unificada del movimiento de los sistemas mecánicos.

Así, la ecuación de Euler-Lagrange proporciona la condición necesaria para que una función $q(t)$, que describe la evolución de las coordenadas generalizadas del sistema, haga estacionaria dicha acción. Para un sistema con Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$, donde q representa una coordenada generalizada y $\dot{q}$ su derivada temporal, la forma general de esta ecuación es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0. \quad (2.11)$$

Esta expresión debe cumplirse para cada una de las n coordenadas generalizadas del sistema, lo que da lugar a un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden. Cada una de estas ecuaciones describe cómo evoluciona una variable del sistema a lo largo del tiempo bajo la influencia de sus componentes energéticas.

2.3. Vuelo no holónomico

Los sistemas dinámicos pueden describirse mediante coordenadas generalizadas sujetas, en muchos casos, a restricciones que limitan sus posibles movimientos. Estas restricciones pueden ser de distinta naturaleza y determinan si el sistema es holonómico o no holonómico.

Mientras que los sistemas holonómicos presentan restricciones que pueden expresarse como relaciones algebraicas entre las coordenadas generalizadas y el tiempo, los sistemas no holonómicos se caracterizan por restricciones que involucran también las velocidades generalizadas y que no son integrables.

Definición 2.4: Sistema no holónomo [44]

Un sistema dinámico se denomina **no holónomo** cuando está sujeto a una o más ecuaciones de restricción que no pueden expresarse únicamente como funciones de las coordenadas generalizadas y del tiempo. En particular, las restricciones no holónomas se caracterizan por involucrar explícitamente a las velocidades generalizadas y por no ser integrables, es decir, no pueden transformarse en restricciones holónomas equivalentes.

En consecuencia, dichas restricciones no pueden reducirse a expresiones algebraicas de la forma

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0, \quad (2.12)$$

sino que se presentan como relaciones diferenciales del tipo

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{q}, t) \dot{q}_i + a_0(\mathbf{q}, t) = 0, \quad (2.13)$$

las cuales restringen el movimiento admisible del sistema sin disminuir el número de variables de configuración. Esta formulación corresponde a la teoría clásica de la dinámica analítica, donde la no integrabilidad de las restricciones dependientes de la velocidad constituye el criterio fundamental para distinguir entre sistemas holónomos y no holónomos.

Las restricciones no holonómicas permiten describir dinámicas donde las variables de estado presentan limitaciones de movimiento en el espacio de configuraciones. En vehículos aéreos, como aeronaves de tipo eVTOL, estas restricciones surgen al imponer relaciones cinemáticas entre los movimientos traslacionales y rotacionales. El obtener la dinámica de un sistema no holonómico permitir mejorar el desempeño a través del diseño de controladores que garanticen estabilidad y seguimiento de trayectorias.

2.4. Estabilidad

La teoría de estabilidad es uno de los conceptos más importantes de la ingeniería de control. Existen distintas clases de estabilidad que surgen durante el análisis de sistemas dinámicos. Las definiciones presentadas en esta sección son ampliamente conocidas y han sido abordadas en la literatura especializada en control no lineal, tales como [45], [46], entre otros.

Considérese el siguiente sistema autónomo:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}(t)) \quad (2.14)$$

y sea $\varphi(t)$ una solución particular de (2.14).

Definición 2.5: Estabilidad [45]

La solución $\varphi(t)$ es *estable* en $[0, +\infty)$ si, dado cualquier $\varepsilon > 0$ y $t_0 \geq 0$, existe $\delta(\varepsilon, t_0) =: \delta > 0$ tal que para todo $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\varphi(t_0))$, la solución $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ está definida y satisface

$$\sup_{t \geq t_0} \|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) - \varphi(t)\| < \varepsilon,$$

donde $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ representa una solución de (2.14) definida para todo $t \geq t_0$.

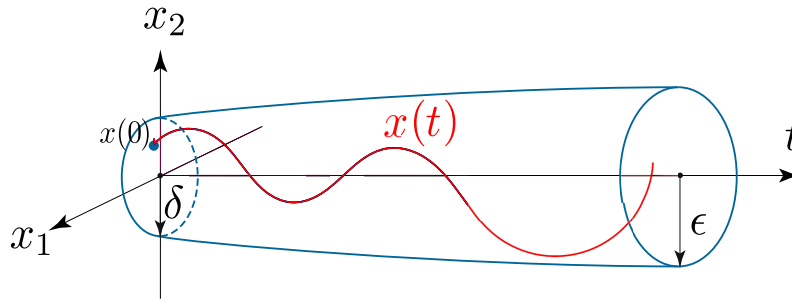


Figura 2.1: Estabilidad.

Estabilidad Asintótica

La estabilidad asintótica describe la propiedad mediante la cual las soluciones que inician lo suficientemente cerca del punto de equilibrio permanecen próximas a él ante pequeñas perturbaciones, además de que convergen al equilibrio conforme el tiempo tiende a infinito.

Definición 2.6: Estabilidad Asintótica [45]

La solución $\varphi(t)$ es *asintóticamente estable* en $[0, +\infty)$ si es estable y, además, existe $\gamma(t_0) =: \gamma > 0$ tal que para todo $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\varphi(t_0))$, la solución $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ está definida y satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) - \varphi(t)\| = 0,$$

donde $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ representa una solución de (2.14) definida para todo $t \geq t_0$.

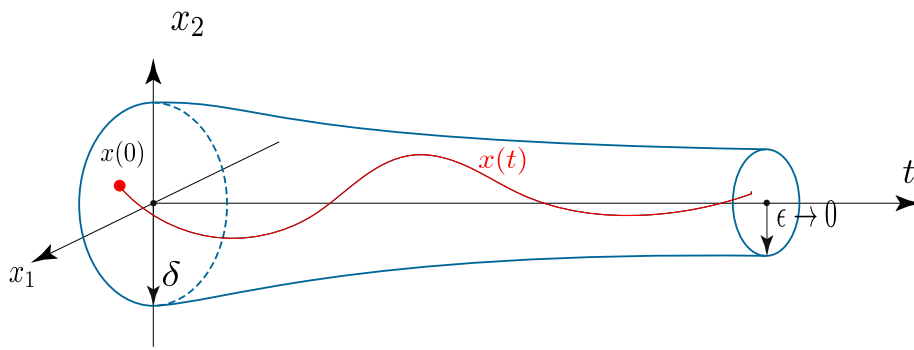


Figura 2.2: Estabilidad asintótica.

Estabilidad Exponencial

La estabilidad exponencial es una forma más fuerte de estabilidad asintótica, en la cual las trayectorias del sistema no solo convergen al punto de equilibrio conforme el tiempo tiende a infinito, sino que lo hacen a una tasa exponencialmente decreciente. Así, la respuesta transitoria del sistema se atenúa con rapidez y de manera uniforme.

Definición 2.7: Estabilidad Exponencial [45]

Considérese el sistema no lineal autónomo (2.14) donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y el origen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ constituye un punto de equilibrio.

El punto de equilibrio $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ se dice exponencialmente estable si es asintóticamente estable y existen constantes positivas α , β y δ tales que, para toda condición inicial $\mathbf{x}(0)$ que satisfaga $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta$, la solución $\mathbf{x}(t)$ cumple

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

En la figura el término $e^{-\beta t}$ actúa como una envolvente exponencial que delimita

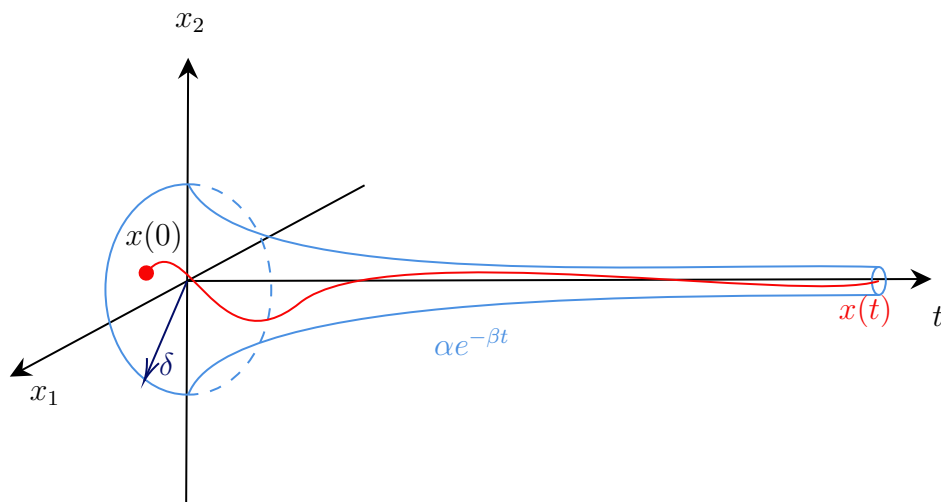


Figura 2.3: Estabilidad Exponencial

la rapidez con que las trayectorias se aproximan al equilibrio, formando un cono o embudo alrededor del origen conforme transcurre el tiempo.

Teorema de Estabilidad de Lyapunov

Uno de los enfoques más utilizados para el análisis de estabilidad en sistemas dinámicos es el teorema de Lyapunov. Un punto de equilibrio se considera estable si todas las soluciones que parten de puntos cercanos permanecen cercanas; en caso contrario, se considera inestable. El equilibrio es asintóticamente estable si dichas soluciones no solo permanecen próximas, sino que también convergen al punto de equilibrio conforme el tiempo tiende a infinito [45]. Este teorema puede enunciarse como sigue:

Teorema 2.2: Teorema de Estabilidad de Lyapunov [45]

Sea $x = 0$ un punto de equilibrio para el sistema (2.14) y $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene el origen. Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable (es decir, $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$) tal que:

$$(i) \quad V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0 \quad \forall x \in D - \{0\},$$

$$(ii) \quad \dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in D.$$

Entonces, el punto $x = 0$ es estable. Además, si

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{en } D - \{0\}, \quad (2.15)$$

entonces $x = 0$ es asintóticamente estable.

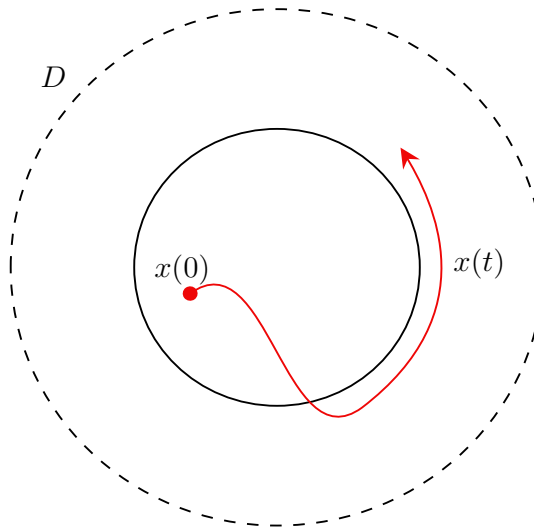


Figura 2.4: Estabilidad de Lyapunov

Teorema de Barbashin-Krasovskii

El Teorema de Barbashin–Krasovskii es una extensión del segundo método de Lyapunov para el análisis de la estabilidad de sistemas no lineales. Este resultado establece condiciones suficientes para garantizar la estabilidad asintótica global de un punto de equilibrio, incluso cuando la derivada de la función de Lyapunov es negativa semidefinida. Así, el teorema permite concluir la convergencia al equilibrio siempre que las trayectorias del sistema permanezcan acotadas y el único conjunto invariante

contenido en la región donde $\dot{V}(x) = 0$ sea el propio equilibrio. Este principio amplía el alcance del criterio clásico de Lyapunov, proporcionando una herramienta más general para el estudio de la estabilidad en sistemas no lineales.

Teorema 2.3: Teorema de Barbashin-Krasovskii

Sea $x = 0$ un punto de equilibrio para el sistema (2.14). Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que:

$$V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0, \quad (2.16)$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad V(x) \rightarrow \infty, \quad (2.17)$$

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \neq 0, \quad (2.18)$$

entonces $x = 0$ es globalmente asintóticamente estable.

2.5. Cuasi polinomios

Definición 2.8: Cuasipolinomio

Un cuasipolinomio^a $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función entera definida en el plano complejo como

$$f(s; \mathbf{p}) := f_0(s; \mathbf{a}) + \sum_{\ell=1}^q f_{\ell}(s; \mathbf{b}) e^{-\tau_{\ell} s}, \quad (2.19)$$

donde $\mathbf{p} := (\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\tau_{\ell} \in \mathbb{R}_+$ y f_{ℓ} son polinomios reales en la variable compleja s , dados por

$$f_0(s; \mathbf{a}) = s^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k s^k \quad \text{y} \quad f_{\ell}(s; \mathbf{b}) = \sum_{k=0}^{n-1} b_{\ell k} s^k,$$

para $\ell \in \{1, \dots, q\}$, $a_k, b_{\ell k} \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$.

^aTécnicamente, se trata de un cuasipolinomio de tipo retardado; sin embargo, por simplicidad, nos referiremos a él simplemente como cuasipolinomio.

Observación 2.1

Un parámetro importante en nuestro estudio es el retardo. En este trabajo, la variable τ se considera como tal y se mantendrá a lo largo del desarrollo restante de la discusión.

Una idea clave en la determinación de la estabilidad de los sistemas con retardo

en el tiempo se relaciona con la *propiedad de continuidad de las raíces* de los cuasipolinomios. Dicha propiedad (inherente a los cuasipolinomios de tipo retardado) puede establecerse de la siguiente manera:

Proposición 2.1: Raíces características [47]

Para un $\mathbf{p}^*$ fijo y un $\tau^* > 0$, sea $s^* \in \mathbb{C}$ una raíz característica de f con multiplicidad $\ell \in \mathbb{N}$. Entonces, existe una constante $\bar{\epsilon} > 0$ tal que, para todo $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$, existe un número $\delta > 0$ de modo que $f(s; \mathbf{p})$, donde $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}^*\|_2 < \delta$ y $0 < |\tau - \tau^*| < \delta$, posee exactamente ℓ raíces en el disco $\{s \in \mathbb{C} : |s - s^*| < \epsilon\}$.

De manera estricta, el resultado anterior establece que las raíces características se comportan de manera continua respecto a variaciones continuas de los parámetros del sistema $\mathbf{p}$ y del retardo τ .

Consideremos la clase particular de sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) con retardos puntuales, descritos por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0 \mathbf{x}(t) + \sum_{j=1}^q A_j \mathbf{x}(t - \tau_j), \quad (2.20)$$

donde A_j son matrices reales de dimensión $n \times n$, y $\tau_j > 0$. Bajo estas consideraciones, no es difícil ver que la función característica del sistema (2.20) es un cuasipolinomio de la forma (2.19). De hecho, dicha función característica puede obtenerse como:

$$f(s; \mathbf{p}) = \det \left[sI - A_0 - \sum_{j=1}^q A_j e^{-\tau_j s} \right],$$

donde $\mathbf{p}$ está relacionada con los coeficientes de las matrices A_0 y A_j .

En este sentido, la conexión entre la estabilidad del sistema con retardo (2.20) y la localización de las raíces de (2.19) se establece mediante el siguiente resultado.

Proposición 2.2: Estabilidad y localización de las raíces [48]

Considérese el sistema con retardo dado por (2.20) y sea f su correspondiente función característica. Entonces, para cualquier $\gamma \in \mathbb{R}$, el número de raíces (contando sus multiplicidades) de f con partes reales mayores que σ es finito. Sea $\sigma \in \mathbb{R}$ definido como

$$\sigma := \max \{ \Re(s) \mid f(s) = 0 \}. \quad (2.21)$$

Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones^a:

- (i) El sistema con retardo en el tiempo (2.20) es asintóticamente estable si y sólo si $\sigma < 0$.
- (ii) Para cualquier $\sigma_0 > \sigma$, existe un $L > 1$ tal que toda solución $x(t)$ de (2.20) está acotada por

$$\|x(t)\| \leq L e^{\sigma_0 t} \|\theta\|_\tau,$$

donde θ es una función de condición inicial dada del sistema (2.20).

- (iii) El valor de σ es continuo con respecto a cada τ_j , para todo $\tau_j \geq 0$, $j = 1, \dots, q$.

^aEn este resultado, la norma $\|\cdot\|_\tau$ se define como $\|\varphi\|_\tau := \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \|\varphi(\theta)\|$.

2.6. Controladores retardados

Los controladores basados en retardo (delayed-based controllers) son estrategias de control que incorporan explícitamente términos con retardos temporales en la ley de control ($x(t - \tau)$) para su diseño, donde τ es el retardo. Para el uso de información retardada se debe hacer una selección adecuada de los retardos ya que estos pueden afectar la estabilidad y el rendimiento.

El controlador $P\delta$

Los controladores proporcionales derivativos (PD) son uno de los enfoques más utilizados en sistemas dinámicos debido a su simplicidad y capacidad de mejorar la respuesta transitoria mediante la incorporación de una acción derivativa sobre el error. Sin embargo, en aplicaciones prácticas, la implementación de este término derivativo

suele enfrentar dificultades asociadas a la amplificación del ruido de medición y a la necesidad de sensores de velocidad confiables.

Con el objetivo de mitigar estas limitaciones, se ha propuesto una clase alternativa de controladores que reemplazan la derivada temporal del error por una función del error evaluado en instantes anteriores. Este enfoque, conocido como control basado en retardos o control tipo $P\delta$, introduce un nuevo grado de libertad en el diseño y ha demostrado ventajas en sistemas con ruido.

El controlador proporcional con retardo, comúnmente denominado $P\delta$ (Proportional-Delayed controller), es una estrategia de control de bajo orden que introduce explícitamente un retardo fijo en la retroalimentación. Su formulación matemática en el dominio de Laplace se expresa como:

$$C(s) = k_p e + k_\delta e^{-\tau s} \quad (2.22)$$

donde $k_p \in \mathbb{R}$ es la ganancia proporcional clásica, $k_\delta \in \mathbb{R}$ representa una ganancia asociada al bloque retardado, y $\tau \in \mathbb{R}_+$ denota el tiempo de retardo constante. Esta configuración conduce a una ecuación característica de tipo cuasipolinomial, cuyas raíces determinan la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

A diferencia del controlador proporcional-derivativo (PD), el cual puede amplificar el ruido de alta frecuencia debido a la acción derivativa, el controlador $P\delta$ es una opción más robusta ante el ruido, ya que evita la famosa derivada sucia. Además, su bajo orden lo convierte en una opción adecuada para su implementación en sistemas embebidos o con restricciones computacionales.

Contrario a la intuición convencional, en la que los retardos suelen asociarse con un bajo desempeño e inestabilidad, diversos estudios han demostrado que el uso intencionado de retardos puede generar efectos beneficiosos, como la mejora en la amortiguación o la estabilización de sistemas que, de otro modo, serían inestables.

El diseño del controlador $P\delta$ está basado en un enfoque geométrico del espacio de parámetros (k_p, k_δ, τ) , además de la caracterización de curvas de cruce de estabilidad (*stability crossing curves*) mediante técnicas como la descomposición-D (*D-decomposition*). Este análisis permite identificar regiones con una cantidad constante de raíces inestables, delimitadas por superficies definidas por el cruce de raíces por el eje imaginario.

Este procedimiento permite diseñar controladores estables y a través del análisis de σ -estabilidad se puede establecer una tasa mínima de decaimiento exponencial en la dinámica del sistema.

El uso de controladores $P\delta$ ha sido presentado en sistemas con retardos inhe-

rentes, como en la teleoperación bilateral [30], dispositivos hápticos. Debido a su simplicidad, su interpretación física clara y su viabilidad de implementación, el controlador $P\delta$ es una opción de diseño en aplicaciones donde se busca robustez, adecuado desempeño dinámico y bajo costo computacional.

Como se ha discutido en trabajos previos [49], las ventajas principales de esta formulación incluyen:

- **Un grado adicional de libertad:** la presencia del retardo τ y de la ganancia K_τ permite modificar el comportamiento dinámico del sistema de forma más flexible.
- **Robustez frente a errores de sensado:** al evitar el uso directo de derivadas, se reduce la sensibilidad al ruido de alta frecuencia.
- **Facilidad de implementación:** en plataformas embebidas o entornos con capacidad computacional limitada, el cálculo de estados pasados es más eficiente y confiable que la diferenciación numérica.

El controlador $P\delta I$

El controlador $P\delta I$ (Proportional Delayed Integral) es una extensión del control proporcional-integral (PI), en la cual se introduce un retardo de manera intencionada en la acción integrativa. A diferencia de los controladores PI, que presentan limitaciones en sistemas con ceros no mínimos, dinámicas subactuadas o perturbaciones externas, el enfoque $P\delta I$ puede superar estos problemas mediante la incorporación explícita del retardo como un parámetro de diseño ajustable.

El controlador $P\delta I$ puede expresarse en el dominio del tiempo como:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(v - \tau) dv, \quad (2.23)$$

donde $e(t)$ representa el error, K_p y K_i son matrices de ganancia proporcional e integrativa respectivamente, y $\tau > 0$ es el retardo fijo en la acción integrativa. Este retardo permite cumplir criterios de estabilidad no alcanzables mediante un PI clásico.

En el control de vehículos aéreos no tripulados, el uso del controlador $P\delta I$ puede mejorar la precisión del seguimiento de trayectorias, incluso en presencia de incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas. En combinación con observadores no lineales de perturbaciones, el controlador $P\delta I$ puede mantener la estabilidad asintótica del sistema cerrado y una respuesta transitoria robusta.

La sintonización del controlador se basa en condiciones derivadas de criterios de estabilidad como la σ -estabilidad, donde se busca garantizar que las raíces dominantes del sistema cerrado se encuentren estrictamente a la izquierda de una recta vertical en el plano complejo. Las regiones de estabilidad se caracterizan mediante curvas de cruce, que delimitan el espacio de parámetros (k_p, k_i, τ) donde el sistema permanece estable. Así, el retardo τ se convierte en una herramienta de diseño, cuyo valor adecuado puede incrementar la rapidez de convergencia sin comprometer la robustez del sistema.

2.7. Enfoque Geométrico para el Análisis de Estabilidad

El planteamiento geométrico para el análisis de la estabilidad permite comprender el comportamiento cualitativo de los sistemas dinámicos. En lugar de basarse únicamente en condiciones algebraicas, este enfoque interpreta la estabilidad a partir de las propiedades geométricas de las trayectorias en el espacio de estados y su evolución en el tiempo, el cual permite visualizar transiciones, identificar fronteras de estabilidad y diseñar estrategias de control que garanticen un desempeño robusto del sistema.

σ -estabilidad

La σ -estabilidad es una herramienta útil en el análisis de sistemas de control. Su propósito principal es el de cuantificar el rendimiento del lazo de control en términos de su capacidad para responder a comandos de control de la manera más rápida posible.

Definición 2.9: σ -estabilidad

Un sistema con una función característica $P(s)$ se considera σ -estable si y solo si su abscisa espectral, definida como

$$\alpha(P) = \max\{\operatorname{Re}(s_i) : P(s_i) = 0\}, \quad (2.24)$$

cumple la condición:

$$\alpha(P) \leq -\sigma. \quad (2.25)$$

Esto implica que todas las raíces de la ecuación característica se encuentran ubicadas en el semiplano izquierdo del plano complejo, a una distancia mínima de σ

respecto al eje imaginario.

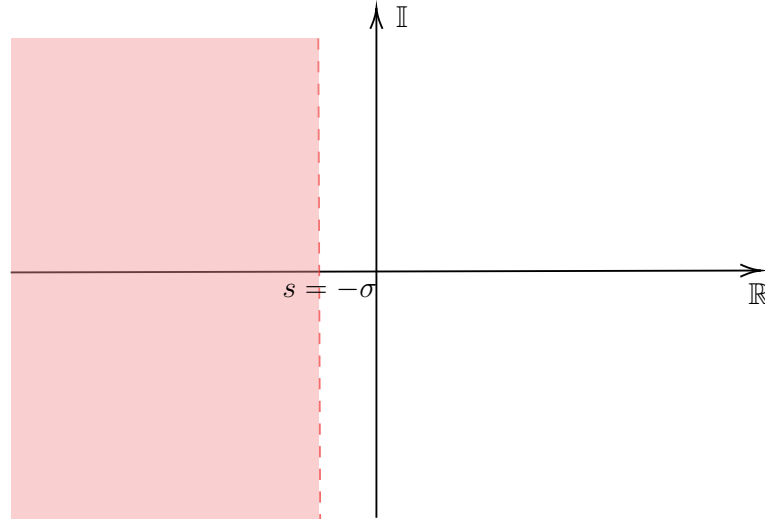


Figura 2.5: σ -estabilidad: Representación gráfica

Para estudiar la σ -estabilidad, se emplea una metodología que consiste en trasladar el eje imaginario σ unidades hacia la izquierda. Este procedimiento se realiza mediante el cambio de variable:

$$\hat{s} = s + \sigma, \quad (2.26)$$

donde $\sigma > 0$ es una constante positiva. El análisis consiste entonces en estudiar la estabilidad del cuasipolinomio transformado $P(\hat{s} - \sigma)$ con respecto al nuevo eje imaginario $s = -\sigma$.

El diseño de la σ -estabilidad está muy relacionado con el concepto de decaimiento exponencial. Al determinar las ganancias del controlador que aseguren esta propiedad, se está especificando de forma directa la tasa mínima de convergencia de la respuesta del sistema.

En términos prácticos, cuanto más alejada se ubique la raíz dominante del eje imaginario (es decir, cuanto mayor sea σ), más rápida será la convergencia de la respuesta en lazo cerrado hacia el equilibrio. Por tanto, la σ -estabilidad no sólo asegura estabilidad, sino que también establece un nivel de rendimiento temporal predefinido en la dinámica transitoria del sistema.

2.8. Curvas de Cruce

Las curvas de cruce, también conocidas como curvas de cruce de estabilidad, son otra herramienta muy utilizada en el análisis de sistemas de control. Se definen como el conjunto de todos los valores de los parámetros de un controlador (por ejemplo, k_p , k_δ , k_i o el retardo τ) para los cuales la ecuación característica del sistema en lazo cerrado posee al menos una raíz ubicada en el eje imaginario del plano complejo:

$$s = j\omega_c, \quad \omega_c \in \mathbb{R}. \quad (2.27)$$

Estas curvas dividen el espacio de parámetros en diferentes regiones, dentro de las cuales el número de raíces inestables permanece constante. De esta manera, las curvas de cruce actúan como fronteras que separan regiones estables (sin raíces en el semiplano derecho) de regiones inestables.

Definición 2.10: Curvas de cruce

A partir de la ecuación característica

$$P(s, p_1, p_2) = 0,$$

donde p_1 y p_2 representan los parámetros del sistema, se denomina curva de cruce de estabilidad $\mathcal{T}$ al conjunto de puntos $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ para los cuales al menos una raíz de la ecuación característica se localiza sobre el eje imaginario, es decir:

$$P(j\omega, p_1, p_2) = 0, \quad \omega \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

Su utilidad se fundamenta en la propiedad de continuidad de las raíces de los cuasipolinomios: cuando los parámetros del sistema varían de forma continua, las ubicaciones de sus raíces en el plano complejo también lo hacen. Como consecuencia, el número de raíces inestables sólo puede cambiar cuando una o más de ellas cruzan el eje imaginario, lo cual ocurre precisamente en estas curvas.

El estudio de las curvas de cruce mediante el método de D-descomposición permite identificar gráficamente las regiones de estabilidad e inestabilidad en el espacio de parámetros. Un aspecto esencial de este análisis es determinar la dirección en que las raíces cruzan el eje imaginario al atravesar una curva, lo que indica si el sistema gana o pierde raíces inestables, es decir, si la dinámica se desplaza hacia una condición más estable o hacia la inestabilidad.

El concepto de curvas de cruce puede extenderse al análisis de σ -estabilidad. En este caso, el eje de referencia se traslada a la recta $\text{Re}(s) = -\sigma$, de modo que las curvas de cruce σ -dependientes delimitan las regiones en las que todas las raíces del sistema se encuentran a una distancia mínima σ del eje imaginario, lo cual permite cuantificar y diseñar directamente el decaimiento exponencial deseado en la respuesta del sistema.

2.9. Observador no lineal de perturbaciones

El observador no lineal de perturbaciones fue presentado por Wen-Hua Chen y colaboradores en agosto del año 2000 [50]. En su trabajo, los autores establecieron la idea principal de este Observador de Perturbaciones No Lineal (NDO, por sus siglas en inglés) y lo aplicaron en manipuladores robóticos de dos grados de libertad para estimar la fricción de sus juntas.

El modelo general de Euler-Lagrange puede representarse como:

$$J(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = T + d \quad (2.28)$$

donde $\theta \in \mathbb{R}^n$, $\dot{\theta} \in \mathbb{R}^n$, $T(t) \in \mathbb{R}^n$ y $d \in \mathbb{R}^n$ representan los vectores de posición, velocidad, control y par de perturbación, respectivamente.

Una idea básica en el diseño de observadores/estimadores consiste en modificar la estimación a partir de la diferencia entre la salida estimada y la salida real. Dado que la ecuación (2.28) puede reescribirse como:

$$d = J(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) - T \quad (2.29)$$

se propone un observador de perturbaciones como:

$$\dot{\hat{d}} = -L(\theta, \dot{\theta})\hat{d} + L(\theta, \dot{\theta}) \left(J(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) - T \right). \quad (2.30)$$

Puesto que, en general, no se cuenta con información previa sobre la derivada de la perturbación, es razonable suponer que:

$$\dot{d} = 0, \quad (2.31)$$

lo que implica que la perturbación varíe lentamente con respecto a la dinámica del observador. No obstante, se ilustrará mediante simulaciones y experimentos que el

observador desarrollado en dicho trabajo también es capaz de seguir perturbaciones con variación rápida en el tiempo.

Defínase el error del observador como:

$$e(t) = d - \hat{d}. \quad (2.32)$$

Al combinar (2.31) con el observador dado por (2.30), se obtiene:

$$\dot{e} = \dot{d} - \dot{\hat{d}} = L(\theta, \dot{\theta})\hat{d} - L(\theta, \dot{\theta})d. \quad (2.33)$$

Es decir, la dinámica del error del observador está gobernada por:

$$\dot{e} + L(\theta, \dot{\theta})e = 0. \quad (2.34)$$

Se puede demostrar que el observador es globalmente asintóticamente estable al elegir:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \text{diag}\{c, c\}, \quad (2.35)$$

donde $c > 0$. De manera más específica, la tasa de convergencia exponencial puede ajustarse mediante la elección del parámetro c .

Observador Modificado

Defínase un vector auxiliar de variables como:

$$z = \hat{d} - p(\theta, \dot{\theta}), \quad (2.36)$$

donde $z \in \mathbb{R}^n$. La función vectorial $p(\theta, \dot{\theta})$ será determinada posteriormente.

Sea ahora la función $L(\theta, \dot{\theta})$ en (2.30) definida por la siguiente ecuación no lineal:

$$L(\theta, \dot{\theta})J(\theta)\ddot{\theta} = \left[\frac{\partial p(\theta, \dot{\theta})}{\partial \theta} \quad \frac{\partial p(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} \right] \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Al emplear (2.36) y (2.37) en conjunto con (2.30), se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \dot{\hat{d}} - \frac{dp(\theta, \dot{\theta})}{dt} \\ &= \dot{\hat{d}} - \left(\left[\frac{\partial p(\theta, \dot{\theta})}{\partial \theta} \quad \frac{\partial p(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} \right] \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \right) \\ &= -L(\theta, \dot{\theta}) \left(z + p(\theta, \dot{\theta}) \right) + L(\theta, \dot{\theta}) \left(C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta, \dot{\theta}) - T \right) \quad (2.38)\end{aligned}$$

Así, el observador no lineal de perturbaciones queda definido por:

$$\dot{z} = -L(\theta, \dot{\theta})z + L(\theta, \dot{\theta}) \left(C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta, \dot{\theta}) - T - p(\theta, \dot{\theta}) \right), \quad (2.39)$$

y

$$\hat{d} = z + p(\theta, \dot{\theta}), \quad (2.40)$$

donde $L(\theta, \dot{\theta})$ está dado por (2.37).

CAPÍTULO 3

Modelado Dinámico de Aeronave Tilt-Rotor en Vuelo No Holonómico

Las ventajas de los vuelos de tipo holonómicos y no holonómicos dependen de las necesidades, requerimientos y aplicaciones específicas del sistema. En ciertos casos, el movimiento no holonómico resulta más conveniente, lo cual puede ser más evidente en diversas aplicaciones como la robótica móvil [51] (robots diseñados para moverse en direcciones específicas y rutas predefinidas), vehículos autónomos [52] (navegación entre el tráfico y evasión de obstáculos), aeronaves [53] (para mantener una trayectoria estable durante el vuelo con un control preciso del vehículo), y vehículos submarinos [54, 55] (navegación a través de espacios estrechos y trayectorias definidas).

Uno de los principales desafíos para los vehículos VTOL (despegue y aterrizaje vertical) surge durante la fase de despegue. A medida que la aeronave asciende, los cuatro rotores, por lo general, generan una fuerza de empuje igual para mantener la estabilidad. Sin embargo, si la aeronave necesita rotar, por ejemplo, para alinearse con la dirección del viento, el giro en yaw requiere que los pares opuestos de los rotores modifiquen sus velocidades. Específicamente, dos rotores deben disminuir su velocidad mientras que los otros dos la aumentan, como se muestra en la Figura 3.1. Este ajuste puede reducir el empuje total, provocando que la aeronave pierda altitud o incluso descienda de manera inesperada. Una ventaja del vuelo no holonómico

CAPÍTULO 3. MODELADO DINÁMICO DE AERONAVE TILT-ROTOR EN VUELO NO HOLONÓMICO

es que permite a la aeronave alcanzar primero la altitud deseada y posteriormente reorientarse, evitando así este tipo de inconvenientes.

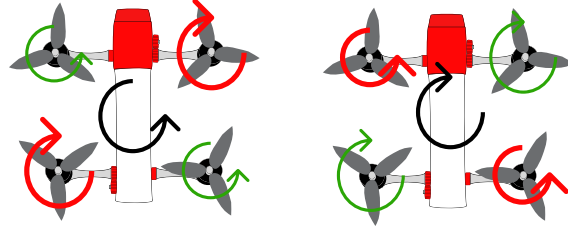


Figura 3.1: Configuración de rotores para movimiento en Yaw

Considerando las observaciones anteriores, en este trabajo se propone la adopción de una estrategia de vuelo no holonómica, enfocándose exclusivamente en el plano Q (Figura 3.2a). El enfoque planteado asume que la aeronave puede alcanzar cualquier posición, alcanzando primero el desplazamiento vertical y lateral sobre el plano Q . El análisis de la velocidad v_q y del movimiento rotacional en yaw ψ sobre el plano R , como se ilustra en la Figura 3.2b, se dejará para trabajos futuros. En el presente estudio, se evaluará específicamente el desempeño de la estrategia analizando el eje $h - z$ sobre el plano Q .

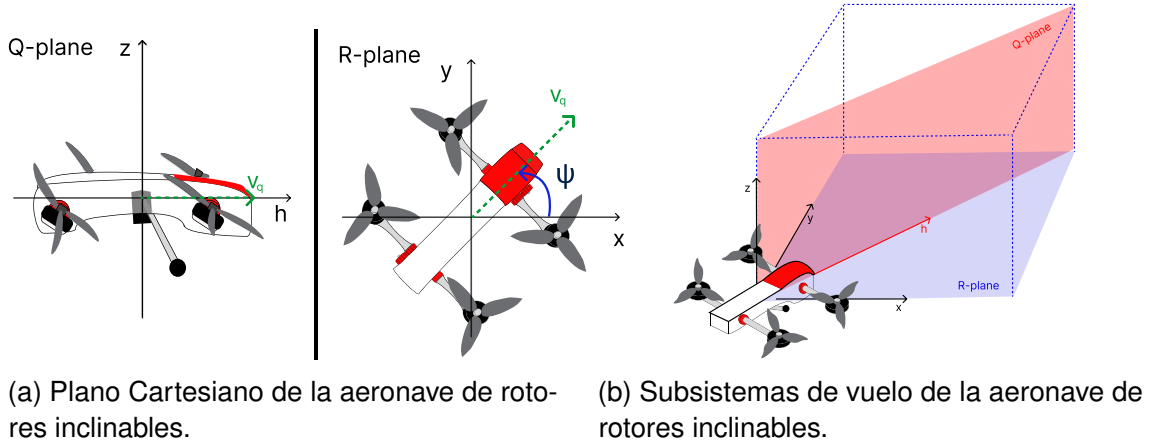


Figura 3.2: Vuelo no holonómico de la aeronave.

3.1. Vuelo no holonómico

Para poder restringir de forma los movimientos de una aeronave dentro del alcance de este estudio, se debe definir primeramente el concepto de vuelo no holonómico. El vuelo no holonómico considera restricciones específicas sobre el movimiento de la aeronave que limitan su capacidad de desplazarse libremente en todas las direcciones

simultáneamente. Al comprender y aplicar dichas restricciones, es posible dirigir y gestionar con mayor precisión la trayectoria de la aeronave, asegurando el seguimiento de una ruta predefinida mientras se mantiene la estabilidad del sistema.

Sea $\mathbf{q}_R \in \mathbb{R}^3$ el vector de coordenadas generalizadas en el plano R , y sea $\mathbf{u}_R \in \mathbb{R}^2$ el vector de entradas de control para el sistema, de modo que

$$\mathbf{q}_R := \begin{bmatrix} x \\ y \\ \psi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_R = \begin{bmatrix} u_{vq} \\ u_\psi \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

donde x y y representan las coordenadas del centro de gravedad del dron, mientras que $\psi \in \mathbb{R}$ representa la rotación alrededor del eje vertical (yaw). Considerando la Figura 3.2a, se obtienen las siguientes relaciones:

$$\dot{\mathbf{q}}_R := \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_q \cos \psi \\ v_q \sin \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Obsérvese que la ecuación (3.2) también puede escribirse como

$$\dot{\mathbf{q}}_R = \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix} v_q + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\psi}. \quad (3.3)$$

A continuación, se definen los vectores de velocidad $\mathcal{X}_1$ y $\mathcal{X}_2$ como:

$$\mathcal{X}_1 := \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{X}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

los cuales pueden considerarse como generadores de la distribución suave normal Δ , definida como

$$\Delta := \text{span} \left[\mathcal{X}_1 \quad \mathcal{X}_2 \right]. \quad (3.5)$$

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, y al calcular el corchete de Lie entre $\mathcal{X}_1$ y $\mathcal{X}_2$, se define $\mathcal{X}_3$ como

$$\mathcal{X}_3 := \left[\mathcal{X}_1 \quad \mathcal{X}_2 \right] \equiv \begin{bmatrix} \sin \psi \\ -\cos \psi \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Es evidente que $\mathcal{X}_3 \notin \Delta$. De hecho, esto se puede verificar notando que $\langle \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_3 \rangle = 0$ y $\langle \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3 \rangle = 0$, es decir,

$$\mathcal{X}_3 \perp (\mathcal{X}_1 \& \mathcal{X}_2). \quad (3.7)$$

Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema de Frobenius [56], se concluye que Δ no es involutiva, lo que implica que Δ no es integrable. En consecuencia, el sistema descrito por la ecuación (3.2) es no holonómico.

3.2. Coordenadas generalizadas y entradas de control

Las coordenadas generalizadas servirán para caracterizar la cinemática de un cuadricóptero de rotores basculantes interactivo. Su definición permite una representación del comportamiento dinámico de la aeronave, particularmente durante la ejecución de tareas de seguimiento dentro del plano Q . El modelo dinámico formulado de acuerdo a este enfoque permite representar los movimientos espaciales del UAV, sus rotaciones y la dinámica de movimiento de su brazo robótico de un grado de libertad, representado visualmente en la Figura 3.3c. Así, se pueden definir las siguientes coordenadas generalizadas $\mathbf{q}$ como

$$\mathbf{q} := \begin{bmatrix} h \\ z \\ \theta \\ \gamma \end{bmatrix},$$

donde $h, z \in \mathbb{R}$ representan los desplazamientos lateral y vertical, respectivamente. De manera similar, las variables $\theta, \gamma \in \mathbb{R}$, representan la inclinación de la aeronave y el movimiento del brazo robótico, respectivamente.

La configuración de rotores basculantes da lugar a un vehículo aéreo completamente actuado, por lo tanto, las entradas de control se denotan como

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} u_h \\ u_z \\ u_\theta \\ u_\gamma \end{bmatrix},$$

donde cada entrada contribuye a la dinámica de vuelo del cuadricóptero. La relación entre las entradas de control y el empuje generado por cada rotor puede describirse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} u_h \\ u_z \\ u_\theta \\ u_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \sin(\theta + \beta) \\ T \cos(\theta + \beta) \\ (T_1 - T_2 + T_3 - T_4)\ell_r \cos(\theta + \beta) \\ f_p l_p \end{bmatrix},$$

donde β es el ángulo de inclinación de los rotores, ℓ_r representa la distancia desde el centro de gravedad del dron hasta cada rotor, f_p denota la fuerza ejercida por el brazo robótico, l_p indica la distancia desde el centro de gravedad del dron hasta el punto donde el brazo robótico aplica la fuerza, $T := T_1 + T_2 + T_3 + T_4$, y $T_j \in \mathbb{R}$ con $j \in 1, 2, 3, 4$ representa el empuje generado por cada rotor individual.

3.3. Modelo dinámico mediante el enfoque de Euler-Lagrange

Las Figuras 3.3a–3.3c muestran la configuración del cuadricóptero con rotores inclinables donde se hace evidente que al incorporar dos subsistemas interconectados se puede lograr de manera efectiva la tarea de seguimiento con tareas de agarre. Estos subsistemas se modelan considerando la propiedad aditiva del lagrangiano. En consecuencia, el análisis se centra inicialmente en el sistema del cuadricóptero y, posteriormente, en el sistema del brazo robótico, analizado y modelado como un péndulo. En este sentido, considérese que m_r y $m_p \in \mathbb{R}_+$ representan las masas del cuadricóptero y del péndulo, respectivamente. La rotación del dron se representa por $\theta \in \mathbb{R}$, el empuje total por $T \in \mathbb{R}$, y la posición angular del péndulo por $\gamma \in \mathbb{R}$.

Energía cinética

Para el modelado de la aeronave de acuerdo al formalismo de Euler-Lagrange, considérese primero la energía cinética del cuadricóptero $\mathcal{T}_r$, la cual se expresa como:

$$\mathcal{T}_r = \frac{1}{2}m_r \dot{h}^2 + \frac{1}{2}m_r \dot{z}^2 + \frac{1}{2}I_r \dot{\theta}^2, \quad (3.8)$$

donde h y $z \in \mathbb{R}$ representan la posición del cuadricóptero con respecto al marco inercial e $I_r \in \mathbb{R}$ denota el momento de inercia del cuadricóptero.

Para describir la energía cinética del brazo robótico, es necesario considerar la ubicación del dispositivo interactivo de agarre. Al hacerlo, dicha posición puede

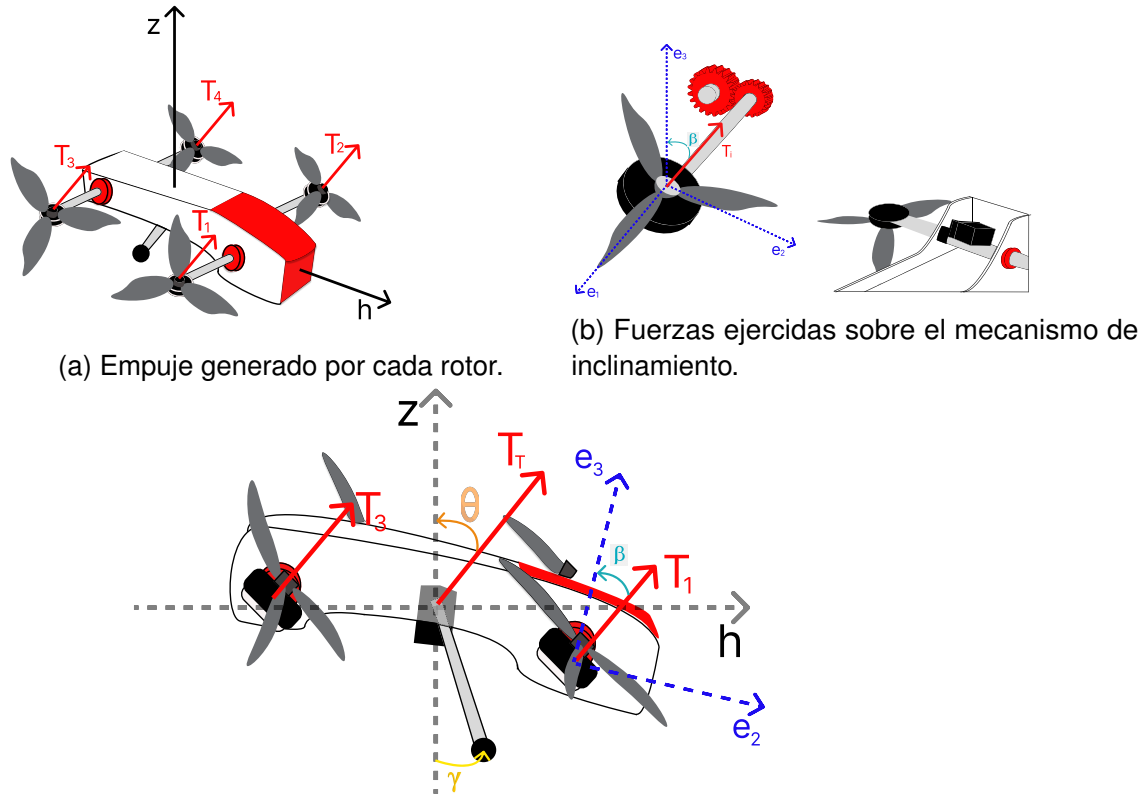


Figura 3.3: Fuerzas ejercidas sobre el UAV de rotores basculantes.

determinarse considerando la posición del efector final, lo que conduce a:

$$h_p := h + l_p \sin(\theta + \gamma), \quad (3.9)$$

$$z_p := z - l_p \cos(\theta + \gamma), \quad (3.10)$$

donde h_p y z_p son las coordenadas del efector final y l_p es la longitud del brazo robótico.

Bajo estas observaciones, la energía cinética del brazo robótico se expresa como:

$$\mathcal{T}_p = \frac{1}{2} m_p \dot{h}_p^2 + \frac{1}{2} m_p \dot{z}_p^2. \quad (3.11)$$

Por lo tanto, considerando (3.9) y (3.10), la energía cinética puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_p = & \frac{1}{2} m_p \dot{h}^2 + \frac{1}{2} m_p \dot{z}^2 + m_p l_p \cos(\theta + \gamma) \dot{h}(\dot{\theta} + \dot{\gamma}) \\ & + m_p l_p \sin(\theta + \gamma) \dot{z}(\dot{\theta} + \dot{\gamma}) + \frac{1}{2} I_p (\dot{\theta} + \dot{\gamma})^2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde $I_p := m_p l_p^2$ denota el momento de inercia del brazo.

Por consiguiente, la energía cinética total del sistema ($\mathcal{T}_T$) puede derivarse considerando la energía cinética del rotorcraft $\mathcal{T}_r$ y la del brazo robótico $\mathcal{T}_p$, de modo que:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_T &= \mathcal{T}_r + \mathcal{T}_p, \\ \therefore \mathcal{T}_T &= \frac{1}{2}(m_r + m_p)\dot{h}^2 + \frac{1}{2}(m_r + m_p)\dot{z}^2 + m_p l_p \cos(\theta + \gamma)\dot{h}(\dot{\theta} + \dot{\gamma}) \\ &+ m_p l_p \sin(\theta + \gamma)\dot{z}(\dot{\theta} + \dot{\gamma}) + \frac{1}{2}I_r\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_p(\dot{\theta} + \dot{\gamma})^2.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Energía Potencial

A continuación, se calcula la energía potencial del sistema. Comenzando con la energía potencial del subsistema de la aeronave, que se expresa como:

$$\mathcal{U}_r = m_r g z, \quad (3.14)$$

donde g representa la gravedad.

La expresión de la energía potencial para el brazo robótico requiere considerar la posición de su centro de gravedad con respecto a la posición de la aeronave considerado en la ecuación (3.10). Una vez considerada esta observación, la energía potencial se describe como:

$$\mathcal{U}_p = m_p g (z - l_p \cos(\theta + \gamma)). \quad (3.15)$$

Por lo tanto, la energía potencial total del sistema se puede expresar como la suma de las energías potenciales de los subsistemas de la aeronave y del brazo robótico, por lo que está dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_T &= \mathcal{U}_r + \mathcal{U}_p, \\ \therefore \mathcal{U}_T &= (m_r + m_p) g z - m_p g l_p \cos(\theta + \gamma).\end{aligned}\quad (3.16)$$

Lagrangiano

El Lagrangiano del sistema se define como la diferencia entre la energía cinética total y la energía potencial total previamente determinadas. En las secciones anteriores se detalló la obtención de la energía cinética de la aeronave y del brazo robótico,

CAPÍTULO 3. MODELADO DINÁMICO DE AERONAVE TILT-ROTOR EN VUELO NO HOLONÓMICO

así como la correspondiente energía potencial asociada a su configuración. Asimismo, se introdujeron las coordenadas generalizadas seleccionadas para describir adecuadamente la dinámica del sistema, con lo cual es posible proceder a la construcción explícita del funcional lagrangiano.

De esta manera, al sustituir las expresiones de energía cinética (3.13) y energía potencial (3.16) en la definición estándar (2.3) y considerando la dependencia geométrica y cinemática entre los grados de libertad descritos, se obtiene la siguiente expresión para el Lagrangiano del sistema:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} (m_r + m_p) (\dot{h}^2 + \dot{z}^2) + m_p l_p (\dot{\theta} + \dot{\gamma}) \left[\cos(\theta + \gamma) \dot{h} + \sin(\theta + \gamma) \dot{z} \right] \\ & + \frac{1}{2} I_r \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_p (\dot{\theta} + \dot{\gamma})^2 - (m_r + m_p) g z + m_p g l_p \cos(\theta). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Esta ecuación integra las contribuciones inerciales y gravitacionales del cuadricóptero interactivo, así como los acoplamientos cinemáticos que surgen debido a la dependencia entre los movimientos de traslación y rotación. Esta formulación será el punto de partida para el desarrollo de las ecuaciones dinámicas mediante la aplicación directa de las ecuaciones de Euler–Lagrange, permitiendo obtener un modelo matemático del sistema.

Formalismo de Euler-Lagrange

A partir del Lagrangiano obtenido en (3.17), es posible proceder a la formulación explícita de las ecuaciones de movimiento del sistema. Para ello, se emplean las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.11), las cuales permiten incorporar de manera sistemática las contribuciones inerciales, gravitacionales y de acoplamiento presentes en la dinámica. A continuación, se presenta el desarrollo detallado de cada uno de los términos involucrados, siguiendo un proceso ordenado que permite obtener finalmente la representación matricial estándar de la dinámica.

Dado el vector de coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = [h, z, \theta, \gamma]^\top$, las derivadas

parciales del Lagrangiano $\mathcal{L}$ con respecto a cada coordenada se obtienen como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= -(m_r + m_p)g, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= -\dot{h}(\dot{\gamma} + \dot{\theta})m_p l_p \sin(\gamma + \theta) + \dot{z}(\dot{\gamma} + \dot{\theta})m_p l_p \cos(\gamma + \theta) - m_p g l_p \sin(\gamma + \theta), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} &= -\dot{h}(\dot{\gamma} + \dot{\theta})m_p l_p \sin(\gamma + \theta) + \dot{z}(\dot{\gamma} + \dot{\theta})m_p l_p \cos(\gamma + \theta) - m_p g l_p \sin(\gamma + \theta),\end{aligned}$$

Obsérvese que las expresiones para $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma}$ presentan la misma estructura, consecuencia directa de que ambas coordenadas participan mediante la combinación angular $\gamma + \theta$.

Las derivadas respecto de las velocidades $\dot{q}$ se obtienen como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}} &= (m_r + m_p)\dot{h} + (\dot{\gamma} + \dot{\theta})m_p l_p \cos(\gamma + \theta), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} &= (m_r + m_p)\dot{z} + (\dot{\gamma} + \dot{\theta})m_p l_p \sin(\gamma + \theta), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= I_r \dot{\theta} + \dot{h}m_p l_p \cos(\gamma + \theta) + \dot{z}m_p l_p \sin(\gamma + \theta) + m_p l_p^2(\dot{\gamma} + \dot{\theta}), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}} &= \dot{h}m_p l_p \cos(\gamma + \theta) + \dot{z}m_p l_p \sin(\gamma + \theta) + m_p l_p^2(\dot{\gamma} + \dot{\theta})\end{aligned}$$

Aplicando la regla de la cadena para cada término:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}} \right) &= (m_r + m_p)\ddot{h} + (\ddot{\gamma} + \ddot{\theta})m_p l_p \cos(\gamma + \theta) - (\dot{\gamma} + \dot{\theta})^2 m_p l_p \sin(\gamma + \theta), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) &= (m_r + m_p)\ddot{z} + (\ddot{\gamma} + \ddot{\theta})m_p l_p \sin(\gamma + \theta) + (\dot{\gamma} + \dot{\theta})^2 m_p l_p \cos(\gamma + \theta), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= I_r \ddot{\theta} + \ddot{h}m_p l_p \cos(\gamma + \theta) - \dot{h}(\dot{\gamma} + \dot{\theta})m_p l_p \sin(\gamma + \theta) + \ddot{z}m_p l_p \sin(\gamma + \theta) \\ &\quad + \dot{z}(\dot{\gamma} + \dot{\theta})m_p l_p \cos(\gamma + \theta) + m_p l_p^2(\ddot{\gamma} + \ddot{\theta}), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}} \right) &= \ddot{h}m_p l_p \cos(\gamma + \theta) + \dot{h}(\dot{\gamma} + \dot{\theta})m_p l_p \sin(\gamma + \theta) + \ddot{z}m_p l_p \sin(\gamma + \theta) \\ &\quad + \dot{z}(\dot{\gamma} + \dot{\theta})m_p l_p \cos(\gamma + \theta) + m_p l_p^2\ddot{\gamma} + m_p l_p^2\ddot{\theta}.\end{aligned}$$

Sustituyendo ahora cada uno de los términos anteriores en

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = u_i,$$

CAPÍTULO 3. MODELADO DINÁMICO DE AERONAVE TILT-ROTOR EN VUELO NO HOLONÓMICO

y agrupando los términos que multiplican a las aceleraciones $\ddot{\mathbf{q}}$, se obtiene la estructura típica del sistema mecánico:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}. \quad (3.18)$$

La matriz de inercia $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ se obtiene recolectando los coeficientes de las aceleraciones:

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_r + m_p & 0 & m_p l_p \cos(\gamma + \theta) & m_p l_p \cos(\gamma + \theta) \\ 0 & m_r + m_p & m_p l_p \sin(\gamma + \theta) & m_p l_p \sin(\gamma + \theta) \\ m_p l_p \cos(\gamma + \theta) & m_p l_p \sin(\gamma + \theta) & I_r + m_p l_p^2 & m_p l_p^2 \\ m_p l_p \cos(\gamma + \theta) & m_p l_p \sin(\gamma + \theta) & m_p l_p^2 & m_p l_p^2 \end{bmatrix}.$$

Los términos no lineales en las velocidades, después de simplificar las cancelaciones provenientes de las ecuaciones angulares, se agrupan en:

$$C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_p l_p \sin(\theta + \gamma) (\dot{\theta} + \dot{\gamma}) & -m_p l_p \sin(\theta + \gamma) (\dot{\theta} + \dot{\gamma}) \\ 0 & 0 & m_p l_p \cos(\theta + \gamma) (\dot{\theta} + \dot{\gamma}) & m_p l_p \cos(\theta + \gamma) (\dot{\theta} + \dot{\gamma}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, los términos debidos a la gravedad se encapsulan en:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ (m_r + m_p)g \\ m_p g l_p \sin(\theta) \\ m_p g l_p \sin(\theta) \end{bmatrix}.$$

Observación 3.1: Propiedades de las matrices de Euler-Lagrange

De acuerdo con la formulación clásica en sistemas mecánicos no lineales, al emplear los coeficientes de Christoffel es posible establecer relaciones fundamentales entre la matriz centrífuga–coriolica $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y la derivada temporal de la matriz de inercia $\dot{M}(\mathbf{q})$. En particular, dichas cantidades satisfacen la identidad

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} = 0, \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n,$$

la cual garantiza la conservación de energía asociada a los términos no lineales del sistema. Asimismo, se cumple la relación simétrica

$$\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T, \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n,$$

que resulta útil para la verificación estructural del modelo dinámico y para la implementación de controladores.

CAPÍTULO 4

Diseño y Análisis de Controladores Retardados y Observadores No Lineales

Los cuadricópteros interactivos dependen de estrategias de control para lograr un seguimiento preciso de trayectorias y ejecutar planes de movimiento complejos con desviaciones mínimas. En este estudio se propone un enfoque basado en retardos para abordar los desafíos del seguimiento de trayectorias en cuadricópteros con rotores basculantes. Basándose en trabajos previos [57], el sistema dinámico del cuadricóptero, descrito en (3.18), se reformula mediante un cambio de variables $\tilde{q} := q - q_d$, donde q_d representa una trayectoria deseada suave.

A partir de este nuevo sistema de coordenadas, se desarrolla una ley de control que garantiza tanto la estabilidad como el cumplimiento de los objetivos de control mediante la aplicación de principios de control no lineal. La entrada de control se expresa como:

$$u(\dot{q}, q) = M(q)[\ddot{q}_d + M(q)^{-1}[C(\dot{q}, q)\dot{q} + g(q)] - K\dot{\tilde{q}} - K_\zeta(\dot{\tilde{q}} + K\tilde{q})], \quad (4.1)$$

donde las matrices definidas positivas K y $K_\zeta \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ se emplean para ajustar las ganancias de retroalimentación y asegurar un desempeño robusto.

Con el propósito de mejorar el rendimiento del controlador, se aplica la teoría de retardos en sistemas autónomos, aproximando la derivada mediante una versión

retardada de la variable. Este enfoque elimina las desventajas asociadas al término derivativo y conduce a un mejor seguimiento de trayectoria, como se demostrará en los resultados presentados en la siguiente subsección.

4.1. El Controlador $P\delta$

Considerando la entrada de control (4.1), se desarrolla a continuación un control basado en retardos. El planteamiento de esta ley de control se motiva en las ventajas obtenidas al sustituir la derivada temporal del estado por estados retardados. De acuerdo con trabajos previos [49], algunas ventajas de los controladores basados en retardos son las siguientes:

- Se añade un grado adicional de libertad, es decir, un parámetro que puede modificarse para mejorar el desempeño.
- Aumenta la robustez frente a errores de sensado.

Proposición 4.1: Controlador proporcional retardado

Sea q_d una trayectoria deseada suficientemente suave, $\tau > 0$ un retardo fijo, y sea $\tilde{q}_\tau := \tilde{q}(t - \tau)$ la dinámica de error retardada. Considérese el sistema (3.18) en lazo cerrado con el control

$$u(\dot{q}, q) = M(q) \left[\ddot{q}_d - K_p \tilde{q} - K_\tau \tilde{q}_\tau \right] + C(\dot{q}, q) \dot{q} + g(q), \quad (4.2)$$

donde K_p y K_τ son matrices diagonales reales definidas como $K_p \triangleq \text{diag}\{k_{p1}, \dots, k_{p4}\}$ y $K_\tau \triangleq \text{diag}\{k_{\tau1}, \dots, k_{\tau4}\}$. Para $j \in \{1, \dots, 4\}$ y $n \in \mathbb{N}$, se asume que las ganancias k_{pj} y $k_{\tau j}$ se eligen de manera que satisfagan las siguientes desigualdades:

$$0 < k_{pj}, \quad (4.3)$$

$$0 < k_{\tau j} < \frac{4n - 1}{8n^2 - 4n + 1} k_{pj}, \quad (4.4)$$

$$\frac{(2n - 1)\pi}{\sqrt{k_{pj} - k_{\tau j}}} < \tau < \frac{2n\pi}{\sqrt{k_{pj} + k_{\tau j}}}. \quad (4.5)$$

Entonces, el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable.

Demostración. Primero, obsérvese que al elegir la ley de control (4.2), el lazo cerrado del sistema (3.18) puede expresarse como:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{q}}_d - K_p\tilde{\mathbf{q}} - K_\tau\tilde{\mathbf{q}}_\tau] + C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}),$$

lo cual, considerando las definiciones de $\tilde{\mathbf{q}}$ y $\tilde{\mathbf{q}}_d$, se reescribe como:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) + K_p\tilde{\mathbf{q}}(t) + K_\tau\tilde{\mathbf{q}}(t - \tau) = 0. \quad (4.6)$$

Por tanto, de acuerdo con la Proposición 2.2, el sistema (3.18) en lazo cerrado con la ley de control (4.2) será asintóticamente estable siempre que el cuasipolinomio j -ésimo

$$f_j(s; k_{pj}, k_{\tau j}, \tau) = s^2 + k_{pj} + k_{\tau j}e^{-\tau s}, \quad (4.7)$$

tenga todas sus raíces en el semiplano izquierdo del plano complejo (LHP) para todo $j \in \{1, \dots, 4\}$.

Suponiendo que $(k_{pj}, k_{\tau j}, \tau)$ satisfacen (4.3)–(4.5), esto implica en particular que $k_{pj}, k_{\tau j} \in \mathbb{R}_+$ y $\tau \geq 0$. Considerando estos factores, obsérvese que para $\tau = 0$, el cuasipolinomio (4.7) es críticamente estable, ya que f_j posee dos soluciones en $\pm i\sqrt{k_{pj} + k_{\tau j}}$. A fin de analizar la estabilidad de f_j , con base en la Proposición 2.1, se expresa s como función de τ , es decir, $s(\tau)$ en la vecindad de $\tau^* = 0$. Para tal propósito, se tiene que para todos los valores críticos¹ el diferencial total debe anularse, y por tanto:

$$df_j = \frac{\partial f_j}{\partial s} ds + \frac{\partial f_j}{\partial \tau} d\tau = 0. \quad (4.8)$$

De aquí,

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{k_{\tau j} s e^{-\tau s}}{2s - \tau k_{\tau j} e^{-\tau s}}. \quad (4.9)$$

El comportamiento de $s(\tau)$ en un valor crítico $s_0 \in \mathbb{C}$, a medida que τ atraviesa τ_0 en dirección creciente, puede analizarse mediante la función $\mathcal{C}$ definida como:

$$\mathcal{C}(s; \tau, k_{\tau j}) := \Re \left(\frac{k_{\tau j} s e^{-\tau s}}{2s - \tau k_{\tau j} e^{-\tau s}} \right). \quad (4.10)$$

De lo anterior, se deduce que si $\mathcal{C}(s_0; \tau_0, k_{\tau j}) > 0$, entonces $s(\tau)$ favorece la inestabilidad para $\tau > \tau_0$, o la estabilidad si la desigualdad es inversa, es decir, si

¹En esta nota, se entiende por *valores críticos* (o parámetros críticos) aquellos (k_p, k_τ, τ) para los cuales existe un $\omega \in \mathbb{R}$ tal que $f(i\omega; k_p, k_\tau, \tau) = 0$. De manera análoga, se denomina *soluciones críticas* a los valores puramente imaginarios $s = i\omega$ que satisfacen dicha condición.

CAPÍTULO 4. DISEÑO Y ANÁLISIS DE CONTROLADORES RETARDADOS Y OBSERVADORES NO LINEALES

$\mathcal{C}(s_0; \tau_0, k_{\tau j}) < 0$ para $\tau > \tau_0$. Considerando estas observaciones, para $s_0 = i\sqrt{k_{pj} + k_{\tau j}}$ y $\tau_0 = 0$, se tiene:

$$\mathcal{C}(s_0; 0, k_{\tau j}) = \frac{k_{\tau j}}{2} \xrightarrow{\text{dado que } k_{\tau j} > 0} \mathcal{C}(s_0; 0, k_{\tau j}) > 0.$$

En consecuencia, considerando las Proposiciones 2.1–2.2, se sabe que para valores fijos $(k_{pj}^*, k_{\tau j}^*)$ existe un $\tau_1 > 0$ tal que, para todo $\tau \in (0, \tau_1)$, el cuasipolinomio $f_j(s; k_{pj}^*, k_{\tau j}^*, \tau)$ tiene dos soluciones en el semiplano derecho (RHP). Para determinar los posibles cambios de estabilidad a medida que el retardo aumenta, deben identificarse todos los retardos críticos (incluyendo τ_1) y analizar cuál de ellos corresponde a un cambio de estabilidad. Para ello, se considera la ecuación

$$\begin{aligned} f_j(i\omega; k_{pj}, k_{\tau j}, \tau) &= 0, \\ \Leftrightarrow -\omega^2 + k_{pj} + k_{\tau j}e^{-i\tau\omega} &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

De (4.11) se obtiene que las soluciones críticas s_n^* y los retardos críticos τ_n^* están dados por:

$$s_n^* = i\omega_n^* \equiv i\sqrt{k_{pj} + (-1)^n k_{\tau j}}, \quad (4.12)$$

$$\tau_n^* = \frac{n\pi}{\sqrt{k_{pj} + (-1)^n k_{\tau j}}}. \quad (4.13)$$

Satisfacer las desigualdades (4.4)–(4.5) garantiza la existencia de soluciones factibles, es decir, $\omega_n^*, \tau_n^* \in \mathbb{R}_+$. Así, para verificar si estos retardos críticos pueden inducir cambios de estabilidad en $s = i\omega_m^*$, se sustituyen los valores $s_0 = s_n^*$ y τ_n^* en $\mathcal{C}$, obteniéndose:

$$\mathcal{C}(s_n^*; \tau_n^*, k_{\tau j}) = \frac{2k_{\tau j}\omega_n^*(-1)^n}{4(\omega_n^*)^2 + (k_{\tau j}\tau_n^*)^2}. \quad (4.14)$$

De esta expresión se tiene que

$$\text{sign}(\mathcal{C}(s_n^*; \tau_n^*, k_{\tau j})) = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 2\ell - 1, \\ +1 & \text{si } n = 2\ell, \end{cases} \quad (4.15)$$

para $\ell \in \mathbb{N}$. Además, obsérvese que existen únicamente dos soluciones críticas $s_{2\ell}^*$ y $s_{2\ell-1}^*$, lo que implica que $s(\tau)$ puede cruzar del semiplano derecho (RHP) al semiplano izquierdo (LHP) (o viceversa) únicamente por uno de estos dos puntos. De acuerdo con lo anterior, se tiene que en el RHP $\text{card}(f_j) = 2$ para $\tau \in (0, \tau_1^*)$, y según (4.15), $\mathcal{C}(s_{2\ell-1}^*; \tau_{2\ell-1}^*, k_{\tau j}) < 0$ para $\ell \in \mathbb{N}$, indicando que $\text{card}(f_j) = 0$ para

todo $\tau \in (\tau_{2\ell-1}, \tau_{2\ell})$ con $\ell \in \mathbb{N}$. Esto completa la demostración. ■

Regiones de estabilidad

Es importante mencionar que el resultado anterior únicamente describe una solución parcial del conjunto completo de parámetros estabilizantes $(k_{pj}, k_{\tau j}, \tau)$. En este sentido, las regiones restantes de estabilización se describen mediante el siguiente resultado.

Corolario 4.1: Regiones de estabilidad

Sea q_d una trayectoria deseada suficientemente suave y $\tau > 0$ un retardo fijo. Considérese el sistema (3.18) en lazo cerrado con (4.2). Para $j \in \{1, \dots, 4\}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, supóngase que las ganancias k_{pj} y $k_{\tau j}$ de las matrices diagonales K_p y K_τ en (4.2) se eligen de modo que satisfacen las siguientes desigualdades:

$$k_{\tau j} < 0, \quad (4.16)$$

$$|k_{\tau j}| < \frac{4n+1}{8n^2+4n+1} k_{pj}, \quad (4.17)$$

$$\frac{2n\pi}{\sqrt{k_{pj} + k_{\tau j}}} < \tau < \frac{(2n+1)\pi}{\sqrt{k_{pj} - k_{\tau j}}}. \quad (4.18)$$

Entonces, el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable.

Demostración. La demostración se obtiene siguiendo pasos similares a los presentados en el resultado anterior. ■

Aunque la Proposición 4.1 y el Corolario 4.1 permiten calcular el conjunto completo de controladores estabilizantes, ambos resultados no proporcionan información acerca de la tasa de convergencia de las soluciones. En este sentido, una de las principales herramientas para diseñar un controlador que garantice una tasa de convergencia deseada es la noción de σ -estabilidad.

σ -estabilidad

Para establecer dicha noción, sea $\sigma \in \mathbb{R}_+$. Entonces, el problema de σ -estabilidad puede describirse como la tarea de determinar las ganancias del controlador $k_j := (k_{pj}, k_{\tau j})$ para las cuales la parte real de las raíces más a la derecha de la función característica (4.7) del sistema en lazo cerrado sea menor que $-\sigma$.

Con el propósito de presentar una descripción completa de tales controladores, denótese por $\mathcal{T}_\sigma$ al conjunto de todas las ganancias $\mathbf{k}_j$ tales que la función (4.7) posee al menos una solución sobre la línea vertical del plano complejo definida como $\mathbf{L}_\sigma := \{s \in \mathbb{C} : \Re[s] = -\sigma\}$

Por la propiedad de continuidad de las raíces (Proposición 2.1), se sabe que el conjunto $\mathcal{T}_\sigma$ describe una curva en el espacio de parámetros $\mathbf{k}_j$. Por esta razón, en adelante se hará referencia a dicho conjunto como las curvas de cruce de σ -estabilidad.

De manera similar, se introduce el conjunto Ω_σ como el conjunto de todas las soluciones $s \in \mathbf{L}_\sigma$ para las cuales existe al menos una ganancia $\mathbf{k}_j^*$ que satisface $f_j(s; \mathbf{k}_j^*) \equiv 0$. En lo que sigue, dicho conjunto se denominará conjunto de frecuencias.

Como puede observarse a partir de la Proposición 4.2, el conjunto Ω_σ está dado por

$$\Omega_\sigma := \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{(\ell-1)\pi}{\tau}, \frac{\ell\pi}{\tau} \right).$$

Proposición 4.2: Conjunto de frecuencias

Sea $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $\omega \in \Omega_\sigma$ y $\tau \in \mathbb{R}_+$ un retardo fijo. Entonces, las curvas de cruce de σ -estabilidad $\mathcal{T}_\sigma$ pueden calcularse como

$$\mathcal{T}_\sigma = \mathcal{T}_{\bar{\sigma}} \cup \mathcal{T}_{\sigma,0}, \quad (4.19)$$

donde

$$\mathcal{T}_{\sigma,0} := \{ \mathbf{k}_j \in \mathbb{R}^2 : k_{pj} + e^{\sigma\tau} k_{\tau j} = -\sigma^2 \}, \quad (4.20)$$

$$\mathcal{T}_{\bar{\sigma}} := \{ \mathbf{k}_j \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{k}_j = \mathbf{k}_{\sigma j}(\sigma, \omega) \}, \quad (4.21)$$

donde $\mathbf{k}_{\sigma j}(\sigma, \omega) := [k_{pj}(\sigma, \omega), k_{\tau j}(\sigma, \omega)]^\top$, con $k_{pj}(\sigma, \omega)$ y $k_{\tau j}(\sigma, \omega)$ definidos por

$$k_{pj}(\sigma, \omega) = -\sigma^2 + 2\sigma\omega \cot(\tau\omega) + \omega^2, \quad (4.22)$$

$$k_{\tau j}(\sigma, \omega) = -2\sigma\omega e^{-\sigma\tau} \csc(\tau\omega). \quad (4.23)$$

Demostración. Considérese el cuasipolinomio f_j dado en (4.7). Para un j dado, es

claro que todos los pares $k_{\sigma j} \in \mathcal{T}_\sigma$ satisfacen simultáneamente las ecuaciones:

$$\Re[f_j(-\sigma + i\omega; k_{pj}, k_{\tau j}, \tau)] = 0, \quad (4.24)$$

$$\Im[f_j(-\sigma + i\omega; k_{pj}, k_{\tau j}, \tau)] = 0, \quad (4.25)$$

para $s = -\sigma + i\omega$ con $\omega > 0$. Mediante manipulaciones algebraicas apropiadas, puede verse que la solución de las ecuaciones anteriores para k_{pj} y $k_{\tau j}$ conduce a (4.22) y (4.23). De manera similar, al considerar $s = -\sigma$ (es decir, para $\omega = 0$ en (4.7) se obtiene $\mathcal{T}_{\sigma,0}$ en (4.20). Finalmente, la demostración concluye al notar que cualquier solución de (4.24)-(4.25) está bien definida si y sólo si $\omega \in \Omega_\sigma$. ■

Corolario 4.2: Valor de σ máximo

Sea $\tau > 0$ un valor fijo, y considérese la misma hipótesis de la Proposición 4.2. Entonces, la máxima σ -estabilidad (σ_{max}) que puede alcanzar el sistema en lazo cerrado está dada por

$$\sigma_{max} := \frac{1}{\tau}. \quad (4.26)$$

Además, dicho valor se alcanza si k_{pj} y $k_{\tau j}$ se eligen como

$$k_{pj} = \frac{1}{\tau^2}, \quad (4.27)$$

$$k_{\tau j} = -\frac{2}{e\tau^2}. \quad (4.28)$$

La Proposición 4.2 permite derivar un subconjunto del espacio de parámetros (k_p, k_τ) que garantiza una tasa de decaimiento prescrita. Asimismo, el Corolario 4.2 describe la tasa máxima de decaimiento alcanzable para un retardo dado $\tau > 0$. Además, este resultado establece los valores que deben tomar los parámetros (k_p, k_τ) .

Por otro lado, es importante mencionar que existe un compromiso natural entre la σ -estabilidad y el esfuerzo de control. En particular, un valor más alto de σ corresponde a un mayor esfuerzo de control.

4.2. El Controlador $P\delta I$

A continuación, se propone un segundo enfoque de control basado en retardo que garantiza un movimiento preciso y desviaciones mínimas. Como se ha mencionado anteriormente, los controladores basados en retardo ofrecen la ventaja de incluir un parámetro adicional de grado de libertad que puede ajustarse para mejorar el

CAPÍTULO 4. DISEÑO Y ANÁLISIS DE CONTROLADORES RETARDADOS Y OBSERVADORES NO LINEALES

desempeño. Basándonos en trabajos previos [37], reformulamos la dinámica del quadrotor (3.18) mediante un cambio de variables que estará denotado por $\tilde{\mathbf{q}} := \mathbf{q} - \mathbf{q}_d$, donde $\mathbf{q}_d$ es una referencia suave.

Al aprovechar este sistema transformado y aplicar principios de control no lineal, se desarrolla una ley de control que garantiza tanto la estabilidad como un seguimiento preciso de la trayectoria. La entrada de control para esta ley se puede expresar como:

$$\mathbf{u}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \mathbf{M}(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{q}}_d - K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_i \tilde{\mathbf{q}}_\tau] + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}), \quad (4.29)$$

donde $K_p, K_i \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ son las ganancias proporcional e integral del controlador P δ I [58], y $\tilde{\mathbf{q}}_\tau := \int_0^t \tilde{\mathbf{q}}(v - \tau) dv$. Considerando la ecuación dinámica (3.18) y sustituyendo la entrada de control (4.29), se obtiene la función de transferencia del sistema a estabilizar representada por

$$G(s) := \frac{1}{s^2}. \quad (4.30)$$

Considerando el uso del controlador P δ I, la ley de control correspondiente a este esquema puede describirse como:

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(v - \tau) dv, \quad \tau > 0. \quad (4.31)$$

Así, la función de transferencia del controlador P δ I es

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} e^{-\tau s}$$

Para estudiar su estabilidad, la ecuación característica del sistema en lazo cerrado se reescribe como $C(s)G(s) + 1 = 0$, lo que conduce a:

$$\Delta(s; k_p, k_i, \tau) := s^3 + k_p s + k_i e^{-\tau s}. \quad (4.32)$$

En primer lugar, para sintonizar el controlador P δ I, debe garantizarse que el sistema sea estable en lazo cerrado; por lo tanto, se presenta el siguiente resultado.

Proposición 4.3: Condiciones de estabilidad

Sea q_d una trayectoria deseada adecuadamente suave y τ un retardo fijo. Considere el sistema (3.18) en lazo cerrado con el control (4.29),

$$u(\dot{q}, q) = M(q) \left[\ddot{q}_d - K_p \tilde{q} - K_i \int_0^t \tilde{q}_\tau \right] + C(\dot{q}, q) \dot{q} + g(q), \quad (4.33)$$

donde K_p y K_i son matrices diagonales reales definidas como $K_p := \text{diag}\{k_{p_1}, \dots, k_{p_4}\}$, $K_i := \text{diag}\{k_{i_1}, \dots, k_{i_4}\}$. Para $j \in \{1, \dots, 4\}$ y $\ell \in \mathbb{N}$, se asume que las ganancias k_{p_j} y k_{i_j} se eligen de forma que satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\tau > 0, \quad (4.34)$$

$$\left(\frac{(2\ell - 1)\pi}{2\tau} \right)^2 < k_{p_j} < \left(\frac{(2\ell + 1)\pi}{2\tau} \right)^2, \quad (4.35)$$

$$0 < k_{i_j} < k_{p_j} \left(\frac{\pi}{2\tau} \right) - \left(\frac{\pi}{2\tau} \right)^3. \quad (4.36)$$

Finalmente, el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable.

Observación 4.1

De acuerdo con la condición (4.34) establecida en la Proposición 4.3, es evidente que el sistema requiere un retardo positivo, lo que significa que no puede estabilizarse usando un controlador PI clásico, es decir, el polinomio $\Delta(s; k_p, k_i) := s^3 + k_p s + k_i$ no es estabilizable, ya que no satisface la condición de Stodola [59].

Por otro lado, el controlador también puede sintonizarse utilizando la metodología de descomposición- $\mathcal{D}$, la cual genera mapas de estabilidad en función de los parámetros de diseño (k_p, k_i, τ) .

Regiones de estabilidad

Una forma de sintonizar los parámetros (k_p, k_i, τ) puede ser mediante el uso de sus mapas de estabilidad, los cuales se definen de la siguiente manera:

Proposición 4.4: Curvas de cruce de estabilidad

Sea $h > 0$ un valor fijo, el conjunto de todas las curvas de cruce de estabilidad está compuesto por el siguiente conjunto de rectas:

$$k_i := 0, \quad k_p \in \mathbb{R}. \quad (4.37)$$

$$k_i := (-1)^\ell (\omega_\ell^3 - k_p \omega_\ell), \quad k_p \in \mathbb{R}. \quad (4.38)$$

donde $\omega_\ell = \frac{(2\ell - 1)\pi}{2\tau}$, y $\ell \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sustituyendo $s = i\omega$ en (4.32), se obtiene lo siguiente:

$$-i\omega^3 + i\omega k_p + k_i(\cos(\omega\tau) - i\sin(\omega\tau)), \quad (4.39)$$

de donde, separando la parte real e imaginaria de (4.39), se obtiene:

$$\begin{cases} k_i \cos(\omega\tau) = 0, \\ -\omega^3 + k_p \omega - k_i \sin(\omega\tau) = 0. \end{cases} \quad (4.40)$$

La primera ecuación del caso anterior es cero cuando $k_i = 0$ o $\cos(\omega\tau) = 0$; este segundo caso se cumple cuando ω es un múltiplo impar de $\frac{\pi}{2\tau}$, por lo tanto, se obtienen dos ecuaciones. Un caso se define como:

$$\begin{cases} k_i = -\omega_\ell^3 + k_p \omega_\ell, \quad k_p \in \mathbb{R}, \\ \omega_\ell = \frac{\pi}{2\tau}, \frac{5\pi}{2\tau}, \dots \end{cases} \quad (4.41)$$

El otro caso se define como:

$$\begin{cases} k_i = \omega_\ell^3 - k_p \omega_\ell, \quad k_p \in \mathbb{R}, \\ \omega_\ell = \frac{3\pi}{2\tau}, \frac{7\pi}{2\tau}, \dots \end{cases} \quad (4.42)$$

Por lo tanto, las líneas (4.41)-(4.42) pueden reescribirse de la siguiente forma:

$$\begin{cases} k_i = (-1)^\ell (\omega_\ell^3 - k_p \omega_\ell), \\ \omega_\ell = \frac{(2\ell-1)\pi}{2\tau}, \quad \ell \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4.43)$$

■

En este sentido, una de las principales herramientas para diseñar un controlador que garantice dicha relación de convergencia es la noción de σ -estabilidad. Para establecer esta noción, sea $\sigma \in \mathbb{R}_+$. Entonces, el problema de estabilidad puede describirse como la tarea de determinar las ganancias del controlador $\mathbf{k}_j := (k_{pj}, k_{ij})$ para las cuales la parte real de las raíces más a la derecha de la función característica del sistema en lazo cerrado sea menor que $-\sigma$.

Proposición 4.5: Curvas de cruce

Sea $\tau > 0$ un valor fijo y $\sigma > 0$, el conjunto de todas las curvas de cruce de estabilidad está compuesto por:

$$k_p(\omega, \sigma) = 3\omega^2 - \sigma^2 + \frac{2\omega(\omega^2 + \sigma^2) \cos(\omega h)}{\sigma \sin(\omega h) - \omega \cos(\omega h)}, \quad (4.44)$$

$$k_i(\omega, \sigma) = e^{-h\sigma} \frac{2\omega(\omega^2 + \sigma^2)\sigma}{\sigma \sin(\omega h) - \omega \cos(\omega h)}. \quad (4.45)$$

Demostración. La demostración se realiza de la misma manera que en la Proposición 4.4, utilizando $s = -\sigma + i\omega$. ■

4.3. Observador no lineal de perturbaciones

Este trabajo analiza un robot aéreo equipado con un brazo robótico que le permite interactuar con su entorno. Es importante señalar que la carga útil manipulada por el brazo robótico puede experimentar variaciones en su masa o fuerzas aplicadas debido a inexactitudes paramétricas y perturbaciones externas. Por lo tanto, con el fin de abordar adecuadamente dichas perturbaciones, es necesario ampliar el modelo dinámico real para incorporar incertidumbres y perturbaciones, como las agregadas. Esto conduce a la siguiente ecuación dinámica modificada:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} + \mathbf{d}, \quad (4.46)$$

donde $\mathbf{d}$ representa la perturbación causada por parámetros desconocidos y fuerzas externas.

En consecuencia, en lo que sigue, se introducirá un observador no lineal de perturbaciones (NDO, por sus siglas en inglés) diseñado para mitigar eficazmente dichas perturbaciones.

Para calcular estas perturbaciones, es común definir el error de observación como

CAPÍTULO 4. DISEÑO Y ANÁLISIS DE CONTROLADORES RETARDADOS Y OBSERVADORES NO LINEALES

la diferencia entre la perturbación medida y la perturbación observada. Matemáticamente, esto puede expresarse como

$$e_o := d - \hat{d}. \quad (4.47)$$

Dado que normalmente no se dispone de conocimiento previo acerca de la perturbación d , es natural asumir que

$$\dot{d} \equiv 0. \quad (4.48)$$

Claramente, dicha suposición sugiere que la perturbación cambia lentamente en comparación con la dinámica del observador. Con base en el análisis anterior, se asumirá que (4.48) se cumple durante el resto de la tesis.

Para estimar la perturbación, es necesario considerar dinámicas de error que aseguren la convergencia asintótica a cero del error de observación.

Tomando en cuenta observadores no lineales clásicos, como el observador de Luenberger o el filtro de Kalman extendido, dichas dinámicas pueden proponerse como:

$$\dot{e}_o = -L(q, \dot{q})e_o, \quad (4.49)$$

donde es importante considerar cuidadosamente las características específicas del sistema Euler–Lagrange bajo estudio y seleccionar valores apropiados para los elementos de la matriz $L(q, \dot{q})$, asegurando que sea definida positiva.

Al considerar dichas dinámicas del observador, será posible diseñar un controlador capaz de mitigar los efectos producidos por la perturbación.

Se aplicará un observador no lineal de perturbaciones [50] introducido para robots manipuladores. Dado que se debe garantizar la convergencia del observador, se tomará como referencia la metodología presentada en la literatura [60]. En este sentido, la principal modificación de este observador consiste en considerar un cambio de variables como:

$$z_o := \hat{d} - p(q, \dot{q}), \quad (4.50)$$

donde $p(q, \dot{q})$ satisface la ecuación no lineal

$$\dot{p}(q, \dot{q}) = L(q, \dot{q})M(q)\ddot{q}. \quad (4.51)$$

La estabilidad asintótica del observador no lineal de perturbaciones se garantiza considerando la dinámica del vector auxiliar (4.50) junto con (4.51) y la dinámica del observador (4.49).

Este trabajo pretende mejorar las características del observador no lineal mediante la adición de una ganancia diseñada para cada estado. Por lo tanto, el diseño del observador, el análisis de estabilidad y las dinámicas del error de observación se modifican en consecuencia.

Observación 4.2:

Obsérvese que (4.51) permite evitar la medición del estado $\ddot{q}$, lo cual reduce el número de sensores necesarios para estimar la perturbación.

Proposición 4.6: Observador

Considérese el siguiente observador no lineal de perturbaciones:

$$\hat{d} = z_o + p(q, \dot{q}), \quad (4.52)$$

donde $z_o \in \mathbb{R}^4$ es una variable auxiliar con dinámica:

$$\dot{z}_o = -L(q, \dot{q})(z_o + p(q, \dot{q}) - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) + u) \quad (4.53)$$

y $p(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^4$ es un vector función diseñado como:

$$p(q, \dot{q}) = K_o^{-1} \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}, \quad (4.54)$$

donde $K_o \triangleq \text{diag}\{k_{o1}, \dots, k_{o4}\}$. Elijamos las ganancias k_{oj} , $j \in \{1, \dots, 4\}$, que satisfacen las siguientes condiciones:

$$(i) \quad k_{oj} \in \mathbb{R}_+, j \in \{1, \dots, 4\},$$

$$(ii) \quad \max\{k_{o1}, k_{o2}\} < k_{o3} + k_{o4} < \frac{2}{\Omega_\varphi m_p l_p},$$

donde Ω_φ es una constante positiva que cumple:

$$|\dot{\theta}(t) + \dot{\gamma}(t)| \leq \Omega_\varphi, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.55)$$

Entonces, el observador (4.52) converge asintóticamente hacia la perturbación d .

Demostración. Primero, obsérvese que para demostrar el resultado es suficiente mostrar que el error e_o satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_o(t) = 0.$$

Para realizar dicha tarea, consideremos (4.47) junto con (4.50) para expresar e_o como:

$$e_o = d - (z_o + p(q, \dot{q})). \quad (4.56)$$

Bajo esta estructura, considerando (4.48), la derivada temporal de e_o puede escribirse como:

$$\dot{e}_o = -\dot{z}_o - \dot{p}(q, \dot{q}). \quad (4.57)$$

Ahora, considerando (4.53), así como la condición del observador (4.51) y la dinámica del sistema (4.46), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{e}_o &= -L(q, \dot{q})(z_o + p(q, \dot{q}) - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) + u) - \dot{p}(q, \dot{q}), \\ &= -L(q, \dot{q})(z_o + p(q, \dot{q}) - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) + u) - L(q, \dot{q})M(q)\ddot{q} \\ \Rightarrow \dot{e}_o &= -L(q, \dot{q})e_o. \end{aligned} \quad (4.58)$$

A continuación, para encontrar condiciones que aseguren la convergencia asintótica de e_o , consideremos la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$\mathcal{V}(e_o, q) := e_o^T K_o M(q) K_o e_o. \quad (4.59)$$

Tomando su derivada temporal, se obtiene:

$$\dot{\mathcal{V}}(e_o, q) = 2e_o^T K_o M(q) K_o \dot{e}_o + e_o^T K_o \dot{M}(q) K_o e_o. \quad (4.60)$$

Dado que $\dot{M}(q) \equiv C(q, \dot{q}) + C^T(q, \dot{q}) =: \mathcal{N}(q, \dot{q})$ y $L(q, \dot{q}) \equiv (M(q)K_o)^{-1}$, la ecuación (4.60) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}(e_o, q) &= -e_o^T ((2K_o - K_o \mathcal{N}(q, \dot{q}) K_o) e_o), \\ \Rightarrow \dot{\mathcal{V}}(e_o, q) &= -e_o^T \underbrace{\begin{bmatrix} 2k_{o1} & 0 & \kappa_1 c_c & \kappa_3 c_c \\ 0 & 2k_{o2} & \kappa_2 c_d & \kappa_4 c_d \\ \kappa_1 c_c & \kappa_2 c_d & 2k_{o3} & 0 \\ \kappa_3 c_c & \kappa_4 c_d & 0 & 2k_{o4} \end{bmatrix}}_{=:A} e_o, \end{aligned} \quad (4.61)$$

donde $\kappa_1 := k_{o1}k_{o3}$, $\kappa_2 := -k_{o2}k_{o3}$, $\kappa_3 := k_{o1}k_{o4}$ y $\kappa_4 := -k_{o2}k_{o4}$.

Claramente, si $\mathcal{A} > 0$, entonces $\dot{\mathcal{V}} < 0$. En este sentido, una aplicación directa del criterio de Sylvester [61] permite concluir que $\mathcal{A} > 0$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\text{I) } k_{o1} > 0, k_{o2} > 0, k_{o4} > 0,$$

$$\text{II) } 4 - m_p^2 l_p^2 (k_{o3} + k_{o4}) (\dot{\theta} + \dot{\gamma})^2 (k_{o1} \sin^2(\theta + \gamma) + k_{o2} \cos^2(\theta + \gamma)) > 0.$$

Dado que la hipótesis (i) se cumple, la condición I) queda verificada. Ahora, para encontrar condiciones sobre K_o que permitan verificar II), consideremos lo siguiente:

$$(\dot{\theta} + \dot{\gamma})^2 (k_{o1} \sin^2(\theta + \gamma) + k_{o2} \cos^2(\theta + \gamma)) \leq \Omega_\varphi^2 \max\{k_{o1}, k_{o2}\}. \quad (4.62)$$

Además, si $k_{o3} + k_{o4}$ satisface:

$$k_{o3} + k_{o4} > \max\{k_{o1}, k_{o2}\}, \quad (4.63)$$

entonces se puede reescribir (4.62) como:

$$(k_{o3} + k_{o4}) (\dot{\theta} + \dot{\gamma})^2 (k_{o1} \sin^2(\theta + \gamma) + k_{o2} \cos^2(\theta + \gamma)) \leq \Omega_\varphi^2 (k_{o3} + k_{o4})^2. \quad (4.64)$$

Por lo tanto, es claro que la hipótesis (ii) permite verificar (4.63)–(4.64) y, en consecuencia, garantiza la condición II). Los argumentos anteriores completan la demostración. ■

Con base en la proposición anterior, puede observarse que la estabilidad del observador depende de dos factores: la velocidad máxima de inclinación de la aeronave y su momento de inercia. Esta afirmación es razonable, ya que la estabilidad del sistema siempre ha dependido de que el sistema de rotación opere más rápido que el sistema de traslación.

Al integrar las estrategias de control basadas en retardo descritas anteriormente y el Observador No Lineal de Perturbaciones, se establece la arquitectura general del sistema ilustrada en la Figura 4.1.

Este diagrama muestra visualmente la implementación de estos elementos dentro del sistema.

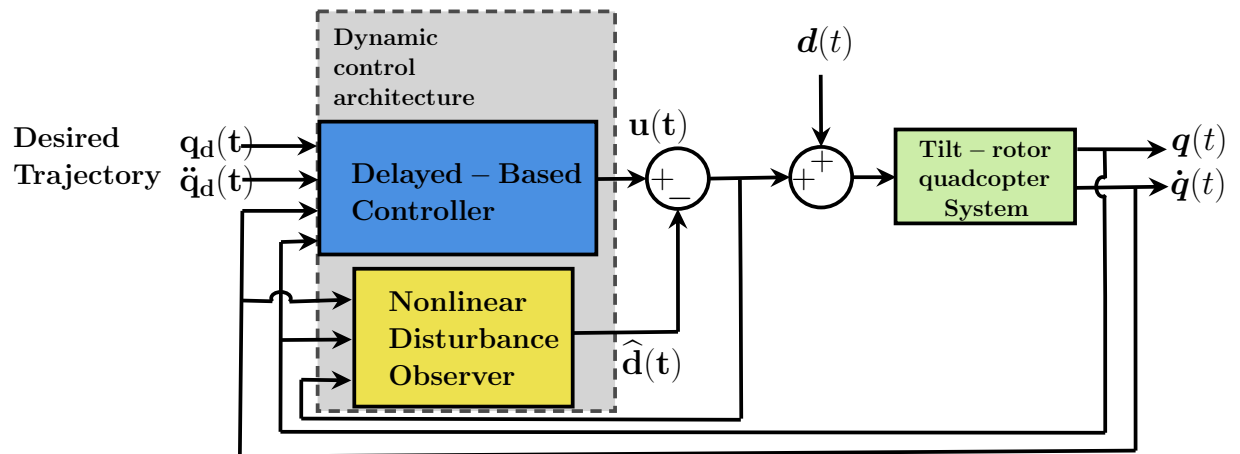


Figura 4.1: Esquema de control basado en retardo.

CAPÍTULO 5

Resultados Numéricos

Esta sección presenta el impacto de los controladores basados en retardos junto a la implementación de un observador no lineal de perturbaciones en la mejora del desempeño de vuelo de un cuadricóptero de rotores basculantes. La discusión presenta las regiones de σ estabilidad, derivadas del enfoque de control con retardo, las cuales permiten una adecuada sintonización de las ganancias del controlador en función del parámetro σ . Posteriormente, el análisis explora cómo varían las respuestas del sistema bajo distintos valores de retardo temporal. Se incorpora además una evaluación comparativa para determinar la efectividad tanto del controlador nominal como del controlador con retardo, ambos equipados con un observador no lineal de perturbaciones, en la gestión de perturbaciones desconocidas.

Con el propósito de ilustrar el desempeño del enfoque de control propuesto, se ejecutó una serie de ejemplos numéricos utilizando un cuadricóptero de rotores basculantes diseñado con componentes de fácil acceso, comúnmente disponibles en comercios especializados. Los parámetros nominales de la aeronave, calculados mediante el software de diseño CAD, se presentan en la Tabla 5.1.

Cuadro 5.1: Parámetros de la aeronave.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
m_r	0,5 kg	m_p	0,125 kg
l_p	0,35 m	g	$9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
I_r	$0,177 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	I_p	$0,153 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

En la sección anterior se establecieron los fundamentos para la adecuada selección de los parámetros de los controladores con retardo y del observador no lineal de perturbaciones. A continuación, se evaluará el comportamiento de dichos parámetros

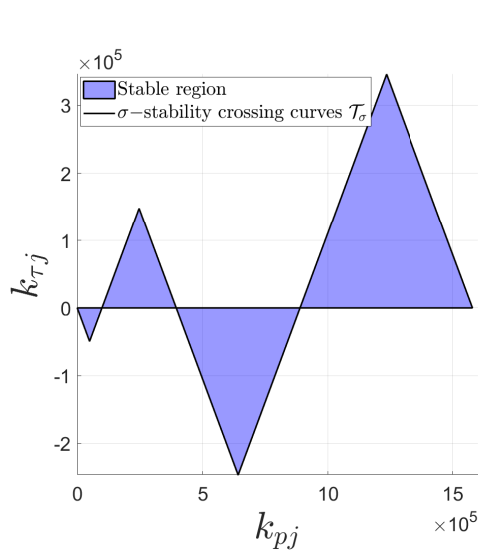
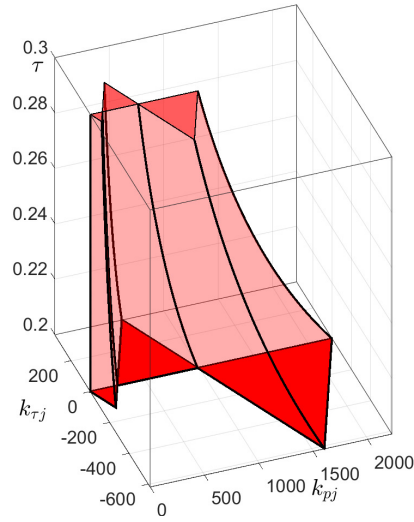
(a) Regiones de estabilidad para $\tau = 10$ ms.(b) Comportamiento para una variación de retardo $\tau \in [\frac{1}{5}, \frac{3}{10}]$.

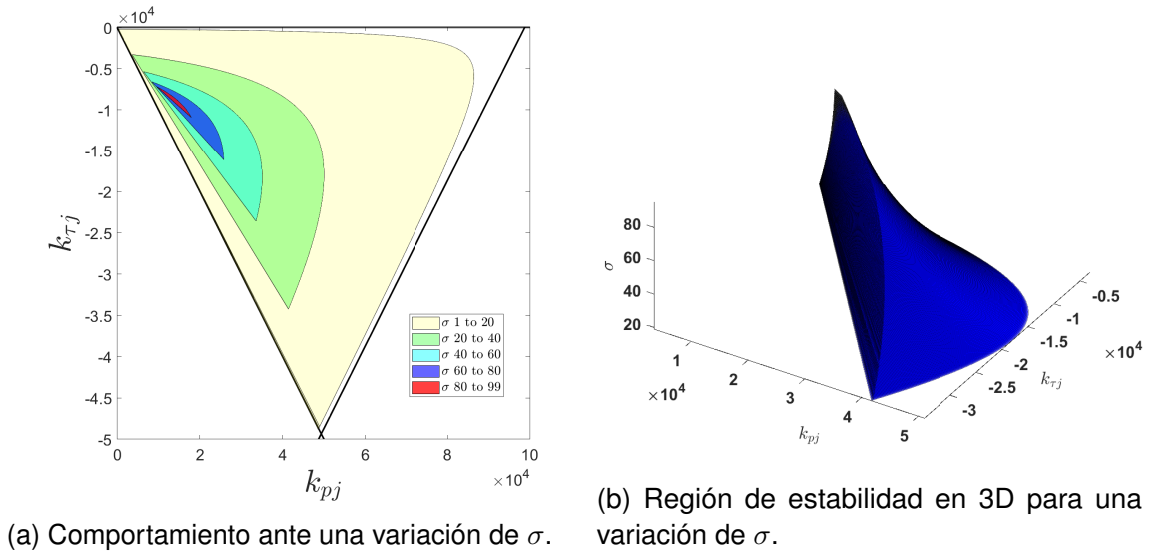
Figura 5.1: Regiones de estabilidad.

con el fin de obtener la mejor respuesta del sistema. El desempeño global se analizará modificando las ganancias del controlador y examinando la influencia del retardo en su selección. Posteriormente, las ganancias elegidas se probarán en una trayectoria suave. Finalmente, una vez alcanzada una respuesta satisfactoria por parte del sistema controlado, se seleccionarán las ganancias del observador con el fin de evaluar el comportamiento de la aeronave en presencia de perturbaciones.

5.1. Evaluación del Desempeño del Controlador $P\delta$

Como se mencionó anteriormente, el análisis presentado en la Proposición 4.1 y el Corolario 4.1 proporciona un conjunto de valores para k_{pj} , $k_{\tau j}$ y τ que garantizan la estabilidad asintótica del sistema (3.18) en lazo cerrado con el controlador. Con fines ilustrativos, la Figura 5.1b muestra cómo varían los parámetros del controlador $P\delta$ basado en retardos al considerar un intervalo de retardos que va de $\tau = 200$ ms a $\tau = 300$ ms. Es importante observar que, a medida que el retardo τ disminuye, se obtiene un rango más amplio de opciones para seleccionar las ganancias del controlador k_{pj} y $k_{\tau j}$. Por el contrario, cuando el retardo aumenta, el rango disponible de valores para las ganancias se reduce. Esto indica que las regiones de estabilidad colapsan conforme el retardo crece, limitando así el conjunto de valores aceptables para seleccionar las ganancias del controlador.

Motivados por estas observaciones, consideremos un valor fijo de $\tau = 10$ ms con


 Figura 5.2: Principales regiones de σ -estabilidad.

el fin de limitar la variación de las ganancias del controlador. Con esta elección, las regiones de estabilidad, delimitadas por las curvas de cruce de estabilidad mostradas en la Figura 5.1a, representan un intervalo de combinaciones posibles entre los valores de k_{pj} y $k_{\tau j}$ dentro de la zona morada, garantizando la estabilidad del sistema. Estas regiones están definidas por las curvas de cruce de σ -estabilidad, las cuales conforman zonas triangulares. Es importante señalar que un incremento en k_{pj} produce una respuesta más rápida del sistema, lo que a su vez genera señales de control de mayor magnitud. Por ello, nuestro análisis se concentrará en valores pequeños de la ganancia proporcional.

Con el objetivo de mejorar la respuesta del sistema, se busca alcanzar un comportamiento más suave y suficientemente rápido, cumpliendo con los requerimientos de vuelo del cuadricóptero. Para evaluar la estabilidad, se considera la Proposición 4.2, la cual caracteriza el conjunto de curvas de cruce que garantizan un decaimiento exponencial. Dichas curvas definen el conjunto $\mathcal{T}_\sigma$, correspondiente a las fronteras de las regiones de σ -estabilidad. La Figura 5.2a ilustra las regiones de σ -estabilidad asociadas a los cruces de raíces hacia el semiplano izquierdo (LHP) para los parámetros k_{pj} , $k_{\tau j}$ y σ , considerando un retardo fijo de $\tau = 10$ ms. A medida que σ aumenta, las regiones de estabilidad se contraen, convergiendo a un punto singular donde se alcanza la respuesta óptima.

Asimismo, la Figura 5.2b muestra el comportamiento de las ganancias de control k_{pj} y $k_{\tau j}$ para un intervalo de valores de σ comprendido entre 20 y 99. A medida que σ aumenta, se aproxima un punto singular que representa los valores ideales de las

ganancias del controlador para lograr una respuesta óptima del sistema.

A partir del análisis previo, se determina que la entrada de control óptima se obtiene maximizando el valor de $\sigma = \frac{1}{\tau}$. Es importante destacar que, conforme σ aumenta, junto con el retardo τ , la región de estabilidad disminuye. En consecuencia, la robustez del controlador se encuentra estrechamente vinculada a estos valores.

Sobre el análisis de σ -estabilidad: impacto en la respuesta del sistema

Para evaluar el desempeño del controlador de manera independiente al observador y comprender cómo cambia la respuesta del sistema ante variaciones en σ , se llevará a cabo una prueba utilizando una trayectoria suave con variaciones dinámicas. En esta prueba, un cuadricóptero de rotores basculantes seguirá una altitud variable definida por la ecuación parametrizada $z(t) = 5 \sin(t)$ y un desplazamiento lateral dado por $h(t) = 5 \cos(t)$. A lo largo de esta trayectoria también variarán dos ángulos críticos: el ángulo de rotación de la aeronave θ y el ángulo de inclinación del brazo robótico γ . Ambos ángulos irán desde una posición sin inclinación hacia una inclinación variable, con $\theta(t) = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{9} (1 - e^{-2t^2})$ y $\gamma(t) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{18} (1 - e^{-2t^2})$.

El objetivo principal de este trabajo es alcanzar un seguimiento efectivo. Por ello, resulta fundamental obtener una representación visual del comportamiento de los estados del sistema conforme cambia σ . La Figura 5.3 demuestra que el uso de valores grandes de σ conduce a una respuesta óptima del sistema. Cuando $\sigma = 1$, la convergencia es notablemente más lenta en comparación con las tasas obtenidas para valores mayores, tales como $\sigma = 20$ o $\sigma = 99$. Además, la aplicación del enfoque de σ -estabilidad genera una mejora sustancial en la velocidad de convergencia hacia la trayectoria de referencia. En consecuencia, maximizar el valor de σ garantiza alcanzar la mayor tasa de decaimiento exponencial.

Para evaluar exhaustivamente el desempeño del controlador, es necesario examinar los esfuerzos de control generados. En la Figura 5.4 se observa una clara correlación entre la magnitud de σ y el correspondiente esfuerzo de control, el cual incrementa conforme aumenta σ . Las zonas ampliadas en la figura destacan los esfuerzos máximos de control ejercidos. Es evidente que, conforme σ crece, también lo hacen las entradas de control. Estos esfuerzos pueden superar los límites permitidos, especialmente cuando el sistema transita de un estado inactivo a uno en movimiento. Este análisis ofrece una visión detallada de las demandas máximas impuestas al sistema durante tales transiciones.

Además, es importante señalar que todos los esfuerzos de control asociados a los

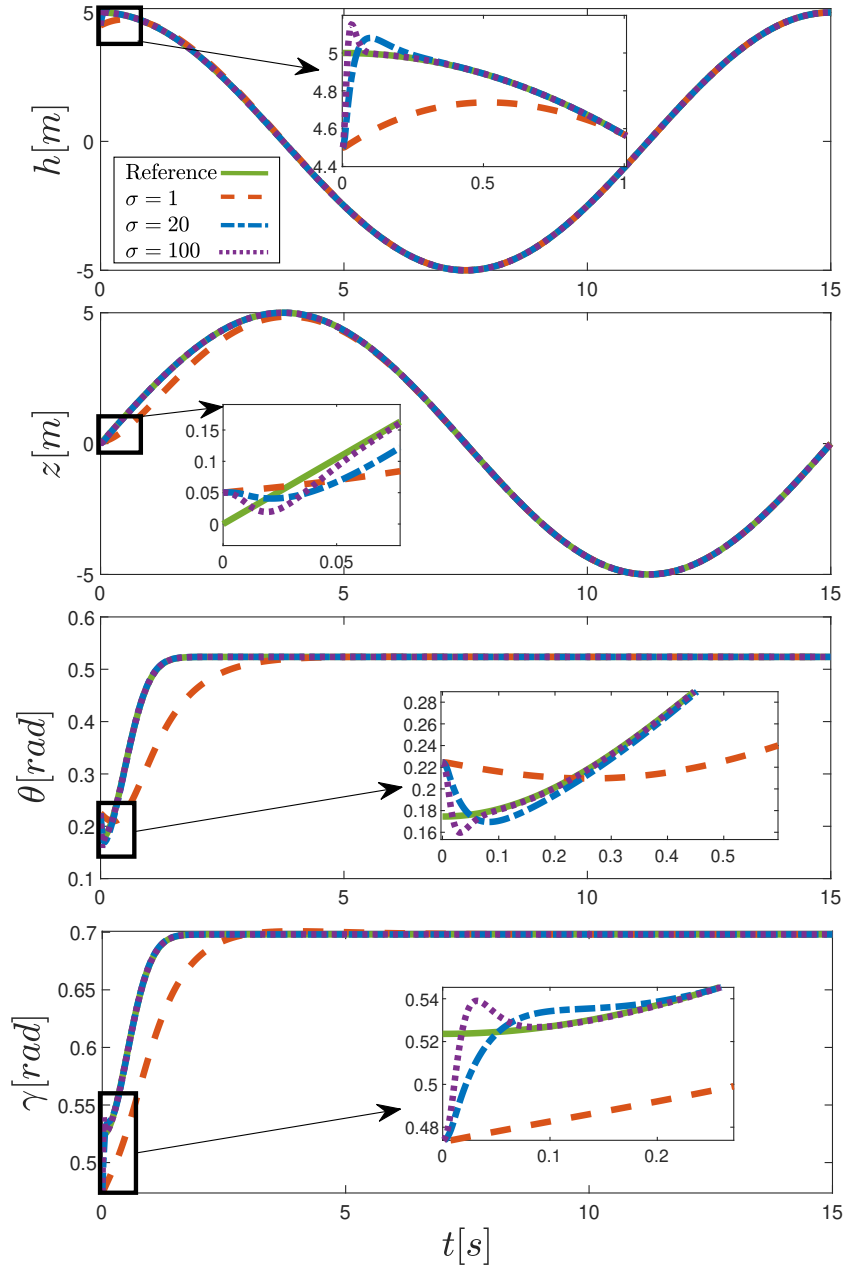


Figura 5.3: Respuesta para distintas elecciones de σ en la sintonización del controlador.

valores de σ representados en la figura permanecen dentro de los límites permisibles definidos por los parámetros nominales del sistema. Esta observación indica que los esfuerzos de control se mantienen dentro de intervalos aceptables y no exceden el rango operativo prescrito.

La elección adecuada del valor de σ es una parte importante para obtener una respuesta suave y rápida del sistema. Como se mostró en el análisis anterior, asignar

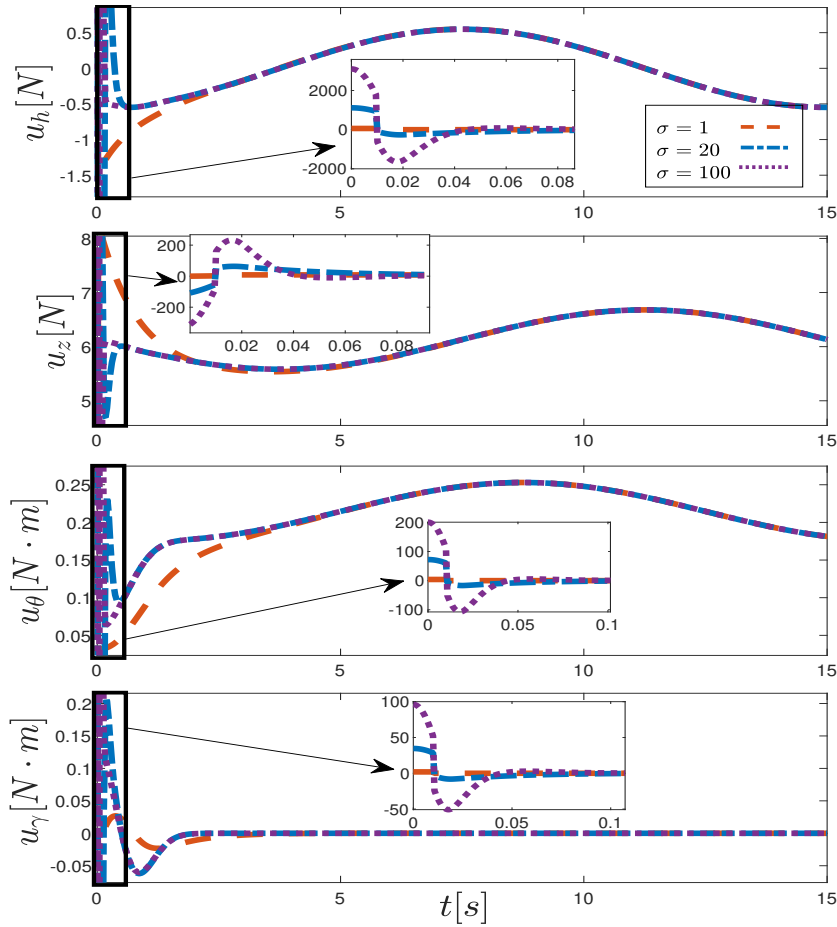


Figura 5.4: Variaciones de las entradas de control para distintos valores de σ .

$\sigma = 100$ proporciona una entrada de control óptima, lo que mejora la velocidad de convergencia y la robustez, asegurando así un desempeño eficaz del cuadricóptero de rotores basculantes durante tareas de seguimiento de trayectorias y otras maniobras.

A partir de la Figuras 5.3 and 5.4, es evidente que el controlador óptimo requiere esfuerzos de control elevados. Esta condición no es recomendable para aplicaciones reales debido a las limitaciones inherentes de los actuadores. Por ello, el diseño del controlador implica un compromiso: seleccionar una respuesta óptima del sistema, con el riesgo de dañar los actuadores, o elegir una respuesta más lenta que garantice su integridad. Como se observa en las figuras, el controlador óptimo incrementa los esfuerzos de control, lo cual resulta inapropiado para aplicaciones prácticas. En el análisis posterior, se considerará la solución óptima obtenida en las subsecciones previas, reconociendo este compromiso.

Finalmente, a partir de (4.26), se observa una estrecha relación entre el retardo τ y $\sigma_{\text{máx}}$. El diseñador del controlador debe considerar que τ depende de la frecuencia

de la CPU del sistema, lo que impone restricciones en la selección del retardo. En particular, un τ pequeño requiere una frecuencia de CPU más alta, capacidad que no todos los computadores de vuelo poseen. Asimismo, elegir un τ pequeño conduce a un valor mayor de σ , lo cual eleva las ganancias del controlador. Esto, a su vez, puede generar esfuerzos de control elevados que potencialmente dañen los actuadores.

Para ilustrar y profundizar en el análisis, se presenta un segundo ejemplo que permite evidenciar de manera más clara cómo la selección del valor de σ repercute directamente en la respuesta del sistema. En este caso, se considera una señal de referencia tipo cuadrada para los estados h y z , mientras que para los estados θ y γ se fija un valor constante de $\frac{\pi}{6}$. La Figura 5.5 muestra nuevamente las regiones de σ -estabilidad asociadas a los cruces de raíces hacia el semiplano izquierdo (LHP) para los parámetros k_{pj} , $k_{\tau j}$ y σ , considerando un retardo fijo de $\tau = 10$ ms. A diferencia del ejemplo previo, en esta figura también se indican las ganancias seleccionadas sobre las fronteras de cada región de estabilidad.

A partir de la Figura 5.6 se observa que valores mayores de σ conducen a un mejor desempeño en el seguimiento de trayectoria. Conforme σ disminuye, la velocidad de convergencia del sistema se ve reducida, dando lugar a respuestas más lentas. Asimismo, se aprecia que al seleccionar ganancias ubicadas sobre las fronteras de las regiones de estabilidad, el sistema exhibe un comportamiento oscilatorio. Cualquier elección de parámetros que exceda dichos límites provoca la pérdida del seguimiento de trayectorias.

De manera análoga, en la Figura 5.7 se presenta un comportamiento consistente con el observado en el ejemplo anterior. No obstante, al seleccionar las ganancias sobre las fronteras de las regiones de estabilidad, se evidencia que los esfuerzos de control presentan oscilaciones significativas, lo cual explica el comportamiento oscilante observado en el seguimiento de los estados previamente descrito.

Evaluación del controlador $P\delta$ para la tarea de seguimiento

A partir del análisis previo, los parámetros del controlador basado en retardo fueron seleccionados cuidadosamente con el fin de garantizar un desempeño óptimo del vehículo de rotores basculantes. Las ganancias del controlador se eligieron conforme a lo detallado en las subsecciones anteriores y en el Corolario 4.2. Estos valores, derivados del enfoque de σ -estabilidad, fueron seleccionados para obtener una respuesta de control adecuada en las simulaciones que se presentan a continuación.

Ahora bien, para el observador no lineal de perturbaciones (NDO) se consideró la

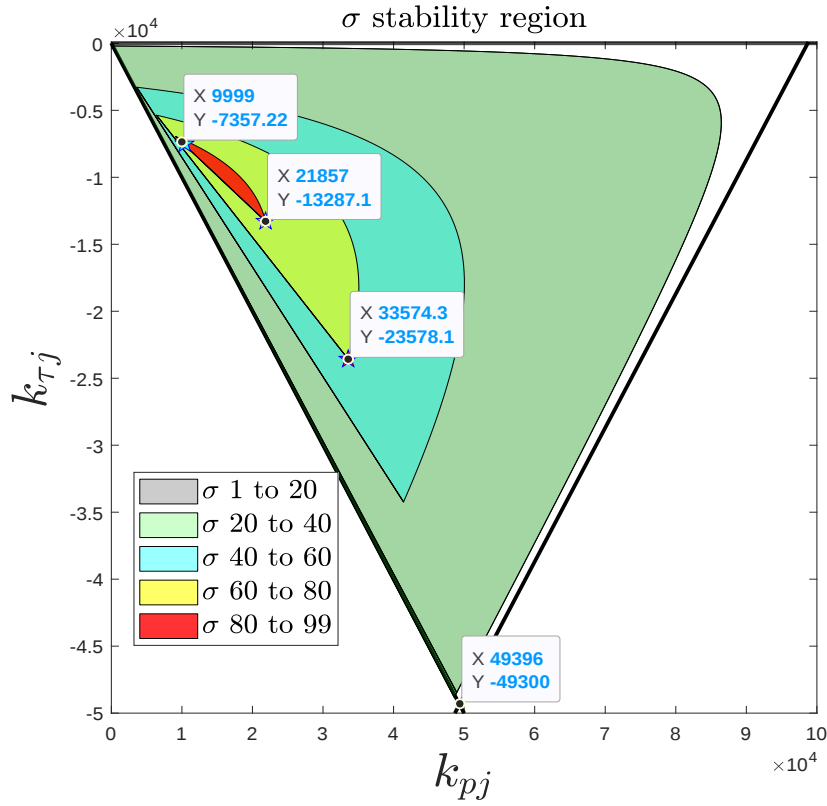


Figura 5.5: Ganancias seleccionadas de acuerdo al valor de σ en las regiones de estabilidad.

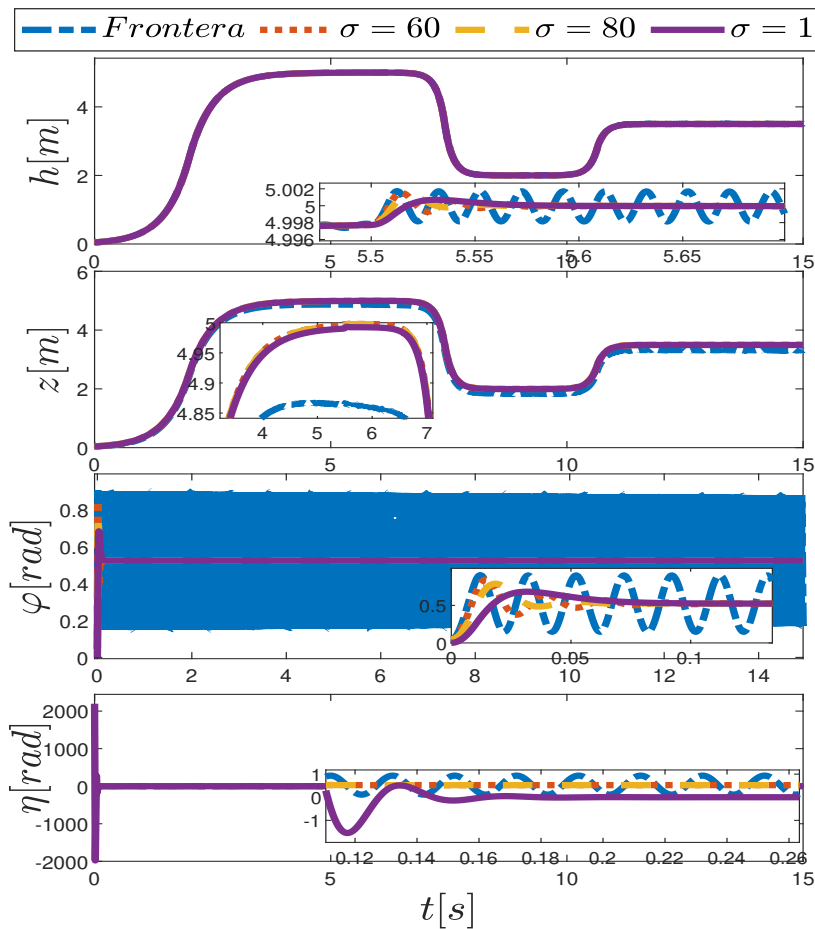
Proposición 4.6, asumiendo que el valor de Ω_φ satisface $\Omega_\varphi \leq 10$ rad/s. Es importante destacar que, si Ω_φ es menor que este valor propuesto, las ganancias del observador permanecerán inalteradas.

Considerando los parámetros del sistema resumidos en la Tabla 5.1, la desigualdad (4.55) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} k_{o3} + k_{o4} &< \frac{2}{\Omega_\varphi m_p l_p}, \\ &< 4,571428 \dots \end{aligned}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta esta restricción, la Tabla 5.2 resume la selección de las ganancias del observador k_{o1} , k_{o2} , k_{o3} y k_{o4} .

Con el fin de mostrar la efectividad del controlador basado en retardo y del observador no lineal de perturbaciones en una aeronave de rotores basculantes, se

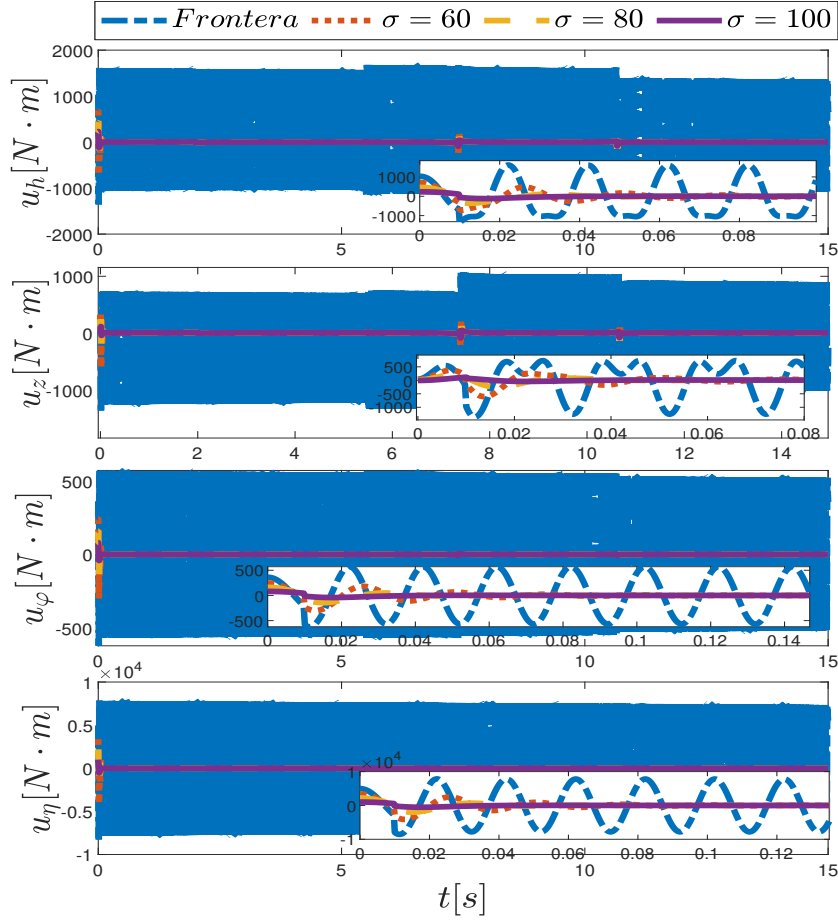

 Figura 5.6: Estados para distintas elecciones de σ en la sintonización del controlador.

 Cuadro 5.2: Parámetros del controlador $P\delta$ y del NDO.

Controlador	Valor	Controlador	Valor *
K_p	ωI_4	K_τ	λI_4
ko_1	1	ko_2	1
Ganancia del observador	Valor	Ganancia del observador	Valor
τ	0,01 s	σ	100
ko_3	1,5	ko_4	2,5

$$* \lambda = \frac{-20000}{e}, \quad \omega = 10^4.$$

presentan dos trayectorias suaves. La primera corresponde a un recorrido circular centrado a 6 m sobre el suelo, con un radio de 4 m. Posteriormente, se introduce una trayectoria más elaborada con el propósito de exhibir el rendimiento del controlador ante un recorrido complejo semejante a un patrón en forma de flor. Ambas trayectorias pueden describirse mediante las siguientes ecuaciones paramétricas:


 Figura 5.7: Variaciones de las entradas de control para los distintos valores de σ .

$$\text{Circular} \begin{cases} x(t) = 4 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 10; \\ z(t) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 10; \\ \theta(t) = \frac{\pi}{6}; \\ \gamma(t) = \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right); \end{cases} \quad \text{Flower-like} \begin{cases} x(t) = 5 \cos\left(\frac{5\pi}{100}t\right) \cos\left(\frac{\pi}{100}t\right); \\ z(t) = 5 \cos\left(\frac{5\pi}{100}t\right) \sin\left(\frac{\pi}{100}t\right); \\ \theta(t) = \frac{\pi}{6}; \\ \gamma(t) = \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right). \end{cases}$$

La evaluación comparativa entre el controlador basado en retardo y el controlador nominal, ambos con sus respectivos observadores no lineales de perturbaciones, se analiza mediante los resultados de seguimiento de trayectoria presentados en las Figuras 5.8 y 5.9. Dichas figuras ilustran cuán estrechamente cada trayectoria controlada se ajusta al recorrido deseado. Se observa que, si bien ambos controladores presentan un buen rendimiento, el componente derivativo del controlador nominal introduce desviaciones apenas perceptibles. Estas desviaciones se vuelven más notorias durante giros cerrados y maniobras complejas, generando ligeras inexactitudes y oscilaciones en el desempeño del seguimiento. En contraste, el controlador basado en

retardo, reforzado por el observador no lineal de perturbaciones, exhibe una trayectoria más estable y suave. Esto demuestra el desempeño superior del enfoque basado en retardo, que atenúa eficazmente los efectos adversos de los cálculos derivados, permitiendo un seguimiento preciso y ágil incluso en los escenarios de vuelo más exigentes.

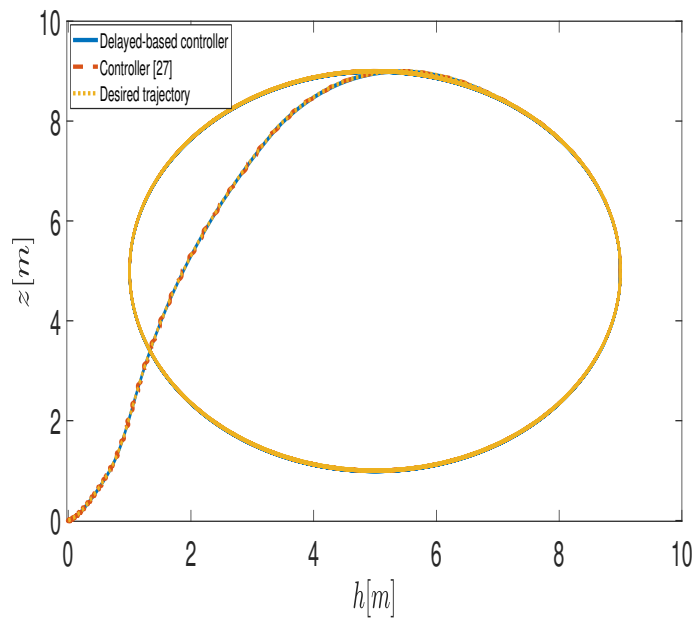


Figura 5.8: Respuesta del sistema ante la trayectoria circular.

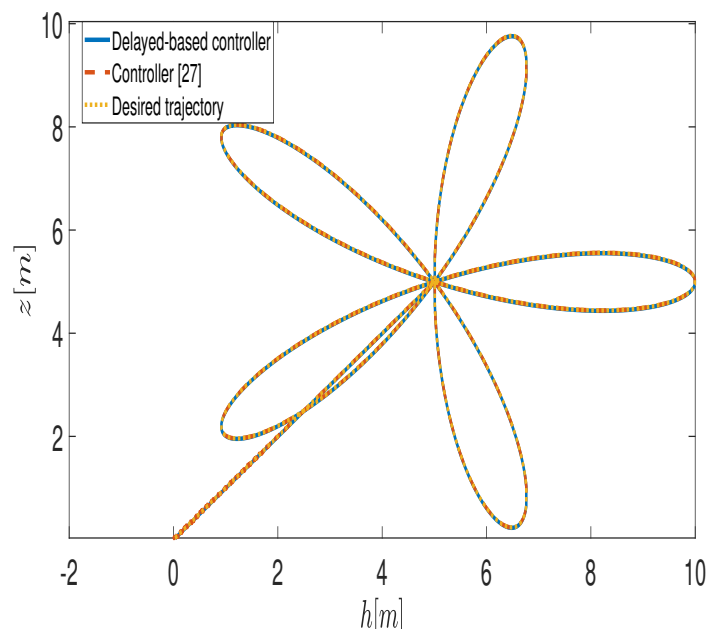


Figura 5.9: Respuesta del sistema ante la trayectoria tipo flor.

Los resultados de seguimiento de trayectoria para ambos enfoques, el basado en retardo y el nominal, muestran comportamientos globales comparables. Sin embargo, con el fin de distinguir claramente entre ambas trayectorias y evaluar con mayor detalle el desempeño de cada estrategia de control, es necesario un análisis más exhaustivo y focalizado. Mediante la evaluación de aspectos como la precisión del seguimiento y los esfuerzos de control, se obtiene una comprensión más profunda de las fortalezas y limitaciones de cada enfoque. Este análisis detallado ofrece una perspectiva más matizada de las diferencias de desempeño entre el controlador basado en retardo y el nominal con sus respectivos observadores.

En atención a la necesidad de un análisis más detallado, se centra la evaluación en la trayectoria circular para examinar minuciosamente el comportamiento de cada estado, como se ilustra en la Figura 5.10. Las trayectorias medidas de los estados h y z muestran una clara convergencia hacia la trayectoria deseada, lo que indica un control efectivo. No obstante, se observa una diferencia significativa en los estados θ y γ , los cuales experimentan amplificación de ruido durante los primeros cinco y doce segundos, respectivamente, bajo el enfoque nominal. Si bien la amplificación de ruido está presente en todos los estados, su efecto es menos notable en aquellos cuya magnitud es mayor. Esta discrepancia evidencia una posible limitación del controlador nominal, particularmente en estados más susceptibles a dicha amplificación. Un análisis más profundo de estos estados permitirá tener conclusiones valiosas sobre la robustez y el desempeño general de ambos controladores.

Para ofrecer una comparación completa del error, la Figura 5.11 presenta los errores de estado, mostrando la diferencia entre los valores medidos y los deseados. De manera notable, el controlador nominal exhibe un error inicial mayor que el controlador basado en retardo, debido principalmente al efecto subamortiguado observado al inicio del recorrido. Sin embargo, es importante subrayar que este error relativamente mayor no es significativo, ya que su magnitud se mantiene por debajo de 5 cm y $\frac{\pi}{18}$ rad, y tiende a cero conforme $t \rightarrow \infty$. A medida que el cuadricóptero sigue la referencia, ambos controladores reducen el error de forma efectiva, logrando un seguimiento preciso de la trayectoria deseada. Así, aunque el controlador nominal presenta inicialmente un error ligeramente mayor, este converge gradualmente y alcanza un desempeño comparable en términos de precisión.

El análisis del empuje generado por cada rotor es fundamental, ya que no debe exceder los límites físicos de los actuadores para evitar daños. Los esfuerzos de control del controlador nominal, mostrados en la Figura 5.12, evidencian que ocurre saturación debido a la amplificación del ruido medido, lo que incrementa los esfuerzos

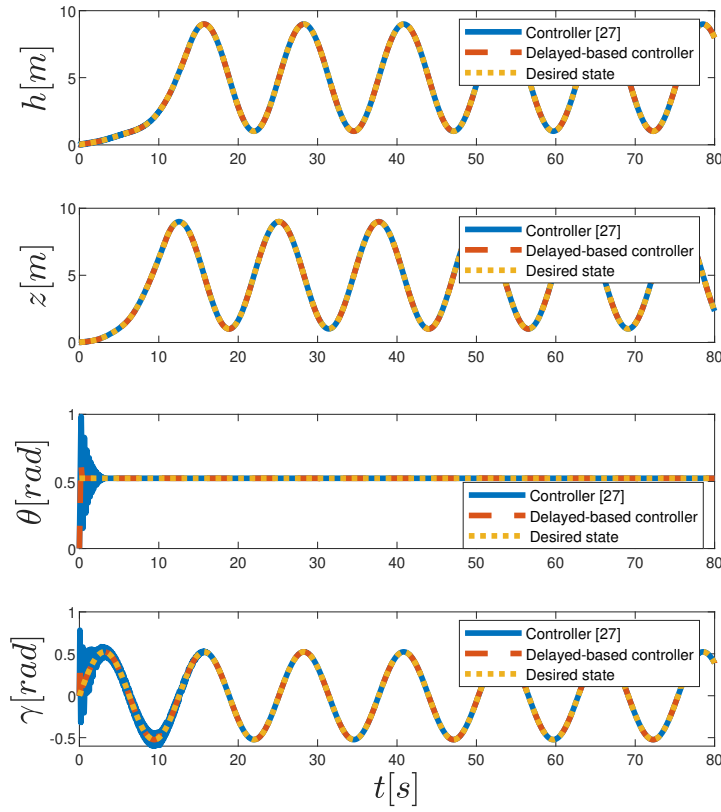


Figura 5.10: Estados del sistema en trayectoria circular.

y conduce a saturación de actuadores. En contraste, el enfoque basado en retardo resulta más efectivo, alcanzando rápidamente un nivel de esfuerzo adecuado mientras mantiene los esfuerzos de los rotores dentro de límites seguros. Esto asegura un vuelo suave y estable durante el seguimiento de la trayectoria. Además, es importante señalar que los esfuerzos de control aumentan significativamente cuando la aeronave transporta una carga bajo el controlador nominal, en comparación con el enfoque basado en retardo.

Dado que la respuesta del cuadricóptero es similar tanto en la trayectoria tipo flor como en la circular, se concentra el análisis de la segunda trayectoria en los errores de estado y las entradas de control, puesto que estos representan las señales más relevantes para la evaluación. De manera análoga al recorrido circular, la trayectoria tipo flor evidencia la capacidad del sistema para converger hacia la referencia deseada, aun bajo condiciones en las que el ruido amplificado afecta a los estados. Para confirmar la completa convergencia de la trayectoria de la aeronave hacia el recorrido deseado se debe verificar que el error $\tilde{q}$ tienda a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

La aeronave sigue exitosamente la trayectoria deseada a pesar de presentar

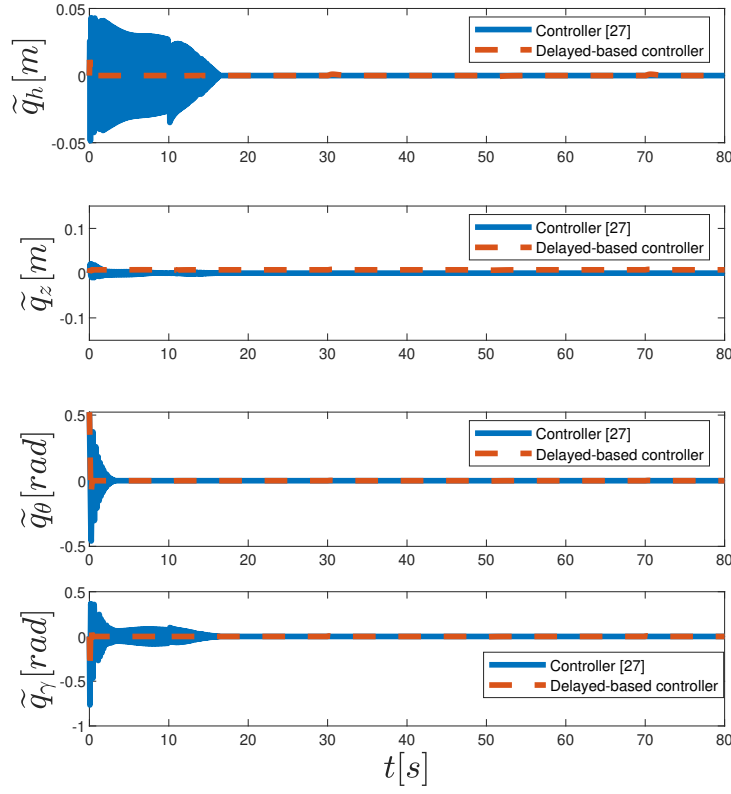


Figura 5.11: Errores de los estados del sistema en trayectoria circular.

puntos no diferenciables en el estado z alrededor del segundo 32, como se ilustra en las primeras dos gráficas de la Figura 5.13. Bajo el controlador nominal, los estados rotacionales exhiben errores significativos en los primeros segundos, mientras que el controlador basado en retardo elimina prácticamente este error de manera inmediata, como se observa en las últimas dos gráficas de la Figura 5.13. Cabe destacar que el controlador basado en retardo supera al nominal, alcanzando un desempeño superior con errores mínimos en todos los estados. Estos resultados validan una vez más la efectividad del controlador basado en retardo, destacando su capacidad para afrontar condiciones desafiantes y lograr un seguimiento preciso de trayectorias complejas.

Los esfuerzos de control constituyen un parámetro importante en la evaluación del desempeño del cuadricóptero, y es esencial mantenerlos dentro del intervalo $\pm 14 \text{ N} \cdot \text{m}$. La Figura 5.14 muestra que los esfuerzos de control del enfoque basado en retardo son menores que los del nominal. El enfoque nominal experimenta saturación inicial y presencia de regiones no diferenciables, mientras que la estrategia basada en retardo se estabiliza rápidamente con una entrada de control constante. Sin embargo,

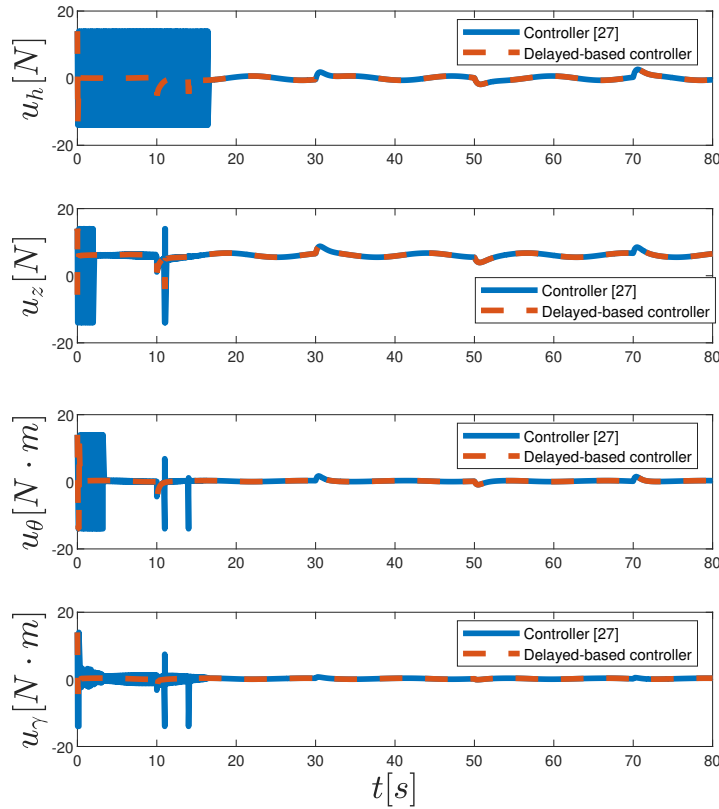


Figura 5.12: Entradas de control para la trayectoria circular.

es importante destacar que, ante la presencia de una perturbación, los esfuerzos del controlador nominal aumentan considerablemente, generando saturación adicional. En contraste, el controlador basado en retardo maneja estos desafíos de manera más efectiva, lo cual resalta su rendimiento superior.

5.2. Análisis del Controlador $P\delta I$

Como continuación del estudio presentado en la sección anterior, donde se caracterizaron las regiones de estabilidad asociadas al controlador $P\delta$ para distintos valores del retardo τ , el presente apartado se centra en el análisis del controlador $P\delta I$, el cual incorpora una acción integral retardada con el propósito de mejorar la precisión en estado estable y la capacidad de rechazo de perturbaciones. A diferencia del esquema previo, cuya dinámica dependía exclusivamente de las ganancias proporcionales y del retardo, el controlador $P\delta I$ introduce un nuevo parámetro de sintonización, la ganancia integral $k_{i,j}$, que modifica la estructura de las regiones de estabilidad.

Para la realización de las simulaciones del controlador se considera la Proposición 4.3, donde se determina el conjunto de valores admisibles para las ganancias k_{p_j} y

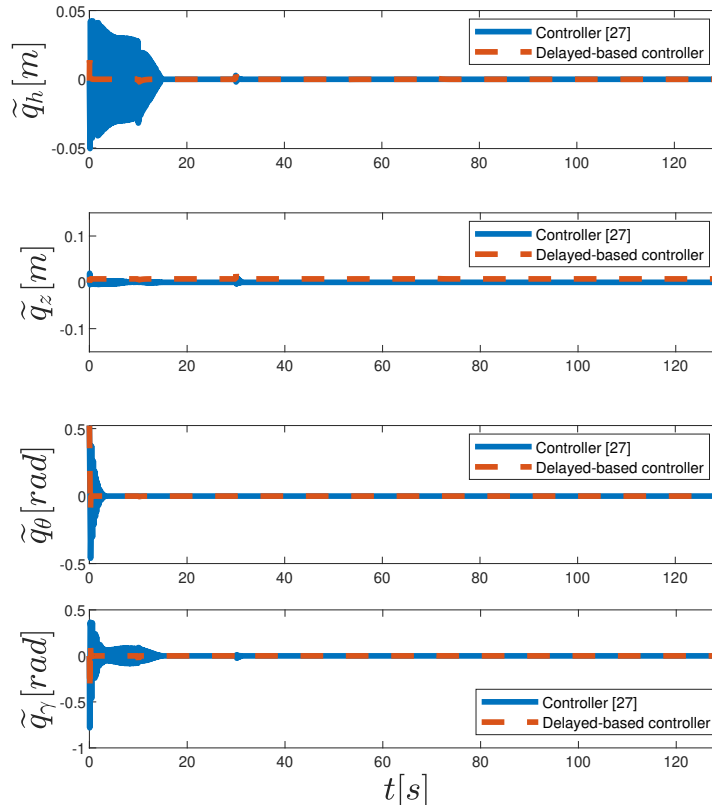


Figura 5.13: Respuesta del sistema ante la trayectoria tipo flor.

k_{ij} , así como para el retardo τ , que garantizan la estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado descrito por (3.18). De manera complementaria, las Proposiciones 4.4 y 4.5 proporcionan las curvas de cruce de estabilidad que permiten trazar, en el plano (k_p, k_i) , las fronteras que delimitan las regiones de estabilidad y los rangos de parámetros permitidos para distintos valores del retardo y del exponente de σ –estabilidad.

A partir de estos resultados teóricos, se analizan las regiones de estabilidad generadas por el controlador $P\delta I$ y su dependencia tanto del retardo como de las ganancias proporcionales e integrales.

Para facilitar la sintonización del controlador $P\delta I$ la Figura 5.15 muestra como varían los parámetros del enfoque de control conforme el retardo τ varía de 0,5 s a 1,5 s. En particular, se observa que las zonas de estabilidad colapsan a medida que el retardo aumenta, lo que conlleva a un intervalo cada vez menor de valores posibles para seleccionar las ganancias del controlador. En consecuencia, el elemento más relevante a equilibrar es el propio retardo, puesto que un retardo reducido maximiza el rango de ganancias aprovechables.

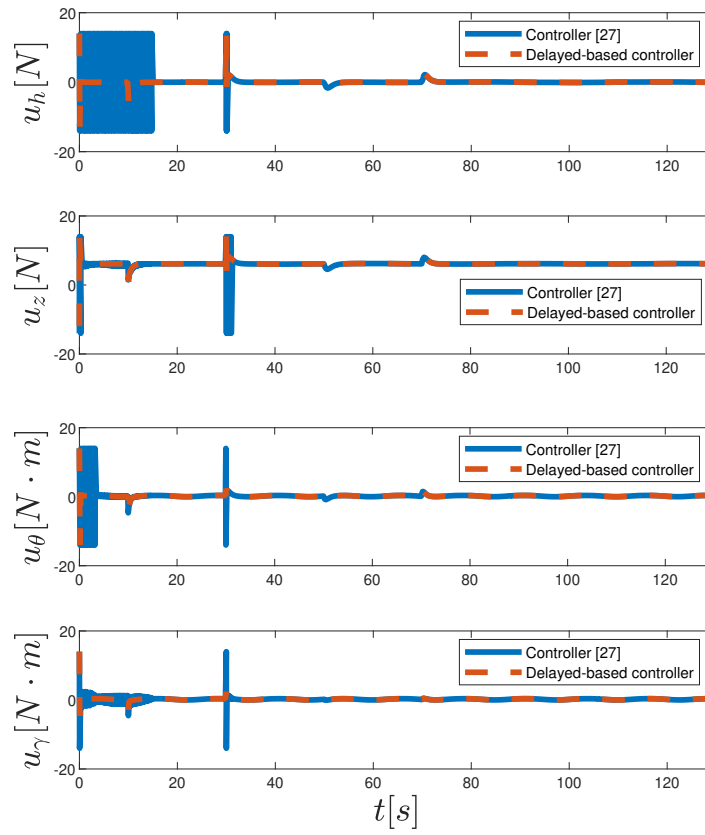


Figura 5.14: Entradas de control para la trayectoria tipo flor.

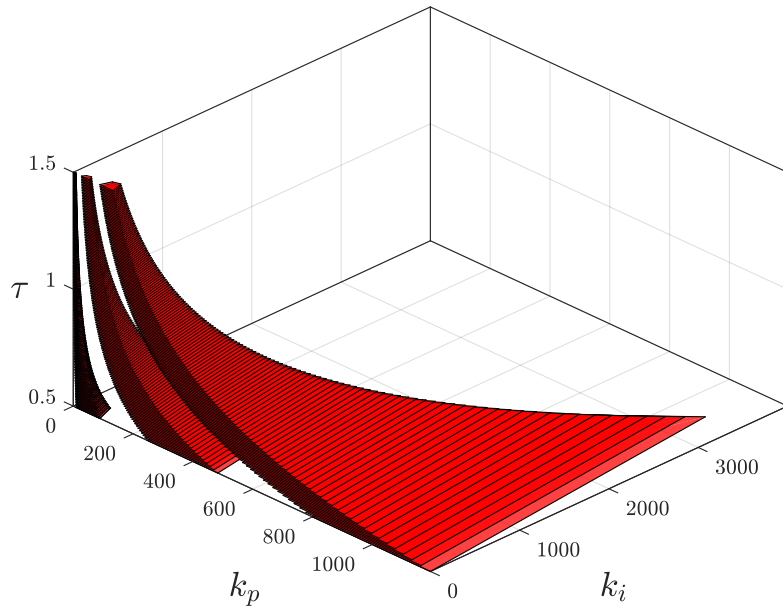


Figura 5.15: Regiones de estabilidad (k_p, k_i, τ) donde $\ell = 1, 2, \dots, 6$.

Regiones de σ -estabilidad

Al fijar un valor de retardo, las regiones de estabilidad quedan delimitadas por las curvas de cruce de estabilidad mostradas en la figura 5.16, donde se representa, dentro de la zona amarilla, un conjunto de combinaciones posibles de valores para k_{pj} y k_{ij} que garantizan la estabilidad del sistema.

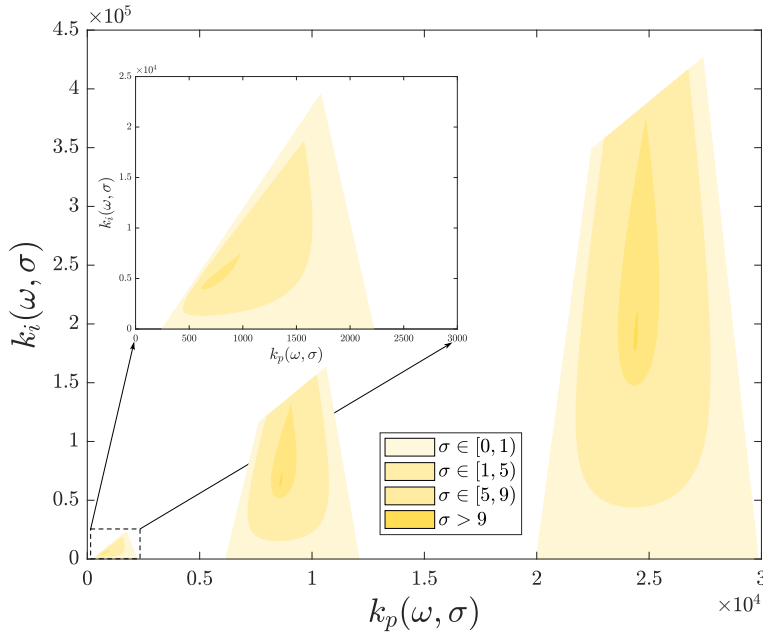


Figura 5.16: Regiones de estabilidad (k_p, k_i) donde $0 < \sigma < 9$ y $\tau = 0,1$ s.

Al considerar la acción integral se generan regiones de estabilidad más complejas, compuestas por familias de rectas y curvas no lineales cuyo comportamiento está directamente relacionado con las frecuencias críticas ω_ℓ asociadas al retardo. Asimismo, se observa cómo la variación de τ afecta el tamaño, la forma y el colapso progresivo de estas regiones, destacando que estas regiones de estabilidad son muy diferentes a las presentadas en el controlador $P\delta$.

Un análisis más detallado de la figura 5.16 permite identificar las regiones de σ -estabilidad asociadas a los cruces de raíces hacia el semiplano izquierdo (LHP) para los parámetros k_{pj} , k_{ij} y σ , considerando un retardo fijo de $\tau = 100$, ms.

Asimismo, a medida que se incrementa el valor de σ , las regiones de σ -estabilidad tienden a converger nuevamente hacia un punto en el que se obtiene una respuesta óptima del sistema. En particular, dicho valor óptimo se alcanza para $\sigma = 10$.

Evaluación del controlador $P\delta I$ para la tarea de seguimiento

Para proceder con el análisis del desempeño del controlador $P\delta I$, se presentan los parámetros de diseño asociados tanto a la ley de control como al observador de perturbaciones implementados en este trabajo. Conviene señalar que los parámetros físicos y dinámicos de la aeronave corresponden a los empleados en el análisis previo, y fueron determinados mediante software especializado. Todos estos valores se encuentran recopilados en la Tabla 5.1.

Para demostrar la efectividad de los enfoques de control propuestos, se realizaron simulaciones numéricas empleando los parámetros de diseño del controlador y del observador de perturbaciones resumidos en la Tabla 5.3. Estos valores sirvieron como punto de partida para evaluar su desempeño bajo las condiciones establecidas.

Cuadro 5.3: Parámetros del controlador $P\delta I$ y del NDO.

Controlador	Valor	Controlador	Valor *
K_p	750	K_i	5×10^3
τ	0,1 s		
Ganancia del observador	Valor	Ganancia del observador	Valor
ko_1	1	ko_2	1
ko_3	1,5	ko_4	2,5

Para evaluar el desempeño de la aeronave bajo el controlador y observador propuestos se considera una trayectoria circular centrada a 6 m sobre el suelo, con un radio de 4 m. Esta trayectoria relativamente simple resulta adecuada para analizar el comportamiento básico del esquema de control. Su descripción paramétrica se define mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{q}_d := \begin{bmatrix} h(t) \\ z(t) \\ \theta(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 10 \\ 4 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 10 \\ \frac{\pi}{6} \\ \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{bmatrix}$$

La figura 5.17 muestra el seguimiento de trayectoria resultante, suave y estable, permitiendo un control preciso incluso en maniobras complejas. Este desempeño mejorado evidencia la efectividad del enfoque basado en retardo junto con el NDO para mitigar perturbaciones y lograr trayectorias de vuelo precisas.

Un análisis más detallado permite identificar características relacionadas con la

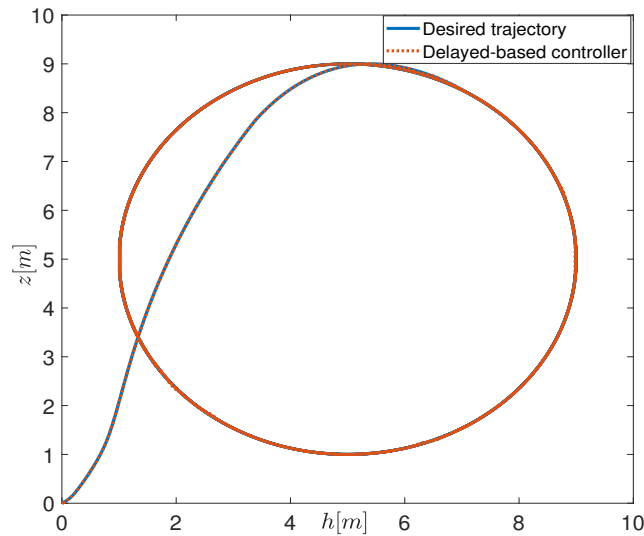


Figura 5.17: Seguimiento de la trayectoria circular de la aeronave.

precisión de seguimiento y los esfuerzos de control en todos los estados, lo cual proporciona una comprensión más adecuada de las fortalezas y limitaciones del controlador.

Para realizar este análisis, consideremos los estados de la trayectoria (figura 5.18). Todos los estados medidos convergen adecuadamente hacia la trayectoria deseada. Sin embargo, los estados rotacionales presentan desviaciones mínimas causadas por perturbaciones.

La figura 5.19 muestra el error entre los estados medidos y la trayectoria deseada, permitiendo una comparación aún más detallada. El controlador basado en retardo presenta un ligero efecto sobreamortiguado, particularmente al inicio del recorrido y durante perturbaciones. No obstante, es importante destacar que estos errores son relativamente pequeños, manteniéndose por debajo de 2 cm y 0,5 rad, además de converger a cero con el tiempo. Esto demuestra la efectividad del controlador en la reducción de errores y en lograr un seguimiento preciso de la trayectoria.

El análisis del empuje de los rotores (figura 5.20) es fundamental para garantizar que se mantenga dentro de los límites físicos de los actuadores y prevenir daños. La estrategia de control lo logra generando entradas que requieren un nivel de esfuerzo adecuado en un intervalo de tiempo reducido. Este uso eficiente del control mantiene el empuje dentro de zonas de operación seguras, lo que permite un vuelo suave y estable durante el seguimiento de la trayectoria.

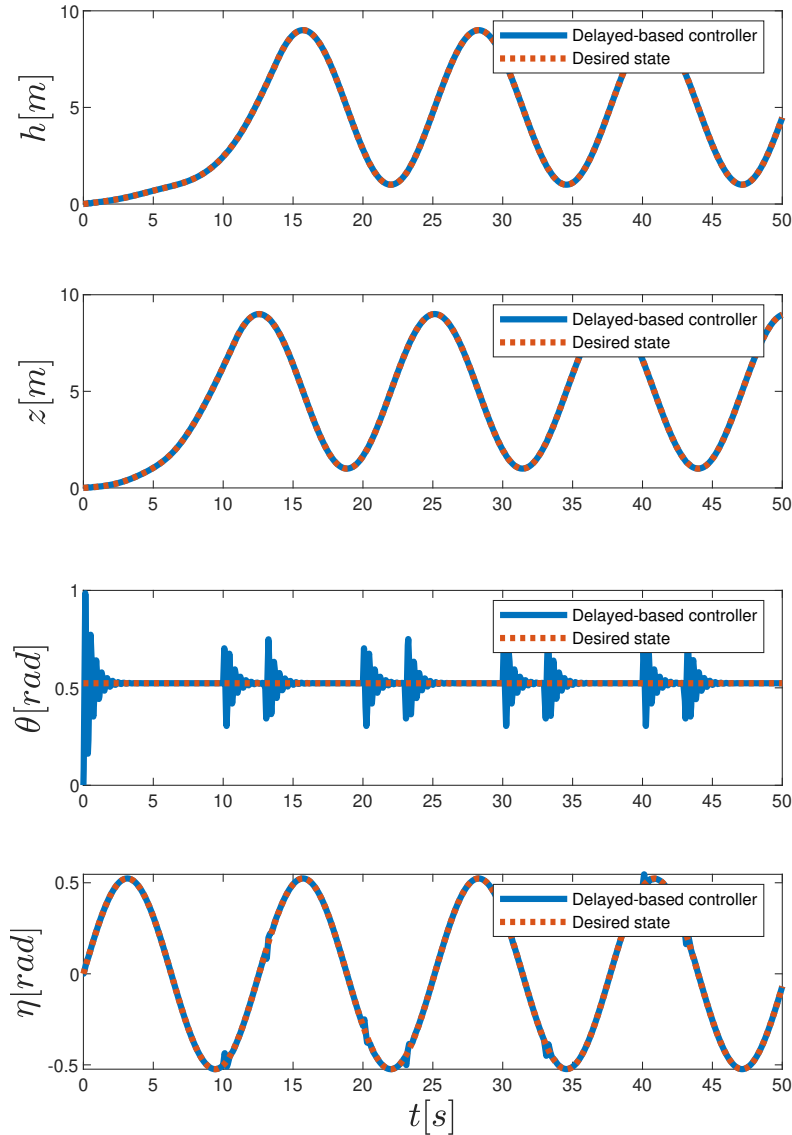


Figura 5.18: Estados de la aeronave durante el seguimiento de la trayectoria circular.

5.3. Mitigación de Perturbaciones en el Controlador $P\delta$

Para simular tareas de carga, se introduce una perturbación tipo cuadrada que emula la fuerza ejercida por un paquete al ser elevado y liberado durante el vuelo. Las perturbaciones resultantes y sus observaciones, empleando tanto el controlador general como el controlador con retardo, se analizan en las siguientes figuras. El desempeño del observador (4.52) permite estimar adecuadamente las perturbaciones, proporcionando una retroalimentación confiable para el sistema de control.

Con base en las observaciones anteriores, se procede a analizar el desempeño del observador para cada una de las trayectorias presentadas, con el fin de demostrar

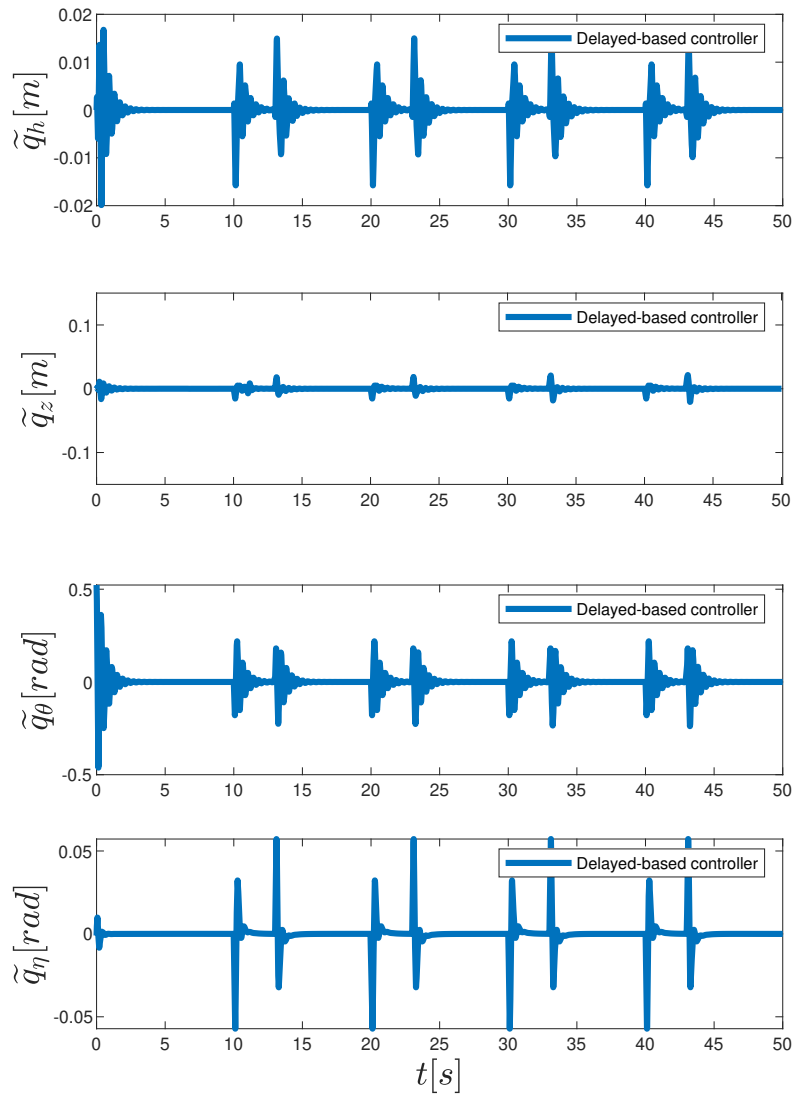


Figura 5.19: Errores de los estados de la aeronave durante el seguimiento de la trayectoria circular.

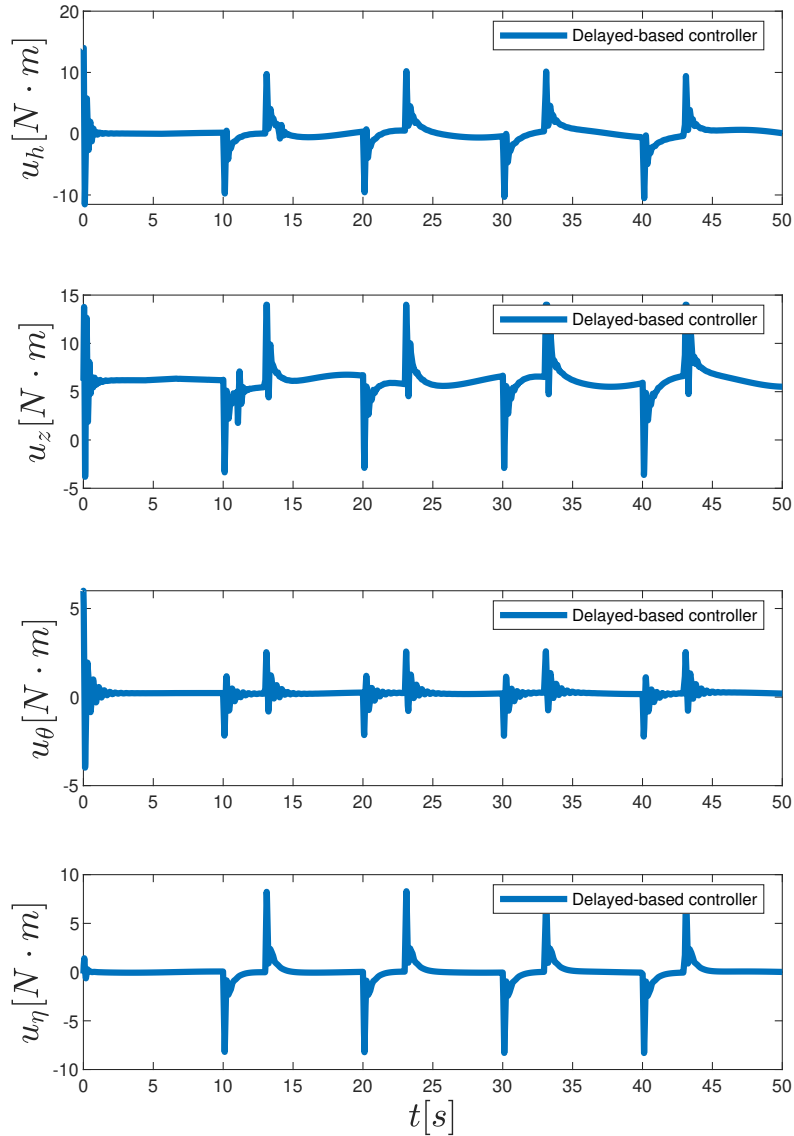


Figura 5.20: Entradas de control de la aeronave durante el seguimiento de la trayectoria circular.

la efectividad del Observador No Lineal de Perturbaciones (NDO) en el manejo de tareas de agarre y en la estimación precisa de perturbaciones.

El análisis inicial se centra en el desempeño del observador durante la trayectoria circular, que representa una tarea de agarre con cambios direccionales mínimos e inclinaciones suaves. La Figura 5.21 presenta los resultados de las perturbaciones observadas al emplear tanto el controlador nominal como el controlador basado en retardo. Como se mencionó, la precisión del observador no lineal de perturbaciones (NDO) se ve comprometida en ciertos intervalos críticos, tales como la fase inicial, donde ocurre una amplificación significativa del ruido, y en los puntos no derivables de

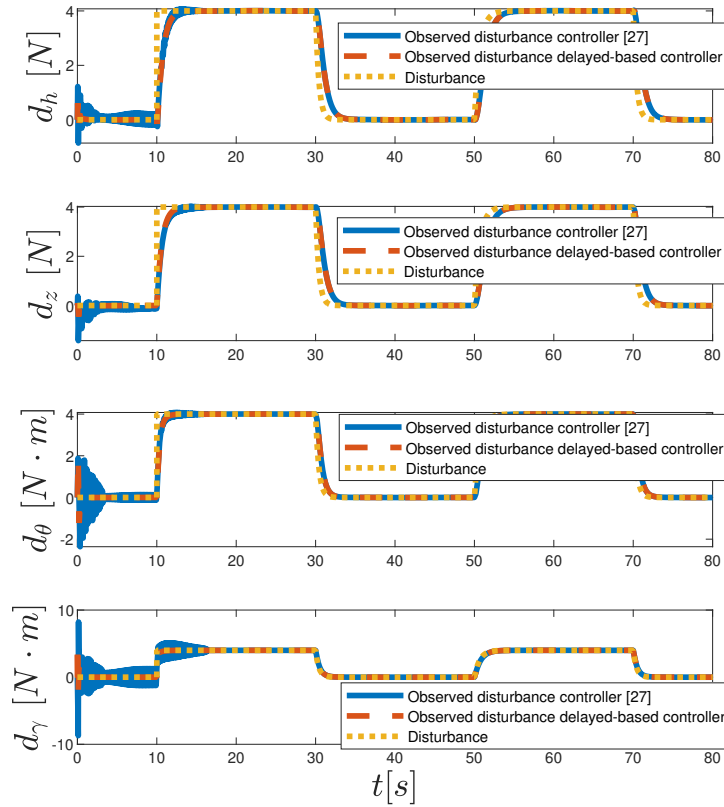


Figura 5.21: Perturbaciones para la trayectoria circular.

la perturbación. Inicialmente, la observación es inadecuada debido al gran error de seguimiento, pero el desempeño del observador mejora de forma notable al combinarse con el controlador basado en retardo. Aunque persisten algunos errores durante los cambios drásticos de la perturbación, el observador estima eficazmente la señal después de unos segundos. Es importante destacar que la magnitud de estos errores se mantiene dentro de un rango aceptable, lo cual confirma la idoneidad del NDO. Además, los resultados muestran que las ganancias de observación propuestas para el NDO modificado tienen un impacto directo e independiente sobre cada estado.

Asimismo, la efectividad del Observador No Lineal de Perturbaciones (NDO) se demuestra por su capacidad para estimar con precisión las perturbaciones externas que afectan a la aeronave durante la trayectoria tipo flor, que es más compleja. La Figura 5.22 compara las perturbaciones aplicadas al utilizar el controlador nominal y el controlador basado en retardo. Como se señaló anteriormente, el NDO presenta un desempeño relativamente menor en los instantes en que el peso de la carga aparece o desaparece, así como al inicio de la trayectoria. Sin embargo, estas limitaciones tienen un impacto mínimo en el análisis global, por lo que la validación del observador

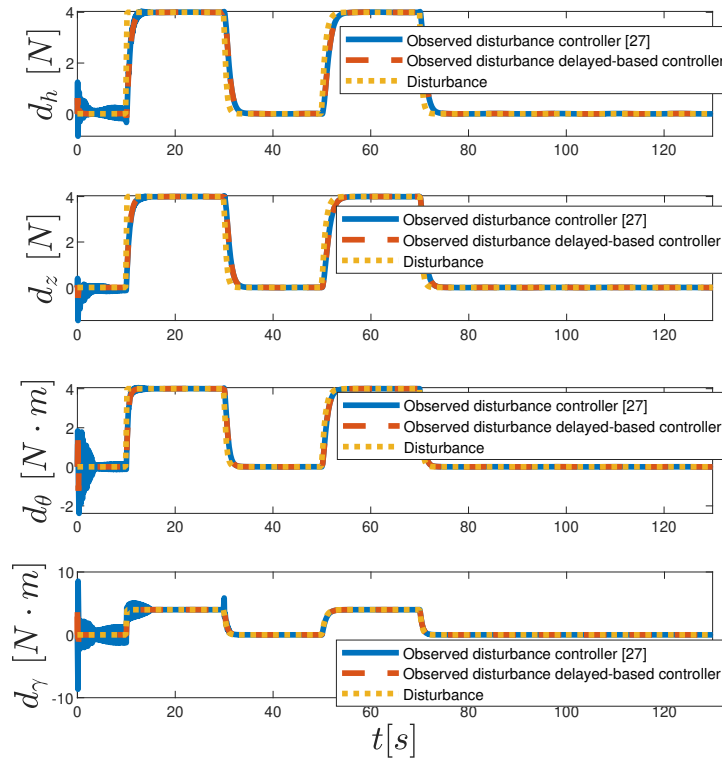


Figura 5.22: Perturbaciones para la trayectoria tipo flor.

permanece sólida.

La Tabla 5.4 proporciona un análisis comparativo del desempeño entre el controlador con retardo y el controlador nominal, utilizando los índices de desempeño: *Integral Square Error* (ISE), *Integral Absolute Error* (IAE) y *Integral Time Absolute Error* (ITAE). Dichos índices se evalúan para las dos trayectorias propuestas, empleando ambos controladores en conjunto con el observador y considerando todos los estados del sistema.

Para los índices ISE e IAE, es evidente que el controlador basado en retardo ofrece un mejor desempeño que el controlador nominal en los estados h , θ y γ . No obstante, en el estado z , el controlador con retardo muestra un desempeño ligeramente inferior al del controlador nominal.

Al evaluar el índice ITAE, el controlador basado en retardo presenta una mejora notable, especialmente en los estados h y γ , donde el error es hasta diez veces menor que el obtenido con el controlador nominal. Sin embargo, se observa una ligera disminución en el desempeño de los estados z y θ al emplear el enfoque basado en retardo.

Cuadro 5.4: Índices de desempeño

Índice	q	Trayectoria circular		Trayectoria tipo flor	
		Basado en retardo Controlador	Nominal Controlador	Basado en retardo Controlador	Nominal Controlador
ISE	h	0,000019	0,00705	0,000013	0,0067
	z	0,0044	0,0001685	0,0071	0,00009
	θ	0,02665	0,08665	0,0207	0,08691
	γ	0,01158	0,1372	0,012	0,08691
IAE	h	0,00735	0,2881	0,0076	0,2684
	z	0,594	0,02954	0,9658	0,02587
	θ	0,0649	0,3432	0,069	0,3438
	γ	0,06461	0,9286	0,068	0,8895
ITAE	h	0,2536	1,856	0,26	1,581
	z	23,82	0,1269	62,82	0,222
	θ	0,3755	0,2583	0,3785	0,2583
	γ	0,7679	4,783	1,028	4,418

5.4. Mitigación de Perturbaciones en el Controlador $P\delta I$

Para simular la elevación y liberación de un paquete, se introdujo una perturbación tipo onda cuadrada que representa la fuerza externa aplicada. La figura 5.23 muestra las perturbaciones resultantes, su observación mediante el controlador con retardo y el desempeño del observador. El observador estima eficazmente estas perturbaciones, proporcionando retroalimentación confiable al sistema de control.

La efectividad del NDO se evidencia en su capacidad para estimar perturbaciones externas durante el seguimiento de trayectoria, como se aprecia en la figura 5.24. Sin embargo, es importante reconocer que su desempeño presenta limitaciones durante cambios bruscos en la carga externa (aparición/desaparición del paquete) y al inicio de la trayectoria, probablemente debido a la naturaleza transitoria de estos eventos. A pesar de ello, el desempeño general del observador es satisfactorio y estas limitaciones tienen un impacto mínimo en la validación de su efectividad para la estimación de perturbaciones.

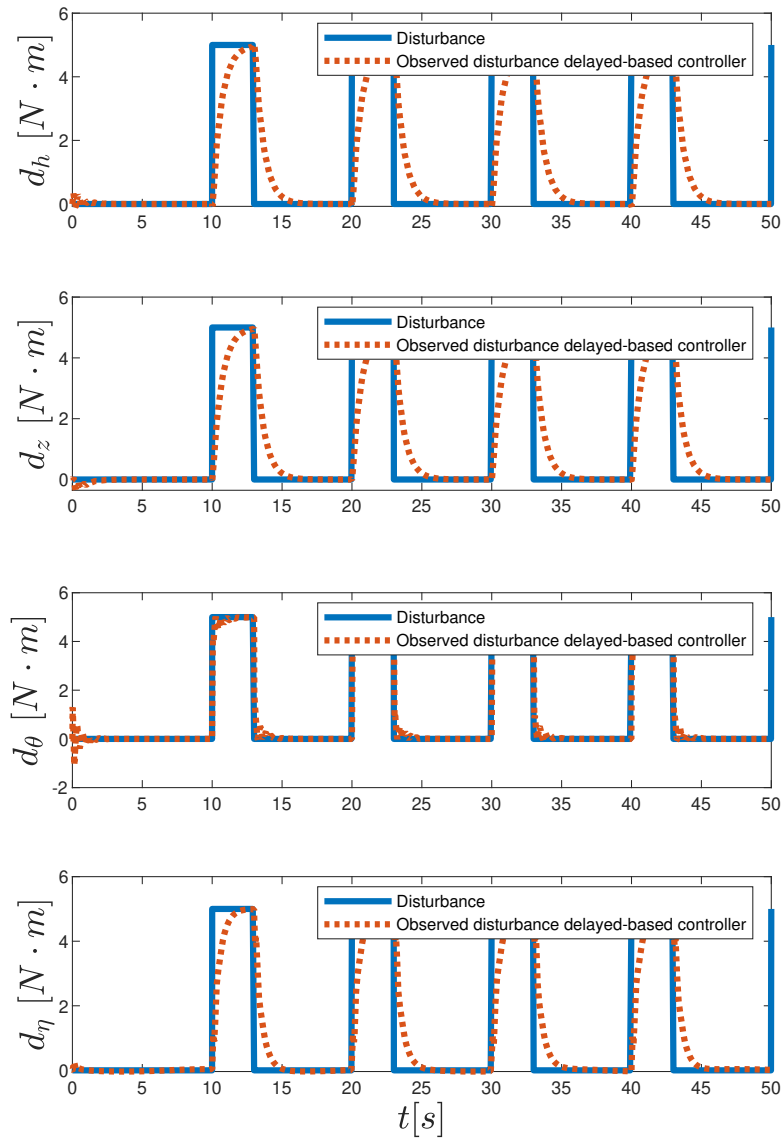


Figura 5.23: Perturbaciones aplicadas a la aeronave durante el seguimiento de la trayectoria circular.

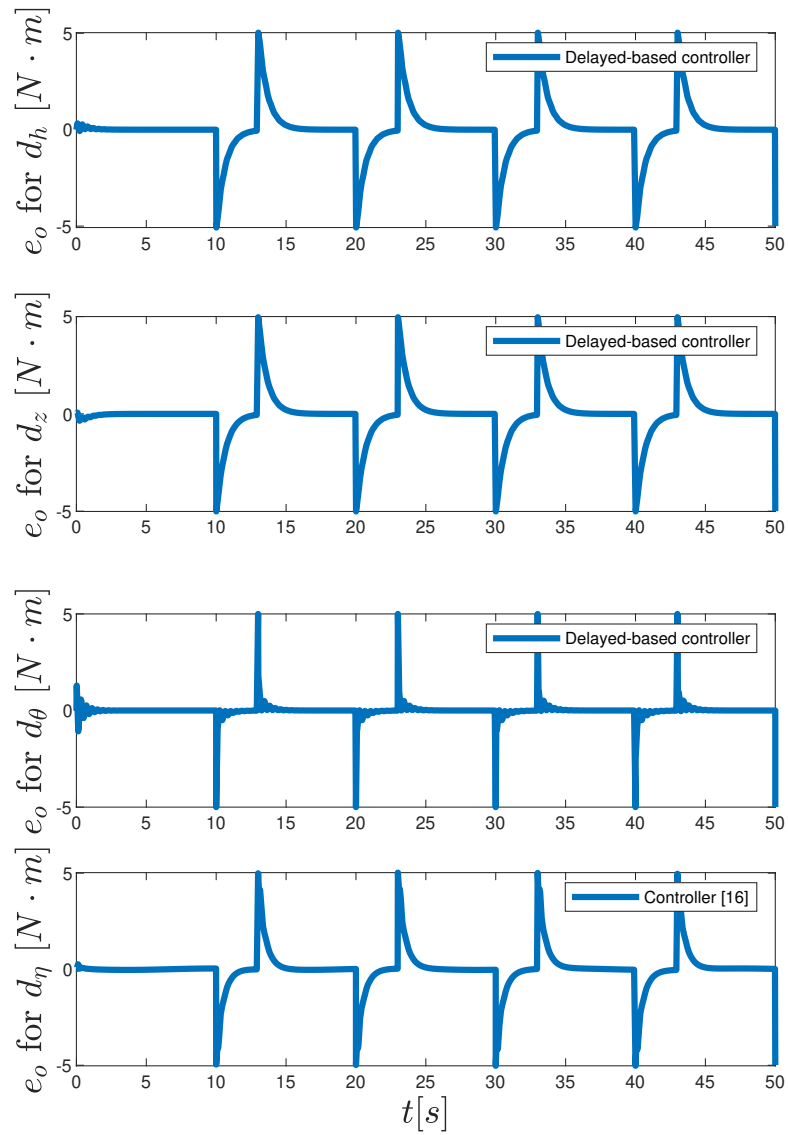


Figura 5.24: Errores en la observación de la perturbación aplicada a la aeronave durante el seguimiento de la trayectoria circular.

CAPÍTULO 6

Conclusiones

Este trabajo presentó un estudio sobre una configuración de vuelo no holonómica para un cuadricóptero con rotores basculantes, incorporando además capacidades de interacción y manipulación mediante un brazo robótico de un grado de libertad. Se desarrolló un modelo matemático preciso utilizando el formalismo de Euler–Lagrange, el cual representa con fidelidad el comportamiento dinámico de la aeronave. Dicho modelo constituye una base sólida para futuros desarrollos en plataformas aéreas híbridas y escenarios donde se requieren tareas de agarre preciso, interacción avanzada con el entorno y operaciones cooperativas entre múltiples agentes.

Con el fin de mejorar el desempeño en seguimiento de trayectorias y la robustez del sistema, se investigaron dos estrategias de control basadas en retardo: un controlador $P\delta$ y el controlador $P\delta I$, ambos con tareas de seguimiento. Estos enfoques sustituyen la derivada temporal por una versión retardada, reduciendo así la amplificación de ruido, eliminando la necesidad de mediciones directas de velocidad, proporcionando mayor flexibilidad de ajuste e incrementando la robustez frente a errores de sensado. Los resultados numéricos mostraron que el controlador basado en retardo supera a un controlador nominal, basado en el enfoque I&I, en términos de precisión de seguimiento y esfuerzo de control. De manera similar, el controlador $P\delta I$ demostró un rendimiento sólido y una capacidad de ajuste ampliada, lo que lo posiciona como una alternativa atractiva para diversas aplicaciones en cuadricópteros.

De forma complementaria, se diseñó una variante del Observador No Lineal de Perturbaciones (NDO) para trabajar conjuntamente con los esquemas de control propuestos. La versión mejorada del NDO, que incorpora ganancias independientes para cada estado observado, logró rechazar eficazmente perturbaciones externas debidas a factores ambientales y a imprecisiones del modelo. Este observador incrementó la

estabilidad y eficiencia del vuelo, especialmente en tareas de transporte de carga y condiciones interactivas donde predominan perturbaciones significativas. Si bien se identificaron limitaciones menores en rangos operativos específicos, el desempeño general del observador fue satisfactorio, proporcionando estimaciones confiables de perturbaciones y apoyando al controlador en escenarios de operación exigentes.

En conjunto, la integración de los controladores basados en retardo con el observador no lineal de perturbaciones constituye una solución robusta y viable para aeronaves de tipo tilt-rotor. Los resultados obtenidos confirman la capacidad del sistema para lograr un seguimiento preciso de trayectorias, mantener los esfuerzos de control dentro de límites adecuados y estimar perturbaciones externas con alta exactitud. Estos hallazgos resaltan el potencial de los métodos basados en retardo como alternativas prácticas y efectivas a los controladores tradicionales dependientes de derivadas, particularmente en plataformas donde la reducción de sensores, la mitigación de ruido y la robustez son aspectos prioritarios.

A pesar de los resultados, la principal limitación de este trabajo radica en la ausencia de una plataforma experimental completamente operativa que permita validar los esquemas de control y observación en condiciones reales. No obstante, se han identificado plataformas potenciales que servirán como base para la siguiente fase de desarrollo, centrada en la implementación en hardware y la validación experimental.

La versatilidad de las aeronaves con rotores basculantes abre múltiples oportunidades de aplicación más allá del alcance de esta tesis. Entre ellas destacan la mejora de operaciones VTOL, una mayor precisión en despegues y aterrizajes, así como tareas complejas de inspección, como el monitoreo de ductos y el mantenimiento de líneas eléctricas, donde el control fino y la capacidad de rechazar perturbaciones resultan esenciales.

Finalmente, como líneas futuras se propone explorar configuraciones adicionales de controladores basados en retardo, con el objetivo de optimizar su desempeño bajo condiciones operativas más amplias y variadas. Asimismo, se plantea perfeccionar la estructura del observador no lineal y aplicar las estrategias integradas en escenarios más avanzados que involucren manipulación cooperativa, coordinación multiagente e interacción compleja con el entorno.

6.1. Trabajo Futuro

- (1) ***Implementación de enfoques de control no lineal y basados en retardos en una plataforma real.*** Uno de los objetivos principales es llevar a la práctica los

enfoques de control no lineal desarrollados durante el trabajo de maestría y los basados en retardos desarrollados durante este trabajo de doctorado. Para ello, se utilizará como plataforma experimental un cuadricóptero *DJI F450*, equipado con una computadora de vuelo *Pixhawk*, el *Robot Operating System* (ROS) para realizar simulaciones *hardware-in-the-loop* (HIL), y el simulador Gazebo. Esta infraestructura permitirá validar los algoritmos propuestos bajo condiciones reales de operación y evaluar su desempeño ante perturbaciones y limitaciones propias del entorno experimental.

- (2) ***Desarrollo de estrategias de control que consideren explícitamente los efectos de los retardos del sistema, con el fin de eliminar el uso de sensores de velocidad.*** En aplicaciones experimentales, es común que aparezcan retardos debidos al procesamiento computacional o a la comunicación entre los sensores y el microcontrolador. Con base en estas limitaciones, se propone diseñar una estrategia de control que permita prescindir de la medición u observación directa de la velocidad traslacional. Este enfoque deriva del controlador basado en el error combinado de seguimiento y busca mejorar la robustez del sistema al incorporar de manera explícita los retardos presentes en la dinámica y en la arquitectura de medición.
- (3) ***Extensión del modelo dinámico al espacio tridimensional para el Vehículo Aéreo Micro Interactive Tilt-Rotor.*** Como se mencionó anteriormente, el modelo dinámico desarrollado en esta tesis fue formulado en el plano $x-z$. Una extensión natural del trabajo consiste en generalizar dicho modelo al espacio tridimensional, lo cual permitirá capturar efectos aerodinámicos y cinemáticos más complejos. Paralelamente, se diseñarán y analizarán nuevas estrategias de control para esta versión tridimensional, con el propósito de evaluar el desempeño del sistema en maniobras avanzadas y escenarios operativos de mayor exigencia.

Bibliografía

- [1] Naciones Unidas, “Transformar nuestro mundo: la agenda 2030 para el desarrollo sostenible,” 2015. Resolución A/RES/70/1 de la Asamblea General de la ONU.
- [2] Y. Li, T. Guo, J. Chen, J. Wu, Y. Zhang, S. Alam, K. Cai, and W. Du, “Urban air mobility: A review and challenges,” *IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine*, vol. 17, no. 3, pp. 67–87, 2025.
- [3] Y. Shi, “Pilots in the evolving urban air mobility: From manned to unmanned aviation,” in *2023 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pp. 63–70, 2023.
- [4] L. A. Garrow, B. J. German, and C. E. Leonard, “Urban air mobility: A comprehensive review and comparative analysis with autonomous and electric ground transportation for informing future research,” *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, vol. 132, p. 103377, 2021.
- [5] D. Sengupta and S. K. Das, “Urban air mobility: Vision, challenges and opportunities,” in *2023 IEEE 24th International Conference on High Performance Switching and Routing (HPSR)*, pp. 1–6, 2023.
- [6] A. P. Cohen, S. A. Shaheen, and E. M. Farrar, “Urban air mobility: History, ecosystem, market potential, and challenges,” *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 22, no. 9, pp. 6074–6087, 2021.
- [7] Volocopter GmbH, “Volocopter successfully concludes corporate reorganization.” <https://www.volocopter.com/en/newsroom/vc-reorganization-success>, 2024. [Online; accessed: 24-06-2025].
- [8] N. Kobie, “Lilium fails again. is this the end of europe’s evtol dreams?” <https://www.forbes.com/sites/nicolekobie/2025/02/28/>

- lilium-fails-again-is-this-the-end-of-europes-evtol-dreams/, 2025. [Online; accessed 24-06-2025].
- [9] E. C. Pinto Neto, D. M. Baum, J. R. de Almeida, J. B. Camargo, and P. S. Cugnasca, "A trajectory evaluation platform for urban air mobility (uam)," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 23, no. 7, pp. 9136–9145, 2022.
 - [10] National Transportation Safety Board, "Aviation investigation final report: Joby aero inc. jas4-2 (accident no. dca22fa082)." Online; accessed 25-June-2025, Dec. 2024. Final report, last revised December 13, 2024.
 - [11] National Transportation Safety Board, "Aviation investigation final report: Aurora pav (accident no. dca19la154)." <https://data.nts.gov/Docket?ProjectID=99537>, Mar. 2020. Published March 13, 2020.
 - [12] National Transportation Safety Board, "Aviation investigation final report: Kitty hawk heaviside 2 (accident no. dca20ca003)." <https://data.nts.gov/Docket?ProjectID=100439>, Mar. 2020. Published March 27, 2020.
 - [13] Air Accidents Investigation Branch, "Aaib bulletin: G-evtl accident investigation – va-1x evtol (ref: Aaib-29460)." <https://www.gov.uk/aaib-reports/aaib-investigation-to-va-1x-g-evtl>, May 2024. Published May 2, 2024.
 - [14] A. Koumoutsidi, I. Pagoni, and A. Polydoropoulou, "A new mobility era: Stakeholders' insights regarding urban air mobility," *Sustainability*, vol. 14, no. 5, 2022.
 - [15] G. Papageorgiou, E. Tsappi, and T. Wang, "Smart urban systems planning for active mobility and sustainability," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 58, no. 10, pp. 261–266, 2024. 17th IFAC Symposium on Control of Transportation Systems CTS 2024.
 - [16] M. Y. Arafat and S. Pan, "Urban air mobility communications and networking: Recent advances, techniques, and challenges," *Drones*, vol. 8, no. 12, 2024.
 - [17] E. S. Rigas, P. Kolios, and G. Ellinas, "Scheduling aerial vehicles in large scale urban air mobility schemes with vehicle relocation," *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*, vol. 9, no. 9, pp. 5665–5679, 2024.
 - [18] H. Yang and R. Morales, *Robust Full-Envelope Flight Control Design for an eVTOL Vehicle*.

- [19] S. Qu, T. He, and W. Su, *Mixed Model Predictive Control and Data-Driven Control of a Tiltrotor eVTOL Aircraft*.
- [20] L. Panish and M. Bacic, "Tiltwing evtol transition trajectory optimization," *Journal of Aircraft*, vol. 62, no. 1, pp. 81–93, 2025.
- [21] M. Faessler, D. Falanga, and D. Scaramuzza, "Thrust mixing, saturation, and body-rate control for accurate aggressive quadrotor flight," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 2, no. 2, pp. 476–482, 2017.
- [22] G. Chen, P. Zhang, Z. Wang, and W. Dong, "Trp-controller: An efficient anti-saturation controller for quadrotors performing yaw-low-priority motions," in *2021 27th International Conference on Mechatronics and Machine Vision in Practice (M2VIP)*, pp. 310–315, 2021.
- [23] R. R. Martinez, H. Paul, and K. Shimonomura, "Design and control strategies of multirotors with horizontal thrust-vectorized propellers," *Drones*, vol. 9, no. 2, 2025.
- [24] L. Zhang, H. Ding, J. Shi, Y. Huang, H. Chen, K. Guo, and Q. Li, "An adaptive backstepping sliding mode controller to improve vehicle maneuverability and stability via torque vectoring control," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 69, no. 3, pp. 2598–2612, 2020.
- [25] X. Chen, Q. Zhang, and Y. Duan, "Finite-time backstepping sliding mode control applied to the yaw control of uav helicopters with actuator faults," in *2020 39th Chinese Control Conference (CCC)*, pp. 6911–6916, 2020.
- [26] J. Xu, P. Shi, C.-C. Lim, C. Cai, and Y. Zou, "Reliable tracking control for under-actuated quadrotors with wind disturbances," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 49, no. 10, pp. 2059–2070, 2019.
- [27] F. Teng, J. Wang, L. Jin, Z. Wang, Z. Zhou, and Z. Liu, "Cooperative control strategy of trajectory tracking and driving stability for distributed-drive vehicles under extreme conditions," *Control Engineering Practice*, vol. 147, p. 105905, 2024.
- [28] E. Chumacero, A. Loría, and G. Espinosa-Pérez, "Velocity-sensorless tracking control and identification of switched-reluctance motors," *Automatica*, vol. 50, no. 12, pp. 3123–3130, 2014.

- [29] C.-F. Méndez-Barrios, S.-I. Niculescu, A. Martínez-González, and A. Ramírez, “Characterizing some improperly posed problems in proportional-derivative control,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 32, no. 18, pp. 9452–9474, 2022.
- [30] J.-E. Hernández-Díez, C.-F. Méndez-Barrios, S. Mondié, S.-I. Niculescu, and E. González-Galván, “Proportional-delayed controllers design for LTI-systems: a geometric approach,” *International Journal of Control*, vol. 91, no. 4, pp. 907–925, 2018.
- [31] A. J. Guel-Cortez, C.-F. Méndez-Barrios, E. J. González-Galván, G. Mejía-Rodríguez, and L. Félix, “Geometrical design of fractional PD_μ controllers for linear time-invariant fractional-order systems with time delay,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 233, no. 7, pp. 815–829, 2019.
- [32] J. J. Castillo-Zamora, J. E. Hernández-Díez, I. Boussaada, J. Escareno, and J. U. Alvarez-Muñoz, “A preliminary parametric analysis of PID delay-based controllers for quadrotor UAVs,” in *2021 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pp. 28–37, 2021.
- [33] J. Zhang, X. Zhu, and Z. Zhou, “Design of time delayed control systems in UAV using model based predictive algorithm,” in *2010 2nd International Asia Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (CAR 2010)*, vol. 1, pp. 269–272, 2010.
- [34] W. Zhigang, L. Jianbo, and D. Dengyan, “Manipulation strategy of tilt quad rotor based on active disturbance rejection control,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, vol. 234, no. 3, pp. 573–584, 2020.
- [35] A. Alkamachi and E. Ercelebi, “ H_∞ control of an overactuated tilt rotors quadcopter,” *Journal of Central South University*, vol. 25, no. 3, pp. 586–599, 2018.
- [36] R. B. Anderson, J. A. Marshall, and A. L’Afflito, “Constrained robust model reference adaptive control of a tilt-rotor quadcopter pulling an unmodeled cart,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 57, no. 1, pp. 39–54, 2021.

- [37] D. Nieto-Hernández, J. Escareno, C.-F. Méndez-Barrios, S.-I. Niculescu, I. Bousaada, E. González-Galván, and J. Alvarez-Muñoz, “Modeling and control of an interactive tilt-rotor MAV for in-contact cracks-sensing operations,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 51, no. 22, pp. 318–323, 2018.
- [38] *Robust Position Control of a Quadrotor Using Onboard Optical Flow Sensor*, vol. Volume 1: Advances in Control Design Methods, Nonlinear and Optimal Control, Robotics, and Wind Energy Systems; Aerospace Applications; Assistive and Rehabilitation Robotics; Assistive Robotics; Battery and Oil and Gas Systems; Bioengineering Applications; Biomedical and Neural Systems Modeling, Diagnostics and Healthcare; Control and Monitoring of Vibratory Systems; Diagnostics and Detection; Energy Harvesting; Estimation and Identification; Fuel Cells/Energy Storage; Intelligent Transportation of *Dynamic Systems and Control Conference*, 10 2016.
- [39] A. Moeini, M. A. Rafique, Z. Xue, A. F. Lynch, and Q. Zhao, “Disturbance observer-based integral backstepping control for UAVs,” in *2020 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pp. 382–388, 2020.
- [40] K. Guo, J. Jia, X. Yu, L. Guo, and L. Xie, “Multiple observers based anti-disturbance control for a quadrotor UAV against payload and wind disturbances,” *Control Engineering Practice*, vol. 102, p. 104560, 2020.
- [41] W. Taha, A. Al-Durra, R. Errouissi, and K. Al-Wahedi, “Nonlinear disturbance observer-based control for quadrotor UAV,” in *IECON 2018 - 44th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, pp. 2589–2595, 2018.
- [42] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics*. San Francisco, CA: Pearson Education, 3rd ed., 2011.
- [43] K. Ogata, *Dinámica de Sistemas*. Ciudad de México: Prentice-Hall Hispanoamericana S.A., 1987.
- [44] L. Meirovitch, *Methods of Analytical Dynamics*. Dover Publications, reprint ed., 2010.
- [45] H. Khalil, *Nonlinear Systems*. Pearson Education, Prentice Hall, 2002.
- [46] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis (2Nd Ed.)*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1992.

- [47] L. El'sgol'ts and S. Norkin, *Introduction to Theory and Applications of Differential Equations with Deviating Arguments*. New York, NY: Academic Press, 1973.
- [48] K. Gu, J. Chen, and V. L. Kharitonov, *Stability of time-delay systems*. New York, NY: Springer Science & Business Media, 2003.
- [49] R. Villafuerte, S. Mondié, and R. Garrido, "Tuning of proportional retarded controllers: Theory and experiments," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 21, no. 3, pp. 983–990, 2013.
- [50] W. Chen, D. J. Ballance, P. J. Gawthrop, and J. O'Reilly, "A nonlinear disturbance observer for robotic manipulators," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 47, no. 4, pp. 932–938, 2000.
- [51] J.-A. Hernández-Gallardo, E.-J. González-Galván, C.-F. Méndez-Barrios, and A.-J. Guel-Cortez, "Fastest with no-overshoot velocity control design of a two-differential robotic formation," *Lecture Notes in Networks and Systems*, vol. 347 LNNS, p. 71 – 79, 2022.
- [52] B. Paden, M. Čáp, S. Z. Yong, D. Yershov, and E. Frazzoli, "A survey of motion planning and control techniques for self-driving urban vehicles," *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*, vol. 1, no. 1, pp. 33–55, 2016.
- [53] J. J. Castillo-Zamora, J. E. Hernández-Díez, I. Boussaada, J. Escareno, and J. U. Alvarez-Muñoz, "A preliminary parametric analysis of PID delay-based controllers for quadrotor UAVs," in *2021 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pp. 28–37, 2021.
- [54] F. Del-Rio-Rivera, V. M. Ramírez-Rivera, A. Donaire, and J. Ferguson, "Robust trajectory tracking control for fully actuated marine surface vehicle," *IEEE Access*, vol. 8, pp. 223897–223904, 2020.
- [55] I. Llanez C., V. Ramirez R., F. Del Rio R., and P. Antonio, "Optimized design of an autonomous underwater vehicle, for exploration in the caribbean sea," *Ocean Engineering*, vol. 187, p. 106184, 2019.
- [56] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*. London, United Kingdom: Springer-Verlag, 3 ed., 1995.
- [57] D. Nieto-Hernández, J. Escareno, C.-F. Méndez-Barrios, I. Boussaada, and D. Langerica-Córdoba, "Modeling and control of an interactive tilt-rotor MAV,"

- in *2017 Workshop on Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems*, pp. 270–275, 2017.
- [58] J.-A. Hernández-Gallardo, A.-J. Guel-Cortez, E. J. Gonzalez-Galvan, and C.-F. Méndez-Barrios, “Designing Proportional Delayed Integral Control for Fast Regulation in Second-Order Systems: A Geometric Approach,” in *2023 9th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)*, 2023.
- [59] S. P. Bhattacharyya and L. H. Keel, “Robust control: the parametric approach,” in *Advances in control education 1994*, pp. 49–52, Elsevier, 1995.
- [60] S. Li, J. Yang, W.-H. Chen, and X. Chen, *Disturbance observer-based control: Methods and applications*. London, United Kingdom: CRC Press, 1 ed., 2014.
- [61] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*. New York, NY: Cambridge University Press, 1991.