



Universidad Autónoma de San Luis
Potosí
Facultad de Ingeniería
Centro de Investigación y Estudios de Posgrado

CONTROL DE UN ROBOT PARALELO TIPO DELTA RECONFIGURABLE

TESIS

Que para obtener el grado de:
Doctor en Ingeniería Mecánica

Presenta:

M. en CySD. Arturo Franco López

Asesor:

Dr. Mauro Eduardo Maya Méndez

San Luis Potosí, México
Mayo 2025



CONTROL DE UN ROBOT PARALELO TIPO DELTA RECONFIGURABLE

RESUMEN

Esta tesis doctoral aborda el diseño e implementación de esquemas de control innovadores para un Robot Delta reconfigurable, con el objetivo de ampliar su espacio de trabajo y optimizar su desempeño en comparación con el Robot Delta convencional. Los robots paralelos, aunque ventajosos por su rigidez, velocidad y precisión, presentan desafíos como espacios de trabajo restringidos y configuraciones singulares complejas. La reconfiguración geométrica de parámetros estructurales, como el radio de la base (R), se ha identificado como una estrategia clave para mitigar estas limitaciones, introduciendo simultáneamente redundancia cinemática y aumentando la complejidad del control. Esta investigación presenta varias contribuciones fundamentales. Se desarrollaron modelos geométricos y cinemáticos completos (directos e inversos) para la arquitectura específica del Robot Delta reconfigurable, no reportados previamente en detalle para este enfoque. Se realizó un análisis exhaustivo de singularidades, revelando que la reconfigurabilidad introduce un conjunto infinito de singularidades, pero también proporciona los medios para evitarlas activamente. Se propuso un nuevo índice de desempeño, denominado $\tilde{k}$, sensible a singularidades, para la resolución del problema geométrico y cinemático inversos. Este índice, basado en una combinación normalizada de valores singulares mínimos de velocidad y fuerza, guía la selección de configuraciones que superan las limitaciones de los índices tradicionales que pueden llevar a operar cerca de singularidades. Se desarrolló una ley de control proporcional con ganancias variables por partes, que mejora la velocidad de convergencia del error de seguimiento y la respuesta transitoria del sistema, manteniendo la estabilidad. Se formularon e implementaron leyes de control basadas en señales de encoders y leyes de control visual bajo el esquema LCM-CSM (Manipulación en Espacio de Cámara con Modelo Lineal) para operar en velocidad. Una aportación clave fue la formulación de un Jacobiano de imagen (J_{csm}) que preserva explícitamente la dependencia de la profundidad (ρ), permitiendo que los parámetros de visión sean constantes y mejorando la validez global del modelo. Los resultados experimentales, realizados en un prototipo de Robot Delta reconfigurable con un sistema de visión mejorado, validan las propuestas. Se confirmó un incremento teórico del 82 % en el volumen del espacio de trabajo alcanzable para el robot reconfigurable, junto con mejoras en la distribución de la manipulabilidad de velocidad. La ley de control proporcional por partes redujo el tiempo de convergencia en un 55 % (de 4s a 1.8s) en tareas de posicionamiento estático, en comparación con el control proporcional convencional. Para el control visual, se logró un error promedio de posicionamiento estático de 0.6 mm, una mejora de precisión respecto a implementaciones previas. En tareas de seguimiento de objetos en movimiento (hasta 12.7 cm/s), se obtuvieron errores promedio de 2.5 mm a 11.5 mm. En conclusión, este trabajo demuestra que la reconfigurabilidad geométrica y leyes de control avanzadas, es una vía efec-

tiva para superar las limitaciones de los robots paralelos convencionales, dotándolos de mayor versatilidad y desempeño en aplicaciones que requieren alta precisión y dinámica.



16 de enero de 2025

**ING. ARTURO FRANCO LÓPEZ
P R E S E N T E.**

En atención a su solicitud de Temario, presentada por el **Dr. Mauro Eduardo Maya Méndez**, Asesor de la Tesis que desarrollará Usted, con el objeto de obtener el Grado de **Doctor en Ingeniería Mecánica**, me es grato comunicarle que en la sesión del H. Consejo Técnico Consultivo celebrada el día 16 de enero del presente, fue aprobado el Temario propuesto:

TEMARIO:

**"CONTROL DE UN ROBOT PARALELO TIPO DELTA
RECONFIGURABLE"**

1. Introducción.
 2. Antecedentes en robótica paralela.
 3. Modelado del robot delta reconfigurable y análisis de desempeño.
 4. Control del robot delta reconfigurable.
 5. Resultados experimentales.
- Conclusiones.
Referencias.

"MODOS ET CUNCTARUM RERUM MENSURAS AUDEBO"

A T E N T A M E N T E

**DR. EMILIO JORGE GONZÁLEZ GALVÁN
DIRECTOR.**

SAN LUIS POTOSÍ
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIRECCIÓN

Copia. Archivo
*etn.

www.uaslp.mx

Av. Manuel Horta 8
Zona Universitaria • C.P. 76200
San Luis Potosí, S.L.P.
tel. (444) 626 2330 al 29
fax (444) 626 2336

**"1945-2025: 80 años formando profesionales de la ingeniería en beneficio de
la sociedad"**



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS
DIRECCIÓN DE BIBLIOTECA VIRTUAL
Zona Universitaria s/n C.P. 78290 Tel. 834 25 42 Fax 828-23-08
San Luis Potosí, S.L.P. México



El que suscribe Alejo Franco Lopez,
con domicilio en Priv. Cuernavaca #101
Colonia / fraccionamiento Tecnologico I
C.P. 75145 Tel. 8211 02 41 02 Ciudad San Luis Potosí
y en mi carácter de autor y titular de la tesis que
lleva como nombre: Control de un Robot Paralelo Tipo
Delta Reconfigurable, en lo sucesivo "LA OBRA" y por
ende, cedo y autorizo a la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, para que
lleve a cabo la divulgación, publicación, reproducción, así como la digitalización
de la obra, en formato electrónico y sin fines de lucro.

La Universidad Autónoma de San Luis Potosí, se compromete a respetar
en todo momento mi autoría y a otorgarme el crédito correspondiente.

San Luis Potosí, S.L.P., a 25 de Agosto de 2007.

Atentamente,

Alejo Franco

FIRMA
AUTOR

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	1
2. ANTECEDENTES EN ROBOTS PARALELOS Y CONTROL DE ROBOTS PARALELOS	7
2.1. Robots paralelos	7
2.2. Robots paralelos reconfigurables	15
2.3. Robots paralelos redundantes	16
2.4. Índices de desempeño para robots paralelos	29
2.5. Control de robots paralelos	40
2.6. Esquema de control CSM	44
3. MODELADO DEL ROBOT DELTA RECONFIGURABLE Y ANÁLISIS DE DESEMPEÑO CINEMÁTICO	55
3.1. Descripción del robot delta reconfigurable	56
3.2. Modelo geométrico directo	59
3.3. Resolución del problema geométrico inverso	60
3.4. Modelo cinemático directo	61
3.5. Resolución del problema de cinemática inversa	65
3.6. Singularidades	66
3.7. Metodología para analizar el volumen del espacio de trabajo	68
3.8. Selección del criterio de optimización para la resolución de redundancia cinemática	70
3.9. Evaluación del efecto de la redundancia en el robot Delta	78
4. CONTROL DEL ROBOT DELTA RECONFIGURABLE	83
4.1. Modelos de CSM y Jacobiano de imagen	84
4.2. Propuesta de ley de control proporcional con ganancias variables	90
4.3. Leyes de control basadas en encoders	96
4.4. Ley de control en el espacio de cámara	97
5. RESULTADOS EXPERIMENTALES	99
5.1. Mejoras en el sistema de visión	99
5.2. Hardware	100
5.3. Software	100
5.4. Configuración de Pruebas	101
5.5. Resultados	103

5.6. Discusión	108
CONCLUSIONES	110
REFERENCIAS	117

Índice de figuras

2.1.	Prototipo del robot DELTA patentado en EEUU (1990) por Clavel. (Patente No. 4.976.582).	9
2.2.	Esquema de las cadenas cinemáticas del Robot Delta.	10
2.3.	(a) Esquema de las cadenas cinemáticas con redundancia de actuadores. (b) Ejemplo de robot paralelo con redundancia de actuadores, (Gosselin and Schreiber, 2018).	18
2.4.	(a) Ejemplo de robot paralelo con redundancia cinemática serial. (b) Ejemplo de robot paralelo con redundancia cinemática paralela.	23
2.5.	Esquema del modelo de cámara de orificio.	48
3.1.	Cadenas cinemáticas del robot delta.	56
3.2.	Mecanismo de reconfiguración del robot delta.	57
3.3.	Gráfica de la variación de los índices ω^v y σ_{min}^v conforme varía el parámetro geométrico R al resolver el problema geométrico inversos.	72
3.4.	Gráfica de la variación de los índices ω^f , σ_{min}^f y $1/k$ conforme varia el parámetro geométrico R al resolver el problema geométrico inversos.	73
3.5.	Gráfica de la variación de los índices ω^v , σ_{min}^v y $\tilde{k}$ conforme varia el parámetro geométrico R al resolver el problema geométrico inversos.	77
3.6.	Gráfica de la variación de los índices ω^f , σ_{min}^f , $1/k$ y $\tilde{k}$ conforme varia el parámetro geométrico R al resolver el problema geométrico inversos.	77
3.7.	Espacio de trabajo del robot delta con y sin reconfiguración.	79
3.8.	Distribución del número de condición en el espacio de trabajo para el robot Delta con y sin reconfiguración. Planos xy	81
4.1.	Normas del error $\mathbf{e} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$ en espacio cartesiano. En azul se grafica la convergencia del control proporcional y en púrpura la convergencia del control proporcional particionado.	92
4.2.	Normas del vector de velocidades articulares $\dot{\mathbf{q}}$. En azul se grafica la convergencia del control proporcional y en naranja la convergencia del control proporcional particionado con cinco particiones.	93
4.3.	Normas del vector de velocidades articulares $\dot{\mathbf{q}}$. En azul se grafica la convergencia del control proporcional y en naranja la convergencia del control proporcional particionado con 300 particiones.	93

4.4.	Normas del vector de velocidades articulares $\dot{\mathbf{q}}$. En azul se grafica la convergencia del control proporcional y en naranja la convergencia del control proporcional particionado con 300 particiones.	94
4.5.	Simulación de la ley de control $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{G}\mathbf{e} + \dot{\mathbf{x}}^*)$	95
4.6.	Simulación de la ley de control $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{G}\mathbf{e} + \dot{\mathbf{x}}^*) - \gamma(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger\mathbf{J})\frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{q}}$	96
5.1.	El robot delta reconfigurable y el sistema de cámaras.	100
5.2.	Esquema del sistema de hardware y su flujo de trabajo.	101
5.3.	Funcionamiento general del sistema de control.	103
5.4.	Norma del error vs. tiempo para la ley de control $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger\mathbf{G}(\mathbf{e}) - \gamma(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger\mathbf{J})\frac{\delta\mu}{\delta\mathbf{q}}$ con $\mathbf{e} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$	104
5.5.	Velocidad angular de las articulaciones (radianes/s) vs. tiempo para la ley de control $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger\mathbf{G}(\mathbf{e}) - \gamma(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger\mathbf{J})\frac{\delta\mu}{\delta\mathbf{q}}$ con $\mathbf{e} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$	104
5.6.	Norma del error vs. tiempo para la ley de control (4.30) con $\mathbf{e} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$	105
5.7.	Velocidad angular de las articulaciones (radianes/s) vs. tiempo para la ley de control (4.30) con $\mathbf{e} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$	105
5.8.	Norma del error de posicionamiento en el espacio de la imagen.	106
5.9.	Señal de control de velocidad.	106
5.10.	Error de seguimiento en los espacios de imagen y operacional para una velocidad de 6.5 cm/s.	107
5.11.	Error de seguimiento en los espacios de imagen y operacional para una velocidad de 9.3 cm/s.	107
5.12.	Error de seguimiento en los espacios de imagen y operacional para una velocidad de 12.7 cm/s.	108

Lista de acronimos

CSM: *Camera Space Manipulation.*

GDL: *Grados De Libertad.*

IDC: *Inverse Dynamics Control.*

LCM-CSM: *Linear Camera Model for Camera Space Manipulation.*

MIMO: *Multi-Input Multi-Output.*

OFL-CSM: *Orthographic + Flattening Camera Space Manipulation.*

PID: *Proportional–Integral–Derivative.*

RDO: *Robot Delta Original.*

RDR: *Robot Delta Reconfigurable.*

SDK: *Software Development Kit.*

USB: *Universal Serial Bus.*

VLCM-CSM: *Velocity Linear Camera Model for Camera Space Manipulation.*

VSC: *Variable Structure Control.*

Lista de publicaciones

JOURNAL CITATION REPORTS

- **“Depth-Dependent Control in Vision-Sensor Space for Reconfigurable Parallel Manipulators”.** *Arturo Franco-López, Mauro Maya, Alejandro González, Antonio Cardenas and Davide Piovesan.* *Sensors* 2023, 23, 7039.

Agradecimientos

Deseo expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a todas aquellas personas e instituciones que, con su apoyo incondicional, han hecho posible la culminación de este doctorado y la realización de la presente tesis. Su influencia, en distintas formas, ha sido un pilar fundamental a lo largo de este arduo pero gratificante camino.

En primer lugar, dedico este logro a mi amada esposa, **Cristina**. Tu amor, paciencia y comprensión han sido mi refugio y mi mayor motivación. Gracias por tu incansable apoyo emocional y físico, por las palabras de aliento en los momentos de duda y por celebrar cada pequeño avance como si fuera tuyo. Sin tu presencia a mi lado, este viaje no hubiera sido posible.

A mi gran amigo, **Aarón**, gracias por tu amistad incondicional y por estar siempre presente. Tus consejos, tu perspectiva y tu constante ánimo fueron una fuente invaluable de fortaleza. Las conversaciones y los momentos compartidos me permitieron despejar la mente y encontrar nuevas energías para continuar.

A mi querida **madre y a mis hermanos**, les agradezco infinitamente por su amor y por inculcar en mí el valor del esfuerzo y la perseverancia. Gracias por su constante apoyo físico y emocional, por su confianza en mis capacidades y por ser un pilar inamovible en mi vida. Su respaldo ha sido esencial para superar los desafíos que este doctorado representó.

Expreso mi más profundo respeto y gratitud a mi asesor de tesis, el **Doctor Mauro Eduardo Maya Méndez**. Sus enseñanzas, su paciencia y su guía han sido fundamentales en mi desarrollo como investigador. Le agradezco su rigurosidad académica, sus valiosos consejos y el tiempo que dedicó a la revisión de este trabajo. Su confianza en mi potencial y su constante apoyo fueron cruciales para llevar esta investigación a buen término.

Finalmente, deseo extender mi agradecimiento a la **Universidad** por brindarme la infraestructura y los recursos necesarios para el desarrollo de esta investigación. De igual manera, agradezco al **Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT)** por la beca otorgada, la cual me permitió dedicarme de tiempo completo a mis estudios de posgrado. Sin el apoyo de ambas instituciones, la realización de este proyecto no hubiera sido factible.

1

Introducción

Los robots manipuladores, mecanismos controlables y reprogramables capaces de ejecutar una diversidad de tareas, han adquirido una importancia crucial en la calidad de vida moderna y en la eficiencia industrial. Su capacidad para operar en ambientes hostiles, desempeñar labores repetitivas con alta precisión y/o velocidad y, en muchos casos, superar la eficiencia o la viabilidad económica de la mano de obra humana, los ha vuelto indispensables. En el sector industrial, por ejemplo, su integración en líneas de producción ha resultado en incrementos significativos de productividad, precisión y calidad, al mismo tiempo que ha contribuido a la reducción de costos operativos.

Dentro de la robótica de manipulación, se distinguen primordialmente dos topologías cinemáticas: serial y paralela. Los robots seriales, conformados por una cadena cinemática abierta, han sido objeto de estudio y aplicación extensiva durante décadas. En contraste, los robots paralelos, que se distinguen por una plataforma móvil vinculada a una base fija a través de múltiples cadenas cinemáticas formando lazos cerrados (Merlet, 2006), han experimentado un auge en el interés académico e industrial en tiempos más recientes, impulsado por sus inherentes virtudes. Estas arquitecturas paralelas destacan por ofrecer mayor rigidez estructural, mayores velocidades y aceleraciones —facilitadas por eslabones de menor inercia debido a la distribución de cargas—, una precisión de posicionamiento más elevada y una capacidad superior para ejercer y soportar fuerzas (Pandilov and Dukovski, 2014). Tales atributos los convierten en soluciones idóneas para aplicaciones que exigen alta dinámica y exactitud, como las operaciones de "pick and place.^a gran velocidad y el maquinado de componentes.

A pesar de sus notables prestaciones, los robots paralelos conllevan desafíos intrínsecos. Entre ellos, se cuentan espacios de trabajo que suelen ser más restringidos y de geometría compleja, la presencia recurrente de múltiples y, a menudo, intrincadas configuraciones singulares, y modelos cinemáticos y dinámicos cuya complejidad dificulta su análisis y, consecuentemente, su control (Pandilov and Dukovski, 2011). Un arquetipo destacado dentro de esta categoría es el **Robot Delta**. Introducido por Clavel (Clavel, 1988), este manipulador es ampliamente reconocido y empleado en la industria por su excepcional velocidad y precisión en tareas que involucran tres grados de libertad puramente traslacionales. Su diseño característico, que frecuentemente utiliza paralelogramos en sus cadenas cinemáticas para mantener la orientación de la plataforma móvil (Pierrot et al., 1990), ha sido y continúa siendo un fértil campo de investigación, con numerosas variaciones propuestas para extender sus capacidades operativas.

Con el objetivo de mitigar algunas de las limitaciones inherentes a los robots paralelos, como la reducida extensión de su espacio de trabajo y su susceptibilidad a las singularidades, la comunidad científica ha explorado diversas estrategias, entre las que sobresalen la reconfiguración y la redundancia. Un **Robot Paralelo Reconfigurable** posee la cualidad de modificar sus propios parámetros estructurales —como la longitud de sus eslabones, la orientación de sus cadenas cinemáticas o las dimensiones geométricas de su base— para adecuarse a diferentes requerimientos de tarea o para optimizar su desempeño en función de ciertos criterios (Plitea et al., 2013). Esta reconfiguración puede efectuarse de manera estática (off-line) o, de forma más avanzada y flexible, dinámicamente durante la operación del robot (on-line), lo cual, en muchos casos, introduce redundancia en el sistema (Milutinović et al., 2012). Un **Robot Paralelo Redundante**, ya sea por redundancia cinemática (Gosselin and Schreiber, 2018) o de actuación (Moosavian and Xi, 2016), puede ofrecer un espacio de trabajo ampliado, una mejorada capacidad para la evasión de singularidades y un incremento en su capacidad de carga útil (Maya et al., 2013; Hu et al., 2022; Mostashiri et al., 2018). No obstante, es crucial reconocer que estas estrategias, si bien ventajosas, implican un aumento considerable en la complejidad del modelo matemático y, de manera particularmente crítica, en el diseño e implementación de leyes de **Control de Robots Paralelos** que sean efectivas, robustas y computacionalmente viables (Pulloquinga et al., 2021). En el contexto específico del Robot Delta, aunque existen estudios pioneros sobre su reconfiguración (Maya et al., 2013; Sánchez-Alonso et al., 2016; Balmaceda-Santamaria et al., 2016), se evidencia una persistente escasez de propuestas de leyes de control específicamente diseñadas para estas variantes.

La dificultad de transferir directamente los extensos resultados de control de robots seriales a los robots paralelos, debido a sus diferencias estructurales y a los problemas abiertos específicos de estos últimos (como la complejidad del **Análisis de singularidades** y la dificultad

para obtener y manipular la matriz Jacobiana) (Pandilov and Dukovski, 2011), se acentúa aún más en el contexto de los robots paralelos reconfigurables. El **Control de Robots Paralelos** mediante el uso de sistemas de visión artificial se perfila como una solución prometedora, capaz de dotar al robot de una mayor autonomía, adaptabilidad a entornos no estructurados y la habilidad de compensar imprecisiones inherentes al modelo matemático del manipulador (Singh et al., 2022; Loredó et al., 2022). Dentro de este dominio, la Manipulación en Espacio de Cámara (CSM) (Skaar et al., 1987) y sus variantes, notablemente el Modelo Lineal de Cámara para CSM (LCM-CSM) (Rendon-Mancha et al., 2010), han despertado un considerable interés. Estos enfoques se distinguen por la posibilidad de operar sin necesidad de una calibración exhaustiva y compleja del sistema robot-cámara, o mediante procedimientos de calibración significativamente simplificados y, en ciertas formulaciones, sin requerir el cálculo explícito del intrincado Jacobiano del robot (Xie et al., 2020). La progresión natural de estas metodologías ha conducido al desarrollo de esquemas de **Control Visual LMC-CSM en velocidad**, como el denominado VLCM-CSM (Loredó et al., 2022). Estos avances son cruciales para abordar tareas dinámicas, como el seguimiento preciso de objetos con trayectorias desconocidas (Lopez-Lara et al., 2020a), superando así las limitaciones de los enfoques CSM tradicionales, que se basan primordialmente en el control de posición punto a punto.

La presente tesis doctoral se enfoca en el diseño, la implementación y la validación experimental de esquemas de control innovadores concebidos específicamente para un **Robot Delta reconfigurable**, tomando como base la arquitectura propuesta en (Maya et al., 2013). Este trabajo de investigación busca capitalizar las ventajas inherentes a la reconfigurabilidad, al tiempo que aborda de manera directa los desafíos de control que esta conlleva, con un énfasis particular en la aplicación y extensión de técnicas avanzadas de control visual. Las **aportaciones clave** de esta investigación son:

- El **Desarrollo de los modelos geométricos y cinemáticos (directos e inversos)** completos, rigurosos y particularizados para la arquitectura específica del Robot Delta reconfigurable objeto de este estudio.
- Un **Análisis de singularidades** exhaustivo y adaptado a esta plataforma reconfigurable, que permite la identificación precisa y la caracterización de las configuraciones críticas en las cuales el robot podría experimentar una pérdida indeseada de movilidad o, por el contrario, ganar grados de libertad espurios y no controlados. Este análisis toma en consideración el impacto directo de la capacidad de reconfiguración sobre la naturaleza y distribución de dichas singularidades.
- La **propuesta de un índice como criterio de optimización** para la gestión de la re-

redundancia cinemática inherente al robot reconfigurable. El índice propuesto no solo busca obtener una solución óptima al problema de redundancia en términos de alguna métrica de desempeño, sino que también está formulado con el objetivo explícito de **evitar configuraciones singulares** durante la operación del robot.

- La **propuesta de variación de una ley de control proporcional por partes** (piecewise proportional control). Esta estrategia de control no lineal tiene como finalidad mejorar la velocidad de convergencia hacia el objetivo y optimizar la respuesta transitoria del sistema, todo ello mientras se preserva la estabilidad. Esto se logra mediante la adaptación dinámica de las ganancias del controlador en función de la magnitud del error de seguimiento, ofreciendo una alternativa superior al control proporcional clásico en ciertos regímenes de operación.
- La **Implementación y validación experimental de dicha ley de control en esquemas basados tanto en señales de encoders como en señales de cámara**. Esta contribución abarca la adaptación y extensión de enfoques consolidados como el LMC-CSM para el control en velocidad, en el contexto particular y novedoso del Robot Delta reconfigurable, demostrando su aplicabilidad práctica y su efectividad en un entorno de laboratorio controlado.

El presente documento se organiza de la siguiente manera: El Capítulo 1 ofrece una revisión exhaustiva de los antecedentes en el campo de los robots paralelos, con un énfasis particular en las arquitecturas reconfigurables y redundantes, así como en las técnicas de control visual más relevantes para este trabajo, sentando así las bases teóricas de la investigación. El Capítulo 2 se dedica al modelado geométrico y cinemático del Robot Delta reconfigurable, incluyendo un análisis detallado de su espacio de trabajo y sus singularidades; además, se presenta y justifica formalmente la propuesta del índice de optimización para la gestión de la redundancia. En el Capítulo 3 se desarrollan las leyes de control propuestas, abarcando tanto las estrategias que se fundamentan en la información proporcionada por los encoders de los actuadores como aquellas que integran el sistema de visión artificial, detallando la formulación de la ley de control proporcional por partes y el esquema de control visual LMC-CSM en velocidad. El Capítulo 4 describe minuciosamente la plataforma experimental utilizada para la validación, presenta de manera integral los resultados obtenidos a través de las diversas pruebas experimentales realizadas y lleva a cabo una discusión crítica del desempeño de los controladores implementados en escenarios realistas de posicionamiento estático y seguimiento de trayectorias. Finalmente, se exponen las conclusiones generales derivadas de esta investigación y se delinean posibles

líneas de trabajo futuro que surgen como extensión natural de los hallazgos y contribuciones aquí presentados.

HIPÓTESIS

La implementación del mecanismo de reconfiguración, como junta activa, en el robot Delta PARALLIX LKF-2040 mejora las características cinemáticas mediante la resolución del problema geométrico y cinemático inverso y su inclusión en esquemas de control para tareas de posicionamiento y seguimiento de objetivos.

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

OBJETIVO GENERAL

Diseñar y validar experimentalmente esquemas de control, tanto visual como no visual, para el Robot Delta reconfigurable del que se dispone en la facultad de ingeniería, que permita un mayor espacio de trabajo y optimice un índice de desempeño respecto al Robot Delta convencional.

OBJETIVOS PARTICULARES

1. Formular los modelos cinemáticos inverso y directo, tanto en posición como en velocidad, del Robot Delta reconfigurable para ser utilizados en las leyes de control que serán propuestas.
2. Realizar un análisis de singularidades basado en el Jacobiano del Robot Delta Reconfigurable para determinar configuraciones en las que el robot pierde capacidades.
3. Diseñar e implementar leyes de control en velocidad, basado en señales de “encoder” para el Robot Delta reconfigurable que resuelvan la tarea de posicionamiento y optimicen un índice de desempeño.
4. Ampliar las capacidades del sistema de visión disponible mediante la adición de cámaras y aumento en la cantidad de imágenes recibidas por segundo; esto permitirá obtener una mayor precisión y exactitud en las mediciones utilizadas durante el proceso de control visual.

5. Diseñar e implementar una ley de control visual bajo el esquema de “Camera Space Manipulation” (CSM) que permita el robot posicionarse y seguir objetivos en movimiento mediante marcas visuales.

2

Antecedentes en robots paralelos y control de robots paralelos

2.1. ROBOTS PARALELOS

A continuación se presentan una serie de definiciones referentes a robots manipuladores y robots paralelos en particular. Estas definiciones se basan en lo establecido en los libros (Merlet, 2006; Briot and Khalil, 2015; Taghirad, 2013; Vasilic et al., 2019) especializados en robots paralelos:

Grados de libertad de un cuerpo rígido: Es el número de movimientos independientes bajo los cuales se puede representar el movimiento que puede realizar el cuerpo rígido, estos movimientos pueden ser de traslación o de rotación. En un espacio bidimensional, el cuerpo puede trasladarse en dos direcciones y rotar en una dando un máximo de 3 grados de libertad. En un espacio tridimensional, el cuerpo puede trasladarse en tres direcciones y rotar en tres direcciones dando un máximo de 6 grados de libertad; esto suele escribirse como GDL (Grados De Libertad).

Grados de libertad de un mecanismo: es el número mínimo de variables independientes necesarias para describir completamente su posición y orientación en el espacio de cada uno

de los elementos que componen al mecanismo.

Robot: es un sistema mecánico compuesto por un conjunto de cuerpos que están unidos entre sí mediante elementos que permite cierta movilidad entre los cuerpos rígidos. Mediante dicho sistema mecánico se pueden controlar varios GDL de un cuerpo rígido (llamado efector final) con respecto a una base fija.

Efector final: En este documento se entiende por efector final por el cuerpo rígido, al final del robot, cuya posición y orientación son controlados respecto a la base fija.

Eslabón: Cada uno de cuerpos rígidos que componen a un robot.

Junta: Una junta es el elemento que conecta dos eslabones sucesivos, limitando así el número de grados de libertad entre ellos. El número resultante de grados de libertad, m , también se llama movilidad de la junta, de modo que $0 \leq m < 6$. Cuando $m = 1$, que es un caso frecuente en robótica, la junta es o bien rotativa o prismática. Una junta compleja con varios grados de libertad puede construirse mediante una combinación equivalente de junta rotativas y prismáticas. Por ejemplo, una junta esférica puede obtenerse utilizando tres junta rotativas cuyos ejes se cruzan en un punto.

Junta rotativa, R: Junta que permite la rotación alrededor de un eje entre dos elementos acoplados. Una junta rotacional impone cinco restricciones entre los elementos conectados y proporciona un grado de libertad.

Junta prismática, P: Junta que permite el desplazamiento, a lo largo de un eje, entre dos elementos acoplados. Una junta prismática impone cinco restricciones entre los elementos conectados y proporciona un grado de libertad.

Junta universal, U: Junta que permite la rotación alrededor de dos ejes entre dos elementos. Una junta universal impone cuatro restricciones entre los eslabones conectados y proporciona 2 GDLs.

Junta esférica, S: Junta que permite la rotación alrededor de tres ejes entre dos elementos. Una junta universal impone tres restricciones entre los eslabones conectados y proporciona 3 GDLs

Pose del efector final: El conjunto de su posición y orientación del efector final.

Robot serial: es un sistema mecánico formado por una sucesión de eslabones donde cada uno está conectado a su predecesor y sucesor mediante una junta, exceptuando al primer y ultimo eslabón que corresponden con la base fija y el efector final.

Robot paralelo: es un sistema mecánico compuesto por un efector final de n grados de libertad y una base fija, unidos entre sí por al menos dos cadenas cinemáticas independientes. La actuación se lleva a cabo mediante actuadores simples.

Robot redundante: Un robot redundante es aquel en el que el numero de actuadores r es

mayor que el número de grados de libertad n en el efector final. Este concepto será tratado en detalle en una sección posterior.

Reconfiguración de robots: se refiere al proceso de modificar de manera intencional ciertos parámetros estructurales, geométricos o funcionales de un robot para adaptar su rendimiento a diferentes tareas, condiciones operativas o entornos. Esta capacidad puede implementarse tanto de manera física como virtual, dependiendo del tipo de robot y su diseño. Este concepto será tratado en detalle en una sección posterior.

2.1.1. ROBOT DELTA

Uno de los robots paralelos más populares a nivel académico e industrial, es el llamado Robot Delta. Este fue introducido en (Gosselin and Angeles, 1990), por el Dr Clavel, con la novel idea de usar paralelogramos para construir una estructura paralela robusta con tres grados de libertad puramente traslacionales; sin sospechar que sería uno de los diseños paralelos más acertados con varios cientos de estructuras activas en todo el mundo. En 1999, el Dr. Clavel es premiado con el “Golden Robot Award” (patrocinado por ABB) por su trabajo innovador en el robot paralelo delta.

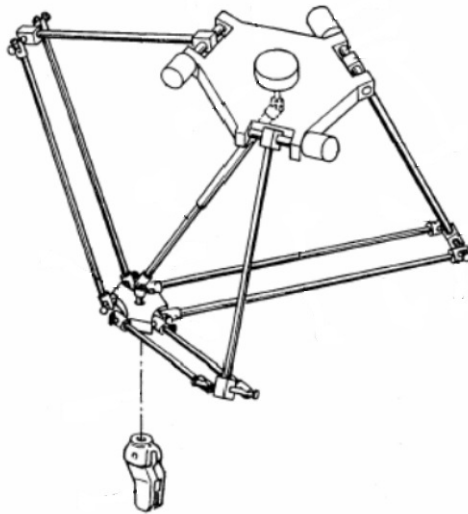


Figura 2.1: Prototipo del robot DELTA patentado en EEUU (1990) por Clavel.
(Patente No. 4.976.582).

En la Figura 2.1, se muestra un esquema mecánico del Robot Delta. En ella, se pueden observar las tres cadenas cinemáticas idénticas, que unen la plataforma fija y la móvil, además

del brazo central que dota al sistema de un 4° grado de libertad rotativo. El Robot Delta tiene una implementación amplia en la industria para tareas de alta velocidad como "pick and place", principalmente para tareas de empaquetado.

A nivel académico, el Robot Delta ha atraído gran interés en laboratorios de investigación donde, al rededor de este, se han propuesto un gran número de variaciones. Algunos de los más actuales son (Corves et al., 2018; Ghazi et al., 2018; Shahidi et al., 2017; Kuo, 2016) entre otros. En (Maya et al., 2013) se propone una variación del Robot Delta con un esquema de reconfiguración en el cual se presenta un mecanismo capaz de variar la dimensión geométrica de la base fija durante operación; en este trabajo se analiza el espacio de trabajo y la capacidad de carga estática bajo este esquema comparado con otros basados en la variación de la longitud de los eslabones en las cadenas cinemáticas. Como resultado de este trabajo, se establece el esquema de reconfiguración geométrica en la base fija como una propuesta favorable para ampliar el espacio de trabajo y mejorar el desempeño de carga estática. En (Sánchez-Alonso et al., 2015; y Eduardo Castillo-Castaneda y Jaime Gallardo-Alvarado, 2016) se presenta un esquema de reconfiguración del Robot Delta mediante la variación en la dimensión de la base fija utilizando un mecanismo diferente y se presenta un análisis de singularidades y aceleración.

PROBLEMA GEOMÉTRICO DIRECTO E INVERSO

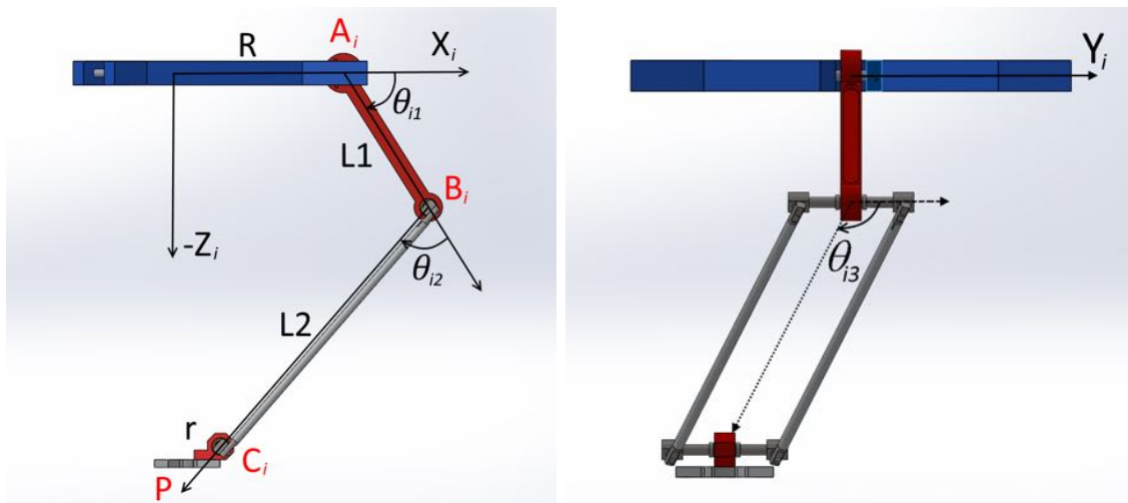


Figura 2.2: Esquema de las cadenas cinemáticas del Robot Delta.

Considerando al Robot Delta como en la Figura 3.1, donde podemos definir los siguientes

puntos clave respecto al origen del marco de referencia Principal:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} R \cos(\alpha_i) \\ R \sin(\alpha_i) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} (R + L_1 \cos(\theta_{i1})) \cos(\alpha_i) \\ (R + L_1 \cos(\theta_{i1})) \sin(\alpha_i) \\ -L_1 \sin(\theta_{i1}) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} P_x + r \cos(\alpha_i) \\ P_y + r \sin(\alpha_i) \\ P_z \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Definimos también los vectores de juntas activas y de coordenadas cartesianas del efector final como:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \\ \theta_{31} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

y

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

respectivamente. Una forma comúnmente utilizada para resolver el problema de cinemática directa para el Robot Delta consiste en resolver la intersección de dos esferas. Dicho método nos da como resultado dos soluciones de las cuales se puede seleccionar una única solución tomando el resultado con mejor valor en el eje Z , seleccionando de este modo la solución que ocurre por debajo de la plataforma fija. Para resolver mediante el dicho método definimos los siguientes puntos virtuales de interés:

$$\tilde{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} B_{ix} - r \cos(\alpha_i) \\ B_{iy} - r \sin(\alpha_i) \\ B_{iz} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_i = \begin{bmatrix} C_{ix} - r \cos(\alpha_i) \\ C_{iy} - r \sin(\alpha_i) \\ C_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \mathbf{P} \quad (2.7)$$

De esta manera “movemos” virtualmente los eslabones L_2 horizontalmente hacia el centro de la plataforma, sin cambiar su orientación. Con esto definimos una esfera por cadena cinemática con centro $\tilde{\mathbf{B}}_i$ y radio L_2 . Las esferas se intersecan en dos puntos, la intersección con el menor valor en el eje Z es $\mathbf{P}$, el cual es la solución al problema de la cinemática directa. A continuación se presenta el sistema de ecuaciones que definen a $\mathbf{x}$.

$$(\tilde{B}_{ix} - P_x)^2 + (\tilde{B}_{iy} - P_y)^2 + (\tilde{B}_{iz} - P_z)^2 = L_2^2 \quad (2.8)$$

Al resolver este sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas obtenemos la posición del efector final.

En el caso de la cinemática inversa se puede resolver (2.8) para $\mathbf{q}$ de modo que se obtiene la siguiente solución (Maya et al., 2013).

$$\tan \frac{\theta_{i1}}{2} = \frac{-2P_z \pm \sqrt{4P_z^2 + 4R_1^2 - S_1^2 + Q_i^2(1 - \frac{R_1^2}{L_1^2}) + Q_i(\frac{-2R_1S_i}{L_1} - 4R_1)}}{-2R_1 - Q_i(\frac{R_1}{L_1} - S_i)} \quad (2.9)$$

en donde

$$R_1 = R - r$$

$$Q_i = 2P_x \cos(\alpha_i) + 2P_y \sin(\alpha_i)$$

$$S_i = \frac{1}{L_1}(-P_{ix}^2 - P_{iy}^2 - P_{iz}^2 + l_2^2 - L_1^2 - R_1^2)$$

donde $\mathbf{P}_i = {}^i\mathbf{T}_0(\alpha_i)\mathbf{P}$ y ${}^i\mathbf{T}_0(\alpha_i)$ es una matriz de rotación alrededor del eje Z

CÁLCULO DE LA MATRIZ JACOBIANA

Primero establecemos los vectores que describen tanto el espacio de configuración del robot como el espacio de trabajo.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \\ \theta_{31} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

En el vector correspondiente a la configuración del robot podemos ver que esta compuesto por las variables articulares actuadas de cada cadena cinemática empezando. Consideramos las siguientes ecuaciones en lazo cerrado (ver Figura 3.1)

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC_i} = \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{A_iB_i} + \overrightarrow{B_iC_i} \quad (2.12)$$

Que tiene la siguiente forma matricial

$$\begin{bmatrix} P_x \cos(\alpha_i) + P_y \sin(\alpha_i) \\ P_x \sin(\alpha_i) - P_y \cos(\alpha_i) \\ P_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + L_1 \begin{bmatrix} \cos(\theta_{i1}) \\ 0 \\ -\sin(\theta_{i1}) \end{bmatrix} + L_2 \begin{bmatrix} \sin(\theta_{i3}) \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \\ \cos(\theta_{i3}) \\ -\sin(\theta_{i3}) \sin(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

la ecuación (2.63) se puede reescribir como:

$$(\mathbf{x}_i + \mathbf{r}) = \mathbf{R} + \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 \quad (2.14)$$

que derivando respecto al tiempo obtenemos:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \dot{\mathbf{L}}_1 + \dot{\mathbf{L}}_2$$

ahora convertimos las velocidades lineales a angulares

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{w}_{L_1} \times \mathbf{L}_1 + \mathbf{w}_{L_2} \times \mathbf{L}_2 \quad (2.15)$$

para simplificar y obtener una expresión que depende solo de las variables articulares multiplicamos la ecuación anterior por $\hat{\mathbf{L}}_2$

$$\hat{\mathbf{L}}_2 \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{L}}_2 \cdot (\mathbf{w}_{L_1} \times \mathbf{L}_1) \quad (2.16)$$

sustituyendo el lado izquierdo de la ecuación tenemos:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{L}}_2 \cdot \dot{\mathbf{x}}_i &= [\text{sen}(\theta_{i3}) \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2})] \left[\dot{P}_x \cos(\alpha_i) + \dot{P}_y \text{sen}(\alpha_i) \right] \\ &\quad + \cos(\theta_{i3}) \left[\dot{P}_x \text{sen}(\alpha_i) - \dot{P}_y \cos(\alpha_i) \right] - [\text{sen}(\theta_{i3}) \text{sen}(\theta_{i1} + \theta_{i2})] \dot{P}_z \\ &= a_{ix} \dot{P}_x + a_{iy} \dot{P}_y + a_{iz} \dot{P}_z\end{aligned}\tag{2.17}$$

donde

$$\begin{aligned}a_{ix} &= \text{sen}(\theta_{i3}) \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \text{sen}(\alpha_i) - \cos(\theta_{i3}) \cos(\alpha_i) \\ a_{iy} &= \text{sen}(\theta_{i3}) \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \cos(\alpha_i) + \cos(\theta_{i3}) \text{sen}(\alpha_i) \\ a_{iz} &= -\text{sen}(\theta_{i3}) \text{sen}(\theta_{i1} + \theta_{i2})\end{aligned}\tag{2.18}$$

ahora, del lado derecho tenemos que

$$\hat{\mathbf{L}}_2 \cdot (\mathbf{w}_{L_1} \times \mathbf{L}_1) = L_1 \text{sen}(\theta_{i2}) \text{sen}(\theta_{i3}) \dot{\theta}_{1i}\tag{2.19}$$

Sustituyendo en las ecuaciones (2.18) y (2.19) para cada i tenemos

$$\begin{aligned}a_{1x} \dot{P}_x + a_{1y} \dot{P}_y + a_{1z} \dot{P}_z &= L_1 \text{sen}(\theta_{21}) \text{sen}(\theta_{13}) \dot{\theta}_{11} \\ a_{2x} \dot{P}_x + a_{2y} \dot{P}_y + a_{2z} \dot{P}_z &= L_1 \text{sen}(\theta_{22}) \text{sen}(\theta_{23}) \dot{\theta}_{21} \\ a_{3x} \dot{P}_x + a_{3y} \dot{P}_y + a_{3z} \dot{P}_z &= L_1 \text{sen}(\theta_{32}) \text{sen}(\theta_{33}) \dot{\theta}_{31}\end{aligned}$$

lo que implica

$$\mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}}\tag{2.20}$$

obteniendo como resultado las matrices

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} \\ a_{3x} & a_{3y} & a_{3z} \end{bmatrix}\tag{2.21}$$

y

$$\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} L_1 \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{13}) & 0 & 0 \\ 0 & L_1 \text{sen}(\theta_{22}) \text{sen}(\theta_{23}) & 0 \\ 0 & 0 & L_1 \text{sen}(\theta_{32}) \text{sen}(\theta_{33}) \end{bmatrix}\tag{2.22}$$

2.2. ROBOTS PARALELOS RECONFIGURABLES

La reconfiguración en robots puede definirse como la capacidad de un sistema robótico para modificar su configuración estructural o funcional con el objetivo de adaptarse a cambios en los requerimientos de una aplicación específica. Los robots reconfigurables surgen como una solución versátil y eficiente, ya que su diseño incorpora una serie de piezas o módulos estándar que permiten realizar cambios rápidos en su estructura. Estos cambios pueden relacionarse tanto con la funcionalidad del sistema como con ajustes en las dimensiones geométricas de sus componentes mecánicos, tales como los eslabones.

El concepto de robots reconfigurables se encuentra estrechamente vinculado al de modularidad. Según esta idea, cada junta y eslabón es concebido como un módulo independiente que puede reorganizarse para cumplir con diferentes objetivos. La modularidad permite la construcción de diferentes robots a partir de una misma familia de componentes, optimizando así su desempeño frente a una variedad de tareas. Este enfoque fue inicialmente explorado en robots seriales, que dieron lugar a múltiples prototipos diseñados para tareas específicas, como ensamblajes automatizados (Chen and Yang, 1996). En estos diseños, los módulos se conectan mediante interfaces estandarizadas que facilitan cambios en posición y orientación, aunque la reconfiguración generalmente debe llevarse a cabo fuera de línea, requiriendo intervenciones físicas en la estructura del robot.

En el caso de robots de arquitectura paralela, la modularidad ha dado lugar a tipos específicos de reconfiguración, entre los que destacan:

1. Reconfiguración Geométrica: Modificaciones en las dimensiones geométricas del sistema, como la longitud de eslabones o el radio de la base, ajustándose según los requerimientos de la tarea a realizar (Xi et al., 2011).
2. Reconfiguración Topológica: Cambios estructurales que afectan directamente los grados de libertad (GDL) del robot. Un ejemplo común es el caso de hexápodos, donde desconectar manual o automáticamente una de las piernas transforma al robot de 6 a 5 GDL (Xi et al., 2011).
3. Reconfiguración Grupal: Integración o separación de robots paralelos para formar estructuras con características nuevas. Un ejemplo es la agrupación de dos robots paralelos de tres piernas para obtener un hexápodo con mayor capacidad de adaptación a tareas específicas (Xi et al., 2011).

Estos tipos de reconfiguración han sido implementados en prototipos como los descritos

en los trabajos de Fengfen Xi et al., quienes abordaron los retos de diseño y análisis de robots paralelos modulares y sus mecanismos de reconfiguración (Xi et al., 2011).

En Julia Borràs et al. (Borràs et al., 2009) se propuso una plataforma reconfigurable 5-GDL basada en un mecanismo tipo Gough-Stewart, capaz de ajustar la distancia entre los puntos de soporte de las piernas, lo que mejora la rigidez estructural o minimiza riesgos de colisión según sea necesario. Además, esta reconfiguración puede ser dinámica o estática, dependiendo de los parámetros geométricos a modificar.

Otro ejemplo relevante es el manipulador Gantry-Tau (Haage et al., 2009), diseñado con una modularidad que permite reemplazar fácilmente los eslabones para cambiar la longitud de las piernas o mover los actuadores lineales, ampliando así el espacio de trabajo del robot. Este sistema es adecuado para tareas como esmerilado, desbaste y corte en líneas de producción flexibles, demostrando su efectividad mediante prototipos a escala completa.

Cornel Brisan (Brisan, 2007) también contribuyó significativamente al campo con diseños de robots paralelos reconfigurables basados en plataformas Stewart. En sus investigaciones se analizaron prototipos de 4, 5 y 6 GDL destinados al desarrollo de máquinas herramienta, ejemplificando cómo un sistema modular puede evolucionar para incrementar sus grados de libertad y responder a demandas industriales cambiantes.

A pesar de los notables avances mencionados, persiste un vacío en el desarrollo de robots paralelos tipo Delta con capacidades de reconfiguración. Actualmente, no se han reportado estudios detallados que analicen el impacto de la reconfiguración en el espacio de trabajo, la capacidad de carga o la rigidez estructural de esta arquitectura en particular. Por lo tanto, resulta imperativo desarrollar metodologías que permitan analizar, visualizar y cuantificar estos efectos, así como proponer diseños específicos de mecanismos de reconfiguración adaptados al robot Delta.

2.3. ROBOTS PARALELOS REDUNDANTES

La reconfiguración tiene la capacidad de facilitar la adaptación y optimización de los robots paralelos a una amplia gama de aplicaciones. Supera algunas de sus dificultades típicas, como el reducido espacio de trabajo. La reconfiguración en robots paralelos puede implicar cambios en la longitud de los brazos, la orientación de las cadenas cinemáticas o la posición de la plataforma móvil en relación con la base fija. Estos cambios pueden realizarse manual o automáticamente mediante sistemas de control inteligentes. La implementación de un robot reconfigurable en el que la reconfiguración se realiza mediante un mecanismo que puede controlarse en tiempo real hace que el robot sea redundante (Milutinović et al., 2012; Plitea et al.,

2013), lo que requiere un diseño de control aún más complejo.

En los robots paralelos, existen múltiples tipos de redundancia, siendo las más importantes la redundancia cinemática y la redundancia de actuadores. Una forma de generar redundancia cinemática consiste en añadir articulaciones activas a las cadenas cinemáticas (Lucas and Beno Benhabib, 2017; Gosselin and Schreiber, 2018; Mostashiri et al., 2020; Harada and Angeles, 2017). Esto implica que existe una combinación infinita de velocidades de las articulaciones que producen la misma velocidad del efector final. La redundancia de actuadores consiste en disponer de más cadenas cinemáticas de las necesarias entre las plataformas fija y móvil. Desde el punto de vista estático, para cada vector de fuerza y torsión en el efector final, habrá un número infinito de vectores de fuerza y torsión para las articulaciones activas (Moosavian and Xi, 2016). En el caso de los robots redundantes, la obtención de un vector de velocidades en juntas $\dot{\mathbf{q}}$ para un vector de velocidades en el efector final $\dot{\mathbf{x}}$, en el caso de redundancia cinemática, o un vector de fuerzas y torsión $\boldsymbol{\tau}$ en las juntas dado un vector de fuerzas y torsión en el efector final $\mathbf{w}$ se denomina resolución del problema de redundancia.

La redundancia tiene grandes ventajas en los robots paralelos, como aumentar el espacio de trabajo, evitar o reducir las singularidades, aumentar la capacidad de carga útil, mejorar la dinámica del mecanismo y eliminar la holgura de movimiento, entre otras (Maya et al., 2013; Zhang et al., 2020; Hu et al., 2022). Sin embargo, estas ventajas tienen un precio, como una mayor complejidad en los modelos cinemáticos y dinámicos, un diseño de control desafiante y un mayor consumo de energía debido a los actuadores extra y a las fuerzas/pares internos (Pulloquinga et al., 2021). Además, los actuadores extra implican costos adicionales e introducen fricción adicional por las articulaciones activas suplementarias. En resumen, la reconfiguración del robot puede utilizarse para abordar algunos de los problemas de los robots paralelos a costa de aumentar la complejidad del manipulador, lo que resulta en un diseño del control más desafiante. En las siguientes secciones se detalla la redundancia de actuadores así como la cinemática, siendo esta última el tipo de redundancia que presenta el robot delta con reconfiguración geométrica.

2.3.1. REDUNDANCIA DE ACTUADORES

La forma común para generar redundancia de actuadores en un robot paralelo es añadiendo más cadenas cinemáticas entre la base y la plataforma móvil. Considerando un mecanismo con n grados de libertad del efector final y con m cadenas cinemáticas con un solo actuador para cada una, la redundancia de actuadores se obtiene cuando $m > n$ como se puede ver en la Figura 2.3.

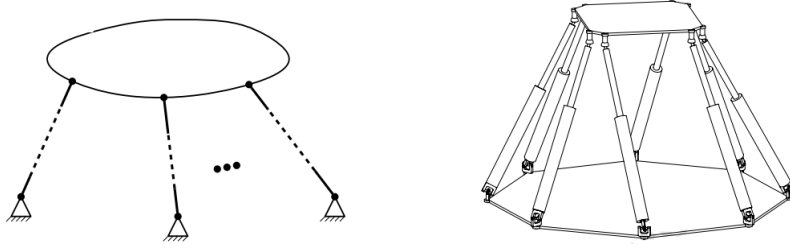


Figura 2.3: (a) Esquema de las cadenas cinemáticas con redundancia de actuadores. (b) Ejemplo de robot paralelo con redundancia de actuadores, (Gosselin and Schreiber, 2018).

Debido a que el número de actuadores es mayor que el número de grados de libertad del mecanismo, los robots con este tipo de redundancia pueden generar fuerzas internas antagónicas. Debido a esto es necesario controlar las cargas internas del mecanismo lo cual implica un aumento de complejidad en el control del robot.

MODELADO DE ROBOTS PARALELOS CON REDUNDANCIA DE ACTUADORES

Como se plantea en (Gosselin and Schreiber, 2018), el problema de cinemática inversa, para cualquier robot paralelo, puede resolverse escribiendo las ecuaciones de restricción asociados a cada una de las m extremidades del robot paralelos y resolviéndolas para las variables articulares.

$$q_i = g_{ai}(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, m \quad (2.23)$$

donde q_i son las variables articulares y el vector $\mathbf{q}$ es el vector de variables articulares, $\mathbf{x}$ es el vector de pose del efector final que puede incluir variables traslacionales y rotacionales. Las g_{ai} son ecuaciones algebraicas donde el subíndice a se refiere a la redundancia de actuación.

Podemos escribir (2.23) en forma vectorial como:

$$\mathbf{q} = \mathbf{g}_a(\mathbf{x}) \quad (2.24)$$

en donde

$$\mathbf{g}_a = [g_{a1}, \dots, g_{am}]^T \quad (2.25)$$

Con base en lo establecido en (Gosselin and Angeles, 1990), podemos reordenar (2.24) en forma cerrada como:

$$\mathbf{G}_a(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (2.26)$$

Calculando la derivada temporal de (2.26) y reordenando se puede obtener:

$$\mathbf{J}_{qa}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{xa}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} \quad (2.27)$$

en donde

$$\mathbf{J}_{xa}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = -\frac{\partial \mathbf{G}_a}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{J}_{qa}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{G}_a}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.28)$$

$\mathbf{J}_{qa}(\mathbf{q}, \mathbf{x})$ y $\mathbf{J}_{xa}(\mathbf{q}, \mathbf{x})$ son matrices Jacobianas, que dependen de $\mathbf{q}$ y $\mathbf{x}$, de dimensión $m \times m$ y $m \times n$ respectivamente y $\dot{\mathbf{x}}$ es el vector de velocidades cartesianas del efector final. Por simplicidad, se omitirá la dependencia en los vectores $\mathbf{q}$, $\mathbf{x}$ de las matrices Jacobianas cuando no haya lugar a confusión.

De (2.27) se puede ver que un vector $\dot{\mathbf{x}}$ dado conduce a un vector $\dot{\mathbf{q}}$ único ya que, asumiendo que el robot no está en una configuración singular, la matriz $\mathbf{J}_{qa}$ es cuadrada de rango completo y por lo tanto invertible. En cambio no se puede prescribir un vector $\dot{\mathbf{q}}$ ya que la matriz $\mathbf{J}_{xa}$ es rectangular lo cual conduce a un número infinito de soluciones para $\dot{\mathbf{q}}$.

Suponiendo que la matriz $\mathbf{J}_{qa}$ no es singular, la ecuación (2.27) se puede reescribir como:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{qa}^{-1} \mathbf{J}_{xa} \dot{\mathbf{x}} \quad (2.29)$$

Con base en el principio de trabajo virtual, el trabajo virtual de entrada en los actuadores debe ser igual al trabajo virtual de salida en el efector final. Esto es:

$$\boldsymbol{\tau}^T \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{w}^T \dot{\mathbf{x}} \quad (2.30)$$

en donde $\boldsymbol{\tau}$ corresponde al vector de fuerzas o torques de las juntas actuadas, $\mathbf{w}$ es el vector de fuerzas y/o momentos cartesianos en la plataforma móvil. Sustituyendo (2.29) en (2.30) tenemos:

$$\boldsymbol{\tau}^T \mathbf{J}_{qa}^{-1} \mathbf{J}_{xa} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{w}^T \dot{\mathbf{x}} \quad (2.31)$$

Ya que (2.31) se debe satisfacer para todos los valores correspondientes a las velocidades $\dot{\mathbf{x}}$ del plataforma móvil, lo anterior se puede escribir como

$$\boldsymbol{\tau}^T \mathbf{J}_{qa}^{-1} \mathbf{J}_{xa} = \mathbf{w}^T \quad (2.32)$$

lo cual puede ser transpuesto para obtener

$$\mathbf{w} = \mathbf{J}_{xa}^T \mathbf{J}_{qa}^{-T} \boldsymbol{\tau} \quad (2.33)$$

donde la matriz $\mathbf{J}_{xa}^T \mathbf{J}_{qa}^{-T}$ tiene dimensión $n \times m$ con $m > n$ como consecuencia de la redundancia de actuadores.

EJEMPLO

Para este ejemplo consideramos un robot delta al cual se le añade una cuarta cadena cinemática idéntica a las originales y conectando la base fija con la móvil.

Primero establecemos los vectores que describen tanto el espacio de configuración del robot como el espacio de trabajo.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \\ \theta_{31} \\ \theta_{41} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

En el vector correspondiente a la configuración del robot podemos ver que está compuesto por las variables articulares actuadas de cada cadena cinemática empezando por la junta mas cercana a la base fija y agrupadas por cadena cinemática. Derivando respecto al tiempo podemos obtener la siguiente relación:

$$\mathbf{J}_q \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{31} \\ \dot{\theta}_{41} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_x \begin{bmatrix} \dot{P}_x = v_x \\ \dot{P}_y = v_y \\ \dot{P}_z = v_z \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Para llegar a la expresión (2.36) consideramos la siguientes ecuación en lazo cerrado (ver Figura 2.2)

$$\mathbf{OP} + \mathbf{PC}_i = \mathbf{OA}_i + \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{C}_i \quad (2.37)$$

Que tiene la siguiente forma en componentes

$$\begin{bmatrix} P_x \cos(\alpha_i) + P_y \sin(\alpha_i) \\ P_x \sin(\alpha_i) - P_y \cos(\alpha_i) \\ P_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + L_1 \begin{bmatrix} \cos(\theta_{i1}) \\ 0 \\ -\sin(\theta_{i1}) \end{bmatrix} + L_2 \begin{bmatrix} \sin(\theta_{i3}) \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \\ \cos(\theta_{i3}) \\ -\sin(\theta_{i3}) \sin(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

la ecuación (3.11) se puede reescribir como:

$$(\mathbf{x} + \mathbf{r}) = \mathbf{R} + \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 \quad (2.39)$$

derivando respecto al tiempo obtenemos:

$$\left(\frac{d}{dt} (\mathbf{x} + \mathbf{r}) \right) = \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{L}}_1 + \dot{\mathbf{L}}_2$$

Ya que cualquier punto en la plataforma móvil tiene la misma velocidad podemos escribir

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{L}}_1 + \dot{\mathbf{L}}_2 \quad (2.40)$$

en donde $\mathbf{v}$ es la velocidad en el efector final, ahora pasamos la ecuación anterior a una versión en la cual se sustituyen las velocidades lineales $\dot{\mathbf{L}}_1$ y $\dot{\mathbf{L}}_2$ por su representación basada en velocidades angulares $\mathbf{w}$

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}_{L_1} \times \mathbf{L}_1 + \mathbf{w}_{L_2} \times \mathbf{L}_2 \quad (2.41)$$

para simplificar y obtener una expresión que depende solo de las variables articulares actuadas multiplicamos la ecuación anterior por $\hat{\mathbf{L}}_2$

$$\hat{\mathbf{L}}_2 \cdot \mathbf{v} = \hat{\mathbf{L}}_2 \cdot (\mathbf{w}_{L_1} \times \mathbf{L}_1) \quad (2.42)$$

sustituyendo el lado izquierdo de la ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}}_2 \cdot \mathbf{v} &= [\text{sen}(\theta_{i3}) \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2})] [v_x \cos(\alpha_i) + v_y \text{sen}(\alpha_i)] \\ &\quad + \cos(\theta_{i3}) [v_x \text{sen}(\alpha_i) - v_y \cos(\alpha_i)] - [\text{sen}(\theta_{i3}) \text{sen}(\theta_{i1} + \theta_{i2})] v_z \\ &= a_{ix} v_x + a_{iy} v_y + a_{iz} v_z \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde

$$\begin{aligned} a_{ix} &= \text{sen}(\theta_{i3}) \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \text{sen}(\alpha_i) - \cos(\theta_{i3}) \cos(\alpha_i) \\ a_{iy} &= \text{sen}(\theta_{i3}) \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \cos(\alpha_i) + \cos(\theta_{i3}) \text{sen}(\alpha_i) \\ a_{iz} &= -\text{sen}(\theta_{i3}) \text{sen}(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \end{aligned} \quad (2.44)$$

y estos elementos serán elementos de la matriz $\mathbf{J}_x$. Ahora, del lado derecho tenemos que

$$\hat{\mathbf{L}}_2 \cdot (\mathbf{w}_{L_1} \times \mathbf{L}_1) = L_1 \text{sen}(\theta_{i2}) \text{sen}(\theta_{i3}) \dot{\theta}_{i1}. \quad (2.45)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.44) y (2.45) en la ecuación (2.42) y ordenando tenemos

$$a_{1x}v_x + a_{1y}v_y + a_{1z}v_z = L_1 \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{13})\dot{\theta}_{11}$$

$$a_{2x}v_x + a_{2y}v_y + a_{2z}v_z = L_1 \text{sen}(\theta_{22}) \text{sen}(\theta_{23})\dot{\theta}_{21}$$

$$a_{3x}v_x + a_{3y}v_y + a_{3z}v_z = L_1 \text{sen}(\theta_{32}) \text{sen}(\theta_{33})\dot{\theta}_{31}$$

$$a_{4x}v_x + a_{4y}v_y + a_{4z}v_z = L_1 \text{sen}(\theta_{42}) \text{sen}(\theta_{43})\dot{\theta}_{41}$$

que se puede reescribir en notación matricial como

$$\mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}} \quad (2.46)$$

donde

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} \\ a_{3x} & a_{3y} & a_{3z} \\ a_{4x} & a_{4y} & a_{4z} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

y

$$\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} L_1 \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{13}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 \text{sen}(\theta_{22}) \text{sen}(\theta_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 \text{sen}(\theta_{32}) \text{sen}(\theta_{33}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 \text{sen}(\theta_{42}) \text{sen}(\theta_{43}) \end{bmatrix}$$

Como es de esperar la nueva variable articular se ve reflejada en el Jacobiano y nos genera una matriz $\mathbf{J}_x$ no cuadrada de dimensión $m \times n = 4 \times 3$ y una matriz $\mathbf{J}_q$ cuadrada de dimensión $m \times m = 4 \times 4$.

2.3.2. REDUNDANCIA CINEMÁTICA

Un robot paralelo con redundancia cinemática es aquel en el que el número de actuadores es igual al número de grados de libertad del mecanismo pero donde el numero de grados de libertad de la plataforma móvil es menor que el del mecanismo (y L. Schreiber, 2018). En este tipo de redundancia es posible tener movimientos internos en las cadenas cinemáticas redundantes que no generan movimiento útil en la plataforma móvil. Este tipo de redundancia se obtiene al añadir juntas actuadas a las cadenas cinemáticas ya existentes, estas juntas

adicionales pueden ser introducidas de forma serial o paralela como se muestra en la Figura 2.4

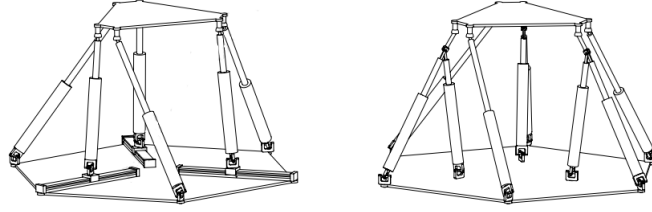


Figura 2.4: (a) Ejemplo de robot paralelo con redundancia cinemática serial. (b) Ejemplo de robot paralelo con redundancia cinemática paralela.

MODELADO DE ROBOTS CON REDUNDANCIA CINEMÁTICA

El problema de cinemática inversa se puede resolver escribiendo las ecuaciones de restricción asociados a cada una de las m extremidades del robot paralelos y resolviéndolas para las variables articulares. Consideremos el caso en el que r de las m cadenas cinemáticas son redundantes y que r_i es el numero de actuadores de la i -ésima cadena cinemática redundante. Podemos escribir las restricciones geométricas en lazo cerrado de las r cadenas cinemáticas como:

$$g_{ci}(q_{i1}, \dots, q_{ir_i}, \mathbf{x}) = 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (2.48)$$

en donde q_{ij} es el j -ésimo actuador en la i -ésima cadena cinemática redundante y g_{ci} son ecuaciones algebraicas donde el subíndice c se refiere a la presencia de redundancia cinemática. El número de actuadores en las r cadenas cinemáticas redundantes se puede denotar como:

$$v = \sum_{i=1}^r r_i. \quad (2.49)$$

Considerando que las restantes $m - r$ cadenas cinemáticas no redundante y por tanto solo poseen un actuador cada uno, el número total de actuadores se puede denotar como:

$$u = m - r + v \quad (2.50)$$

De forma global, el mecanismo tiene m cadenas cinemáticas, u actuadores, u grados de libertad ($u > m$) y su efector final tiene m grados de libertad. Las ecuaciones de restricción geométrica en lazo cerrado para las $m - r$ cadenas cinemáticas no redundante se pueden escribir como:

$$g_{ci}(q_i, \mathbf{x}) = 0 \quad i = r + 1, \dots, m \quad (2.51)$$

Si ensamblamos las ecuaciones (2.48) y (2.51) obtenemos una función vectorial

$$\mathbf{G}_a(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.52)$$

de m elementos en donde los primeros r corresponden a las cadenas cinemáticas redundante y las ultimas $(m - r)$ a las cadenas cinemas no redundantes. Con base en lo establecido en (Gosselin and Schreiber, 2018), la derivada de (2.52) es:

$$\mathbf{J}_{ax}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_{aq}\dot{\mathbf{q}} \quad (2.53)$$

en donde

$$\mathbf{J}_{ax} = -\frac{\partial \mathbf{G}_a}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{J}_{aq} = \frac{\partial \mathbf{G}_a}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.54)$$

$\mathbf{J}_{aq}$ y $\mathbf{J}_{ax}$ son matrices Jacobianas, que dependen de $\mathbf{q}$ y $\mathbf{x}$, de dimensión $m \times u$ y $m \times m$ respectivamente con u igual al número de actuadores y $\dot{\mathbf{x}}$ es el vector de velocidades cartesianas. La matriz $\mathbf{J}_{ax}$ es invertible probado que es de rango completo.

En (Gosselin and Schreiber, 2018) establecen que la matriz $\mathbf{J}_{aq}$ tiene la siguiente estructura especial para el caso de redundancia cinemática:

$$\mathbf{J}_{aq} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{aq1} & \mathbf{0}_{r \times (m-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r) \times v} & \mathbf{J}_{aq2} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Donde r es el número de extremidades redundantes, m el número total de extremidades, v el total de juntas actuadas en las cadenas cinemáticas redundantes. La submatriz $\mathbf{J}_{aq1}$ es $(r \times v)$ y corresponde a las extremidades redundantes, $\mathbf{J}_{aq2}$ es $((m - r) \times (m - r))$ y corresponde a las extremidades no-redundantes.

Suponemos ahora que la matriz $\mathbf{J}_{ax}$ es no singular, podemos realizar el mismo análisis estático que en el caso de redundancia de actuadores. Primero reescribimos (2.53) como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_{ax}^{-1} \mathbf{J}_{aq} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.56)$$

Con base en el principio de trabajo virtual tenemos

$$\boldsymbol{\tau}^T \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{w}^T \dot{\mathbf{x}} \quad (2.57)$$

Sustituyendo (2.56) en (2.57) resulta

$$\boldsymbol{\tau}^T \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{w}^T \mathbf{J}_{ax}^{-1} \mathbf{J}_{aq} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.58)$$

simplificando la ecuación anterior y obteniendo su transpuesta tenemos:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_{aq}^T \mathbf{J}_{ax}^{-T} \mathbf{w} \quad (2.59)$$

EJEMPLO

Para este ejemplo se considera a un Robot Delta al cual se le añade una junta prismática a cada una de las tres extremidades del robot. Esta junta prismática este dispuesta de forma que esta en el mismo plano que la plataforma fija y la dirección de actuación es tal que la separación de 120 entre cada extremidad de mantiene, es decir que las direcciones de actuación de las juntas prismáticas son radiales respecto a la base.

Primero establecemos los vectores que describen tanto el espacio de configuración del robot como el espacio de trabajo.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} R_1 \\ \theta_{11} \\ R_2 \\ \theta_{21} \\ R_3 \\ \theta_{31} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

En el vector correspondiente a la configuración del robot podemos ver que esta compuesto por las variables articulares actuadas de cada cadena cinemática empezando por la junta más cercana a la base fija y agrupadas por cadena cinemática. Derivando respecto del tiempo podemos obtener la siguiente relación:

$$\mathbf{J}_q \begin{bmatrix} \dot{R}_1 \\ \dot{\theta}_{11} \\ \dot{R}_2 \\ \dot{\theta}_{21} \\ \dot{R}_3 \\ \dot{\theta}_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_x \begin{bmatrix} \dot{P}_x = v_x \\ \dot{P}_y = v_y \\ \dot{P}_z = v_z \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Para llegar a la expresión (2.62) consideramos las siguientes ecuaciones en lazo cerrado

(ver Figura 2.2)

$$\mathbf{OP} + \mathbf{PC}_i = \mathbf{OA}_i + \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{C}_i \quad (2.63)$$

Que tiene la siguiente forma matricial

$$\begin{bmatrix} P_x \cos(\alpha_i) + P_y \sin(\alpha_i) \\ P_x \sin(\alpha_i) - P_y \cos(\alpha_i) \\ P_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + L_1 \begin{bmatrix} \cos(\theta_{i1}) \\ 0 \\ -\sin(\theta_{i1}) \end{bmatrix} + L_2 \begin{bmatrix} \sin(\theta_{i3}) \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \\ \cos(\theta_{i3}) \\ -\sin(\theta_{i3}) \sin(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

la ecuación (2.63) se puede reescribir como:

$$(\mathbf{x} + \mathbf{r}) = \mathbf{R} + \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 \quad (2.65)$$

que derivando respecto al tiempo obtenemos:

$$\left(\frac{d}{dt} (\mathbf{x} + \mathbf{r}) \right) = \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{L}}_1 + \dot{\mathbf{L}}_2$$

Ya que cualquier punto en la plataforma móvil tiene la misma velocidad podemos escribir

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{L}}_1 + \dot{\mathbf{L}}_2 \quad (2.66)$$

ahora convertimos las velocidades lineales a angulares

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{w}_{L_1} \times \mathbf{L}_1 + \mathbf{w}_{L_2} \times \mathbf{L}_2 \quad (2.67)$$

para simplificar y obtener una expresión que depende solo de las variables articulares multiplicamos la ecuación anterior por $\hat{\mathbf{L}}_2$

$$\hat{\mathbf{L}}_2 \cdot \mathbf{v} = \hat{\mathbf{L}}_2 \cdot \dot{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{L}}_2 \cdot (\mathbf{w}_{L_1} \times \mathbf{L}_1) . \quad (2.68)$$

En el lado izquierdo de la ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}}_2 \cdot \mathbf{v} &= [\sin(\theta_{i3}) \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2})] [v_x \cos(\alpha_i) + v_y \sin(\alpha_i)] \\ &+ \cos(\theta_{i3}) [v_x \sin(\alpha_i) - v_y \cos(\alpha_i)] - [\sin(\theta_{i3}) \sin(\theta_{i1} + \theta_{i2})] v_z \\ &= a_{ix} v_x + a_{iy} v_y + a_{iz} v_z \end{aligned} \quad (2.69)$$

donde

$$\begin{aligned}
a_{ix} &= \text{sen}(\theta_{i3}) \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \text{sen}(\alpha_i) + \cos(\theta_{i3}) \cos(\alpha_i) \\
a_{iy} &= -\text{sen}(\theta_{i3}) \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \cos(\alpha_i) + \cos(\theta_{i3}) \text{sen} \alpha_i \\
a_{iz} &= -\text{sen}(\theta_{i3}) \text{sen}(\theta_{i1} + \theta_{i2}) .
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Ahora, del lado derecho tenemos que

$$\hat{\mathbf{L}}_2 \cdot (\mathbf{w}_{L_1} \times \mathbf{L}_1) = a \text{sen}(\theta_{i2}) \text{sen}(\theta_{i3}) \dot{\theta}_{i1}$$

y

$$\hat{\mathbf{L}}_2 \cdot \dot{\mathbf{R}} = \dot{R}_i \text{sen}(\theta_{i3}) \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2})$$

de modo que

$$\hat{\mathbf{L}}_2 \cdot \dot{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{L}}_2 \cdot (\mathbf{w}_{L_1} \times \mathbf{L}_1) = \text{sen}(\theta_{i3}) \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \dot{R}_i + a \text{sen}(\theta_{i2}) \text{sen}(\theta_{i3}) \dot{\theta}_{i1} \tag{2.71}$$

Desarrollando las ecuaciones (2.69) y (2.71) en componentes para cada i tenemos

$$a_{1x}v_x + a_{1y}v_y + a_{1z}v_z = \text{sen}(\theta_{13}) \cos(\theta_{11} + \theta_{12}) \dot{R}_1 + a \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{13}) \dot{\theta}_{11}$$

$$a_{2x}v_x + a_{2y}v_y + a_{2z}v_z = \text{sen}(\theta_{23}) \cos(\theta_{21} + \theta_{22}) \dot{R}_2 + a \text{sen}(\theta_{22}) \text{sen}(\theta_{23}) \dot{\theta}_{21}$$

$$a_{3x}v_x + a_{3y}v_y + a_{3z}v_z = \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{31} + \theta_{32}) \dot{R}_3 + a \text{sen}(\theta_{32}) \text{sen}(\theta_{33}) \dot{\theta}_{31}$$

lo que implica

$$\mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}} \tag{2.72}$$

obteniendo como resultado las matrices

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} \\ a_{3x} & a_{3y} & a_{3z} \end{bmatrix} \tag{2.73}$$

y

$$\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta_{13}) \cos(\theta_{11} + \theta_{12}) & a \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{13}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen}(\theta_{23}) \cos(\theta_{21} + \theta_{22}) & a \text{sen}(\theta_{22}) \text{sen}(\theta_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{31} + \theta_{32}) & a \text{sen}(\theta_{32}) \text{sen}(\theta_{33}) \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

Como es de esperar la nueva variable articular se ve reflejada en el Jacobiano y nos genera una matriz $\mathbf{J}_q$ no cuadrada de dimensión $m \times u = 3 \times 6$ y una matriz $\mathbf{J}_x$ cuadrada de dimensión $m \times n = 3 \times 3$ y una matriz $\mathbf{J}_c$.

SOLUCIÓN DE LA REDUNDANCIA CINEMÁTICA

Una de las formas más utilizadas para resolver el problema de cinemática inversa en robots con redundancia cinemática es utilizando las ecuaciones de velocidad. Se calcula un vector de velocidades articulares, que cumple con la norma mínima, a partir de un vector de velocidades cartesianas dada. A este vector de velocidades articulares se le añade un término adicional el cual está contenido en el espacio nulo de la matriz Jacobiana, con el fin de optimizar algún índice de desempeño. Consideremos la ecuación (2.53) que puede ser descrita de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_c \dot{\mathbf{q}} \quad (2.75)$$

donde

$$\mathbf{J}_c = \mathbf{J}_{cx}^{-1} \mathbf{J}_{cq} \quad (2.76)$$

la matriz $\mathbf{J}_c$ es de dimensión $m \times u$ con $u > m$ y el subíndice c refiere a la redundancia cinemática. En (Gosselin and Schreiber, 2018) Asumiendo que $\mathbf{J}_{cx}$ es rango completo, el espacio nulo de $\mathbf{J}_c$ corresponde con el espacio nulo de $\mathbf{J}_{cq}$. El espacio nulo de $\mathbf{J}_{cq}$ puede describirse como:

$$\mathcal{N}(\mathbf{J}_q) := \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{R}^u \mid \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{u-m} \alpha_i \boldsymbol{\sigma}_i, \quad \alpha_i \in \mathcal{R} \right\} \quad (2.77)$$

donde los vectores $\boldsymbol{\sigma}_i$ son el conjunto de vectores ortogonales a los primeros r renglones de la matriz $\mathbf{J}_q$ y que tienen sus últimos $(m - r)$ componentes iguales a cero. Se puede observar también que los vectores $\boldsymbol{\sigma}_i$ son un conjunto de vectores ortogonales, lo cual corresponde con el hecho de que la redundancia es desacoplada, es decir, la redundancia en una cadena cinemática no afecta a las otras cadenas. por lo tanto la solución de redundancia es fácil de calcular de modo que la solución se puede escribir como:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_c^\dagger \dot{\mathbf{x}} - \xi (\mathbf{I} - \mathbf{J}_c^\dagger \mathbf{J}_c) \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.78)$$

$$= \mathbf{J}_c^\dagger \mathbf{t} - \xi \mathbf{P} \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.79)$$

donde

$$\mathbf{P} = (\mathbf{I} - \mathbf{J}_c^\dagger \mathbf{J}_c) \quad (2.80)$$

donde $\mathbf{J}_c^\dagger$ corresponde a la pseudoinversa de $\mathbf{J}_c$, ξ es un factor de escala para ajustar la magnitud del segundo término respecto al primero con valores reales positivos, η es un índice de desempeño a minimizar y la matriz $\mathbf{P}$ proyecta cualquier vector al espacio nulo de la matriz $\mathbf{J}_c$. El segundo término de (2.79) puede escribirse como:

$$\mathbf{P} \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{q}} = \sum_{i=1}^{u-m} \left[\frac{1}{\|\boldsymbol{\sigma}_i\|^2} \left(\boldsymbol{\sigma}_i^T \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{q}} \right) \boldsymbol{\sigma}_i \right] \quad (2.81)$$

lo cual es más eficiente computacionalmente.

El robot Delta con reconfiguración geométrica sera modelado como un robot paralelo con redundancia cinemática al considerar al mecanismo de reconfiguración como una junta prismática que actúa sobre las tres cadenas cinemáticas del robot.

2.4. ÍNDICES DE DESEMPEÑO PARA ROBOTS PARALELOS

En esta sección se describen diversos índices de desempeño empleados para analizar y optimizar el comportamiento de robots manipuladores. En (Patel and Sobh, 2014) se sugiere una clasificación de los índices de desempeño de robots basada en tres aspectos:

1. Índices locales o globales.
2. Índices cinemáticos o dinámicos.
3. Índices intrínsecos o extrínsecos.

2.4.1. ÍNDICES LOCALES Y GLOBALES

Los índices de desempeño locales son métricas que evalúan el rendimiento de un robot manipulador considerando su configuración específica en un punto dado del espacio de trabajo. Se denominan *locales* porque su valor varía de un punto a otro o de una pose a otra del manipulador, reflejando propiedades específicas de una configuración particular en lugar de características globales del sistema.

Estos índices son fundamentales en aplicaciones de control, ya que permiten analizar y optimizar el desempeño del manipulador en tiempo real, dependiendo de su pose. La mayoría de índices basados en la matriz Jacobiana, como el índice de manipulabilidad y el número de condición, son índices locales. Esto se debe a que la matriz Jacobiana, que describe la relación entre velocidades articulares y velocidades del efector final, es función tanto de la posición

y orientación como de los valores de las juntas activas actuales del manipulador. Los índices locales ofrecen información valiosa para el diseño y control de robots al identificar configuraciones favorables o problemáticas en términos de rendimiento operativo. En esta tesis se utilizan índices basados en la matriz Jacobiana y estos serán presentados en detalle en una siguiente subsección.

Los índices globales son índices independientes de la postura. Representan una característica global del espacio de trabajo del manipulador. Los índices globales son necesarios para comparar la estructura y el comportamiento de dos manipuladores que realizan la misma tarea. A diferencia de los índices locales, los índices de desempeño globales tienen un único valor para un espacio de trabajo determinado del manipulador, un ejemplo de índice global es el máximo volumen alcanzable que consiste en todas las posiciones cartesianas que puede alcanzar el órgano terminal del robot. Algunos índices de rendimiento globales se han formulado ampliando la definición de los índices locales. Un índice de desempeño global GPI puede obtenerse al promediar analíticamente un índice de desempeño local P en todo el espacio de trabajo, de acuerdo con la fórmula indicada en la Ecuación (2.82) (Rosyid et al., 2020).

$$GPI = \frac{\int_W P * dW}{\int_W dW} \quad (2.82)$$

En donde W es el conjunto de puntos discretos que constituye el espacio de trabajo. Si el índice de desempeño local no puede expresarse analíticamente en términos del espacio de trabajo, entonces se aplicará la ecuación (2.83)

$$GPI = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_i \quad (2.83)$$

En donde P_i es el valor de un índice de desempeño en un punto del espacio de trabajo. Para el caso del espacio de trabajo discretizado, la ecuación (2.83) puede ser utilizada para realizar un promedio discreto. En este último caso, el número de puntos N evaluados puede influir en la precisión del promedio.

En correspondencia con el objetivo de evaluar el índice de rendimiento P en una sección transversal particular del espacio de trabajo del robot, se ha planteado el concepto de índice de rendimiento de sección SPI , el cual se define como (Wang et al., 2015):

$$SPI = \frac{\int_S P * dS}{\int_S dS} \quad (2.84)$$

en donde S el área de una sección transversal del espacio de trabajo.

2.4.2. ÍNDICES CINEMÁTICOS O DINÁMICOS

Los índices cinemáticos son métricas utilizadas para cuantificar el comportamiento cinemático de un robot manipulador y están frecuentemente basados en la matriz Jacobiana. Existe una relación estrecha entre el rendimiento cinemático y la estructura del manipulador (Kucuk and Bingul, 2005, 2006), lo que implica que dichos índices dependen directamente de la configuración estructural del sistema.

En (Lipkin and Duffy, 1988), se introdujo el término *cinetostática* para describir «las propiedades y relaciones duales entre la cinemática de primer orden y la estática de un cuerpo rígido». Durante las últimas dos décadas del siglo pasado, el análisis del comportamiento cinetostático de los manipuladores fue ampliamente estudiado, resultando en la definición de numerosas métricas de rendimiento cinemático (Ranjbaran et al., 1996). Estas métricas han sido esenciales para comprender y optimizar la interacción entre la estructura del manipulador y su comportamiento en movimiento.

Por otro lado, los índices que evalúan el rendimiento dinámico se clasifican como índices dinámicos. A diferencia de los índices cinemáticos, el rendimiento dinámico de un manipulador depende en gran medida de sus características inerciales (Khatib, 1995), reflejando factores como la capacidad de respuesta y la eficiencia energética del sistema.

Diversas medidas de rendimiento dinámico, como la masa, la destreza dinámica, la manipulabilidad dinámica, la rigidez dinámica y las frecuencias naturales, han sido propuestas para evaluar el comportamiento de manipuladores robóticos.

La masa es una de los índices dinámicos más intuitivos y significativos, especialmente en el contexto de manipuladores paralelos frente a manipuladores en serie, ya que en los robots paralelos los actuadores suelen estar unidos a la base, reduciendo la masa móvil. Sin embargo, reducir la masa excesivamente puede comprometer la rigidez estructural (Rosyid et al., 2020). Una optimización adecuada busca minimizar la masa manteniendo la rigidez dentro de un umbral aceptable, lo cual puede lograrse mediante el diseño optimizado de eslabones y plataformas móviles. Las propiedades de inercia, como la masa, el primer momento de inercia y el momento de inercia de segundo orden, son cruciales en el rendimiento dinámico del manipulador. La matriz de inercia generalizada, que depende de la postura del manipulador, representa la distribución inercial y está vinculada a la postura a través de elementos que varían en el espacio de trabajo.

La destreza dinámica, κ_M , mide la eficiencia dinámica de un manipulador y se define como el número de condición de la matriz de inercia (M). Esta propiedad local varía dentro del espacio de trabajo y se calcula mediante:

$$\kappa_M = \frac{\sigma_{max}(M)}{\sigma_{min}}(M) \quad (2.85)$$

donde σ_{max} y σ_{min} son los valores singulares extremos de M . Asada introdujo en (Asada, 1983) el concepto del elipsoide de inercia generalizado, cuyos ejes principales corresponden a las direcciones de inercia máxima y mínima, respectivamente, determinados por los valores propios del tensor de inercia. Si estos ejes son iguales en longitud, la inercia es isótropa, indicando un rendimiento uniforme en todas las direcciones.

La manipulabilidad dinámica, propuesta por (Yoshikawa, 1985), extiende la manipulabilidad tradicional al incluir la influencia de la matriz de masa (M_m) además de la matriz Jacobiana (J). Se calcula como:

$$w_d = \sqrt{\det(J(M_m^T M_m)^{-1} J^T)} \quad (2.86)$$

o, para manipuladores no redundantes:

$$w_d = |\det(J)| \cdot |\det(M_m)| \quad (2.87)$$

Esta métrica refleja la capacidad del manipulador para generar aceleraciones en el espacio de trabajo teniendo en cuenta tanto la cinemática como la dinámica del sistema. Propuestas posteriores, como el elipsoide de manipulabilidad dinámica de (Chiacchio, 2000) y el concepto de manipulabilidad dinámica marco-aceleración de (Doty et al., 1995), han ampliado esta idea para abordar configuraciones más complejas.

Los índices cinemáticos basados en la matriz Jacobiana serán utilizados en esta tesis y son detallados más adelante.

2.4.3. ÍNDICES INTRÍNSECOS Y EXTRÍNSECOS

Los índices de desempeño que no están relacionados con la tarea o la aplicación del manipulador son índices intrínsecos (Cloutier et al., 1994). Los índices intrínsecos reflejan las características inherentes del manipulador. Métricas como el índice de destreza, la manipulabilidad y el número de condición son ejemplos de índices intrínsecos.

Los índices extrínsecos miden la capacidad del manipulador para realizar una tarea específica. Los índices de desempeño extrínsecos están directamente relacionados con la tarea del

manipulador (Cloutier et al., 1994), por ejemplo, el índice de conformidad robot-tarea, el índice de manipulabilidad de potencia, etc.

2.4.4. ÍNDICES DE DESEMPEÑO BASADOS EN LA MATRIZ JACOBIANA

La matriz Jacobiana relaciona las velocidades de la plataforma móvil con las velocidades de las juntas activas de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \quad (2.88)$$

en donde $\mathbf{J}$ es la matriz Jacobiana. Además, también relaciona las fuerzas y torques de las juntas activas $\boldsymbol{\tau}$ con las fuerzas y torques en el efector final $\mathbf{w}$ de la siguiente forma (Merlet, 2006):

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{w} \quad (2.89)$$

Debido a esto, la matriz Jacobiana sirve como base de muchos índices de desempeño. No obstante, las características de la matriz Jacobiana están condicionadas por la escala y el marco de referencia. La dependencia respecto a la escala implica que su valor se ve considerablemente influido por la elección de la unidad de medida. Un cambio en la unidad puede ocasionar modificaciones drásticas en las propiedades de dicha matriz (Yu et al., 2008). Asimismo, es importante destacar que la matriz Jacobiana no es invariante en relación con el marco de referencia empleado (Doty et al., 1995). Adicionalmente, al combinar GDL traslacionales y rotacionales, se genera una inconsistencia en la matriz Jacobiana, lo cual implica que carece de significados físicos claros (Lipkin and Duffy, 1988). Para abordar esta problemática, se han propuesto diversas técnicas para normalizar la matriz Jacobiana inconsistente, entre las cuales se incluyen las siguientes:

1. A través del uso de la longitud característica, también conocida como longitud natural: Se realiza una división de todos los componentes que poseen unidades de longitud en la matriz Jacobiana. Según Ma and Angeles (1991), la longitud natural se define como aquella que proporciona el mejor desempeño.
2. Mediante el uso de velocidades de tres puntos en la plataforma móvil (Pond and Carretero, 2006, 2007; Kim and Ryu, 2003; Kong et al., 2007): Como continuación del trabajo de (Gosselin, 1990), que proponía el uso de dos puntos en el efector final para obtener una matriz Jacobiana homogénea, el uso de tres puntos distintos y no colineales en la plataforma móvil conduce a expresiones cinemáticas diferenciales que producen una matriz

Jacobiana adimensional.

3. Matriz Jacobiana homogénea ampliada (Nurahmi and Caro, 2016): Este método se ha formulado para manipuladores no redundantes considerando un conjunto de ejes lineales independientes en los puntos de un tetraedro, que representa los movimientos permitidos y los movimientos restringidos de la plataforma móvil.

Una vez que se normaliza la matriz Jacobiana con alguna de las técnicas anteriores, se puede proceder a utilizarla para obtener los siguientes índices de desempeño.

MANIPULABILIDAD

La manipulabilidad se refiere a la capacidad del robot para amplificar la velocidad y la fuerza de las articulaciones activas. Este índice proporciona información más detallada sobre la amplificación de la velocidad y la fuerza que el número de condición. Mientras que el número de condición indica la uniformidad de la amplificación de la velocidad y la fuerza, el índice de manipulabilidad informa tanto de la magnitud como de la uniformidad de la amplificación de la velocidad y la fuerza. Así, la manipulabilidad se utiliza como medida de la destreza cinemática y la transmisión del movimiento y la fuerza.

El índice de manipulabilidad de la velocidad ω^v fue introducido por primera vez en (Yoshikawa, 1985) de la siguiente manera:

$$\omega^v = \sigma_1 * \sigma_2 * \dots * \sigma_n \quad (2.90)$$

donde σ_i con $i = 1, 2, \dots, n$ corresponden a los diferentes valores singulares de la matriz Jacobiana.

Del mismo modo, la manipulabilidad de la fuerza viene dada por

$$\omega^f = \frac{1}{\sigma_1} * \frac{1}{\sigma_2} * \dots * \frac{1}{\sigma_n} \quad (2.91)$$

Se suelen representar mediante la elipse o el elipsoide de la manipulabilidad de la velocidad y la fuerza, respectivamente. En el caso del elipsoide de manipulabilidad de la velocidad, las dimensiones de los ejes representan tanto la velocidad mínima y máxima como la isotropía de la velocidad (Wu et al., 2010; Zhang and Wei, 2014). Por otro lado, el volumen del elipsoide indica el valor de manipulabilidad.

NÚMERO DE CONDICIÓN

El número de condición de la matriz Jacobiana, que llamaremos solo número de condición, viene dado por

$$k(J) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \quad (2.92)$$

donde $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ son los valores singulares de la matriz J . El número de condición tiene un valor de 1 a infinito, donde infinito se define como una configuración singular. Alternativamente, se puede expresar en términos de su valor recíproco, que tiene un valor de 0 a 1, donde 0 indica una singularidad. El número de condición de la matriz Jacobiana suele considerarse una medida de la destreza cinemática y de la uniformidad cinemática (isotropía). El número de condición se suele utilizar para evitar singularidades.

MÍNIMO VALOR SINGULAR DE VELOCIDAD

El mínimo valor singular de velocidad

$$\sigma_{min}^v = \sigma_n \quad (2.93)$$

de la matriz Jacobiana es una buena indicación de la capacidad de movimiento mínima del efector final. El mínimo valor de σ_{min}^v de todo el espacio de trabajo puede utilizarse como índice global y da una noción de la peor capacidad de movilidad del robot.

MÍNIMO VALOR SINGULAR DE FUERZA

El Mínimo valor singular de fuerza

$$\sigma_{min}^f = \frac{1}{\sigma_1} \quad (2.94)$$

de la matriz Jacobiana es una buena indicación de la capacidad de fuerza estática mínima del efector final.

2.4.5. ANÁLISIS DE SINGULARIDADES EN ROBOTS PARALELOS

Un aspecto fundamental en el análisis cinemático de un robot es el de las configuraciones singulares del robot, en dicho estado el efector final del mecanismo gana o pierde grados de libertad de manera instantánea (Merlet, 2006). Esto último se traduce en que el efector final pierde la capacidad de generar velocidades en alguna dirección o que pueda tener movimientos

infinitesimales descontrolados incluso si los actuadores están bloqueados. La forma más común de analizar las singularidades es mediante la matriz Jacobiana del robot, esto debido a que esta matriz relaciona las velocidades articulares con las cartesianas en el efector final.

En (Gosselin and Angeles, 1990) se establece un marco general para el análisis de singularidades en cadenas cinemáticas en lazo cerrado y se proponen tres clasificaciones para dichas configuraciones. A continuación se expone brevemente lo presentado en dicho artículo.

Considerando el vector de juntas activas $\mathbf{q}$ de tamaño n y el vector de coordenadas cartesianas $\mathbf{x}$ de tamaño n , se puede representar la relación entre ambas como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.95)$$

En donde $\mathbf{F}$ es una función de dimensión n , igual que el número de cadenas cinemáticas. Al derivar (2.95) respecto al tiempo llegamos a una relación, entre las velocidades de entrada y salida, con la siguiente forma:

$$\mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (2.96)$$

en donde

$$\mathbf{J}_x = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{J}_q = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.97)$$

siendo $\mathbf{J}_x$ y $\mathbf{J}_q$ de dimensión $n \times n$ respectivamente y dependientes de la configuración. Cuando $\mathbf{J}_x$ y $\mathbf{J}_q$ se vuelven singulares entonces el mecanismo se encontrará en una configuración singular. En presencia de cadenas cinemáticas en lazo cerrado se distinguen tres casos:

1. El primer tipo de singularidad ocurre cuando se cumple:

$$\det(\mathbf{J}_q) = 0 \quad (2.98)$$

Este tipo de configuración corresponde a cuando la cadena alcanza ya sea el límite de su espacio de trabajo o alguna frontera separando subregiones dentro del espacio de trabajo en donde el número de ramas, múltiples modos de trabajo de los eslabones, no es el mismo. Dicho de otro modo, la singularidad de primer tipo ocurre cuando las diferentes ramas del problema de cinemática inversa coinciden. Debido a que el espacio nulo de $\mathbf{J}_q$ es no vacío en la configuración singular, tendremos vectores $\mathbf{q}$ no cero que produzcan vectores $\mathbf{x}$ que son cero.

2. El segundo tipo de singularidad ocurre cuando se cumple:

$$\det(\mathbf{J}_x) = 0 \quad (2.99)$$

Esto corresponde a configuraciones en las que el efector final es localmente móvil incluso si las juntas actuadas están bloqueadas. Se puede decir que este tipo de singularidad corresponde a los puntos en donde coinciden diferentes ramas del problema cinemático directo. Ya que el espacio nulo de $\mathbf{J}_x$ no es vacío pueden existir movimientos en el efector final pese a que las juntas activas estén bloqueadas.

3. El tercer tipo de singularidad requiere que se cumplan ciertas restricciones en los parámetros de los eslabones. Estas singularidades ocurren si $\det(\mathbf{J}_x) = \det(\mathbf{J}_q) = 0$. Cuando estas condiciones se cumplen, (2.95) se pierde y las consecuencias en este tipo de singularidad son similares a los casos 1 y 2.

Las singularidades de la matriz Jacobiana no son solo relevantes para el análisis de las singularidades del mecanismo, si no que también forma parte de una gran variedad de métodos de solución de la cinemática y como pieza fundamental en técnicas de control de robots.

2.4.6. ANÁLISIS DEL VOLUMEN DEL ESPACIO DE TRABAJO

Se puede definir el espacio de trabajo como un conjunto de ubicaciones que el efector final puede alcanzar. Este conjunto está determinado por la movilidad del manipulador, que se representa por el número y los tipos de sus grados de libertad (GDL), y se encuentra restringido por las longitudes de los eslabones, los límites de las articulaciones y las interferencias entre los componentes mecánicos que componen al robot. El espacio de trabajo suele evaluarse en primera instancia por su tamaño, ya sea área o volumen, y por su forma prefiriéndose formas regulares y sin huecos. La presencia de singularidades al interior del espacio de trabajo pueden penalizar dichas características. Debido a esto, las singularidades son consideradas durante la etapa de diseño.

El espacio de trabajo de un robot se clasifica comúnmente en varios tipos (Merlet, 2006), que incluyen:

- Espacio de trabajo de orientación constante o espacio de trabajo de traslación: todas las posibles ubicaciones del efector final que pueden alcanzarse con una orientación fija determinada.
- Espacio de trabajo de orientación: todas las orientaciones posibles que pueden alcanzarse el efector final se encuentra en una ubicación fija.

- Espacio de trabajo máximo o espacio de trabajo alcanzable: todas las ubicaciones del efector final que pueden alcanzarse con al menos una orientación.
- Espacio de trabajo de orientación inclusiva: todas las ubicaciones del efector final que pueden alcanzarse con al menos una orientación entre un conjunto definido por rangos en los ángulos de orientación. El espacio de trabajo máximo es un caso particular del espacio de trabajo de orientación inclusiva para el que los rangos de los ángulos de orientación son $[0, 2\pi)$.
- Espacio de trabajo de orientación total: todas las ubicaciones del efector final que pueden alcanzarse con todas las orientaciones entre un conjunto definido por rangos en los ángulos de orientación.
- Espacio de trabajo dextro: todas las posiciones del efector final para las que son posibles todas las orientaciones. El espacio de trabajo dextro es un caso particular del espacio de trabajo de orientación total, siendo los rangos para los ángulos de rotación $[0, 2\pi)$.
- Espacio de trabajo de orientación total reducido: todas las posiciones del efector final que pueden alcanzarse con un subconjunto de ángulos de orientación que pueden tener cualquier valor en rangos definidos, mientras que los otros pueden tener valores arbitrarios. Este espacio de trabajo puede ser importante para aplicaciones que no implican todos los GDL del robot. Por ejemplo, si un robot de 6 GDL se utiliza como una máquina herramienta de 5 ejes, el tercer parámetro de orientación no es importante.

Por otro lado, el espacio de trabajo útil, también denominado espacio de trabajo práctico, se refiere a un subconjunto del espacio de trabajo que se utiliza realmente en una tarea específica. Generalmente, se define como una forma geométrica regular, como un rectángulo, un cuboide, un círculo o una esfera. Durante la etapa de diseño, el espacio de trabajo suele ser prioridad ya que es en esta región del espacio de trabajo en donde será controlado el robot para realizar tareas específicas.

El espacio de trabajo de un robot espacial es habitualmente representado mediante dos espacios tridimensionales, los cuales permiten separar la posición y orientación del efector. De esta manera, se pueden presentar visualmente el espacio de trabajo a través de gráficos tridimensionales. En el caso de los robots planares, es posible utilizar gráficos bidimensionales para este propósito.

En términos generales, es posible emplear dos enfoques principales para determinar y graficar el espacio de trabajo: el enfoque geométrico y el enfoque numérico de discretización.

El objetivo del enfoque geométrico es determinar de manera geométrica el límite del espacio de trabajo del robot. El principio radica en deducir, a partir de las restricciones de cada una de las cadenas cinemáticas, un objeto geométrico W_i que represente todas las posiciones posibles del efector final que cumplan con dichas restricciones. Se genera un objeto de este tipo para cada extremidad, y el espacio de trabajo del robot se define como la intersección de todos los W_i . El principal interés del enfoque geométrico radica en su capacidad para ser, usualmente, rápido y preciso, ofreciendo una representación mínima del espacio de trabajo que facilita el cálculo efectivo de ciertas características del mismo, como su volumen. No obstante, presenta desventajas, tales como la necesidad de adaptarse al robot en cuestión, la dificultad para considerar todas las restricciones relevantes y la posibilidad de que la representación mínima del espacio de trabajo no sea la más apropiada para tareas como la planificación del movimiento.

En el enfoque numérico de discretización, se genera un espacio discretizado que abarca todos los posibles puntos en el espacio de trabajo. A continuación, se emplea la cinemática inversa en conjunto con las restricciones pertinentes para determinar si un punto candidato se encuentra dentro o fuera del espacio de trabajo. Este enfoque resulta intuitivo, es aplicable a todos los tipos de robots paralelos y tiene la capacidad de incluir todas las restricciones requeridas. No obstante, la precisión de este enfoque se ve afectada por el tamaño de los pasos de discretización. Asimismo, es importante mencionar que pueden existir pequeños huecos dentro del espacio de trabajo que no sean detectados a menos que los pasos de discretización sean lo suficientemente pequeños como para capturarlos. El método de Monte Carlo es similar a este enfoque. Se genera un gran número de puntos aleatorios y discretos que corresponden a los valores de juntas activas dentro del rango articular. Con base en dichos puntos y mediante el modelo de cinemática directa se trazan los puntos válidos que corresponden a la posición del efector final. El enfoque de Monte Carlo también suele ser usado en la otra dirección. Un gran número de posibles puntos, aleatorios y discretos, del efector final son validados mediante la cinemática inversa y las restricciones consideradas.

En esta tesis se empleará el enfoque numérico de discretización, dado que permite no solo determinar la forma y el volumen del espacio de trabajo, sino también llevar a cabo cálculos de los índices de desempeño en cada uno de los puntos del mismo.

2.5. CONTROL DE ROBOTS PARALELOS

El control de movimiento de robots paralelos se enfoca en asegurar que la plataforma móvil del robot siga con precisión una trayectoria de pose (posición y orientación) deseada, $\mathbf{x}_d(t)$, en un marco de tiempo específico. A diferencia de los robots seriales, donde el uso de grandes reducciones en los actuadores puede disminuir significativamente el acoplamiento y el comportamiento no lineal de la dinámica del robot [113, 168], en los manipuladores paralelos, incluso con tales reducciones, las cadenas cinemáticas cerradas limitan considerablemente el rendimiento de controladores descentralizados simples. Por lo tanto, para estos robots se suelen desarrollar técnicas avanzadas de control no lineal y MIMO (Multi-Input Multi-Output) (Khosravi and Taghirad, 2011; Taghirad, 2013).

La ecuación dinámica general de un robot paralelo en el espacio de tarea, que sirve de base para muchos controladores basados en modelo, se representa como (Taghirad, 2013):

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}$$

donde $\mathbf{x}$ es el vector de coordenadas generalizadas de la plataforma móvil (posición $\mathbf{x}_p$ y orientación $\boldsymbol{\theta}$), $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ es la matriz de masa (simétrica y definida positiva), $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ es la matriz que agrupa los términos de Coriolis y centrífugos, $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ es el vector de pares/fuerzas gravitacionales, y $\mathbf{F}$ representa el *wrench* (fuerza/par) generalizado aplicado a la plataforma móvil. Este *wrench* $\mathbf{F}$ resulta de las fuerzas/pares de los actuadores $\boldsymbol{\tau}$ proyectados al espacio de tarea a través de la Jacobiana transpuesta $\mathbf{J}^T$ (i.e., $\mathbf{F} = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\tau}$), más cualquier *wrench* de perturbación externa $\mathbf{F}_d$. Para un robot Delta, cuya aplicación principal es la manipulación de objetos a alta velocidad, un control preciso de la trayectoria es crucial. La reconfiguración geométrica en un robot Delta implicaría que las matrices $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{G}$ y la Jacobiana $\mathbf{J}$ no serían constantes, sino que dependerían de los parámetros de reconfiguración, lo que añade un desafío significativo al diseño del sistema de control.

Las topologías de control para robots paralelos se pueden clasificar según la variable que se retroalimenta. Las principales son el control en el espacio de tarea, que utiliza mediciones directas o indirectas de la pose $\mathbf{x}$ de la plataforma móvil, y el control en el espacio articular, que utiliza mediciones de las variables articulares $\mathbf{q}$. Dentro del control en espacio articular, una práctica común es transformar la trayectoria deseada $\mathbf{x}_d$ a trayectorias articulares deseadas $\mathbf{q}_d$ mediante el modelo de cinemática inversa, y luego diseñar el controlador en el espacio articular (Taghirad, 2013).

CONTROL PD DESCENTRALIZADO

Este es el esquema de control por retroalimentación más elemental. Para el control en espacio de tarea, se aplica un controlador Proporcional-Derivativo (PD) de forma independiente a cada componente del vector de error de pose $\mathbf{e}_x = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}$. El wrench de control resultante es:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_p \mathbf{e}_x + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_x$$

donde $\mathbf{K}_p$ y $\mathbf{K}_d$ son matrices diagonales que contienen las ganancias proporcionales y derivativas para cada grado de libertad del espacio de tarea (Taghirad, 2013). De manera similar, para el control en espacio articular, el vector de par/fuerza del actuador $\boldsymbol{\tau}$ se calcula como:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_p \mathbf{e}_q + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_q$$

basado en el error articular $\mathbf{e}_q = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$. La principal ventaja de este controlador es su simplicidad estructural y su fácil implementación, ya que no requiere un modelo dinámico detallado del robot. Sin embargo, su rendimiento de seguimiento suele ser deficiente, especialmente a altas velocidades o en presencia de perturbaciones significativas. Pueden persistir errores en estado estacionario, y el rendimiento global es altamente dependiente de la configuración del robot. La sintonización de las ganancias $\mathbf{K}_p$ y $\mathbf{K}_d$ se realiza típicamente de forma experimental (prueba y error) y representa un compromiso entre la rapidez de la respuesta transitoria y la magnitud de los errores en diferentes regiones del espacio de trabajo (Taghirad, 2013). Para un robot Delta reconfigurable, la dependencia del rendimiento con la configuración sería aún más crítica, pudiendo requerir una compleja programación de ganancias.

CONTROL POR DINÁMICA INVERSA (IDC) (TAGHIRAD, 2013)

El Control por Dinámica Inversa (IDC), también conocido como linealización por retroalimentación o método del par/fuerza calculado, es una técnica fundamental basada en el modelo dinámico del robot. Su objetivo es compensar las no linealidades y los acoplamientos dinámicos del manipulador, transformando el sistema no lineal original en un sistema lineal y desacoplado en términos del error de seguimiento.

CONTROL IDC EN ESPACIO DE TAREA: El *wrench* de control $\mathbf{F}$ aplicado a la plataforma móvil se calcula de la siguiente manera:

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{x})\mathbf{a} + \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x})$$

donde $\hat{\mathbf{M}}$, $\hat{\mathbf{C}}$, y $\hat{\mathbf{G}}$ son las estimaciones de las matrices y vectores dinámicos del robot, y $\mathbf{a}$ es una nueva entrada de control, a menudo denominada pseudo-aceleración o aceleración de control, definida como (Taghirad, 2013):

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_x + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_x$$

Si las estimaciones del modelo son perfectas (es decir, $\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M}$, $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}$, $\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{G}$) y no existen perturbaciones externas ($\mathbf{F}_d = \mathbf{0}$), al sustituir la ley de control en la ecuación dinámica del robot, la dinámica del error de lazo cerrado se simplifica a:

$$\ddot{\mathbf{e}}_x + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_x + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_x = \mathbf{0}$$

Esta es la ecuación de un sistema lineal, desacoplado y de segundo orden, cuyos polos (y por tanto, su comportamiento transitorio y estabilidad) pueden ser asignados mediante una elección adecuada de las matrices de ganancia $\mathbf{K}_p$ y $\mathbf{K}_d$ (que ahora pueden ser matrices completas, no necesariamente diagonales, para moldear la respuesta).

CONTROL IDC EN ESPACIO ARTICULAR: De forma análoga, si se trabaja en el espacio articular, los pares/fuerzas de los actuadores $\boldsymbol{\tau}$ se calculan como:

$$\boldsymbol{\tau} = \hat{\mathbf{M}}_q(\mathbf{q})\mathbf{a}_q + \hat{\mathbf{C}}_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{G}}_q(\mathbf{q})$$

con la pseudo-aceleración articular $\mathbf{a}_q = \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_q + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_q$. Si el modelo es perfecto, la dinámica del error es $\ddot{\mathbf{e}}_q + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_q + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_q = \mathbf{0}$. El IDC puede proporcionar un excelente rendimiento de seguimiento si el modelo dinámico utilizado es preciso. Sin embargo, su principal desventaja es la alta sensibilidad a los errores de modelado y a las perturbaciones externas. Cualquier discrepancia entre el modelo real y el estimado ($\tilde{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}$, etc.) o la presencia de $\mathbf{F}_d$ introduce términos adicionales en la ecuación del error, degradando la linealización y el desacoplamiento logrados. Además, el IDC es computacionalmente intensivo debido a la necesidad de calcular las matrices dinámicas en tiempo real. Una simplificación es el **IDC con Linealización Parcial**, que solo compensa el término de gravedad $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x})$ (o $\hat{\mathbf{G}}_q$). Este enfoque reduce la carga computacional y, para el seguimiento de consignas constantes, puede garantizar estabilidad asintótica aprovechando propiedades estructurales de la dinámica de los robots, como la propiedad de antisimetría de la matriz $(\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C})$. Para un robot Delta reconfigurable, la efectividad del IDC dependerá de la capacidad de actualizar con precisión y rapidez el modelo dinámico ($\hat{\mathbf{M}}$, $\hat{\mathbf{C}}$, $\hat{\mathbf{G}}$) conforme la geometría cambie.

CONTROL ROBUSTO BASADO EN IDC (TAGHIRAD, 2013)

El control robusto tiene como objetivo mantener la estabilidad y un nivel de rendimiento aceptable del sistema de control a pesar de las incertidumbres del modelo y las perturbaciones externas, que se agrupan en un término $\boldsymbol{\eta}$. Se asume que este término de incertidumbre está acotado, es decir, $\|\boldsymbol{\eta}\| \leq \rho(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$, donde ρ es una función conocida. La estrategia consiste en modificar la pseudo-aceleración de control $\mathbf{a}$ del IDC añadiendo un término de robustificación $\boldsymbol{\delta}_a$:

$$\mathbf{a}_r = \ddot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_x + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_x + \boldsymbol{\delta}_a$$

La dinámica del error en forma de espacio de estados es $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}_a + \boldsymbol{\eta})$, donde $\boldsymbol{\epsilon} = [\mathbf{e}_x^T \quad \dot{\mathbf{e}}_x^T]^T$. El término $\boldsymbol{\delta}_a$ se diseña utilizando la teoría de estabilidad de Lyapunov para asegurar que la derivada de una función de Lyapunov $V(\boldsymbol{\epsilon})$ sea negativa definida (o semidefinida negativa). Una elección común para $\boldsymbol{\delta}_a$ es una ley de control de estructura variable (VSC), como la ley de signo o una función de saturación para evitar el fenómeno de "chattering" (oscilaciones de alta frecuencia). Por ejemplo, una ley de tipo signo modificada es:

$$\boldsymbol{\delta}_a = \begin{cases} -\rho \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} & \text{si } \|\mathbf{v}\| > \epsilon_0 \\ -\rho \frac{\mathbf{v}}{\epsilon_0} & \text{si } \|\mathbf{v}\| \leq \epsilon_0 \end{cases}$$

donde $\mathbf{v} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\epsilon}$, siendo $\mathbf{P}$ una matriz simétrica definida positiva obtenida de la solución de la ecuación de Lyapunov $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$ para una matriz $\mathbf{Q}$ definida positiva, y ϵ_0 es el espesor de una capa límite. Este tipo de control usualmente garantiza que los errores de seguimiento sean uniformemente finalmente acotados (UUB). El control robusto puede ofrecer garantías de estabilidad y rendimiento acotado en presencia de incertidumbres significativas. Sin embargo, si la cota de incertidumbre ρ se sobreestima, el control puede ser demasiado conservador y resultar en un esfuerzo de control excesivo. Si se subestima, la estabilidad podría perderse. El chattering es un problema práctico asociado con las leyes de conmutación VSC.

CONTROL ADAPTATIVO BASADO EN IDC (TAGHIRAD, 2013)

El control adaptativo está diseñado para sistemas cuyos parámetros dinámicos son desconocidos o varían con el tiempo. Se asume que la ecuación dinámica del robot puede ser escrita de forma lineal con respecto a un vector de parámetros dinámicos $\boldsymbol{\theta}$ (posiblemente un conjunto mínimo de parámetros base): $\mathbf{M}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\theta}$, donde $\mathbf{Y}$ es la matriz de regresión que contiene funciones conocidas de las variables de estado y sus derivadas. La ley de control utiliza una estructura IDC, pero con los parámetros dinámicos $\boldsymbol{\theta}$ reemplazados

por sus estimaciones en línea $\hat{\theta}(t)$. La dinámica del error de seguimiento se relaciona entonces con el error de estimación de parámetros $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$. La ley de adaptación para $\dot{\tilde{\theta}}$ se diseña para asegurar la estabilidad del sistema y la convergencia del error de seguimiento. Una ley de adaptación común, basada en un análisis de estabilidad de Lyapunov con una función candidata $V = \epsilon^T \mathbf{P} \epsilon + \tilde{\theta}^T \Gamma \tilde{\theta}$ (donde Γ es una matriz de adaptación simétrica y definida positiva), es:

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma^{-1} \Phi^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \epsilon$$

donde Φ es una matriz relacionada con la matriz de regresión $\mathbf{Y}$ y la estimación de la inversa de la matriz de masa $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$. Este tipo de control puede lograr un seguimiento asintótico del error si se cumplen ciertas condiciones (como la excitación persistente de las señales en la matriz de regresión, para asegurar la convergencia de los parámetros estimados). El control adaptativo puede ofrecer un excelente rendimiento cuando los parámetros del sistema son inciertos o varían. Sin embargo, la convergencia de los parámetros estimados a sus valores verdaderos no siempre está garantizada y puede ser lenta. Es sensible a dinámicas no modeladas (incertidumbres no estructuradas) y al ruido de medición. Un desafío significativo es la dependencia de la matriz de regresión $\mathbf{Y}$ de la aceleración $\ddot{\mathbf{x}}$, la cual no suele estar disponible directamente y su estimación a partir de señales de posición o velocidad puede amplificar el ruido. Alternativas como los enfoques basados en pasividad (Spong et al., 2005) se han propuesto para mitigar algunos de estos problemas. Para un robot Delta reconfigurable, el control adaptativo es una opción muy atractiva, ya que tiene el potencial de aprender o ajustarse a los cambios en la dinámica del robot a medida que su geometría se modifica.

2.6. ESQUEMA DE CONTROL CSM

La Manipulación en Espacio de Cámara (CSM, por sus siglas en inglés) es una metodología de control visual que ha demostrado ser efectiva, particularmente por su capacidad para operar sin una calibración exhaustiva del sistema robot-cámara. Este enfoque se centra en establecer una relación directa y funcional entre las características visuales extraídas de imágenes capturadas por cámaras y la configuración articular del robot.

La técnica de Manipulación en Espacio de Cámara (CSM) fue introducida por Skaar y sus colaboradores, quienes buscaron una forma de controlar robots utilizando información visual de manera más directa, mitigando las complejidades asociadas con la calibración de cámaras y la transformación precisa de coordenadas entre el espacio de la cámara y el espacio del robot (Skaar, Brockman, y Hanson, 1987). El principio subyacente de CSM es definir una relación

o mapeo entre las proyecciones bidimensionales de marcas visuales (generalmente adheridas al efector final del robot o al objeto de interés) observadas por al menos dos cámaras, y la configuración espacial o articular del robot.

Una de las características distintivas de las primeras implementaciones de CSM es el uso de un modelo de cámara simplificado, conocido como el modelo ortográfico. Este modelo asume que todas las proyecciones de los rayos de luz desde la escena tridimensional hacia el plano de la imagen son paralelas entre sí y perpendiculares al plano de la imagen. Esta aproximación es razonablemente válida cuando la profundidad de la escena es pequeña en comparación con la distancia de la cámara a la escena, o cuando las cámaras están ubicadas a una distancia considerable del área de trabajo del robot, minimizando así los efectos de perspectiva.

La primer etapa de evolución del esquema CSM se puede rastrear a través de varias investigaciones clave:

En 1987, Skaar, Brockman y Hanson presentaron la técnica y la aplicaron en un experimento bidimensional donde un brazo robótico de un solo grado de libertad debía interceptar una pelota de ping-pong cuya trayectoria era un tiro parabólico.

Posteriormente, en 1990, Skaar, Brockman y Jang extendieron esta metodología a un entorno tridimensional, ampliando su aplicabilidad (Skaar, Brockman, y Jang, 1990).

En 1992, Skaar, Yalda-Mooshabad y Brockman implementaron la CSM en un sistema no holonómico (un robot móvil sobre ruedas) que portaba un brazo de un grado de libertad, utilizando cámaras fijas en el entorno para guiar al robot (Skaar, Yalda-Mooshabad, y Brockman, 1992).

Más adelante, Cárdenas, Goodwine, Skaar y Seelinger (2003) adaptaron la CSM para un sistema no holonómico donde las cámaras estaban montadas sobre el propio robot móvil, lo que representa un escenario más desafiante debido al movimiento solidario de las cámaras con el robot.

2.6.1. CSM-OFL

El esquema clásico de CSM, a menudo referido como OFL-CSM (Orthographic + Flattening Camera Space Manipulation), opera fundamentalmente en dos etapas (Gonzalez-Galvan y Skaar, 1996; Gonzalez-Galvan, Cruz-Ramirez, Seelinger, y Cervantes-Sánchez, 2003).

En la fase inicial, se emplea el modelo de cámara ortográfico junto con el modelo cinemático directo del manipulador. El objetivo es establecer un mapeo entre el espacio articular del robot y el espacio de cámara. Este mapeo se define mediante un conjunto de seis parámetros de visión. Estos parámetros encapsulan la transformación combinada que incluye la orientación

y posición relativa de las cámaras con respecto al robot, así como las características intrínsecas simplificadas del modelo ortográfico. La determinación de estos seis parámetros se realiza típicamente minimizando una función de coste que cuantifica la diferencia entre las coordenadas observadas de las marcas visuales en el plano de imagen y las coordenadas predichas por el modelo ortográfico en función de la configuración del robot y los parámetros de visión. La ecuación a minimizar es:

$$J(\mathbf{C}) = \sum_{i=1}^m \{ [u_i - f_x(x_i, y_i, z_i; \mathbf{C})]^2 + [v_i - f_y(x_i, y_i, z_i; \mathbf{C})]^2 \} \quad (2.100)$$

donde: m es el número de muestras o configuraciones del robot utilizadas. u, v son las coordenadas observadas (en píxeles) de la i -ésima marca visual en el plano de imagen. x_i, y_i, z_i son las coordenadas tridimensionales de la i -ésima marca visual, generalmente calculadas a partir del modelo cinemático directo del robot para una configuración articular dada, referidas al marco de referencia del robot. $\mathbf{C} = [C_1, \dots, C_6]$ es el vector que contiene los seis parámetros de visión que se desean estimar. W_i es una matriz de pesos que puede utilizarse para dar más o menos importancia a ciertas muestras. $f_x(\cdot)$ y $f_y(\cdot)$ son las funciones de proyección ortográfica que relacionan las coordenadas 3D de la marca visual con sus coordenadas en el plano de imagen, parametrizadas por $\mathbf{C}$. Estas funciones, según el documento, se definen como:

$$f_x(x_i, y_i, z_i; \mathbf{C}) = b_1(\mathbf{C})x_i + b_2(\mathbf{C})y_i + b_3(\mathbf{C})z_i + b_4(\mathbf{C}) \quad (2.101)$$

$$f_y(x_i, y_i, z_i; \mathbf{C}) = b_5(\mathbf{C})x_i + b_6(\mathbf{C})y_i + b_7(\mathbf{C})z_i + b_8(\mathbf{C}) \quad (2.102)$$

donde:

$$b_1(\mathbf{C}) = (C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 - C_4^2)$$

$$b_2(\mathbf{C}) = 2(C_2C_3 + C_1C_4)$$

$$b_3(\mathbf{C}) = 2(C_2C_4 - C_1C_3)$$

$$b_4(\mathbf{C}) = C_5$$

$$b_5(\mathbf{C}) = 2(C_2C_3 - C_1C_4)$$

$$b_6(\mathbf{C}) = (C_1^2 - C_2^2 + C_3^2 - C_4^2)$$

$$b_7(\mathbf{C}) = 2(C_3C_4 + C_1C_2)$$

$$b_8(\mathbf{C}) = C_6$$

Dado que este sistema de ecuaciones resultante para los parámetros C es no lineal, se recurre a métodos iterativos para su solución (por ejemplo, algoritmos de optimización no lineal).

La segunda etapa del OFL-CSM introduce un procedimiento de ajuste conocido como flattening. El propósito fundamental del flattening es incrementar la precisión del modelo ortográfico, compensando parcialmente el efecto de perspectiva que el modelo ortográfico por sí mismo ignora (Gonzalez-Galvan, Skaar, Korde, y Chen, 1997).

En el contexto de OFL-CSM, además del flattenin, se pueden tomar muestras locales alrededor del punto objetivo. A estas muestras locales se les puede dar mayor importancia a través de la matriz de pesos W_i para estimar parámetros de visión más confiables y precisos en la región de interés donde se realizará la manipulación final (Gonzalez-Galvan y Skaar, 1996). El flattening trabaja en conjunto con esta estrategia de muestreo local para mejorar la exactitud del posicionamiento.

LCM-CSM

La metodología LCM-CSM es una variante del esquema clásico CSM propuesta en (Rendon-Mancha et al., 2010). Su principal innovación radica en sustituir el modelo de cámara ortográfico y el proceso de *flattening* por un modelo lineal de cámara tipo pin-hole (sin efectos de perspectiva no lineales). Esto reduce el costo computacional al eliminar métodos iterativos, utilizando en su lugar 11 parámetros de visión (en lugar de los 6 de OFL-CSM) para relacionar directamente las coordenadas tridimensionales del efector final con sus proyecciones en el plano de imagen.

LCM-CSM establece una conexión entre las marcas visuales del robot (captadas por cámaras) y su posición 3D mediante parámetros intrínsecos (relacionados con la cámara) y extrínsecos (que vinculan los marcos de referencia del robot y las cámaras). A diferencia de OFL-CSM, no requiere calibración geométrica del robot ni cálculo del Jacobiano, lo que la hace atractiva para robots seriales y paralelos. Además, su estructura lineal facilita la derivación de modelos de velocidad, clave para extensiones como el CSM en velocidades, enfocado en tareas dinámicas con objetivos móviles.

El modelo de cámara de orificio se basa en la proyección central de un punto en el espacio sobre el plano de imagen, a través de una línea recta que une a dicho punto con el centro de proyección (centro óptico de la cámara). Esta relación geométrica se observa en la Figura 2.5, donde, por medio de triángulos semejantes, un punto P_i en el espacio tridimensional es mapeado a un punto correspondiente en el plano de la imagen. En dicha figura, se observan los marcos (z, y, z) como marco inercial (puede ser el marco fijo de un robot), (X, Y, Z) el marco

asociado al cuerpo de la cámara y cuyo origen es coincidente con el centro óptico, el (x_c, y_c) el marco asociado al centro de la imagen, con origen coincidente con el centro del plano imagen. El punto P_i tiene coordenadas (x_i, y_i, z_i) con respecto al marco inercial, y (X_i, Y_i, Z_i) con respecto al marco de la cámara. La proyección de P_i sobre el plano imagen tiene coordenadas (x_{ci}, y_{ci}) en el marco asociado a la imagen; y f es la distancia focal.

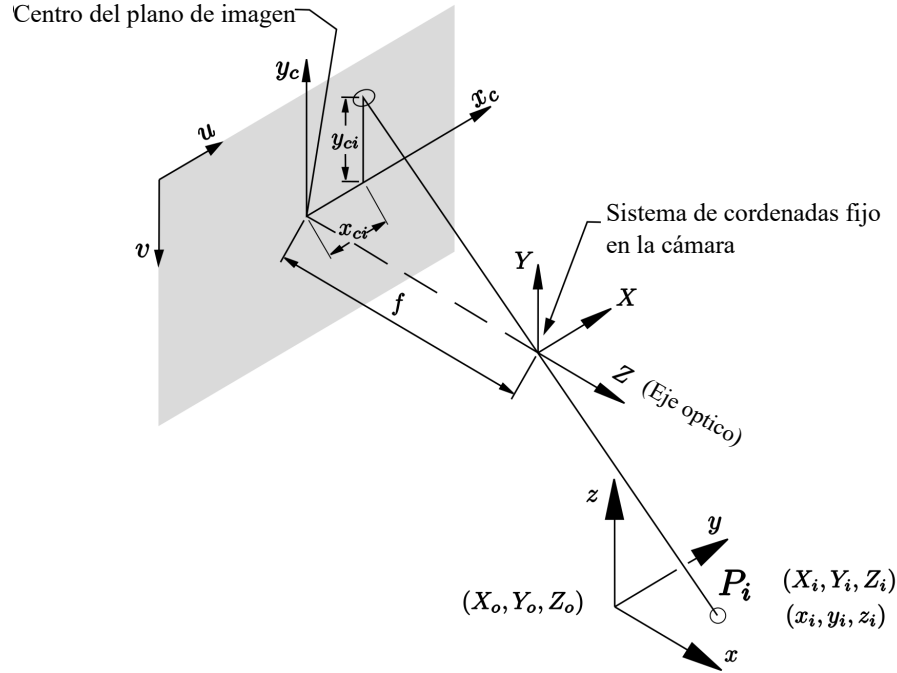


Figura 2.5: Esquema del modelo de cámara de orificio.

Los parámetros intrínsecos de un modelo de cámara definen su geometría interna y óptica, determinando cómo los puntos de un mundo tridimensional (3D) se proyectan sobre el plano de imagen bidimensional (2D) de la cámara. Estos parámetros son generalmente constantes, ya que dependen de la fabricación de los componentes de la cámara, aunque pueden variar si se utilizan lentes con distancia focal variable o con efectos como el “ojo de pez”.

El mapeo de un punto tridimensional P (referido al marco de la cámara) a su proyección en el plano de imagen (x_c, y_c) se obtiene mediante la regla de los triángulos semejantes. En forma matricial homogénea, esta relación se expresa como:

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \frac{1}{Z} \mathbf{F} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

En donde $1/Z$ es un factor de escala.

Las coordenadas en el plano (x_c, y_c) están en el centro de la imagen, y están en unidades de longitud. Se necesita otro mapeado que traslade los puntos al marco utilizado habitualmente en la imagen digital. Es decir, un marco (u, v) en la esquina superior izquierda del plano de la imagen en el que la dirección del eje u coincide con la dirección del eje x_c mientras que la dirección del eje v está en dirección opuesta a la del eje y_c . Además, pasamos de unidades longitudinales a unidades de píxel mediante la siguiente transformación homogénea:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_x & s & p_x \\ 0 & -m_y & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

donde m_x , m_y representa el número de píxeles por unidad de distancia, $p_x = c_x m_x$ y $p_y = c_y m_y$ son las coordenadas del centro del plano de la imagen en unidades de píxel y s (que toma valores de 0 o 1) representa que tan cuadrados son los pixeles. Todos estos parámetros se consideran constantes para una cámara de modo que la matriz $\mathbf{K}$ es constante y contiene los cinco parámetros intrínsecos.

Los parámetros extrínsecos establecen la relación entre un sistema de coordenadas del robot y el sistema de coordenadas de la cámara. Esta relación incluye la rotación y la traslación entre ambos sistemas. Para transformar coordenadas entre estos dos sistemas, se utiliza una matriz de transformación homogénea $\mathbf{H}$ que contiene la matriz de rotación $\mathbf{R}$ y el vector de traslación $\mathbf{t}$. Esta matriz homogénea se compone de 6 parámetros: 3 correspondientes a los ángulos de rotación sobre cada eje y 3 a la traslación. Así, la matriz de transformación homogénea se define como

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & X_0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & Y_0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

Podemos realizar la composición de todas estas transformaciones homogéneas para establecer una transformación directa entre el fotograma (x, y, z) y el fotograma (u, v) de la manera siguiente:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{Z} \mathbf{K} \mathbf{F} \mathbf{H} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

desarrollando la multiplicación de matrices se obtiene:

$$Z \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

teniendo en cuenta que existen solo 11 parámetros linealmente independientes (5 intrínsecos y 6 extrínsecos) en el modelo de cámara y 12 en la matriz $\mathbf{P}$, es posible normalizar la ecuación (2.108) respecto a P_{34} de modo que la matriz solo dependa de 11 parámetros. Estos parámetros son llamados los parámetros de visión. La ecuación puede reescribirse como:

$$\rho \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

en donde ρ es el factor de escala normalizado. Nótese que se hace un abuso de notación al mantener el nombre de la matriz $\mathbf{P}$.

CALCULO DE PARÁMETROS DE VISIÓN

La metodología de Manipulación en Espacio de Cámara con Modelo Lineal de Cámara (LCM-CSM) se fundamenta en la estimación precisa de un conjunto de parámetros de visión que relacionan las coordenadas tridimensionales de un objeto con sus proyecciones en el plano de imagen de las cámaras. La determinación de estos parámetros es un paso crucial y se describe a continuación y se basa en lo presentado en (Loredo et al., 2022).

Para estimar los elementos P_{jk} de la matriz de proyección, se puede despejar u y v de la ecuación (2.108) :

$$u = \frac{P_{11}x + P_{12}y + P_{13}z + P_{14}}{P_{31}x + P_{32}y + P_{33}z + 1} \quad (2.109)$$

$$v = \frac{P_{21}x + P_{22}y + P_{23}z + P_{24}}{P_{31}x + P_{32}y + P_{33}z + 1} \quad (2.110)$$

Rearreglando las ecuaciones anteriores, se obtiene un sistema lineal de ecuaciones para los 11 parámetros de visión. En un primer paso se despejan los denominadores tal que se llega a:

$$u(P_{31}x + P_{32}y + P_{33}z + 1) = P_{11}x + P_{12}y + P_{13}z + P_{14} \quad (2.111)$$

$$v(P_{31}x + P_{32}y + P_{33}z + 1) = P_{21}x + P_{22}y + P_{23}z + P_{24} \quad (2.112)$$

Estas ecuaciones se pueden reescribir como:

$$P_{11}x + P_{12}y + P_{13}z + P_{14} - uP_{31}x - uP_{32}y - uP_{33}z = u \quad (2.113)$$

$$P_{21}x + P_{22}y + P_{23}z + P_{24} - vP_{31}x - vP_{32}y - vP_{33}z = v \quad (2.114)$$

Este sistema se puede expresar en forma matricial en donde cada punto de correspondencia $(x, y, z) \leftrightarrow (u, v)$ aporta dos ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -ux & -uy & -uz \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & y & z & 1 & -vx & -vy & -vz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ P_{14} \\ P_{21} \\ P_{22} \\ P_{23} \\ P_{24} \\ P_{31} \\ P_{32} \\ P_{33} \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

Para resolver este sistema y encontrar los 11 parámetros de visión, se requieren al menos 6 puntos de correspondencia (muestras), ya que cada punto aporta dos ecuaciones y se necesitan al menos $11/2 = 5.5$ puntos, redondeado a 6. En la práctica, se recomienda utilizar un número mayor de muestras (más de 6) para tener un sistema sobredeterminado, lo que permite obtener una estimación más robusta y precisa de los parámetros de visión para cada cámara mediante técnicas de estimación lineal (Hartley and Zisserman, 2003; González et al., 2019).

Una vez que se tiene un sistema sobredeterminado de ecuaciones lineales de la forma general $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \mathbf{e}$, donde $\mathbf{x}$ es el vector de los parámetros de visión a estimar, $\mathbf{A}$ es la matriz construida a partir de las coordenadas de los puntos 3D y 2D, $\mathbf{y}$ es el vector de observaciones (los términos u y v en la formulación anterior), y $\mathbf{e}$ es el vector de errores residuales. Este método se basa en el principio de mínimos cuadrados de Gauss, que busca encontrar el vector de parámetros estimado $\hat{\mathbf{x}}$ que minimice la suma de los cuadrados de los errores residuales. La función de costo a minimizar es:

$$\mathbf{J} = \mathbf{e}^T \mathbf{e} \quad (2.116)$$

Sustituyendo $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$, la función de costo se convierte en:

$$\mathbf{J} = (\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})^T(\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{y}^T\mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \quad (2.117)$$

Para minimizar $\mathbf{J}$, la condición necesaria es que la derivada de $\mathbf{J}$ con respecto a $\hat{\mathbf{x}}$ sea cero:

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = -2\mathbf{A}^T\mathbf{y} + 2\mathbf{A}^T\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = 0 \quad (2.118)$$

A partir de esta condición, se obtiene la solución para el valor óptimo de los parámetros (la estimación por mínimos cuadrados):

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y} \quad (2.119)$$

Esta solución asume que todas las mediciones (observaciones en $\mathbf{y}$) tienen la misma importancia o precisión. Sin embargo, en la práctica, algunas mediciones pueden ser más confiables que otras. Para manejar esto, se puede introducir una matriz de pesos $\mathbf{W}$, que es típicamente una matriz diagonal donde cada elemento diagonal w_i representa el peso o la confianza asignada a la i -ésima observación (Loredo et al., 2022). La matriz de pesos se define como:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_m \end{bmatrix} \quad (2.120)$$

donde m es el número total de ecuaciones (dos por cada punto de muestra). Cuando se incluye esta matriz de pesos, la función de costo se modifica a $\mathbf{J} = \mathbf{e}^T\mathbf{W}\mathbf{e}$, y la solución para la estimación por mínimos cuadrados ponderados es:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{y} \quad (2.121)$$

Mediante este procedimiento, se calculan los 11 parámetros de visión para cada cámara utilizada en el sistema CSM. Estos parámetros, una vez estimados, permiten al sistema relacionar las posiciones tridimensionales con las proyecciones en imagen, facilitando así las tareas de control del robot basadas en visión.

Dichas ventajas son particularmente interesantes en el problema que se abordará en este proyecto de investigación: control de robots paralelos redundantes, ya que se podría solventar la complejidad adicional de dichos robots con los sistemas visuales. Algunos trabajos reporta-

dos en la literatura, respecto al Robot Delta bajo este esquema de control, son (Shahidi et al., 2017), (Lopez et al., 2017) y más recientemente (Lopez-Lara et al., 2020b).

JACOBIANO DE IMAGEN

Consideremos (2.108) para un punto asociado al efector final del robot; al tomar su derivada temporal, se obtiene un mapeo que relaciona la velocidad tridimensional (m/s) del efector final y su velocidad asociada en el plano imagen (píxeles/s):

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

Nótese que este mapeo no es inyectivo. Añadiendo al menos otra cámara, se podría establecer el mapeo inyectivo.

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}^1 & p_{12}^1 & p_{13}^1 \\ p_{21}^1 & p_{22}^1 & p_{23}^1 \\ p_{11}^2 & p_{12}^2 & p_{13}^2 \\ p_{21}^2 & p_{22}^2 & p_{23}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

donde el superíndice identifica la cámara correspondiente. Este procedimiento puede expandirse para incluir cualquier número adicional de cámaras, pero por simplicidad, la deducción se realizó utilizando solo dos cámaras. La Ecuación (2.122) puede escribirse en forma compacta,

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}_{csm} \dot{\mathbf{x}}$$

donde $\dot{\mathbf{s}}$ es la derivada temporal de $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{bmatrix}^T$, $\dot{\mathbf{x}}$ es la derivada temporal de $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$, y $\mathbf{J}_{csm}$ es la matriz CSM de velocidad, definida como:

$$\mathbf{J}_{csm} = \begin{bmatrix} p_{11}^1 & p_{12}^1 & p_{13}^1 \\ p_{21}^1 & p_{22}^1 & p_{23}^1 \\ p_{11}^2 & p_{12}^2 & p_{13}^2 \\ p_{21}^2 & p_{22}^2 & p_{23}^2 \end{bmatrix}$$

En este trabajo de tesis se propondrán esquemas de control en donde la señal de control son velocidades de juntas que se basan en mediciones del encoders y, por otro lado, de mediciones de cámara. En el caso del control de visión se propondrá un esquema LMC-CSM en veloci-

dad que toma como fundamentos los desarrollos presentados en esta sección. Es importante resaltar que este tipo de esquemas no han sido implementados.

3

Modelado del robot delta reconfigurable y análisis de desempeño cinemático

En este capítulo se modela el robot Delta con reconfiguración geométrica; asimismo, se realiza un análisis de su desempeño cinemático. Como comentado en el capítulo anterior, el robot Delta reconfigurable es una arquitectura novedosa y su modelo geométrico y cinemático no ha sido reportado en la literatura. Tampoco se tiene un análisis cuantitativo que muestre la mejora en desempeño cinemático del robot reconfigurable con respecto a la versión original no reconfigurable.

Recordemos del capítulo 1 que, para un robot con reconfiguración geométrica, es posible variar uno o varios parámetros geométricos. Si dicho parámetro o parámetros pueden variar de forma automática durante la ejecución de tareas del robot, es posible interpretar al robot reconfigurable como uno redundante. En este contexto, los parámetros geométricos variables son también juntas activas del robot. Bajo estas consideraciones se derivan los modelos geométricos y cinemáticos directos, así como los algoritmos de solución para abordar el geométrico y cinemático inversos los cuales tienen infinitas soluciones.

Por otro lado, se realiza un análisis de desempeño del robot Delta con reconfiguración geométrica. Los aspectos evaluados incluyen el volumen máximo alcanzable, las singularidades,

la transmisibilidad de velocidades y fuerzas estáticas, la generación de velocidades y fuerzas estáticas, así como la isotropía del robot. Además, se presenta una comparativa con el desempeño del robo Delta no reconfigurable, lo que permite dimensionar la mejora en desempeño aportada por la capacidad de reconfiguración en el robot.

3.1. DESCRIPCIÓN DEL ROBOT DELTA RECONFIGURABLE

Consideremos el robot delta de la figura 3.1, el cual consta de dos plataformas, una fija y otra móvil, conectadas por tres cadenas cinemáticas simétricas (numeradas con el índice $i = 1, 2, 3$) y distribuidas uniformemente alrededor del eje vertical Z_0 de la plataforma fija del robot. En

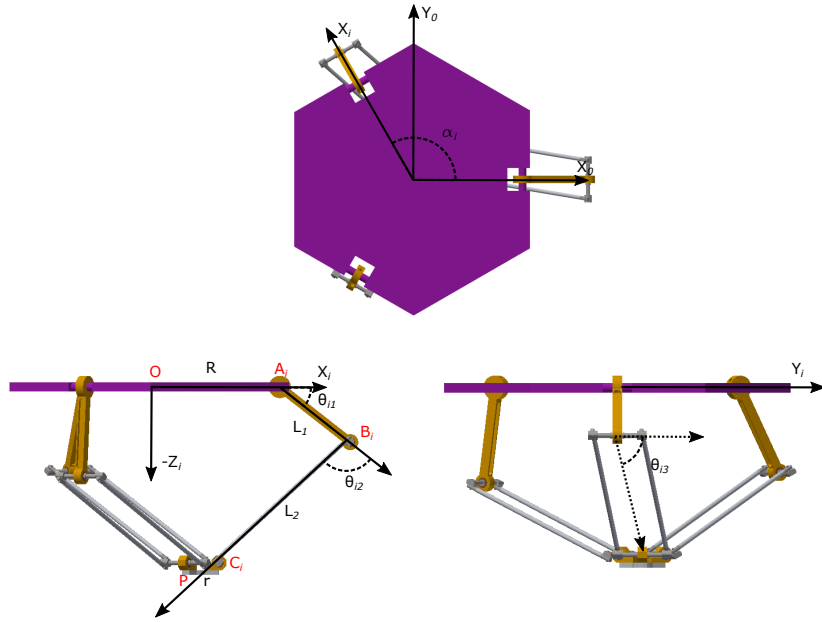


Figura 3.1: Cadenas cinemáticas del robot delta.

esta configuración típica, la plataforma fija se encuentra en la parte superior del mecanismo (elemento horizontal), y la plataforma móvil (es decir, la parte en la que se acopla el efector final) es un elemento horizontal pequeño situado en la parte inferior del mecanismo. Se tienen definidos cuatro marcos de referencia: el marco fijo del robot $\{X_0, Y_0, Z_0\}$ y tres marcos de referencia $\{X_i, Y_i, Z_i\}$ cada uno asociado a cada una de las cadenas cinemáticas. Los orígenes de todos los marcos así como los ejes Z son coincidentes, mientras que cada eje X_i apunta del centro de la plataforma fija hacia la primera junta de la i —ésima cadena cinemática. Los ejes X_i están colocados a ángulos constantes α_i con respecto a X_0 , uniformemente distribuidos alrededor del eje Z_0 . Las variables de las cadenas cinemáticas se expresan en los marcos de

referencia $\{X_i, Y_i, Z_i\}$. Cada cadena cinemática tiene dos eslabones; un extremo de la cadena cinemática está conectado a la plataforma fija, mediante el primer eslabón L_{i1} , a través de una junta rotacional accionada situada en el punto A_i con variable de junta actuada θ_{i1} . El otro extremo del primer eslabón está conectado con el segundo eslabón L_{i2} a través de una junta rotacional en el punto B_i y con una variable de junta pasiva θ_{i2} . El segundo eslabón está constituido por una estructura en forma de paralelogramo en donde cada uno de los vértices está conformado por una junta rotacional. Los ejes correspondientes a estas cuatro juntas pasivas son paralelos entre sí y perpendiculares al eje correspondiente a la junta anterior. El paralelogramo tiene asociada una variable de junta pasiva θ_{i3} como se muestra en la figura. El otro extremo del segundo eslabón se encuentra conectado con la plataforma móvil en el punto C_i mediante una junta rotacional.

Para propósitos del modelado del robot, el segundo eslabón puede representarse como un único cuerpo rígido de longitud L_{i2} , con juntas universales en sus dos extremos. La junta universal equivalente que une los eslabones 1 y 2 tendría asociados los ángulos pasivos θ_{i2} y θ_{i3} . El uso de articulaciones con una configuración de paralelogramo, junto con la arquitectura del robot, garantiza que la orientación de ambas plataformas es la misma en todo momento. En Clavel (1988) se introduce por primera vez este tipo de eslabón.

La distancia entre el origen O (centro) en la plataforma fija del robot y el punto A_i a lo largo del eje X_i es llamada el radio de la plataforma fija R . En el caso del robot Delta con reconfiguración geométrica, se introduce un mecanismo con un solo actuador con el cual es posible cambiar el valor de este parámetro durante la operación. En la Figura 3.2 se puede

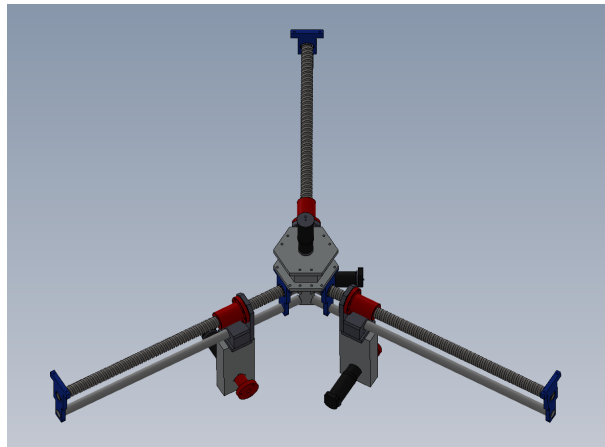


Figura 3.2: Mecanismo de reconfiguración del robot delta.

observar el mecanismo de reconfiguración geométrica. Cuando se incluye a este cuarto actuador dentro de las entradas de control del robot, el parámetro geométrico R se convierte en

una variable de junta activa. De esta forma la plataforma fija ahora se puede entender como un conjunto de tres juntas prismáticas actuadas sincronizadamente (de forma que el valor de la variable articular asociada es el mismo en todo momento para las tres juntas) que tienen el efecto de cambiar la posición del punto A_i a lo largo del eje X_i . Por construcción, el mecanismo de reconfiguración geométrica acopla la magnitud de R en cada una de las cadenas cinemáticas, garantizando que tienen siempre el mismo valor. Este mecanismo fue presentado en [Maya et al. \(2013\)](#) así como un análisis del efecto de la reconfiguración geométrica, para diferentes eslabones, en el espacio de trabajo y carga estática. En dicho artículo se evidencia la ventaja de la reconfiguración geométrica del parámetro R , esto es: ganancias significativas en el volumen del espacio de trabajo, ganancias en la capacidad de carga estática y su viabilidad de implementación. Sin embargo, en ese trabajo no se incluye un análisis detallado de desempeño cinemático del robot con la reconfiguración.

La distancia entre el centro de la plataforma móvil P y el punto C_i es llamado el radio de la plataforma móvil r . La longitud de los eslabones L_{i1} y L_{i2} en cada una de las cadenas cinemáticas son L_1 y L_2 respectivamente. El punto P es la posición en coordenadas cartesianas de la plataforma móvil respecto del marco de referencia en la plataforma fija.

Los siguientes puntos clave pueden definirse con respecto al marco de referencia fijo del robot:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} R \cos(\alpha_i) \\ R \sen(\alpha_i) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} (R + L_1 \cos(\theta_{i1})) \cos(\alpha_i) \\ (R + L_1 \cos(\theta_{i1})) \sen(\alpha_i) \\ -L_1 \sen(\theta_{i1}) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} P_x + r \cos(\alpha_i) \\ P_y + r \sen(\alpha_i) \\ P_z \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

3.2. MODELO GEOMÉTRICO DIRECTO

En esta sección se presenta el desarrollo del modelo geométrico directo, el cual nos permite obtener la posición de la plataforma móvil a partir de los valores de juntas activas. Para este desarrollo se siguen las mismas pautas que en [Maya et al. \(2013\)](#) pero considerando los aspectos relacionados con la reconfiguración de forma explícita.

Definimos el vector de juntas activas y el vector de coordenadas cartesianas de la plataforma móvil como:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} R \\ \theta_{11} \\ \theta_{21} \\ \theta_{31} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

y

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

respectivamente.

Nótese que R se incluye en el vector de variables de articulación porque el mecanismo de reconfiguración puede controlarla como una junta activa más. Sobre esta base, el robot reconfigurable se modela entonces como un robot paralelo con redundancia cinemática con tres variables de posición a controlar y cuatro entradas de control. Si bien el cambio en el valor de R tiene impacto en cada una de las cadenas cinemáticas, en el vector $\mathbf{q}$ solo aparece una vez debido a que las tres juntas prismáticas que conforman el mecanismo de reconfiguración geométrica están acopladas a un solo actuador de modo que las tres tienen el mismo valor.

Una forma común de resolver el problema geométrico directo para el robot delta es resolver la intersección de tres esferas centradas en puntos $\tilde{\mathbf{B}}_i$, definidos en (3.7), y radios L_2 .

$$\tilde{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ix} - r \cos(\alpha_i) \\ \mathbf{B}_{iy} - r \sin(\alpha_i) \\ \mathbf{B}_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R + L_1 \cos(\theta_{i1})) \cos(\alpha_i) - r \cos(\alpha_i) \\ (R + L_1 \cos(\theta_{i1})) \sin(\alpha_i) - r \sin(\alpha_i) \\ -L_1 \sin(\theta_{i1}) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Las esferas están asociadas al movimiento libre de los puntos C_i respecto a los puntos B_i . Hay que notar que dichas esferas no se intersecan en P , sin embargo, desplazando horizontalmente los centros de las esferas una distancia r hacia el eje fijo Z_0 , las esferas desplazadas se intersecan en $\mathbf{P}$. Con esto, definimos una esfera por cada cadena cinemática con centro $\tilde{\mathbf{B}}_i$, y la solución a la intersección de las tres esferas con el menor valor en el eje Z_0 será $\mathbf{P} = \mathbf{x}$,

que es la solución al problema de la cinemática directa. Esto puede representarse mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(\tilde{B}_{ix} - P_x)^2 + (\tilde{B}_{iy} - P_y)^2 + (\tilde{B}_{iz} - P_z)^2 = L_2^2 \quad (3.8)$$

Esta ecuación puede ser utilizada para resolver tanto el problema geométrico directo como el inverso. En el primer caso, damos por conocidos $\tilde{B}_{ix}$, $\tilde{B}_{iy}$ y $\tilde{B}_{iz}$ y buscamos obtener los valores de P_x , P_y y P_z . Conociendo los valores de las juntas es posible resolver para obtener la posición del efector final, ya sea en el caso con o sin reconfiguración ya que en ambos casos se conocen R y θ_{i1} . Para el problema geométrico inverso, los valores de P_x , P_y y P_z son dados y hay que calcular los valores de las juntas activas. Si tomamos en cuenta el término $(R + L_1 \cos(\theta_{i1}))$ presente tanto en $\tilde{B}_{ix}$ como en $\tilde{B}_{iy}$, su valor depende tanto de R como de θ_{i1} de modo que para un único valor del término, hay infinitas combinaciones de los valores de las juntas. Debido a esto último, es necesario diseñar un algoritmo que permita obtener una única combinación para los valores de las juntas activas. Esto se desarrolla en el siguiente sección.

3.3. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA GEOMÉTRICO INVERSO

En esta sección se presenta un algoritmo que permite abordar el problema geométrico inverso. Dicho problema consiste en obtener un vector de posiciones en las juntas a partir de un vector de posiciones cartesianas del efector final. Es importante recordar que, el robot Delta con reconfiguración geométrica objeto de estudio, es también un robot paralelo con redundancia cinemática. Debido a esto, existen infinitas soluciones al problema geométrico inverso para una posición dada del efector final. Por lo tanto, es necesario un algoritmo que, junto con un criterio de optimización, permita elegir una única solución de manera eficiente. La selección del criterio de optimización se abordará más adelante en este mismo capítulo.

El algoritmo propuesto se basa en la resolución de forma iterativa del modelo geométrico inverso del robot Delta considerando diferentes valores para el parámetro geométrico R . Los pasos de este algoritmo son los siguientes:

1. Resolver el problema geométrico inverso (3.8) para un valor especificado de R , asumiendo que se trata del robot Delta sin reconfiguración geométrica.
2. Evaluar el criterio de optimización seleccionado y compararlo con los valores obtenidos en iteraciones previas. Si el valor actual es mejor según el criterio escogido, entonces los

valores actuales de las articulaciones se consideran la solución hasta ese instante, de lo contrario se conservan los valores anteriores.

3. Repetir los dos pasos anteriores variando R de manera iterativa a lo largo de su rango de movimiento, es decir, de 136 mm a 500 mm para el robot utilizado en este trabajo.
4. Finalmente, al concluir todas las iteraciones, se selecciona la solución que optimiza el criterio especificado.

Si bien se puede utilizar cualquier criterio de optimización, es común utilizar medidas de desempeño basadas en la matriz Jacobiana. Como se presenta más adelante en este escrito, los resultados del modelo geométrico inverso se basan en la matriz Jacobiana. Este algoritmo presenta como ventaja su simplicidad de implementación y la garantía de encontrar la configuración que optimiza el criterio seleccionado aunque la función que describe el cambio del criterio de optimización respecto al cambio de R presente múltiples máximos o discontinuidades, esto último será de utilidad en el proceso de evaluar y seleccionar un criterio de optimización. Sin embargo, su principal desventaja es el alto costo computacional, lo que lo hace inadecuado para aplicaciones de control en tiempo real. Más adelante en este trabajo, se selecciona un criterio de optimización específico que guía la elección de la mejor solución.

3.4. MODELO CINEMÁTICO DIRECTO

En esta sección se presenta el desarrollo del modelo cinemático directo. Es decir, la obtención de un mapeo que relacione las velocidades de juntas con las velocidades resultantes en coordenadas cartesianas del efector final. Este modelado no ha sido presentado anteriormente en la literatura, ni es posible utilizar el modelo cinemático directo del robot Delta sin reconfiguración, como ocurría con el modelo geométrico.

Los vectores de velocidades se definen como:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{R} \\ \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{31} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

y

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{P}_z \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Basándose en la figura 3.1, se puede definir el siguiente sistema de restricciones geométricas en lazo cerrado para cada uno de los planos X_i - Z_i :

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC_i} = \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{A_iB_i} + \overrightarrow{B_iC_i} \quad (3.11)$$

que en componentes es

$$\begin{bmatrix} P_x \cos(\alpha_i) + P_y \sin(\alpha_i) \\ P_x \sin(\alpha_i) - P_y \cos(\alpha_i) \\ P_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + L_1 \begin{bmatrix} \cos(\theta_{i1}) \\ 0 \\ -\sin(\theta_{i1}) \end{bmatrix} + L_2 \begin{bmatrix} \sin(\theta_{i3}) \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \\ \cos(\theta_{i3}) \\ -\sin(\theta_{i3}) \sin(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

lo que a su vez puede ser reescrito como

$$\mathbf{x}_i + \mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{L}_{i1} + \mathbf{L}_{i2} \quad (3.13)$$

donde

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} P_x \cos(\alpha_i) + P_y \sin(\alpha_i) \\ P_x \sin(\alpha_i) - P_y \cos(\alpha_i) \\ P_z \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_{i1} = L_1 \begin{bmatrix} \cos(\theta_{i1}) \\ 0 \\ -\sin(\theta_{i1}) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}_{i2} = L_2 \begin{bmatrix} \sin(\theta_{i3}) \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \\ \cos(\theta_{i3}) \\ -\sin(\theta_{i3}) \sin(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \end{bmatrix}$$

Derivando la ecuación anterior con respecto al tiempo da:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{L}}_{i1} + \dot{\mathbf{L}}_{i2} \quad (3.14)$$

Para el robot reconfigurable, la derivada de R es en general distinta de cero, mientras que en el caso del robot sin reconfiguración, la derivada de R es cero. Obsérvese que los eslabones sólo pueden moverse alrededor de un pivote; por lo tanto, podemos expresar la ecuación anterior en la forma siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{w}_{L_{i1}} \times \mathbf{L}_{i1} + \mathbf{w}_{L_{i2}} \times \mathbf{L}_{i2} \quad (3.15)$$

En donde $\mathbf{w}_{L_{i2}}(\dot{\theta}_{i2}, \dot{\theta}_{i3})$ es el vector de velocidad angular asociado a la junta L_{i2} y $\mathbf{w}_{L_{i1}}(\dot{\theta}_{i1})$ es el vector de velocidad angular de la junta L_{i1} y dado por $\mathbf{w}_{L_{i1}} = [0, \dot{\theta}_{i1}, 0]^T$.

Es posible simplificar la ecuación anterior para obtener una expresión que dependa sólo de las velocidades articulares de las juntas actuadas. Para ello, es conveniente expresarla en un

sistema de referencia situado en B_i , lo que se logra multiplicando la ecuación anterior por el vector unitario $\hat{\mathbf{L}}_{i2}$ (en la dirección de $\mathbf{L}_{i2}$) con lo que el último término de la derecha se hace cero

$$\hat{\mathbf{L}}_{i2} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{L}}_{i2} \cdot \dot{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{L}}_{i2} \cdot (\mathbf{w}_{L_{i1}} \times \mathbf{L}_{i1}). \quad (3.16)$$

Calculando el lado izquierdo de la ecuación anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}}_{i2} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i &= [\text{sen } \theta_{i3} \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2})] [\dot{P}_x \cos \alpha_i + \dot{P}_y \text{sen } \alpha_i] \\ &+ \cos \theta_{i3} [\dot{P}_x \text{sen } \alpha_i - \dot{P}_y \cos \alpha_i] - [\text{sen } \theta_{i3} \text{sen}(\theta_{i1} + \theta_{i2})] \dot{P}_z \\ &= a_{ix} \dot{P}_x + a_{iy} \dot{P}_y + a_{iz} \dot{P}_z \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde

$$\begin{aligned} a_{ix} &= \text{sen } \theta_{i3} \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \cos \alpha_i + \cos \theta_{i3} \text{sen } \alpha_i \\ a_{iy} &= \text{sen } \theta_{i3} \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \text{sen } \alpha_i - \cos \theta_{i3} \cos \alpha_i \\ a_{iz} &= -\text{sen } \theta_{i3} \text{sen}(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \end{aligned}$$

Desarrollando el lado derecho de la ecuación (3.16), se obtiene

$$\hat{\mathbf{L}}_{i2} \cdot \dot{\mathbf{R}} = \dot{R} \text{sen } \theta_{i3} \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2})$$

y

$$\hat{\mathbf{L}}_{i2} \cdot (\mathbf{w}_{L_{i1}} \times \mathbf{L}_{i1}) = L_1 \text{sen } \theta_{i2} \text{sen } \theta_{i3} \dot{\theta}_{i1}$$

de tal forma que

$$\hat{\mathbf{L}}_{i2} \cdot \dot{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{L}}_{i2} \cdot (\mathbf{w}_{L_{i1}} \times \mathbf{L}_{i1}) = \text{sen } \theta_{i3} \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \dot{R} + L_1 \text{sen } \theta_{i2} \text{sen } \theta_{i3} \dot{\theta}_{i1} \quad (3.18)$$

Igualando las ecuaciones (3.17) y (3.18) y desarrollando los componentes para cada i tenemos

$$\begin{aligned} a_{1x} \dot{P}_x + a_{1y} \dot{P}_y + a_{1z} \dot{P}_z &= \text{sen } \theta_{13} \cos(\theta_{11} + \theta_{12}) \dot{R} + L_1 \text{sen } \theta_{12} \text{sen } \theta_{13} \dot{\theta}_{11} \\ a_{2x} \dot{P}_x + a_{2y} \dot{P}_y + a_{2z} \dot{P}_z &= \text{sen } \theta_{23} \cos(\theta_{21} + \theta_{22}) \dot{R} + L_1 \text{sen } \theta_{22} \text{sen } \theta_{23} \dot{\theta}_{21} \\ a_{3x} \dot{P}_x + a_{3y} \dot{P}_y + a_{3z} \dot{P}_z &= \text{sen } \theta_{33} \cos(\theta_{31} + \theta_{32}) \dot{R} + L_1 \text{sen } \theta_{32} \text{sen } \theta_{33} \dot{\theta}_{31} \end{aligned}$$

que puede reescribirse en forma matricial como

$$J_x \dot{\mathbf{x}} = J_q \dot{\mathbf{q}} \quad (3.19)$$

donde

$$J_x = \begin{bmatrix} a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} \\ a_{3x} & a_{3y} & a_{3z} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

y

$$J_q = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & b_{23} & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 & b_{34} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

con

$$b_{i1} = \text{sen } \theta_{i3} \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2})$$

$$b_{i,i+1} = L_1 \text{sen } \theta_{i2} \text{sen } \theta_{i3},$$

son matrices Jacobianas. Cuando el robot no se reconfigura, estas Jacobianas son ambas cuadradas de dimensión 3×3 . Cuando se considera la reconfiguración, la nueva variable de articulación R se refleja en la Jacobiana J_q y genera una matriz no cuadrada de dimensión 4×3 mientras que la matriz J_x no se ve afectada y sigue siendo de dimensión 3×3 .

El siguiente modelo cinemático directo se obtiene a partir de la ecuación (3.19):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.22)$$

donde $\mathbf{J} = J_x^{-1} J_q$ es la matriz Jacobiana del robot. Esta ecuación relaciona el vector de velocidades en las juntas activas de dimensión 4×1 y el vector de velocidades en el efector final de dimensión 3×1 mediante la matriz Jacobiana 3×4 . El cálculo de $\dot{\mathbf{x}}$ dado $\dot{\mathbf{q}}$, y por tanto la solución del problema cinemático directo, es directo utilizando esta ecuación. En el caso del problema cinemático, al tener una matriz rectangular, no hay un único vector $\dot{\mathbf{q}}$ para un vector $\dot{\mathbf{x}}$ dado por lo cual es necesario un algoritmo que nos permita obtener una solución única.

Algo importante a tomar en cuenta es que esta matriz Jacobiana depende tanto de las juntas activas y pasivas las cuales pueden ser calculadas a partir de las juntas activas. Si bien es común usar matrices Jacobianas que dependen de las juntas y de la posición del efector final, utilizar la versión con juntas pasivas facilita la interpretación de reconfigurables durante el respectivo análisis.

3.5. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CINEMÁTICA INVERSA

En esta sección se presenta un algoritmo que permite abordar el problema cinemático inverso. Dicho problema consiste en obtener un vector de velocidades en las juntas a partir de un vector de velocidades cartesianas del efector final. Es importante recordar que, el robots Delta con reconfiguración geométrica objeto de estudio, es también un robot paralelo con redundancia cinemática. Debido a esto, existen infinitas soluciones al problema cinemático inverso para un vector de velocidades dada del efector final. Por lo tanto, es necesario un algoritmo que, junto con un criterio de optimización, permita elegir una única solución de manera eficiente. La selección del criterio de optimización se abordará más adelante en este mismo capítulo. Una de las formas más comunes de seleccionar una solución única es mediante el uso de la pseudoinversa de Moore-Penrose, el cual consiste en resolver el problema de mínimos cuadrados para un sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$, para resolver la tarea principal que es la cinemática inversa y la introducción de una tarea secundaria que minimice un criterio de optimización, lo cual permite optimizar aspectos adicionales del sistema sin afectar la tarea principal. Una solución comúnmente utilizada es la siguiente [Gosselin and Schreiber \(2018\)](#):

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger \dot{\mathbf{x}} - \gamma (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.23)$$

donde $\mathbf{J}^\dagger$ es la pseudoinversa de Moore-Penrose de $\mathbf{J}$, μ es un criterio de optimización que debe minimizarse para realizar una segunda tarea, y la matriz $\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}$ mapea al espacio nulo de $\mathbf{J}$. El parámetro γ ajusta la importancia relativa de la tarea secundaria respecto a la tarea principal.

Un ejemplo de tal tarea secundaria es la minimización de la siguiente función de costo:

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i - q_i^{mid}}{q_i^{max} - q_i^{min}} \right)^2 \quad (3.24)$$

donde q_i^{mid} es el valor medio que puede alcanzar la i -ésima junta activa entre q_i^{max} y q_i^{min} , que son los valores máximo y mínimo que puede alcanzar la i -ésima junta activa. Esta función de costo mantiene el movimiento de las articulaciones en el centro de su rango articular y lo aleja de sus límites, garantizando así la seguridad de las operaciones. El gradiente de (3.24) se calcula como:

$$\frac{\delta \mu}{\delta \mathbf{q}} = \frac{q_i - q_i^{mid}}{(q_i^{max} - q_i^{min})^2} \quad (3.25)$$

Esta solución para la cinemática inversa, junto con diferentes tareas secundarias, se emplea

en las leyes de control que se definirán en un capítulo posterior.

3.6. SINGULARIDADES

En esta sección, presentamos un análisis de las singularidades del robot reconfigurable, basadas en las matrices Jacobianas $\mathbf{J}_x$ y $\mathbf{J}_q$ obtenidos en la sección 3.4. La matriz $\mathbf{J}_x$ del robot con reconfiguración geométrica es la misma que la del robot sin reconfiguración. Esto implica que, a priori, las configuraciones singulares son las mismas. Sin embargo, la reconfiguración introduce diferencias importantes como se describe a continuación.

- Singularidad 1: $\theta_{i3} = \pi/2$ y $\theta_{i1} + \theta_{i2} = \pi$ para todas las cadenas cinemáticas simultáneamente. Bajo esta configuración singular, los tres eslabones L_2 son coplanares a las plataformas y la plataforma móvil pierde la capacidad de desplazarse instantáneamente en el eje vertical. En otras palabras, el efector final pierde 1 de sus 3 GDL. Esta configuración es alcanzable con valores $R > 0.265\text{ m}$ ya que se requiere que se satisfaga la siguiente restricción geométrica $R + L_1 > r + L_2$. Esta configuración singular es alcanzable cuando se satisface $R + L_1 * \cos(\theta_{i1}) = r + L_2$, lo que implica $\theta_{i1} = \arccos(\frac{0.465-R}{0.200})$. Es decir, para un valor dado de $R > 0.265\text{ m}$ existe un conjunto de ángulos θ_{i1} que produce esta singularidad. En otras palabras, cuando R es reconfigurable y dada una posición deseada $\mathbf{x}$ del órgano terminal, existe una configuración singular; pero también existen infinitas configuraciones no singulares. *En términos prácticos, un robot sin reconfiguración puede diseñarse para evitar esta singularidad mientras que la reconfiguración permite alcanzarla pero a la vez proporciona los medios para evitarla.*
- Singularidad 2: $\theta_{i3} = \pi/2$ y $\theta_{i1} + \theta_{i2} = \pi/2$ para todas las cadenas cinemáticas simultáneamente. Bajo esta configuración singular, los tres eslabones L_2 son simultáneamente perpendiculares al plano de la plataforma fija. Esta configuración hace que la plataforma móvil pierda la capacidad de desplazarse instantáneamente en el plano horizontal; esto es, se pierden 2 de los 3 GDL de la plataforma. Esta condición se satisfará cuando $R \leq 0.265$ con un conjunto de ángulos $\theta_{i1} = \arccos(\frac{0.065-R}{0.200})$. En el caso del robot no reconfigurable, esta singularidad representa una configuración aislada (la plataforma móvil se localiza en un punto sobre el eje Z_0) y es evitable pues existen otras configuraciones no singulares que producen la misma posición de la plataforma móvil. En el caso de un robot reconfigurable, existe un continuo de configuraciones singulares (mientras la plataforma móvil se desplaza sobre el eje Z_0) pero también son singularidades evitables.

Existe un caso particular de esta singularidad cuando $R = r$, en cuyo caso las 3 cadenas cinemáticas están completamente extendidas y verticales. En esa configuración la plataforma móvil pierde la capacidad de moverse instantáneamente en cualquier dirección, es decir, se pierden los 3 GDL y en este caso la reconfiguración no proporciona otras configuraciones que conserven la posición y eviten la singularidad. Sin embargo, es importante mencionar que esta configuración corresponde a un punto en la frontera del espacio de trabajo por lo que, para evitar la singularidad, es suficiente con evitar acercarse a la frontera del espacio de trabajo, lo cual es una práctica básica en cualquier aplicación.

En resumen, mientras que las configuraciones singulares asociadas con la matriz Jacobiana $\mathbf{J}_x$ no cambian, la reconfiguración introduce una diferencia significativa ya que R es una junta activa. En términos prácticos, podemos decir que dado un vector $\mathbf{x}$, asociado con las condiciones recién descritas, podemos emparejarlo con un vector de juntas activas generando una configuración singular dependiendo de la solución al problema geométrico inversos.

Ahora consideremos la matriz $\mathbf{J}_q$. Para el robot sin reconfiguración, se encuentra una configuración singular cuando al menos una $\theta_{i2} = 0$. Esta configuración implica que, en la cadena cinemática en cuestión, el eslabón L_1 está en el mismo plano del paralelogramo de su correspondiente eslabón L_2 . En esta configuración, la junta actuada correspondiente a esa cadena pierde la capacidad de inducir un movimiento (o fuerza) instantáneo sobre la plataforma móvil. O, en otras palabras, el efector final pierde la capacidad de moverse instantáneamente en la dirección del eslabón L_2 de dicha cadena. Para el robot con reconfiguración, esta misma singularidad tiene condiciones adicionales, que son:

- Singularidad 3: $\theta_{i2} = 0$ y $\theta_{i1} = \pi/2$ para una o más cadenas cinemáticas. Las cadenas que se encuentren en esta condición están sobre un plano vertical coincidente con el plano de su paralelogramo L_2 .
 1. Cuando solamente una cadena presenta esta configuración, la plataforma móvil pierde la capacidad de moverse instantáneamente en la dirección de su eslabón equivalente L_2 . Es decir, se pierde 1 GDL en el movimiento del efector final.
 2. Si dos cadenas se encuentran en esta configuración, la combinación de las limitaciones de movimiento en cada cadena equivalen a la imposibilidad de generar movimiento en el efector final sobre el plano formado por los eslabones equivalentes L_2 de las cadenas involucradas. Es, decir, se pierden 2 GDL en el movimiento del efector final.

3. Para que las 3 cadenas cinemáticas presenten esta condición simultáneamente, se tiene que cumplir que $R = r$ y las tres cadenas estarían completamente extendidas, verticales y esta configuración coincidiría con el caso particular de la singularidad 2.

Es conveniente notar que estas configuraciones corresponden con posiciones del efector final que se ubican en la frontera del espacio de trabajo por lo que, como mencionado anteriormente, es suficiente con evitar acercarse a la frontera del espacio de trabajo para evitar este tipo de singularidad. En cualquier aplicación real, es una práctica básica el no realizar trayectorias que acerquen al órgano terminal a la frontera del espacio de trabajo del robot o que al hacerlo, el robot evidentemente perderá completamente la capacidad de seguir trayectorias fuera de su espacio.

- Singularidad 4: $\theta_{i2} = 0$ para dos cadenas cinemáticas. En este caso, las dos cadenas que cumplen esta condición están simultáneamente sobre un plano coincidente con el plano de su paralelogramo L_2 (ya no necesariamente vertical). En consecuencia, la plataforma móvil no se puede mover en el plano formado por los dos eslabones L_1 y solamente se puede mover instantáneamente en una dirección perpendicular a dicho plano. Entonces, en esta singularidad, se pierden 2 de los 3 GDL de la plataforma móvil. Esta singularidad (cuando evidentemente no coincide con la anterior) es evitable a través de la reconfiguración pues existe un continuo de configuraciones que proporcionan la misma posición del efector final.

Las singularidades encontradas para el robot reconfigurable incluyen las ya conocidas para el robot delta sin reconfiguración; más aún, el conjunto de singularidades en el caso reconfigurable se vuelve infinito. Por otro lado, la propia reconfiguración permite evitar esas configuraciones singulares al tener en general infinitas configuraciones (no singulares) que producen la misma posición del órgano terminal. Por lo tanto, al diseñar un control del robot reconfigurable, es necesario incorporar una forma de evitar las singularidades de forma automática lo que hace más complejo el diseño.

3.7. METODOLOGÍA PARA ANALIZAR EL VOLUMEN DEL ESPACIO DE TRABAJO

En esta sección se presentan las metodologías y estrategias que permiten analizar y comparar las características cinemáticas del robot con y sin reconfiguración geométrica, con el objetivo de determinar el efecto de la reconfiguración.

Es importante señalar que el análisis de características cinemáticas suele ser local, es decir, relativo a una configuración específica $\{\mathbf{x}, \mathbf{q}\}$. Los aspectos que se evaluarán bajo esta perspectiva incluyen las configuraciones singulares y los índices de desempeño basados en la matriz Jacobiana. Sin embargo, es posible extender esta información a una noción global de las características cinemáticas mediante criterios locales. En el caso de las configuraciones singulares, se obtiene un criterio global al definir un espacio de trabajo libre de singularidades. Para los índices de desempeño, los datos locales pueden interpretarse globalmente a través de herramientas como la integración de un índice a lo largo del espacio de trabajo .

Decimos que un espacio de trabajo es libre de singularidades si, para cada coordenada $\mathbf{x}$ que lo compone, existe una coordenada $\mathbf{q}$, producto de la cinemática inversa, tal que la configuración $\{\mathbf{x}, \mathbf{q}\}$ no es singular. Dado que el robot Delta con reconfiguración geométrica posee redundancia cinemática, la configuración $\{\mathbf{x}, \mathbf{q}\}$ obtenida para una coordenada $\mathbf{x}$ depende del criterio de optimización utilizado para resolver el problema geométrico inverso.

Otro aspecto que se analizará es el volumen del espacio de trabajo, considerando en particular dos tipos de volúmenes: el volumen máximo alcanzable y el volumen libre de singularidades. Este último es especialmente relevante, ya que en aplicaciones prácticas el robot realiza sus tareas dentro del espacio de trabajo libre de singularidades.

Para analizar el espacio de trabajo, se parte de un volumen discretizado sobre el cual se evalúan cada una de las coordenadas $\mathbf{x}$. La siguiente sección describe cómo se discretiza el espacio de trabajo del robot.

3.7.1. DISCRETIZACIÓN DEL ESPACIO DE TRABAJO

Se define una malla tridimensional en forma de prisma rectangular recto, donde cada punto está separado uniformemente por una distancia de 0.002 m en las tres direcciones. Cada punto de la malla corresponde a una coordenada $\mathbf{x}$. El prisma ocupa un volumen dado por $\mathbf{x} = \{x, y, z \mid x \in [-0.400, 0.400], y \in [-0.400, 0.400], z \in [-0.002, -0.600]\}$, lo cual permite cubrir completamente el espacio de trabajo del robot.

Para determinar qué puntos de la malla corresponden al máximo volumen alcanzable, se resuelve el problema geométrico inversos para cada punto. Si existe una solución para un punto dado, entonces este se considera parte del máximo volumen alcanzable. El conjunto de todos los puntos que cumplen esta condición constituye el volumen máximo alcanzable.

Para el espacio de trabajo libre de singularidades, se siguen los mismos pasos que para el máximo volumen alcanzable, evaluando además si la configuración $\{\mathbf{x}, \mathbf{q}\}$ asociada a cada punto es singular. Para determinar la singularidad de una configuración, se calculan σ_{min}^v y

σ_{min}^f . Si alguno de estos índices tiene un valor inferior a 0.01, se considera que la configuración es singular. Este criterio se aborda con mayor detalle en la siguiente sección. El conjunto de todos los puntos no singulares conforma el espacio de trabajo libre de singularidades.

Para calcular la dimensión del volumen máximo alcanzable, se determina la relación entre el número de puntos de la malla que definen el prisma y el número de puntos que constituyen el volumen alcanzable. Multiplicando esta relación por el volumen total del prisma, se obtiene un volumen de $0.137 m^3$ para el robot con reconfiguración geométrica y $0.075 m^3$ para el caso sin reconfiguración, lo cual representa un incremento del 82 % gracias a la reconfiguración.

La Figura 3.7a muestra el espacio de trabajo del robot reconfigurable, mientras que la Figura 3.7b presenta el caso sin reconfiguración. En estas imágenes, se observa cómo el robot reconfigurable gana volumen en todas las direcciones, especialmente en la parte superior del espacio de trabajo.

Finalmente, para determinar el espacio de trabajo libre de singularidades es necesario establecer un criterio de optimización adecuado para resolver el problema geométrico inverso. En la siguiente sección se evaluarán los índices de desempeño basados en la matriz Jacobiana como posibles criterios de optimización.

3.8. SELECCIÓN DEL CRITERIO DE OPTIMIZACIÓN PARA LA RESOLUCIÓN DE REDUNDANCIA CINEMÁTICA

Debido a que el desempeño cinemático del robot Delta con reconfiguración geométrica depende del criterio de optimización para resolver el problema geométrico y cinemáticos inversos cinemática, es importante determinar qué criterios de optimización son adecuados. Uno de los aspectos más relevantes en el desempeño cinemático de un robot son las configuraciones singulares y es por eso que se selecciona este aspecto como referente para evaluar si un criterio en particular es adecuado o no para el caso de estudio particular. Si al resolver el problema geométrico y cinemático inverso, el criterio evaluado conduce a configuraciones singulares o configuraciones cercanas a singularidades, dicho criterio se considera como no válido. Los índices de desempeño basados en la matriz Jacobiana son comúnmente utilizados como criterio de optimización y serán estos índices los cuales son evaluados. En particular se evalúan ω^f , σ_{min}^v , σ_{min}^f y $1/k$.

Tomemos en consideración que hay aspectos del desempeño cinemático que corresponden a una configuración $\{\mathbf{q}, \mathbf{x}\}$ particular. Dada una coordenada $\mathbf{x}$, se puede obtener una coordenada $\mathbf{q}$ como solución del problema geométrico inverso. Qué coordenada $\mathbf{q}$, y, por tanto, que

configuración $\{\mathbf{q}, \mathbf{x}\}$, particular es obtenido depende del criterio de optimización utilizado. De esto se puede concluir que hay aspectos del desempeño cinemático de un robot paralelo con redundancia cinemática que dependen del criterio de optimización utilizado al resolver el problema geométrico inverso dada una coordenada $\mathbf{x}$.

3.8.1. EVALUACIÓN DE ÍNDICES BASADOS EN LA MATRIZ JACOBIANA COMO CRITERIO DE OPTIMIZACIÓN

En esta sección se determinará el criterio de optimización que será utilizado para resolver el problema geométrico y cinemático inversos. Esto es necesario, ya que, dependiendo del criterio seleccionado, se obtendrán diferentes características cinemáticas en el robot. Para seleccionar el criterio de optimización adecuado, realizaremos una evaluación de los índices de desempeño (ω^v , ω^f , σ_{min}^v , σ_{min}^f y $1/k$) basados en la matriz Jacobiana. Estos índices suelen utilizarse comúnmente como medidas de rendimiento y como criterios de optimización en el problema geométrico y cinemático inversos y en etapas de diseño.

El aspecto cinemático que se analizará durante la evaluación será la cercanía a configuraciones singulares. Este enfoque se selecciona con base en las observaciones presentadas en la sección de análisis de singularidades, es decir, la reconfiguración geométrica habilita a un parámetro geométrico del robot como junta activa y las configuraciones singulares dependen de los parámetros geométricos. Por lo tanto, al resolver el problema geométrico y cinemático inversos, la configuración obtenida puede o no ser singular, dependiendo del criterio de optimización utilizado.

Para evaluar la validez de cada índice de desempeño, se determinará si existen coordenadas $\mathbf{x}$ para las cuales optimizar un índice específico conduce a una configuración singular. Para realizar este análisis, se toma un conjunto de vectores $\mathbf{x}$ como muestra representativa del espacio de trabajo, y se resuelve el problema geométrico inverso para cada uno de estos vectores utilizando el índice en cuestión como criterio de optimización. Posteriormente se exploran los resultados para determinar si se obtienen configuraciones singulares. A continuación se presentan algunos casos representativos en los que se encuentran configuraciones singulares:

Ejemplo 1: La configuración obtenida para la coordenada $\mathbf{x} = (0.000, 0.000, -0.200)$ y optimizando ω^v es $\{\mathbf{x} = (0.000, 0.000, -0.200), \mathbf{q} = (0.465, 90.000, 90.000, 90.000)\}$. Si tomamos en cuenta las condiciones para que haya configuraciones singulares presentadas en la sección 3.6, tenemos que para los valores de $R > 265$ se tiene que satisfacer que $\theta_{i1} = \arccos(\frac{0.465-R}{0.200})$. Esto implica que si $R = 465$ y $\theta_{i1} = 90$ estamos en una configuración singular. En la Figura 3.3 La Figura 2.3 ilustra gráficamente esta problemática, mostrando la va-

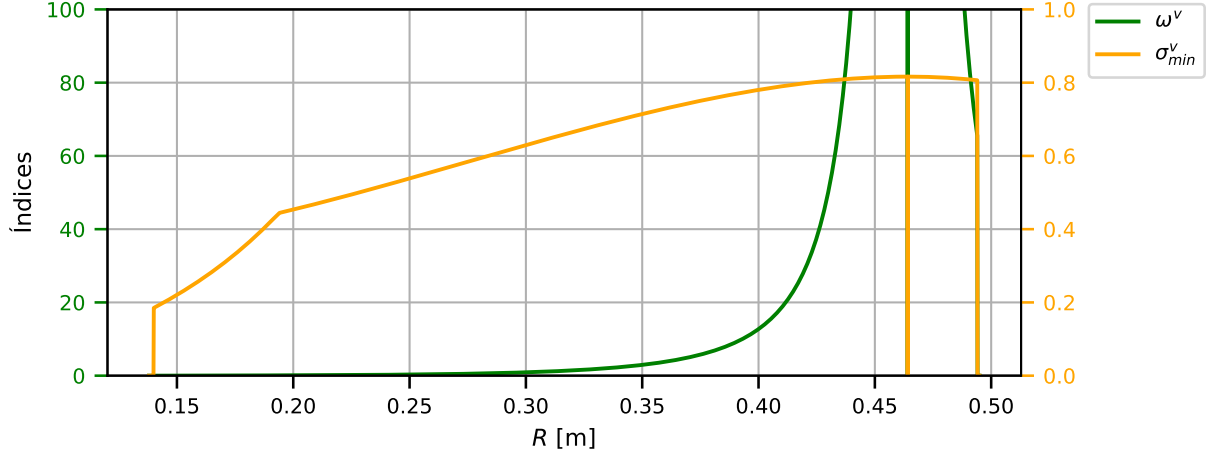


Figura 3.3: Gráfica de la variación de los índices ω^v y σ_{min}^v conforme varía el parámetro geométrico R al resolver el problema geométrico inversos.

riación de los índices de desempeño ω^v (manipulabilidad de velocidad) y σ_{min}^v (mínimo valor singular de velocidad) para la coordenada Cartesiana $x = (0.000, 0.000, -0.200)$ m (TesisPrincipal, p. 64), conforme se varía el parámetro de reconfiguración geométrica R (representado en el eje X, con valores de aproximadamente 0.13 m a 0.5 m) al resolver el problema de redundancia cinemática. En esta figura, el eje Y izquierdo (escala 0-100) corresponde al índice ω^v (línea verde), mientras que el eje Y derecho (escala 0.0-1.0) representa al índice σ_{min}^v (línea naranja).

Se observa que el índice ω^v , que idealmente indica una buena capacidad de transmisión de velocidades, presenta valores bajos para R pequeños, pero experimenta un incremento extremadamente pronunciado conforme R se aproxima a 0.465 m. De hecho, para $R = 0.4649$ m lo que es un paso anterior para llegar al valor de $R = 0.465$, la Tabla 2.1 indica un valor de $\omega^v = 6.1584 \times 10^8$, lo cual es un claro indicativo de cercanía a una configuración singular o de un sistema mal condicionado. Por su parte, el índice σ_{min}^v , que refleja la mínima capacidad de movimiento del efector final, también muestra un comportamiento crítico en esta misma región. Aunque la Tabla 2.1 reporta $\sigma_{min}^v = 0.81648$ para la configuración específica que maximiza ω^v con $R = 0.4649$ m, es fundamental notar que la condición geométrica de singularidad $\theta_{i1} = 90^\circ$ alcanzada con este valor de R implica que el robot pierde efectivamente grados de libertad, lo que se manifiesta como una incapacidad de generar velocidades en ciertas direcciones, llevando σ_{min}^v a anularse bajo esta condición geométrica específica de singularidad, incluso si la tabla muestra un valor puntual alto proveniente de una optimización diferente.

La condición de singularidad del Ejemplo 1, asociada con $R = 0.465$ m y $\theta_{i1} = 90^\circ$, se ve así corroborada tanto por el crecimiento rápido de ω^v como por la anulación efectiva de

ω^v	ω^f	σ_{min}^v	σ_{min}^f	$1/k$
6.1584×10^8	1.6237×10^{-9}	8.1648×10^{-1}	1.0825×10^{-9}	8.8388×10^{-10}

Tabla 3.1: Mediciones de los índices de desempeño para la configuración $\{\mathbf{x} = (0.000, 0.000, -0.200), \mathbf{q} = (0.4649, 90.000, 90.000, 90.000)\}$

σ_{min}^v bajo dicha condición geométrica singular. La maximización de ω^v lleva al sistema a esta configuración singular, y la consideración de σ_{min}^v bajo la misma condición geométrica crítica confirma la pérdida de movilidad. Por lo tanto, la optimización de cualquiera de estos dos índices, buscando sus valores máximos para esta coordenada x , conduce al robot a operar en o muy cerca de una singularidad. Este escenario confirma que resolver el problema geométrico inverso optimizando ciegamente ω^v o σ_{min}^v puede resultar en la selección de configuraciones singulares, justificando la necesidad de criterios de optimización más robustos como el que se propondrá posteriormente. En la Tabla 3.1 se presentan los valores de los índices de desempeño para una configuración muy cercana a la obtenida. De los datos se puede observar cómo al maximizar un índice asociado a la velocidad, se minimiza su contraparte en fuerza estática.

Ejemplo 2:

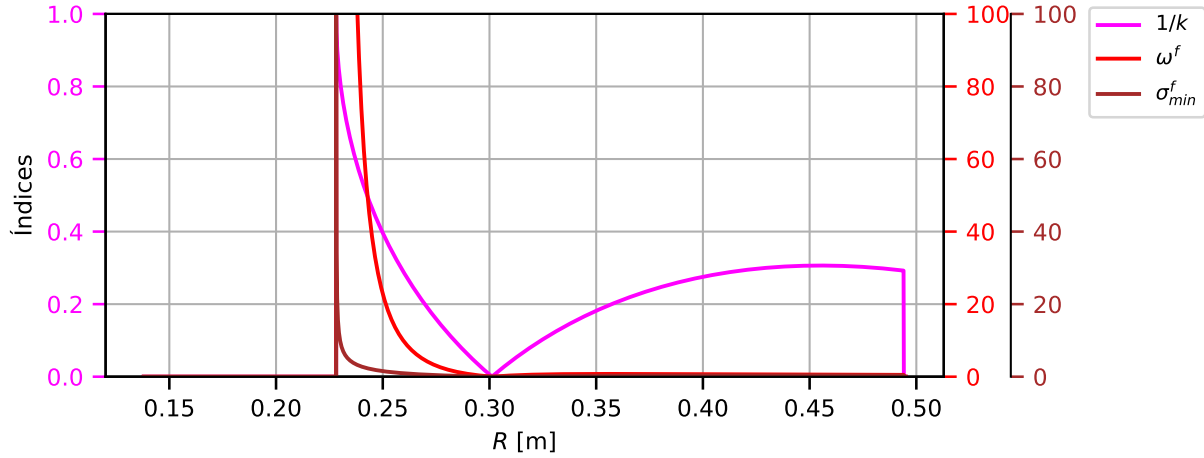


Figura 3.4: Gráfica de la variación de los índices ω^f , σ_{min}^f y $1/k$ conforme varía el parámetro geométrico R al resolver el problema geométrico inversos.

Consideremos ahora la coordenada $x = (0.000, 0.000, -0.116)$ m a partir de la cual, al maximizar el índice de manipulabilidad de fuerza ω^f , se obtiene la configuración: $\{x = (0.000, 0.000, -0.1153)$ m, $q = (0.22842$ m, $-35.0297^\circ, -35.0297^\circ, -35.0297^\circ)\}$. Al analizar esta configuración, se encuentra que las tres juntas pasivas θ_{i2} adoptan un valor de 179.9° , lo cual es extremadamente cercano a la condición de singularidad de 180° .

La Figura 2.4 presenta gráficamente la variación de los índices ω^f (manipulabilidad de

fuerza), $\sigma_{\min}^f$ (mínimo valor singular de fuerza) y $1/k$ (recíproco del número de condición) para esta coordenada x mientras se modifica el parámetro de reconfiguración R (eje X, variando aproximadamente de 0.12 m a 0.5 m). El eje Y izquierdo (escala 0.0-1.0) corresponde a $1/k$ (línea púrpura), mientras que el eje Y derecho (escala 0-100) es compartido por ω^f (línea roja) y $\sigma_{\min}^f$ (línea marrón).

Se observa en la Figura 2.4 que los índices ω^f y $\sigma_{\min}^f$ alcanzan sus valores máximos (consistentes con $\omega^f = 2.8116 \times 10^8$ y $\sigma_{\min}^f = 6.5274 \times 10^2$ de la Tabla 2.2, nueva versión) precisamente en $R \approx 0.22842$ m. Este valor de R representa un límite inferior del rango factible para alcanzar la coordenada x dada; para valores menores de R , no existe solución al problema geométrico inverso. Inmediatamente después de este punto, ambos índices (ω^f y $\sigma_{\min}^f$) caen drásticamente hacia cero, indicando una rápida pérdida de la capacidad de transmisión y generación de fuerza.

Respecto al índice $1/k$, este también exhibe un valor muy alto (cercano a 1, específicamente 0.9946 según la Tabla 2.2) en $R \approx 0.22842$ m, lo que tradicionalmente sugeriría un excelente condicionamiento numérico (isotropía). Sin embargo, este "óptimo" condicionamiento ocurre exactamente en la configuración geoméricamente singular identificada ($\theta_{i2} \approx 180^\circ$). A medida que R aumenta ligeramente, $1/k$ cae de forma abrupta a un valor cercano a cero (alrededor de $R = 0.3$ m), indicando un severo mal condicionamiento, para luego recuperarse parcialmente.

El punto crucial a resaltar aquí es la aparente contradicción: la maximización de los índices de desempeño tradicionalmente asociados con una buena capacidad de fuerza (ω^f , $\sigma_{\min}^f$) y un buen condicionamiento ($1/k$) conduce al sistema a una configuración que es, de hecho, singular o extremadamente cercana a una singularidad geométrica (el límite del espacio de alcanzabilidad para ese R , con $\theta_{i2} \approx 180^\circ$). Los altos valores de estos índices en $R \approx 0.22842$ m enmascaran la naturaleza singular de la configuración. Esta aparente paradoja, donde indicadores de "buen" desempeño coinciden con una configuración cinemáticamente indeseable, subraya la insuficiencia de estos índices clásicos como criterios únicos de optimización para la resolución de la redundancia en el robot Delta reconfigurable. Es precisamente esta contradicción la que motiva la necesidad de desarrollar y proponer un nuevo índice de desempeño que sea sensible a estas condiciones y que pueda guiar la selección de configuraciones robustas y alejadas de las singularidades, tal como se abordará en secciones posteriores de esta tesis.

En la Tabla 3.2 se presentan los valores de los índices de desempeño para la configuración obtenida. De los datos se puede observar cómo al maximizar un índice asociado a la fuerza estática, se minimiza su contraparte en velocidad.

De evaluación realizada, se pueden extraer las siguientes conclusiones para el robot Delta con reconfiguración geométrica:

ω^v	ω^f	σ_{min}^v	σ_{min}^f	$1/k$
3.5566×10^{-9}	2.8116×10^8	1.5236×10^{-3}	6.5274×10^2	0.9946

Tabla 3.2: Mediciones de los índices de desempeño para la configuración $\{\mathbf{x} = (0.000, 0.000, -0.1153), \mathbf{q} = (0.22842, -35.0297355, -35.0297355, -35.0297355)\}$

1. $\omega^v \in (0, \infty)$, cuando ω^v tiende a un valor grande: ω^f tiende a cero; σ_{min}^f tiende a cero, y $1/k$ tiende a cero.
2. $\omega^f \in (0, \infty)$, cuando ω^f tiende a un valor grande: ω^v tiende a cero; σ_{min}^v tiende a cero.
3. $\sigma^f \in (0, \infty)$ cuando $\sigma^f = \frac{1}{\sigma_1}$ tiende a un valor grande: $\omega^v = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ tiende a cero y σ_{min}^v tiende a cero ya que $\sigma_1 > \sigma_3 = \sigma_{min}^v$. Si además $1/k$ tiende a uno, entonces $\sigma_3 = \sigma_1$.
4. $\sigma^v \in (0, \infty)$.

Los resultados de esta evaluación concluyen que optimizar en función de ω^v , ω^f , σ_{min}^v , σ_{min}^f o $1/k$ genera configuraciones singulares al tender a valores muy altos como a cero. Por lo tanto, estos índices no son adecuados para el robot Delta con reconfiguración geométrica. Dado que ningún índice considerado resulta apropiado, surge la necesidad de proponer un criterio de optimización que sea sensible a configuraciones singulares.

3.8.2. PROPUESTA DE UN ÍNDICE SENSIBLE A SINGULARIDADES COMO CRITERIO DE OPTIMIZACIÓN

Considerando los resultados obtenidos en la sección anterior, donde se evidenció que los índices de desempeño tradicionales pueden conducir a configuraciones singulares al ser utilizados como criterios de optimización para el robot Delta reconfigurable, se propone en esta sección un nuevo índice de rendimiento. Este índice, denominado $\tilde{k}$, está diseñado específicamente para ser sensible a las singularidades y superar las limitaciones de los criterios clásicos. La filosofía detrás de este nuevo índice es penalizar tanto valores muy bajos de los mínimos valores singulares (indicativos de una singularidad inminente) como valores excesivamente altos, que también pueden estar asociados a configuraciones problemáticas o a una sensibilidad no deseada del sistema.

El índice propuesto $\tilde{k}$ se basa en el producto de dos funciones normalizadas, una para el mínimo valor singular de velocidad ($\tilde{\sigma}_{min}^v$) y otra para el mínimo valor singular de fuerza ($\tilde{\sigma}_{min}^f$):

$$\tilde{k} = \tilde{\sigma}_{min}^v \cdot \tilde{\sigma}_{min}^f \quad (3.26)$$

ω^v	ω^f	σ_{min}^v	σ_{min}^f	$1/k$
1.1063×10^{-1}	9.0389×10^0	4.6054×10^{-1}	2.4592×10^0	0.8829

Tabla 3.3: Mediciones de los índices de desempeño para la configuración $\{\mathbf{x} = (0.000, 0.000, -0.200), \mathbf{q} = (0.20465, -3.39378, -3.39378, -3.39378)\}$

Las funciones de normalización, $\tilde{\sigma}_{min}^v$ y $\tilde{\sigma}_{min}^f$, están diseñadas para emular una forma de campana, asignando un valor máximo de 1 a un "punto dulce." rango deseable del respectivo mínimo valor singular, y penalizando valores fuera de este rango. Específicamente, se definen como:

$$\tilde{\sigma}_{min}^v = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\sigma_{min}^v - 1}{1} \right)^2 & \text{si } \sigma_{min}^v \leq 2 \\ 0 & \text{si } \sigma_{min}^v > 2 \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\tilde{\sigma}_{min}^f = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\sigma_{min}^f - 2.1}{2.1} \right)^2 & \text{si } \sigma_{min}^f \leq 4.2 \\ 0 & \text{si } \sigma_{min}^f > 4.2 \end{cases} \quad (3.28)$$

Para la función $\tilde{\sigma}_{min}^v$ (Ecuación 3.27), esta se construye para que su valor sea cercano a cero cuando σ_{min}^v es próximo a cero, evitando así singularidades donde la movilidad es mínima. A medida que σ_{min}^v aumenta y se aproxima al valor central de 1 (seleccionado como representativo de un buen compromiso de movilidad), $\tilde{\sigma}_{min}^v$ alcanza su valor máximo de 1. Si σ_{min}^v continúa incrementándose más allá de este punto óptimo, hasta $\sigma_{min}^v = 2$ (el doble del valor central), la función $\tilde{\sigma}_{min}^v$ decrece simétricamente hasta anularse. Para valores de σ_{min}^v superiores a 2, la función permanece en cero, penalizando configuraciones donde el mínimo valor singular de velocidad es excesivamente alto, lo cual podría ser indicativo de una anisotropía no deseada o de la cercanía a otro tipo de comportamiento problemático no capturado únicamente por el valor de σ_{min}^v .

De manera análoga, la función $\tilde{\sigma}_{min}^f$ (Ecuación 3.28) opera sobre el mínimo valor singular de fuerza. El valor central de $\sigma_{min}^f = 2.1$ y el límite superior de $\sigma_{min}^f = 4.2$ fueron determinados tras un análisis empírico del comportamiento de σ_{min}^f en el espacio de trabajo del robot, buscando un rango que represente una buena capacidad de generación de fuerza sin incurrir en los extremos que previamente se identificaron como problemáticos (donde σ_{min}^f es o muy bajo o excesivamente alto, asociado a singularidades o mal condicionamiento en velocidad). Así, $\tilde{\sigma}_{min}^f$ vale cero si $\sigma_{min}^f = 0$, alcanza 1 cuando $\sigma_{min}^f = 2.1$, y vuelve a cero si σ_{min}^f llega a 4.2 o lo supera. Para evaluar la efectividad de este índice propuesto $\tilde{k}$ como criterio de optimización, se retoman los dos escenarios de los ejemplos anteriores. La Figura 3.5 corresponde al Ejemplo 1 (coordenada $x = (0.000, 0.000, -0.200)$ m). En ella se observa el comportamiento del nuevo índice $\tilde{k}$ (línea azul) en comparación con ω^v y σ_{min}^v . Notablemente, $\tilde{k}$ alcanza su valor máximo

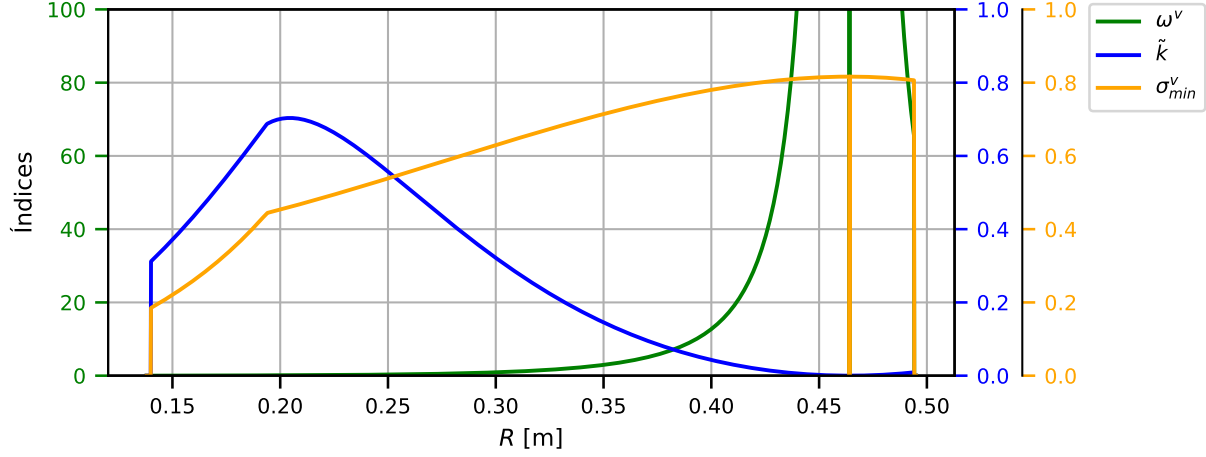


Figura 3.5: Gráfica de la variación de los índices ω^v , σ_{min}^v y $\tilde{k}$ conforme varía el parámetro geométrico R al resolver el problema geométrico inversos.

para un valor de $R \approx 0.20465$ m (ver 3.3). Esta elección de R es significativamente distinta del problemático $R = 0.465$ m donde ω^v tendía a infinito y se presentaba la singularidad geométrica $\theta_{i1} = 90^\circ$. En la configuración seleccionada por $\tilde{k}$, los valores de $\omega^v = 0.11063$ y $\sigma_{min}^v = 0.46054$ (Tabla 3.3) son moderados y se encuentran alejados de los extremos que caracterizaban a la configuración singular.

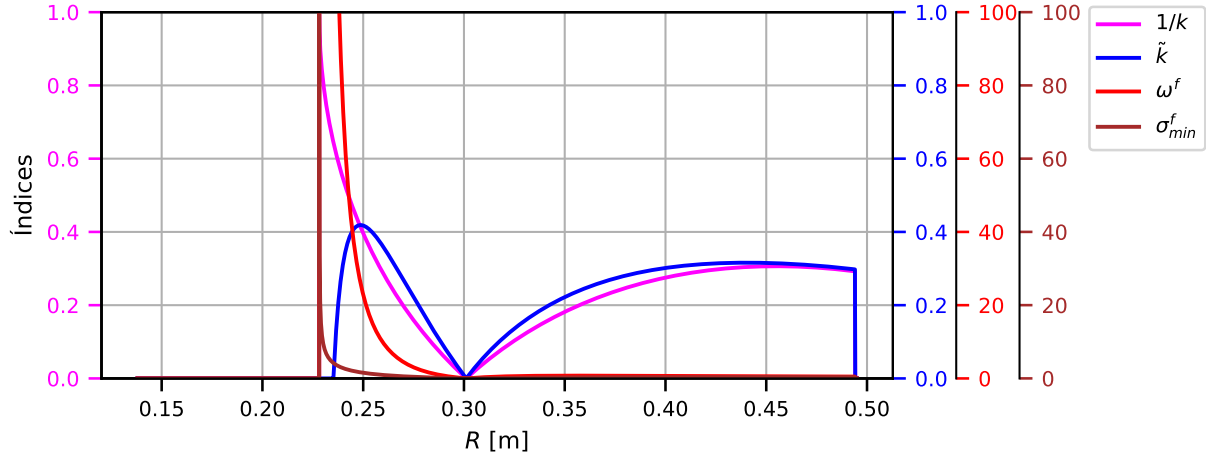


Figura 3.6: Gráfica de la variación de los índices ω^f , σ_{min}^f , $1/k$ y $\tilde{k}$ conforme varía el parámetro geométrico R al resolver el problema geométrico inversos.

Similarmente, la Figura 3.6 analiza el Ejemplo 2 (coordenada $x = (0.000, 0.000, -0.116)$ m). Aquí, el índice $\tilde{k}$ (línea azul oscuro) presenta su máximo en $R \approx 0.24901$ m (ver Tabla 3.4). Este valor de R difiere del $R \approx 0.22842$ m que maximizaba los índices de fuerza (ω^f, σ_{min}^f) y el recíproco del número de condición ($1/k$), pero que correspondía a la singularidad geomé-

ω^v	ω^f	σ_{min}^v	σ_{min}^f	$1/k$
3.8553×10^{-2}	25.9473×10^0	2.5148×10^{-1}	1.6410×10^0	0.4127

Tabla 3.4: Mediciones de los índices de desempeño para la configuración $\{\mathbf{x} = (0.000, 0.000, -0.1153), \mathbf{q} = (0.24901, 0.92940, 0.92940, 0.92940)\}$

trica con $\theta_{i2} \approx 180^\circ$. La configuración elegida por $\tilde{k}$ resulta en valores de $\omega^f = 25.9473$ y $\sigma_{min}^f = 1.6410$ (Tabla 3.4), los cuales son considerablemente más balanceados y seguros en comparación con los valores extremos de la Tabla 3.2, que se asociaban a la singularidad. Es importante notar que el pico de $\tilde{k}$ no coincide con el pico inicial de $1/k$ (que ocurría en la singularidad), demostrando que $\tilde{k}$ identifica un compromiso diferente y más seguro.

La principal aportación de este nuevo índice $\tilde{k}$ radica en su capacidad para resolver el problema geométrico y cinemático inversos seleccionando configuraciones articulares que no solo son alcanzables, sino también operativamente seguras. Esto se logra al evitar tanto las singularidades directas (donde los σ_{min} son cero) como aquellas configuraciones asociadas a valores extremos (muy altos o muy bajos) de los índices de desempeño tradicionales, los cuales, como se ha demostrado, pueden ser engañosos y conducir a condiciones problemáticas. Las funciones de normalización $\tilde{\sigma}_{min}^v$ y $\tilde{\sigma}_{min}^f$ son fundamentales en este proceso, ya que penalizan los valores singulares mínimos que se desvían significativamente de un rango intermedio considerado de "buen comportamiento", priorizando así un equilibrio entre movilidad, capacidad de fuerza y estabilidad. Como demuestran las Figuras 3.5 y 3.6, y los valores correspondientes en las Tablas 3.3 y 3.4, la optimización basada en $\tilde{k}$ efectivamente desvía la elección del parámetro de reconfiguración R de los valores críticos identificados previamente, seleccionando configuraciones que resultan en valores moderados y bien comportados para todos los índices de desempeño. Esto valida a $\tilde{k}$ como un criterio de optimización robusto y sensible a las singularidades, idóneo para el robot Delta reconfigurable.

3.9. EVALUACIÓN DEL EFECTO DE LA REDUNDANCIA EN EL ROBOT DELTA

Habiendo establecido en la sección anterior un criterio de optimización robusto, el índice $\tilde{k}$, para la resolución de la redundancia cinemática en el robot Delta reconfigurable, esta sección se dedica a evaluar cuantitativa y cualitativamente el impacto y los beneficios de dicha capacidad de reconfiguración. Específicamente, se analizará el efecto de la redundancia, habilitada por la reconfiguración geométrica del parámetro R , sobre dos aspectos fundamentales

del desempeño del robot: primero, la extensión y forma del volumen del espacio de trabajo alcanzable, y segundo, la mejora potencial en los índices de desempeño cinemático, como la manipulabilidad de velocidad, a lo largo de dicho espacio. Para ello, se contrastarán los resultados obtenidos para el robot Delta operando con su capacidad de reconfiguración activa (donde R es variable y su valor se selecciona utilizando el índice $\tilde{k}$ para cada punto del espacio de trabajo) frente a su contraparte no reconfigurable. Esta última se considera como un caso particular del robot reconfigurable donde el parámetro R se mantiene fijo en $R = 0.200$ m, un valor representativo del diseño original o de una configuración estándar no reconfigurable. Esta evaluación es fundamental para validar la hipótesis de que la reconfigurabilidad no solo amplía las capacidades operativas del robot Delta, sino que también permite optimizar su comportamiento cinemático de manera significativa.

3.9.1. COMPARACIÓN DEL VOLUMEN DEL ESPACIO DE TRABAJO

Para determinar el volumen del espacio de trabajo, se calculó la razón entre el número de puntos en el prisma delimitador (definido en la Sección 2.7.1) y el número de puntos que conforman el volumen del espacio de trabajo alcanzable para cada caso (reconfigurable y no reconfigurable con $R = 0.200$ m). Es importante destacar que los volúmenes comparados en esta subsección corresponden al espacio de trabajo alcanzable determinado únicamente por las **restricciones geométricas** del robot (longitud de eslabones y límites articulares de θ_{i1}), sin considerar aún la evitación de singularidades internas mediante el índice $\tilde{k}$; el objetivo aquí es mostrar el impacto bruto de la reconfigurabilidad en el alcance máximo. Multiplicando la

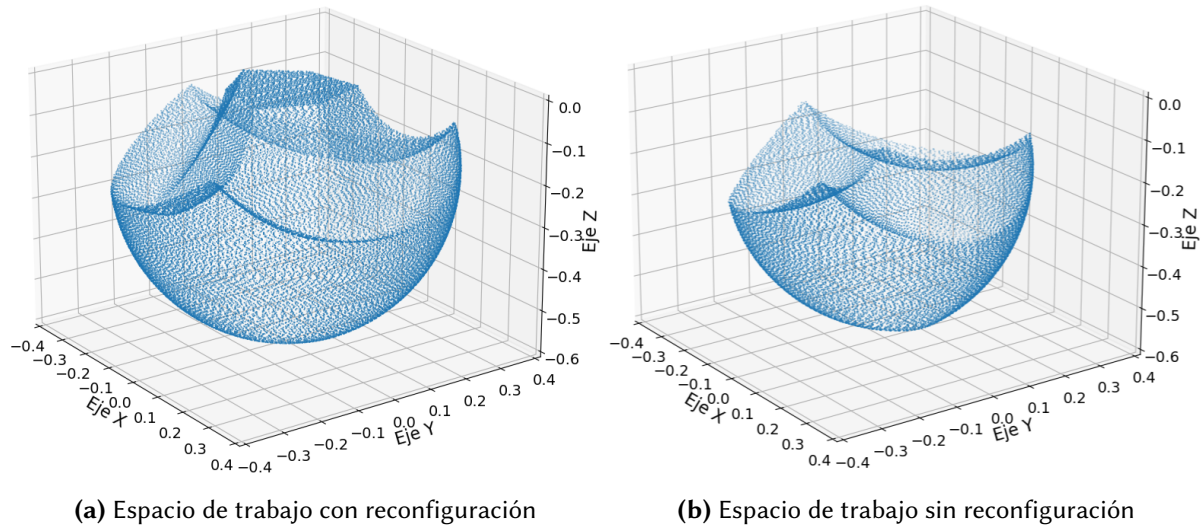


Figura 3.7: Espacio de trabajo del robot delta con y sin reconfiguración.

razón de puntos mencionada por el volumen total del prisma de discretización, se obtiene un volumen de 0.137 m^3 para el robot reconfigurable y un volumen de 0.075 m^3 para el caso sin reconfiguración (con R fijo en 0.200 m). Esto representa un notable aumento del 82 % en el volumen alcanzable gracias a la capacidad de reconfiguración geométrica.

La Figura 3.7 presenta una visualización tridimensional comparativa de estos volúmenes máximos alcanzables. La subfigura (a) corresponde al robot operando con su capacidad de reconfiguración geométrica (parámetro R variable), mientras que la subfigura (b) muestra el espacio de trabajo para la configuración no reconfigurable con $R = 0.200 \text{ m}$. Visualmente, es evidente que el robot reconfigurable (Figura 3.7a) posee un espacio de trabajo considerablemente más amplio. Se observa una expansión notable en todas las direcciones, pero es particularmente significativa la ganancia de volumen en la región superior del espacio de trabajo (valores de Z menos negativos). Esta expansión superior es de gran importancia práctica, ya que permite al robot alcanzar puntos más elevados o manipular objetos de mayor altura, aumentando significativamente su versatilidad. Esta apreciación visual corrobora el incremento cuantitativo del 82 % en el volumen, subrayando una de las principales ventajas de la estrategia de reconfiguración.

3.9.2. COMPARACIÓN DEL DESEMPEÑO EN GENERACIÓN Y TRANSMISIBILIDAD DE VELOCIDADES Y FUERZAS ESTÁTICAS

Para analizar el efecto de la reconfiguración geométrica sobre el desempeño cinemático del robot, se presenta una comparación entre el robot con capacidad de reconfiguración (donde R se optimiza usando $\tilde{k}$) y el robot sin reconfiguración (con R fijo en 0.200 m). Esta comparación se enfoca en el rendimiento con respecto a los índices de desempeño derivados de la matriz Jacobiana.

La Figura 3.8 muestra mapas de calor que representan la distribución del índice de manipulabilidad de velocidad, ω^v , sobre diferentes planos xy (cortes transversales del espacio de trabajo a distintas alturas Z). Las subfiguras de la columna izquierda (a, d) corresponden al robot Delta reconfigurable, donde para cada punto (x, y, z) se ha seleccionado el valor de R que maximiza el índice $\tilde{k}$. Las subfiguras de la columna derecha (b, e para $z = -0.400 \text{ m}$ y $z = -0.300 \text{ m}$ respectivamente; y c, f para $z = -0.500 \text{ m}$ y $z = -0.300 \text{ m}$ para el caso no reconfigurable) ilustran el comportamiento para el robot con $R = 0.200 \text{ m}$ fijo. En estos mapas, los colores más cálidos (tendiendo al rojo/amarillo en la escala de color proporcionada) indican valores más altos de ω^v (mayor capacidad de transmitir velocidades), mientras que los colores más fríos (tendiendo al azul oscuro) representan valores más bajos.

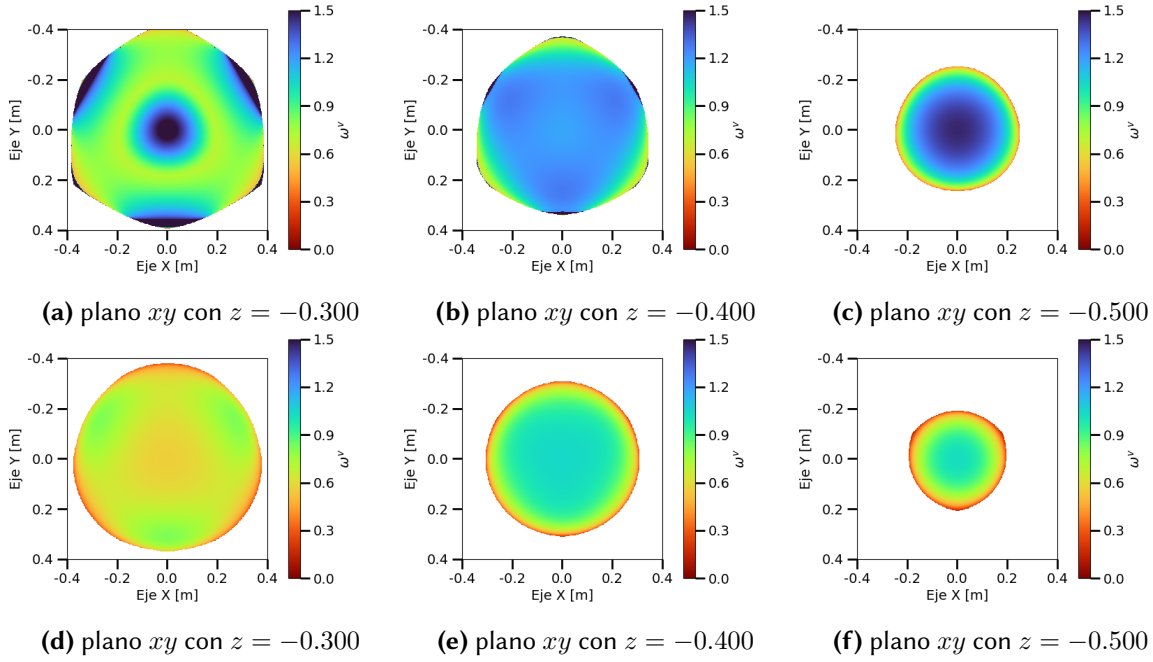


Figura 3.8: Distribución del número de condición en el espacio de trabajo para el robot Delta con y sin reconfiguración. Planos xy .

ω^v	Mín	Máx	Media
RDR	0.0769	1.3327	0.6901
ODR	0.0007	1.1375	0.7035

Tabla 3.5: Valores mínimos, máximos y media del índice ω^v a lo largo de todo el espacio de trabajo.

Analizando los planos a una altura $Z = -0.300$ m (comparando Figura 3.8a, reconfigurable, con Figura 3.8d, no reconfigurable con $R = 0.200$ m), se observa que el robot reconfigurable no solo cubre un área transversal mayor, sino que también presenta regiones extensas con valores elevados y más homogéneos de ω^v . Para $Z = -0.400$ m (Figuras 3.8b y 3.8e), la ventaja del robot reconfigurable en términos de área con buena manipulabilidad sigue siendo clara; la capacidad de ajustar R le permite mantener un desempeño superior. Incluso en regiones más bajas como $Z = -0.500$ m (Figura 3.8c, no reconfigurable), donde el robot con R fijo puede tener un espacio operativo muy restringido o una manipulabilidad significativamente degradada, el robot reconfigurable (cuya operatividad en esta profundidad se infiere superior por la expansión general del espacio de trabajo mostrada en la Figura 3.7a) puede seleccionar un R que le permita operar con mejor desempeño. En general, la Figura 3.8 demuestra que la reconfigurabilidad no solo expande el espacio de trabajo geoméricamente alcanzable, sino que, al combinarse con el criterio de optimización $\tilde{k}$, permite al robot operar con una manipulabi-

lidad de velocidad ω^v mejorada o mantenida de forma más consistente a través de una mayor porción de este volumen. Los datos cuantitativos globales presentados en la Tabla 3.5 para ω^v (donde RDR es Robot Delta Reconfigurable y ODR es Robot Delta Original/No Reconfigurable con $R = 0.200$ m) apoyan estas observaciones. Si bien el valor medio de ω^v puede ser similar entre ambas configuraciones (0.6901 para RDR vs 0.7035 para ODR), es crucial considerar que el RDR alcanza estos valores sobre un volumen de trabajo un 82 % mayor. Más revelador aún es el valor mínimo de ω^v : para el RDR es de 0.0769, mientras que para el ODR con $R = 0.200$ m es de apenas 0.0007. Esto indica que el robot reconfigurable, gracias a la optimización de R mediante $\tilde{k}$, evita de manera mucho más efectiva las configuraciones de muy baja manipulabilidad de velocidad. Adicionalmente, el valor máximo de ω^v alcanzado por el RDR (1.3327) es superior al del ODR (1.1375), sugiriendo un techo de desempeño cinemático más alto.

Basado en los datos mostrados en las tablas y gráficos presentados en esta sección, se puede observar una mejora sustancial tanto en el volumen del espacio de trabajo como en los índices de desempeño para el robot reconfigurable cuando se compara con una configuración fija estándar. La distribución de los valores del índice de manipulabilidad de velocidad también se ve favorecida. Teniendo en cuenta estos hechos, se puede concluir que la reconfiguración geométrica, gestionada mediante el criterio de optimización $\tilde{k}$, es efectiva para mejorar tanto el alcance como las características cinemáticas del robot Delta.

4

Control del Robot Delta reconfigurable

El capítulo anterior ha sentado las bases teóricas y analíticas del robot Delta con reconfiguración geométrica, destacando tanto su modelado cinemático y geométrico como el análisis de su espacio de trabajo y singularidades. Se constató que la capacidad de reconfiguración permite mejorar significativamente el desempeño cinemático y ampliar el volumen del espacio de trabajo en comparación con una configuración fija estándar. Adicionalmente, se propuso el índice $\tilde{k}$ como un criterio de optimización robusto para la resolución de la redundancia cinemática, capaz de guiar al robot hacia configuraciones operativamente seguras y alejadas de las singularidades.

Sin embargo, para que estas ventajas se traduzcan en una operatividad real y efectiva, es imprescindible el desarrollo e implementación de leyes de control adecuadas. Como se ha discutido, el robot Delta reconfigurable, al ser un mecanismo redundante, presenta desafíos particulares para el diseño de control. Entre estos retos se encuentran la existencia de infinitas soluciones para los problemas cinemático y geométrico inversos, y la presencia de un continuo de configuraciones singulares que deben ser gestionadas activamente por el controlador. La literatura existente, si bien extensa para robots seriales o paralelos no redundantes, ofrece pocas soluciones directamente aplicables al control de robots paralelos reconfigurables, y menos aún para la arquitectura específica del Delta reconfigurable.

Este capítulo aborda directamente estos desafíos de control. Se presentan varias estrategias de control en velocidad diseñadas específicamente para el robot Delta reconfigurable. La primera propuesta es una **ley de control proporcional con ganancias variables por partes**, que busca optimizar la velocidad de convergencia y la respuesta transitoria del sistema manteniendo la estabilidad. Posteriormente, se desarrollan **leyes de control basadas en la información de los encoders** de las articulaciones, que utilizan el modelo cinemático del robot y criterios de optimización para la resolución de la redundancia y la solución de tareas secundarias a la de posicionamiento. Finalmente, se explora el **control en el espacio de la cámara**, adaptando y extendiendo la metodología de Manipulación en Espacio de Cámara con Modelo Lineal (LCM-CSM) para el control en velocidad. Esto incluye una derivación detallada del **Jacobiano de imagen** que considera explícitamente la dependencia de la profundidad, una contribución clave para la precisión y robustez del control visual en aplicaciones dinámicas. El objetivo global de este capítulo es proporcionar un conjunto de herramientas de control que permitan explotar eficazmente las capacidades mejoradas del robot Delta reconfigurable.

4.1. MODELOS DE CSM Y JACOBIANO DE IMAGEN

En esta sección, presentamos el desarrollo de un modelo de cámara lineal basado en el modelo de cámara estereoscópica siguiendo el mismo razonamiento que en (Rendón-Mancha et al., 2010), y después desarrollamos una matriz Jacobiana de imagen que relaciona las velocidades del efector final en el espacio tridimensional con las velocidades en el espacio de la cámara, a partir de la derivada con respecto al tiempo del modelo de cámara lineal. El objetivo de volver a plantear el desarrollo del modelo LCM-CSM es dejar explícitos los diferentes términos y matrices involucradas para mostrar que términos son constantes y cuales no. Esto es de vital importancia para garantizar la validez de las derivadas que se calcularán para obtener la matriz Jacobiana.

Partimos del modelo de cámara estereoscópica que se muestra en la figura 2.5 donde podemos ver que el punto P_i se proyecta en el plano de la imagen a través de un segmento que pasa por el origen del marco de coordenadas de la cámara (X, Y, Z) . De este modo, podemos relacionar un punto en el espacio tridimensional con otro en el espacio de la imagen. Para modelar matemáticamente dicha proyección, primero planteamos una transformación homogénea desde el marco de referencia global (x, y, z) al marco de referencia de la cámara (X, Y, Z) como

sigue

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & X_0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & Y_0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Asumiendo que la cámara es fija, la matriz $\mathbf{H}$ es constante. Con el modelo de cámara agujero, se sabe que la proyección de un punto representado en el marco (X, Y, Z) sobre el marco (x_c, y_c) en el plano de la imagen es la siguiente

$$x_c = f \frac{X}{Z} \quad \text{y} \quad y_c = f \frac{Y}{Z}$$

donde f es la distancia focal. Esta última puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \frac{1}{Z} \mathbf{F} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

donde

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

suponiendo que la distancia focal es constante, entonces F es constante. Las coordenadas en el cuadro (x_c, y_c) están en el centro del plano de la imagen, y están en unidades de longitud. Se necesita otro mapeado que traslade los puntos al marco utilizado habitualmente en la imagen digital. Es decir, un marco (u, v) en la esquina superior izquierda del plano de la imagen en el que la dirección del eje u coincide con la dirección del eje x_c mientras que la dirección del eje v está en dirección opuesta a la del eje y_c . Además, pasamos de unidades longitudinales a unidades de píxel mediante la siguiente transformación homogénea:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_x & 0 & p_x \\ 0 & -m_y & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

donde m_x, m_y representa el número de píxeles por unidad de distancia, y $p_x = c_x m_x$ y $p_y = c_y m_y$ son las coordenadas del centro del plano de la imagen en unidades de píxel. Todos estos parámetros se consideran constantes para una cámara de modo que la matriz $\mathbf{K}$ es

constante. Podemos realizar la composición de todas estas transformaciones homogéneas para establecer una transformación directa entre el fotograma (x, y, z) y el fotograma (u, v) de la manera siguiente:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{Z} \mathbf{KFH} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Desarrollando la multiplicación de matrices, obtenemos

$$Z \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

donde

$$c_{1j} = m_x(fR_{1j} + p_xR_{3j})$$

$$c_{14} = m_x(fX_0 + p_xZ_0)$$

$$c_{2j} = m_y(-fR_{2j} + p_yR_{3j})$$

$$c_{24} = m_y(-fX_0 + p_yZ_0)$$

$$c_{3j} = R_{3j}$$

$$c_{34} = Z_0$$

con $j = 1, 2, 3$. Dado que este mapeo se compone de once parámetros independientes, podemos utilizar uno de los términos de la matriz resultante como factor de escala y dividir la ecuación por ese elemento. El elemento tomado es el último elemento de la matriz, es decir, Z_0 . Con esto, obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{Z}{Z_0} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_0} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Que puede expresarse como

$$\rho \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \mathcal{P} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

donde

$$\mathcal{P} = \frac{1}{Z_0} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Y

$$\rho = \frac{Z}{Z_0} \quad (4.9)$$

De la tercera fila de (4.7), se puede extraer otra definición de ρ como sigue:

$$\rho = P_{31}x + P_{32}y + P_{33}z + 1 \quad (4.10)$$

Note que $\mathcal{P}$ en (4.8) es constante e independiente del factor de escala de profundidad ρ , obteniendo como resultado la siguiente relación, que denominamos modelo lineal de cámara:

$$\rho \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

A partir de este resultado, se puede desarrollar la matriz Jacobiana de imagen para lo cual es importante aclarar que, tal y como se fue dejando patente durante el desarrollo anterior, cada elemento P_{ij} es constante bajo la consideración de que la ubicación y orientación las cámaras son fijas respecto al robot, además de que no cambia el zoom ni el enfoque en la cámara (estos dos factores afectan a la distancia focal). Para ello, podemos reescribir la ecuación (4.11) comenzando por desarrollar el producto de ρ con las coordenadas de la imagen obteniendo

$$u = \frac{P_{11}x + P_{12}y + P_{13}z + P_{14}}{P_{31}x + P_{32}y + P_{33}z + 1} \quad (4.12)$$

Y

$$v = \frac{P_{21}x + P_{22}y + P_{23}z + P_{24}}{P_{31}x + P_{32}y + P_{33}z + 1} \quad (4.13)$$

que, reestructurada en forma matricial, proporciona:

$$\begin{bmatrix} u - P_{14} \\ v - P_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} - P_{31}u & P_{12} - P_{32}u & P_{13} - P_{33}u \\ P_{21} - P_{31}v & P_{22} - P_{32}v & P_{23} - P_{33}v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

o, en forma contraída

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{P}(\mathbf{s}(t)) \mathbf{x}(t) \quad (4.15)$$

donde

$$\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} u - P_{14} \\ v - P_{24} \end{bmatrix},$$

y

$$\mathbf{P}(\mathbf{s}(t)) = \begin{bmatrix} P_{11} - P_{31}u & P_{12} - P_{32}u & P_{13} - P_{33}u \\ P_{21} - P_{31}v & P_{22} - P_{32}v & P_{23} - P_{33}v \end{bmatrix}.$$

Los vectores $\mathbf{s}(t)$ y $\mathbf{x}(t)$ representan coordenadas de un objetivo en el espacio de la imagen y en el espacio cartesiano, respectivamente. Ambos vectores son funciones del tiempo, ya que representan la posición de un objetivo que puede moverse en el espacio tridimensional, y correspondientemente, en la imagen, en cualquier momento. Derivando con respecto al tiempo la ecuación (4.15), obtenemos

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{s}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(\mathbf{s}(t))\dot{\mathbf{x}}(t) \quad (4.16)$$

donde

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{s}(t)) = \begin{bmatrix} -P_{31}\dot{u} & -P_{32}\dot{u} & -P_{33}\dot{u} \\ -P_{31}\dot{v} & -P_{32}\dot{v} & -P_{33}\dot{v} \end{bmatrix}.$$

El término $\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{s}(t))\mathbf{x}(t)$ en (4.16) puede desarrollarse como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{s}(t))\mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{u}(-P_{31}x - P_{32}y - P_{33}z) \\ \dot{v}(-P_{31}x - P_{32}y - P_{33}z) \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{s}(t))\mathbf{x}(t) &= (-P_{31}x - P_{32}y - P_{33}z) \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

y finalmente

$$\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{s}(t))\mathbf{x}(t) = (-\rho + 1)\dot{\mathbf{s}}(t). \quad (4.17)$$

Por lo tanto, podemos replantear (4.16) como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{s}}(t) &= (-\rho + 1)\dot{\mathbf{s}}(t) + \mathbf{P}(\mathbf{s}(t))\dot{\mathbf{x}}(t) \\ \rho\dot{\mathbf{s}}(t) &= \mathbf{P}(\mathbf{s}(t))\dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{s}}(t) &= \frac{1}{\rho}\mathbf{P}(\mathbf{s}(t))\dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{s}}(t) &= \mathbf{J}_{csm}(\mathbf{s}(t), \mathbf{x}(t))\dot{\mathbf{x}}(t)\end{aligned} \quad (4.18)$$

donde

$$\mathbf{J}_{csm}(\mathbf{s}(t), \mathbf{x}(t)) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}(t))}\mathbf{P}(\mathbf{s}(t)) \quad (4.19)$$

Así, se obtiene una relación directa entre las velocidades en el espacio de la cámara y las velocidades en el espacio tridimensional para cada cámara. Esto es de gran valor en el contexto del control, ya que con esta relación entre velocidades es posible definir unas leyes de control visual de bucle cerrado utilizando señales de error definidas como una función de las coordenadas en el espacio de la imagen. Para establecer un mapeo inyectivo en (4.18) se requiere un mínimo de dos cámaras (Loredo et al., 2022). Se puede observar que el jacobiano de la imagen $\mathbf{J}_{csm}$ en (4.19) está compuesta por el factor de escala ρ y el mapeo $\mathbf{P}$, que contiene los parámetros de visión. En trabajos anteriores (Rendón-Mancha et al., 2010; Lopez-Lara et al., 2020a; Loredo et al., 2022), se suponía que este factor ρ era constante e igual a 1 (incrustado en los parámetros de visión). Aunque esta aproximación funciona localmente, se sabe poco sobre el tamaño de la región de validez de dicha aproximación. Además, el parámetro de visión debe calcularse localmente (refinarse) en cada iteración de control. **Por el contrario, con la formulación presentada aquí, los parámetros de visión (constantes) sólo necesitan determinarse una vez** y el factor de profundidad variable ρ puede obtenerse de varias maneras (por ejemplo, utilizando el modelo geométrico del robot, cuando éste se encuentra cerca del objetivo; o utilizando la

reconstrucción 3D a partir de la información visual. que puede ser tan simple como una aproximación lineal). Esto no sólo reduce el coste computacional del cálculo, sino que también, y lo que es más importante, hace que **el modelo sea válido globalmente**, lo que es primordial desde el punto de vista del control automático.

Con este modelo cinemático de cámara y el Jacobiano de imagen $\mathbf{J}_{csm}$ establecidos, que capturan la relación entre las velocidades del efector final y sus proyecciones en el espacio de la cámara de manera globalmente válida, ahora estamos en posición de desarrollar las leyes de control visual en velocidad, así como otras estrategias de control para el robot Delta reconfigurable.

4.2. PROPUESTA DE LEY DE CONTROL PROPORCIONAL CON GANANCIAS VARIABLES

Por lo general, el comportamiento buscado de la mayoría de los sistemas controlados en lazo cerrado es de la forma

$$\dot{\mathbf{e}} = -\mathbf{G}\mathbf{e} \quad (4.20)$$

donde $\mathbf{e}$ es la diferencia entre un valor de referencia y el valor actual del vector de estado del sistema y $\mathbf{G}$ es una matriz de ganancia. Si $-\mathbf{G}$ es Hurwitz, se consigue una convergencia exponencial de $\mathbf{e}$ a cero. Este comportamiento se puede conseguir para el sistema que nos ocupa diseñando las siguientes leyes de control, siguiendo las coordenadas elegidas para expresar el comportamiento del sistema. El error $\mathbf{e}$ puede definirse como $\mathbf{e} = \mathbf{q}^* - \mathbf{q}$, $\mathbf{e} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$ y $\mathbf{e} = \mathbf{s}^* - \mathbf{s}$. Es decir, en el espacio articular, en el espacio operacional (cartesiano) o en el espacio de la cámara, respectivamente. En donde el asterisco representa el valor de referencia u objetivo de la tarea de control. Los términos sin el asterisco corresponden con el estado actual del sistema.

En la práctica, una limitación de este esquema es el propio decaimiento exponencial, que producen altas señales de control inicial y, a medida que el robot se acerca al objetivo, disminuye exponencialmente, ralentizando la convergencia. Este comportamiento puede mejorarse implementando una variación de la ley de control de decaimiento exponencial, utilizando ganancias crecientes como sigue. En el modelo, definimos la dinámica del error como un sistema dinámico a trozos en el que cada partición tiene definida una dinámica de decaimiento expo-

nencial. Esto se puede escribir de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{e}} = \begin{cases} -\mathbf{G}_0 \mathbf{e} & \text{si } |\mathbf{e}| > d_0 \\ -\mathbf{G}_1 \mathbf{e} & \text{si } d_1 > |\mathbf{e}| > d_1 \\ -\mathbf{G}_2 \mathbf{e} & \text{si } d_2 > |\mathbf{e}| > d_2 \\ \vdots & \\ -\mathbf{G}_n \mathbf{e} & \text{si } |\mathbf{e}| < d_{n-1} \end{cases} \quad (4.21)$$

donde $\mathbf{G}_0 < \mathbf{G}_1 < \dots < \mathbf{G}_n$ son matrices de la forma $\mathbf{G} = \lambda \mathbf{I}$, donde λ es cualquier escalar positivo, $d_0 > d_1 > \dots > d_{n-1} > 0$ son los valores de la norma de error que definen las particiones del espacio de estados del sistema.

En el control de decaimiento exponencial, a medida que el valor de $\mathbf{e}$ disminuye, el valor de $\dot{\mathbf{e}} = -\mathbf{G}\mathbf{e}$ disminuye en la misma proporción, provocando un elevado tiempo de convergencia al punto objetivo. En la variación de control a trozos, se busca proponer que las ganancias $\mathbf{G}_i$ aumenten de valor a medida que $\mathbf{e}$ disminuye de valor, de forma que la tasa de la dinámica del error se aproxime a una tasa de decaimiento lineal, mejorando así la velocidad de operación. Si $\Delta d = |d_i - d_{i+1}|$ con $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, podemos definir $\mathbf{G}_i$ como

$$\mathbf{G}_0 = \lambda \cdot \mathbf{I} \quad (4.22)$$

y

$$\mathbf{G}_i = \prod_1^i \left(1 + \frac{\Delta d}{d_1 - (i-1)\Delta d} \right) \cdot \mathbf{G}_0 \quad (4.23)$$

La ecuación (4.23) garantiza que los valores propios de las matrices $\mathbf{G}_i$ aumentan exponencialmente, compensando la disminución del valor de la norma del error. Dado que todas las matrices $\mathbf{G}_i$ son Hurwitz en cada partición cuya unión define todo el espacio de estados, la dinámica del sistema (4.21) es asintóticamente estable. Esta es una variación de la ley de control para todas las leyes de control anteriores.

Para demostrar la estabilidad primero reescribimos el sistema 4.21 de la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{e}} = \begin{cases} -\lambda_0 \mathbf{I} \mathbf{e} & \text{si } |\mathbf{e}| > d_1 \\ -\lambda_1 \mathbf{I} \mathbf{e} & \text{si } d_1 > |\mathbf{e}| > d_2 \\ -\lambda_2 \mathbf{I} \mathbf{e} & \text{si } d_2 > |\mathbf{e}| > d_3 \\ \vdots & \\ -\lambda_n \mathbf{I} \mathbf{e} & \text{si } |\mathbf{e}| < d_n \end{cases} \quad (4.24)$$

en donde $\lambda_0 = \lambda$ y $\lambda_i = \prod_1^i \left(1 + \frac{\Delta d}{d_1 - (i-1)\Delta d}\right) \cdot \lambda_0$ con $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Respecto a la dinámica en las variedades de switcheo, esta se puede definir como (Champneys and di Bernardo, 2008)

$$\mathbf{G}_{i,i+1} = \frac{\mathbf{G}_i + \mathbf{G}_{i+1}}{2} \quad (4.25)$$

siendo este promedio la combinación de la dinámica en ambos extremos de la variedad en el caso particular en el que ambos campos vectoriales tienen la misma dirección. Para demostrar que el origen del sistema dinámico 4.21 es estable consideremos la siguiente función de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2) \quad (4.26)$$

y derivada respecto a 4.24

$$\dot{V} = -\lambda_i(e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2) \quad (4.27)$$

De modo que si para todo $\lambda_i > 0$ y todo $\lambda_{i,i+1} > 0$ el origen sera asintóticamente estable. Por construcción, si definimos $\lambda_0 > 0$ entonces todo λ_i y $\lambda_{i,i+1}$ serán mayores que cero por los tanto (4.21) es asintóticamente estable.

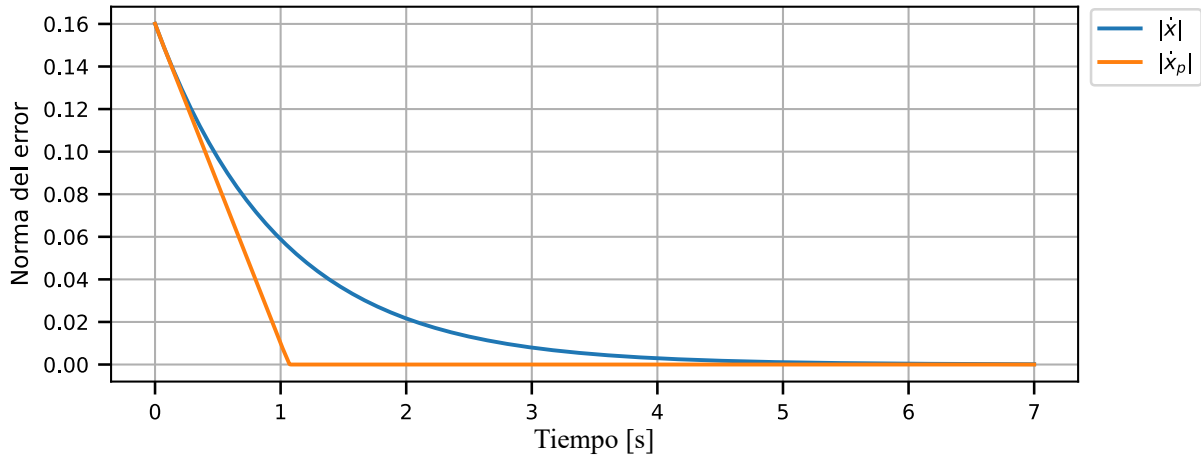


Figura 4.1: Normas del error $\mathbf{e} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$ en espacio cartesiano. En azul se grafica la convergencia del control proporcional y en púrpura la convergencia del control proporcional particionado.

En la Figura (4.1) se presenta una comparativa entre la velocidad de convergencia del control proporcional y el control proporcional particionado. El eje horizontal corresponde al tiempo en segundo y el eje vertical corresponde a la norma del error en metros. La línea azul se presenta el comportamiento del control proporcional, se puede observar que la tasa de convergencia es la esperada para ese tipo de control. Por otro lado, la línea de color púrpura se presenta la convergencia del control proporcional particionado, se puede observar como la

tasa de convergencia en el caso particionado es más rápida que en el caso no particionado.

OSCILACIONES EN LA SEÑAL DE CONTROL

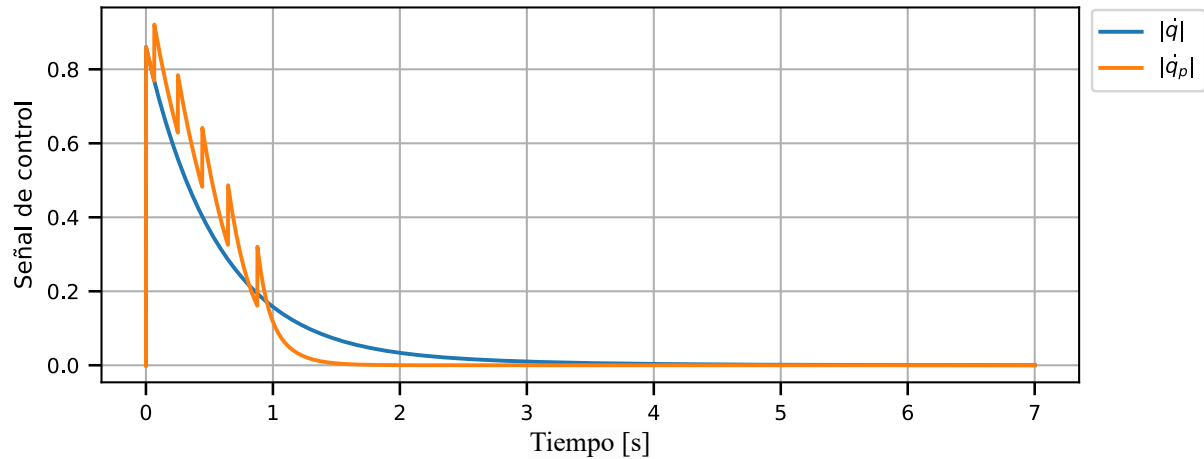


Figura 4.2: Normas del vector de velocidades articulares $\dot{q}$. En azul se grafica la convergencia del control proporcional y en naranja la convergencia del control proporcional particionado con cinco particiones.

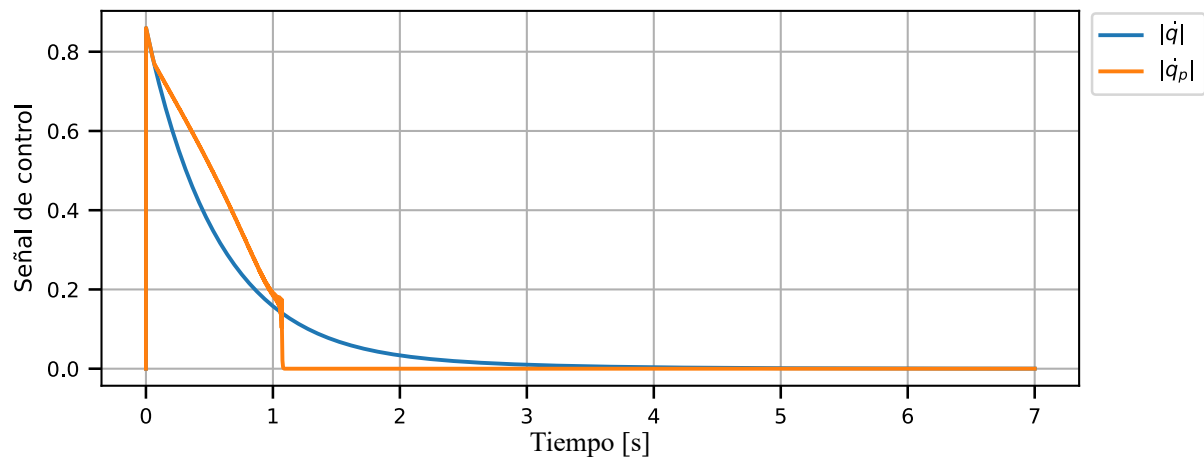


Figura 4.3: Normas del vector de velocidades articulares $\dot{q}$. En azul se grafica la convergencia del control proporcional y en naranja la convergencia del control proporcional particionado con 300 particiones.

Debido a las discontinuidades en la ley de control, se producen oscilaciones en la señal de control. Estas oscilaciones consisten en cambios abruptos en la amplitud de la señal lo cual es un efecto no deseado en sistemas mecánicos. En la figura se pueden observar estas oscilaciones para θ_{11} para un control con 30 particiones. Si incrementamos el numero de particiones podemos reducir la amplitud de dichas amplitudes produciendo una señal mas suave. El numero de

particiones es un factor libre en el diseño del control además de que este aspecto es implementado mediante software, por lo que podemos elegir un número de particiones suficientemente alto durante la etapa de diseño del control. En la Figura se observa la señal de control de θ_{11} para 300 particiones en el cual se puede observar como se reducen las oscilaciones debido al cambio en el número de particiones.

SOBRE IMPULSO

Otro aspecto a considerar es que este control genera altas velocidades en la señal de control cuando el sistema tiende al punto de equilibrio. Como se observa en las Figuras 4.2 y 4.3, conforme se incrementa el número de particiones tenemos una caída a cero en la señal de control para el caso con 300 particiones. En las simulaciones presentadas no se tiene en cuenta el modelo dinámico del robot por lo cual el sistema lleva al punto de equilibrio sin sobre impulsos. Sin embargo, si consideramos la inercia en los eslabones del robot veremos como este no es capaz de detenerse de forma instantánea. Una forma de manejar esta situación con el control propuesto es definir la partición en la que se encuentra el punto de equilibrio con un radio suficientemente amplio para que el robot pueda reducir la velocidad. En la Figura 4.4 se puede observar que la señal de control ahora decrece a cero de manera más lenta y controlada.

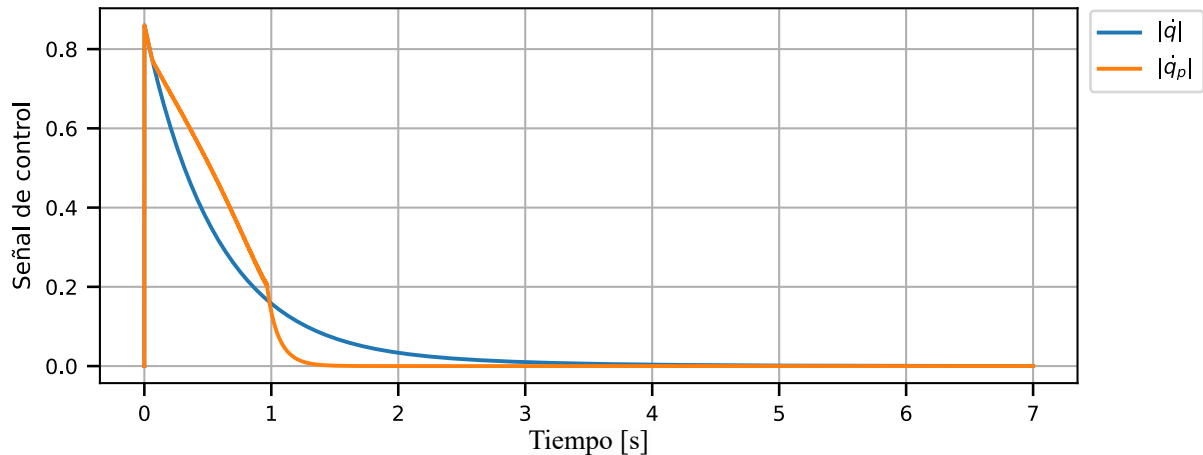


Figura 4.4: Normas del vector de velocidades articulares $\dot{q}$. En azul se grafica la convergencia del control proporcional y en naranja la convergencia del control proporcional particionado con 300 particiones.

LIMITES ARTICULARES

En la Figura (4.5) se presenta la variación de las posiciones en las juntas durante el control. Se puede observar, en la línea de color azul, el valor de la junta que cambia la reconfiguración geométrica del robot termina en un valor negativo lo cual esta fuera de los valores posibles para dicha articulación. Este comportamiento conduciría a colisiones del robot por lo cual es necesario garantizar la integridad del robot.

Para resolver esto, se utilizó la variable de control redundante y el espacio nulo del robot para incluir una función de costo que permite mantener las juntas alejada de sus limites permitidos. El control que incluye este termino es el siguiente:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{G}\mathbf{e} + \dot{\mathbf{x}}^*) - \gamma(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger\mathbf{J})\frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{q}} \quad (4.28)$$

done las ganancias $\mathbf{G}$ son particionadas como en 4.21 y la función de costo es:

$$\frac{\delta\mu}{\delta\mathbf{q}} = \frac{q_i - q_i^{mid}}{(q_i^{max} - q_i^{min})^2} \quad (4.29)$$

El cálculo del gradiente de μ se realiza de forma numérica debido a que una expresión analítica

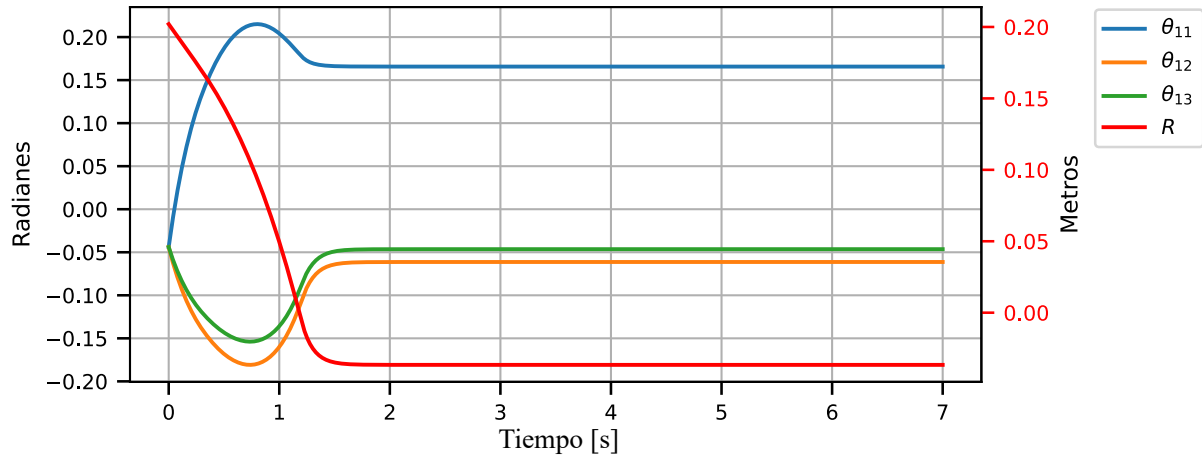


Figura 4.5: Simulación de la ley de control $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{G}\mathbf{e} + \dot{\mathbf{x}}^*)$

sería muy difícil de obtener y de manejar. En la figura (4.5) se muestra la misma simulación sin incluir la optimización con el índice propuesto mientras que en la figura (4.6) se muestra la ley de control con el índice desarrollado. De las dos figuras se puede apreciar la diferencia en el vector $\mathbf{q}$ alcanzado y que en el caso de la ley de control sin optimizar el índice el valor de la junta que corresponde al mecanismo de reconfiguración geométrica toma un valor negativo

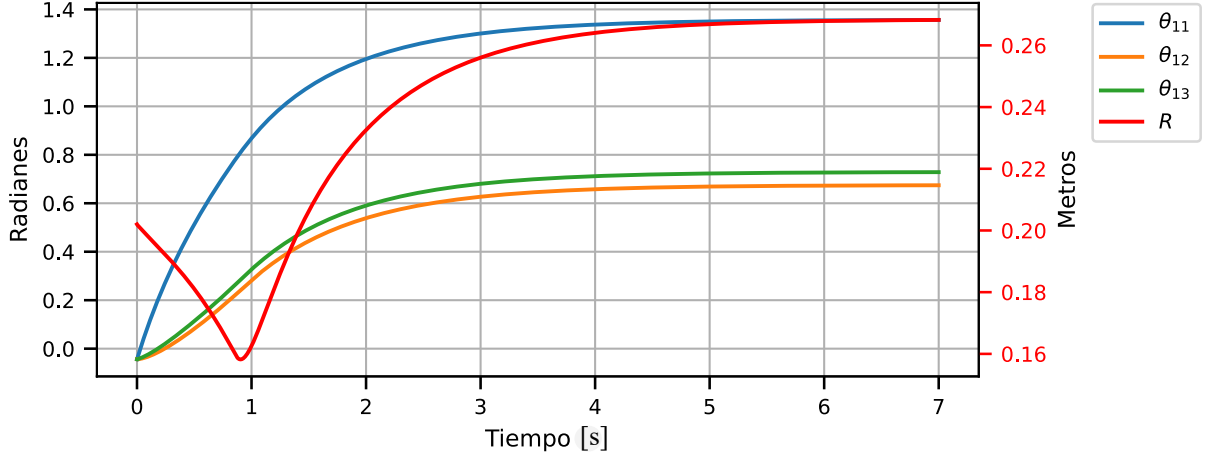


Figura 4.6: Simulación de la ley de control $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{G}\mathbf{e} + \dot{\mathbf{x}}^*) - \gamma(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger\mathbf{J})\frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{q}}$

lo cual no es posible físicamente. En cambio, en la ley de control con optimización del índice desarrollado se llega a valores adecuados.

4.3. LEYES DE CONTROL BASADAS EN ENCODERS

Considere el sistema dinámico () donde $\dot{\mathbf{q}}$ puede ser considerado como la entrada de control. Definiendo la dinámica de error en lazo cerrado (4.21) con $\mathbf{e} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$ y la solución al problema cinemático inverso (3.23), podemos obtener la siguiente ley de control:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{cases} \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{G}_0(\mathbf{e} + \dot{\mathbf{x}}^*)) - \gamma(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger\mathbf{J})\frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{q}} & \text{si } |\mathbf{e}| > d_1 \\ \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{G}_2(\mathbf{e} + \dot{\mathbf{x}}^*)) - \gamma(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger\mathbf{J})\frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{q}} & \text{si } d_1 > |\mathbf{e}| > d_2 \\ \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{G}_3(\mathbf{e} + \dot{\mathbf{x}}^*)) - \gamma(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger\mathbf{J})\frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{q}} & \text{si } d_2 > |\mathbf{e}| > d_3 \\ \vdots & \\ \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{G}_n(\mathbf{e} + \dot{\mathbf{x}}^*)) - \gamma(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger\mathbf{J})\frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{q}} & \text{si } |\mathbf{e}| < d_n \end{cases} \quad (4.30)$$

Otra ley de control propuesta se basa en la dinámica del error en lazo cerrado (4.21) con el error definido en valores conjuntos: $\mathbf{e} = \mathbf{q}^* - \mathbf{q}$ obteniendo la ley de control:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{cases} \mathbf{G}_0(\mathbf{e}) + \dot{\mathbf{q}}^* & \text{si } |\mathbf{e}| > d_1 \\ \mathbf{G}_2(\mathbf{e}) + \dot{\mathbf{q}}^* & \text{si } d_1 > |\mathbf{e}| > d_2 \\ \mathbf{G}_3(\mathbf{e}) + \dot{\mathbf{q}}^* & \text{si } d_2 > |\mathbf{e}| > d_3 \\ \vdots & \\ \mathbf{G}_n(\mathbf{e}) + \dot{\mathbf{q}}^* & \text{si } |\mathbf{e}| < d_n \end{cases} \quad (4.31)$$

En este caso, el problema geométrico inverso se resuelve antes de la ejecución de la tarea para obtener el valor de $\mathbf{q}^*$ utilizando alguno de los algoritmos presentados en el apartado anterior.

4.4. LEY DE CONTROL EN EL ESPACIO DE CÁMARA

Siguiendo las pautas presentadas para el desarrollo de leyes de control basadas en señales de encoders y tomando el sistema dinámico (4.30) donde $\dot{\mathbf{q}}$ es la entrada de control. La ley de control resultante en espacio de cámara es

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{cases} \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}_{csm}^\dagger (\mathbf{G}_0(\mathbf{e} + \dot{\mathbf{s}}^*)) - \gamma(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{q}} & \text{si } |\mathbf{e}| > d_1 \\ \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}_{csm}^\dagger (\mathbf{G}_1(\mathbf{e} + \dot{\mathbf{s}}^*)) - \gamma(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{q}} & \text{si } d_1 > |\mathbf{e}| > d_2 \\ \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}_{csm}^\dagger (\mathbf{G}_2(\mathbf{e} + \dot{\mathbf{s}}^*)) - \gamma(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{q}} & \text{si } d_2 > |\mathbf{e}| > d_3 \\ \vdots & \\ \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}_{csm}^\dagger (\mathbf{G}_n(\mathbf{e} + \dot{\mathbf{s}}^*)) - \gamma(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{q}} & \text{si } |\mathbf{e}| < d_n \end{cases} \quad (4.32)$$

donde $\dot{\mathbf{s}}^*$ se estima utilizando la derivación numérica de $\mathbf{s}^*$ a partir de las mediciones en los ciclos de control anteriores.

En conjunto, las leyes de control desarrolladas en este capítulo proporcionan un marco sólido para la operación efectiva y segura del robot Delta reconfigurable. Estas estrategias teóricas sientan las bases para la validación experimental que se detallará en el siguiente capítulo, donde se evaluará su desempeño en tareas de posicionamiento y seguimiento de trayectorias. La capacidad de integrar la reconfiguración, la evitación de singularidades y diferentes modalidades sensoriales (encoders y visión) en un mismo marco de control representa un avance significativo hacia la explotación plena del potencial de esta novedosa arquitectura robótica.

5

Resultados experimentales

Esta sección presenta la configuración experimental implementada para validar las leyes de control diseñadas en las secciones anteriores. Primero, se dará una breve descripción del hardware y el software de las diferentes partes del banco de pruebas utilizado.

5.1. MEJORAS EN EL SISTEMA DE VISIÓN

El sistema de visión para el control del robot Delta ha sido un componente crítico en la precisión y eficiencia de las operaciones. Sin embargo, trabajos previos presentaban limitaciones significativas en la tasa de adquisición de imágenes (fps), resolución, escalabilidad con múltiples cámaras, y estabilidad del software. En esta sección se detalla las mejoras implementadas para optimizar estos aspectos, incluyendo la transición de cámaras uEye a Alvium, el desarrollo de código modular en C# y Python, y soluciones técnicas para sincronización y procesamiento de imágenes.

5.2. HARDWARE

Se utilizó una variante reconfigurable del robot Delta PARALLIX LKF-2040. El robot está compuesto por cuatro motores maxon 380961, cada uno de ellos controlado con una placa PICSERVO SC. La comunicación con las placas de control es serial a través de USB. Las placas controlan los actuadores mediante un controlador PID interno y reciben velocidades como comandos. Se colocó una cinta transportadora dentro del espacio de trabajo del robot para habilitar el seguimiento de objetos en movimiento. La Figura 5.1 muestra una imagen del sistema completo y la Figura 5.2 muestra un esquema del sistema de hardware y su flujo de trabajo. Se cuenta con un sistema de visión compuesto por dos cámaras Allied Vision de la línea Alvium con una resolución de 1296×964 capturando a 130 cuadros por segundo a través de UBS 3.0. Las cámaras están ubicadas a una distancia de aproximadamente 1.5 m del robot (ver Figura 5.2). Cada cámara está separada por 1 m. Se utilizó una computadora personal con un procesador Intel(R) Core(TM) i7-8700 CPU @ 3.20GHz de 6 núcleos y 12 hilos, y 16 gigabytes de RAM, para controlar las placas del robot, el sistema de visión y realizar el cálculo de la ley de control.

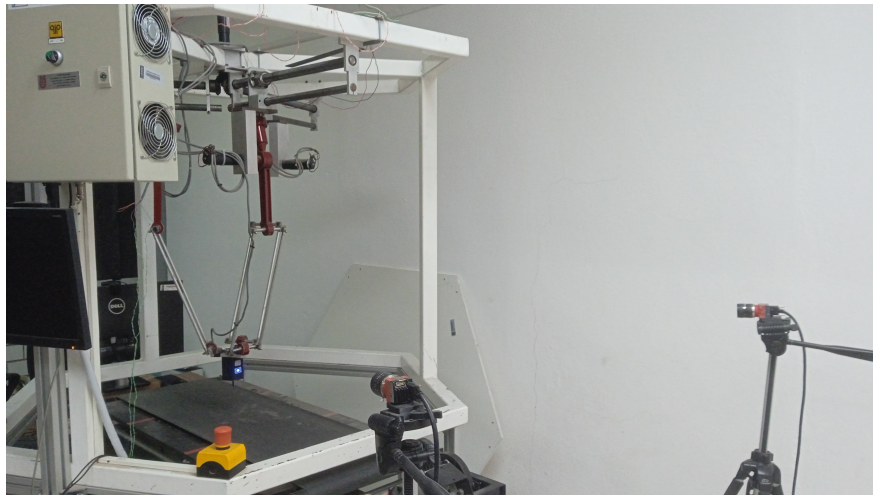


Figura 5.1: El robot delta reconfigurable y el sistema de cámaras.

5.3. SOFTWARE

El sistema de control fue programado utilizando Python 3.10. Los cálculos numéricos, necesarios en la ley de control, se realizaron usando NumPy 1.24.3 (Harris et al., 2020). La captura de imágenes se gestionó a través del SDK VimbaPython 6.0 proporcionado por el fabricante de

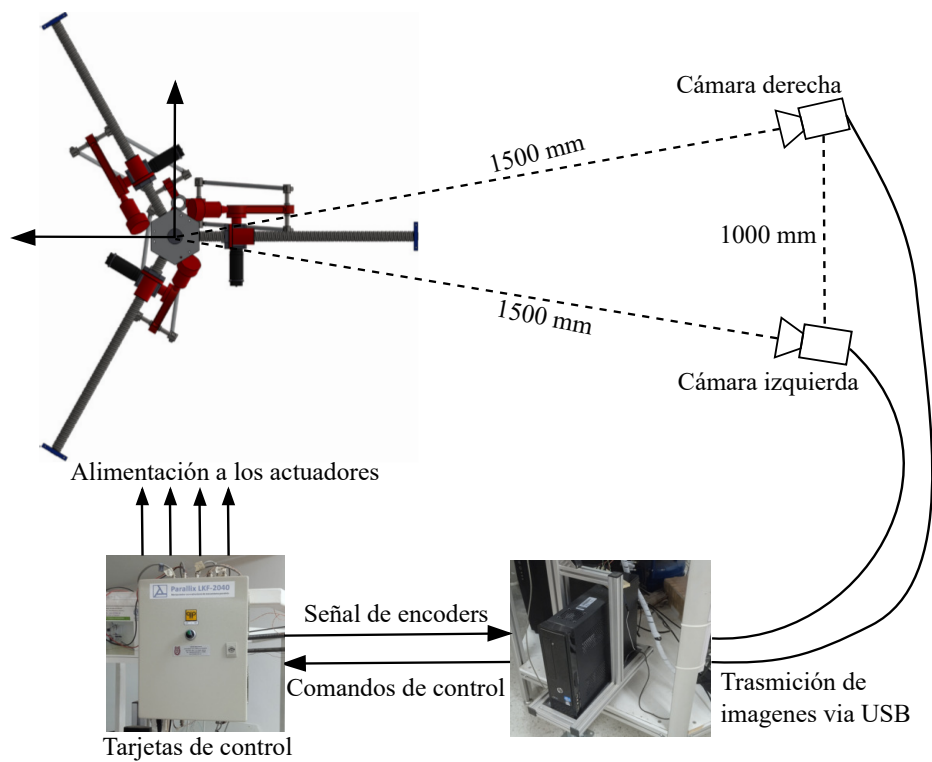


Figura 5.2: Esquema del sistema de hardware y su flujo de trabajo.

las cámaras, mientras que el procesamiento de imágenes utilizó OpenCV 4.7 (Bradski, 2000). Finalmente, se utilizó la biblioteca PyQt 5.15.9 (PyQt, 2012) para generar una interfaz gráfica y la gestión de hilos. El programa está compuesto por tres hilos principales:

- (i) Un hilo principal para todas las cámaras,
- (ii) Un hilo para enviar comandos al robot,
- (iii) Un hilo para el cálculo de la ley de control.

El tiempo de ciclo de control obtenido con la configuración mencionada fue de 16 ms.

5.4. CONFIGURACIÓN DE PRUEBAS

Primero, se utilizan tareas de posicionamiento estático para validar y comparar el rendimiento de la ley de control de convergencia exponencial (4.20) frente a la variante particionada (4.21) con velocidad de referencia igual a cero. Las posiciones de referencia se distribuyeron en el espacio de trabajo del robot y se ordenó al robot alcanzar esas posiciones utilizando las leyes de control diseñadas. Para la ley de control basada en visión, los parámetros de visión

se estimaron inicialmente utilizando lo que se conoce como un pre-plan. Durante este procedimiento, el robot se posiciona en una serie de puntos que cubren su espacio de trabajo. Para estas pruebas, se utilizaron 410 mediciones, distribuidas uniformemente en todo el espacio de trabajo del robot, con una separación de 50 mm en los ejes X y Y y 25 mm en el eje Z .

En segundo lugar, para validar completamente la ley de control basada en visión (4.32) y evaluar su rendimiento, se consideran dos tipos de experimentos:

- (i) El primer conjunto de experimentos para la ley de control CSM consiste en tareas de posicionamiento estático. Se realizan cuatro tareas de posicionamiento, tres veces cada una. Las posiciones se eligen al azar dentro del espacio de trabajo del robot. La maniobra se considera exitosa cuando se logra una norma del vector de error de menos de 2 píxeles durante, al menos, 40 ciclos de control. Este vector de error contiene las coordenadas en el espacio de imagen de las dos cámaras. La compensación de velocidad se establece en cero para evitar la entrada de ruido debido al estimador de velocidad.
- (ii) El segundo conjunto de experimentos para la ley de control CSM consiste en rastrear un objeto en movimiento sobre la cinta transportadora, siguiendo una trayectoria lineal a velocidad constante. No se utiliza información previa sobre la trayectoria del objetivo en los experimentos. El objetivo se coloca sobre una cinta transportadora situada dentro del espacio de trabajo del robot. El robot primero se mueve hacia el objeto objetivo. La cinta transportadora se pone en marcha solo una vez que se ha alcanzado una posición estática utilizando las condiciones mencionadas previamente. La cinta se mueve a velocidad constante con el robot siguiendo la posición del objeto. La prueba se detiene cuando el objeto alcanza el borde del espacio de trabajo del robot. Se utiliza la ley de control con compensación de velocidad.

La Figura 5.3 muestra el funcionamiento general del sistema de control utilizando el ejemplo de control visual para tareas de posicionamiento, donde el criterio de parada corresponde a cuando la norma del error es inferior a 2 píxeles. El funcionamiento es similar para la tarea de seguimiento, con la diferencia de que el criterio de parada corresponde a que el objetivo salga del área asignada para la tarea.

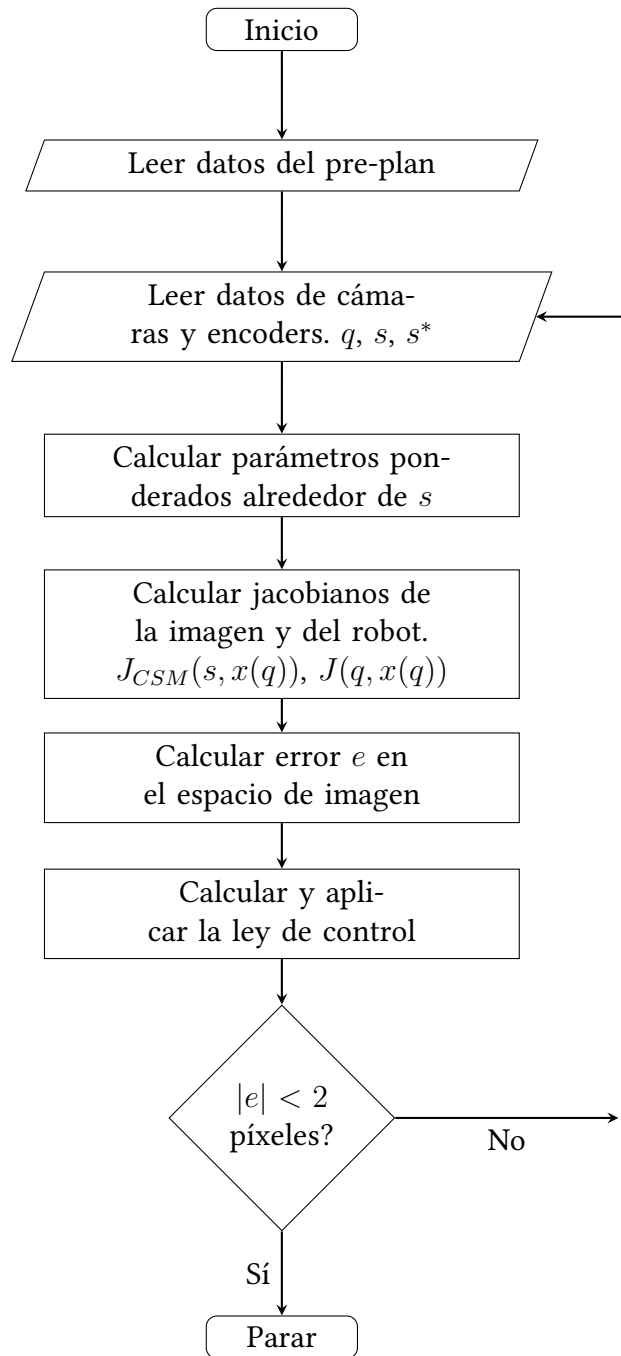


Figura 5.3: Funcionamiento general del sistema de control.

5.5. RESULTADOS

5.5.1. LEYES DE CONTROL DE CONVERGENCIA EXPONENCIAL VS. VARIANTES POR PARTES

Se ejecutaron tareas de posicionamiento estático utilizando la ley de control de convergencia exponencial (4.20) para comparar su rendimiento con las variantes por partes corres-

pendientes ((4.30)–(4.32)). Solo se muestran los resultados de las leyes de control en el espacio operacional, aunque se obtuvieron resultados similares para las leyes de control en los otros espacios. Las Figuras 5.4 y 5.5 muestran la norma del error y la señal de control, respectiva-

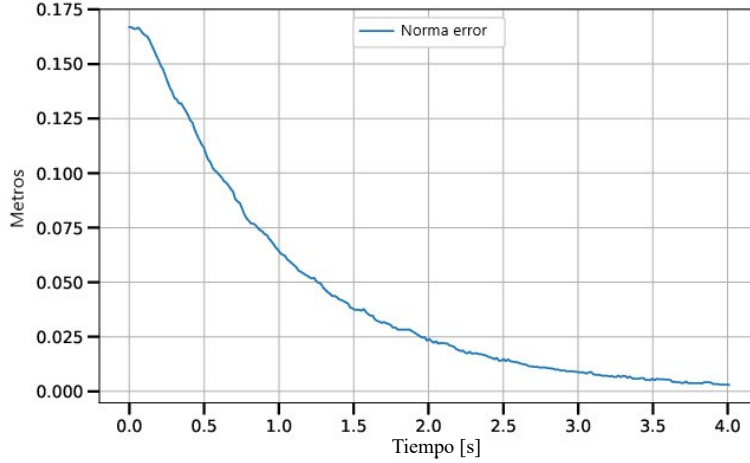


Figura 5.4: Norma del error vs. tiempo para la ley de control $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger \mathbf{G}(\mathbf{e}) - \gamma(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) \frac{\delta \mu}{\delta \mathbf{q}}$ con $\mathbf{e} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$.

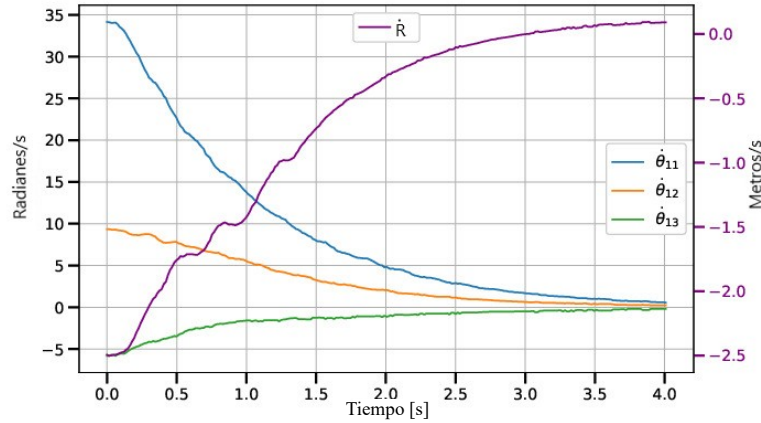


Figura 5.5: Velocidad angular de las articulaciones (radianes/s) vs. tiempo para la ley de control $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger \mathbf{G}(\mathbf{e}) - \gamma(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) \frac{\delta \mu}{\delta \mathbf{q}}$ con $\mathbf{e} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$.

mente, para la ley de control (4.21). De manera similar, las Figuras 5.6 y 5.7 muestran la norma del error y las señales de control para la variante por partes (4.30). Al comparar las imágenes, que consisten en la misma tarea de posicionamiento, se puede ver cómo la variante por partes es efectiva para mejorar el tiempo de convergencia de 4 s a 1.8 s, preservando el error cero en estado estacionario de la ley de control de convergencia exponencial.

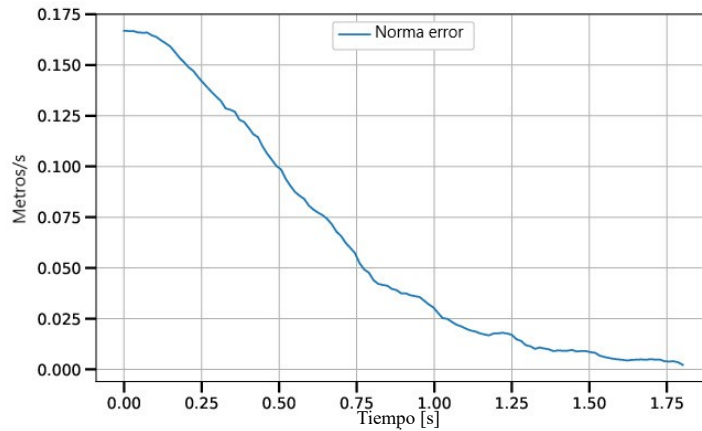


Figura 5.6: Norma del error vs. tiempo para la ley de control (4.30) con $\mathbf{e} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$.

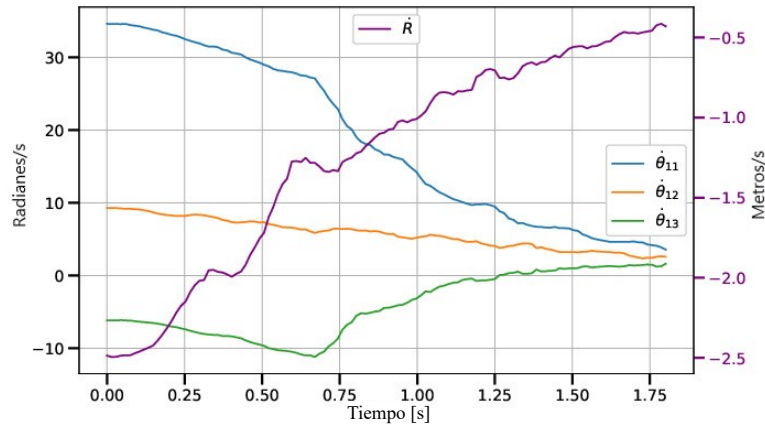


Figura 5.7: Velocidad angular de las articulaciones (radianes/s) vs. tiempo para la ley de control (4.30) con $\mathbf{e} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$.

5.5.2. LEY DE CONTROL EN EL ESPACIO DEL SENSOR DE VISIÓN

Para el primer conjunto de experimentos (es decir, posicionamiento estático) para la ley de control basada en visión, se obtuvo un error promedio de 0.604 mm. La Tabla 5.1 muestra más detalles sobre estos resultados. El error máximo y mínimo coinciden con el punto objetivo más alejado de las cámaras y el punto objetivo más cercano a las cámaras. Esto puede suceder porque la relación píxel/mm disminuye a medida que aumenta la distancia (este fenómeno también se observa en las tareas de seguimiento reportadas a continuación). La Figura 5.8 muestra la norma del error de posición en coordenadas de imagen, medida en píxeles. Se puede observar cómo el comportamiento de la norma es similar a una disminución lineal en la mayor parte del recorrido del robot. Esto es un efecto directo de la ley de control por partes. La Figura

	Error (mm)
Promedio	0.600
Máximo	1.530
Mínimo	0.172
Desviación Estándar	0.445

Tabla 5.1: Error de posicionamiento para la tarea de posicionamiento.

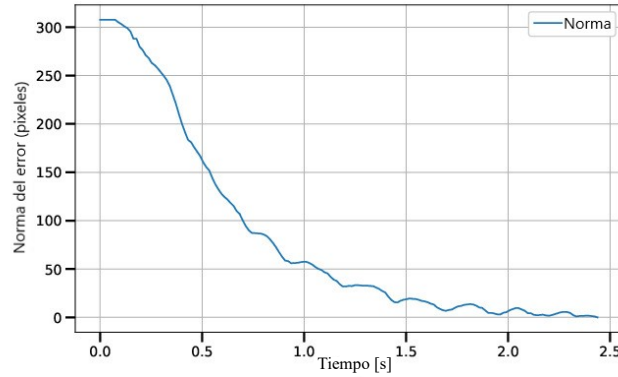


Figura 5.8: Norma del error de posicionamiento en el espacio de la imagen.

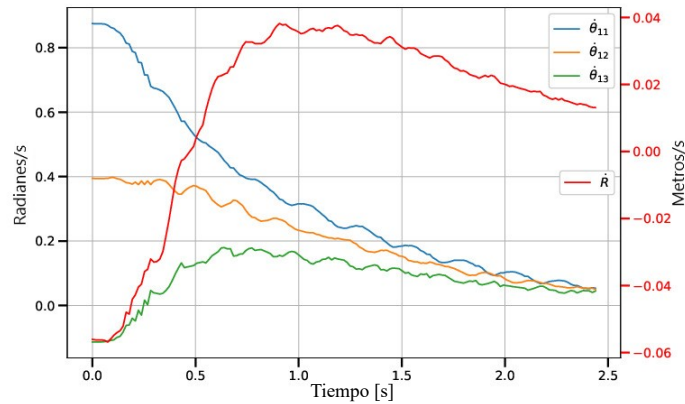


Figura 5.9: Señal de control de velocidad.

5.9 muestra las señales de velocidad enviadas a las placas de control. Las velocidades angulares ($\dot{\theta}_{1i}$) de las articulaciones rotacionales actuadas se miden en la escala de la izquierda, mientras que la velocidad de la articulación prismática de reconfiguración ($\dot{R}$) se mide en la escala de la derecha. En todos los casos, las señales tienden a cero.

Para la tarea de seguimiento de trayectorias a velocidad constante con la ley de control CSM, se midieron errores de arrastre promedio entre 2.5 mm y 11.5 mm para velocidades que

van desde 3.5 cm/s hasta 12.7 cm/s. El error de seguimiento aumenta a medida que aumenta la velocidad de la cinta transportadora. Los resultados se muestran en la Tabla 5.2. Las Figuras 5.10–5.12 muestran el error de seguimiento tanto en el espacio de la imagen como en el espacio operacional, para los experimentos a diferentes velocidades de la cinta transportadora. El

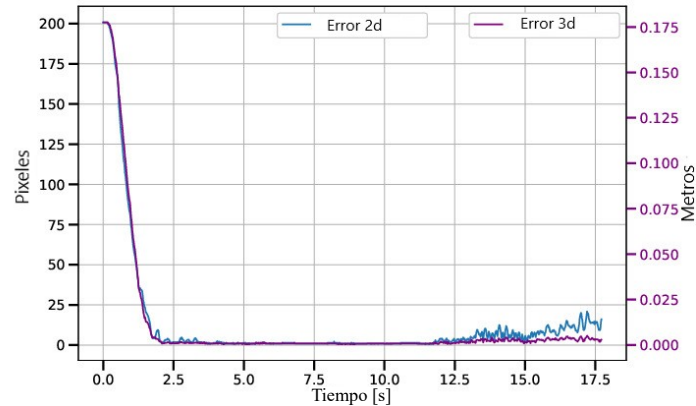


Figura 5.10: Error de seguimiento en los espacios de imagen y operacional para una velocidad de 6.5 cm/s.

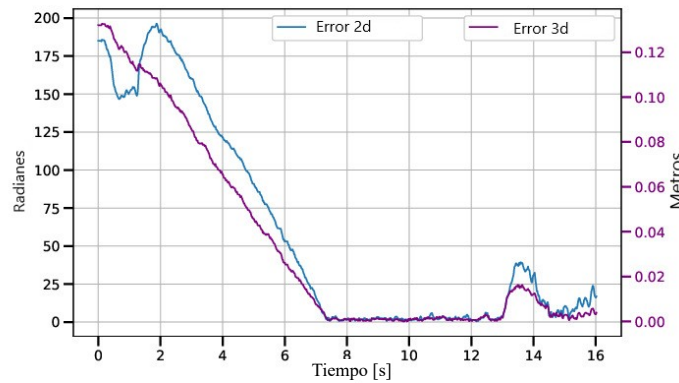


Figura 5.11: Error de seguimiento en los espacios de imagen y operacional para una velocidad de 9.3 cm/s.

error de seguimiento en el espacio de la imagen está representado por la línea azul y se mide en la escala de la izquierda, mientras que el error de seguimiento en el espacio operacional está representado por la línea violeta y se presenta en la escala de la derecha. Al inicio de los experimentos a 3.5 cm/s y 9.3 cm/s, el objeto está inmóvil y el robot se posiciona en el objetivo; luego, el objeto comienza a moverse a una velocidad constante y el robot sigue el objetivo. Para el experimento a 12.7 cm/s, el objetivo comienza a moverse desde el principio

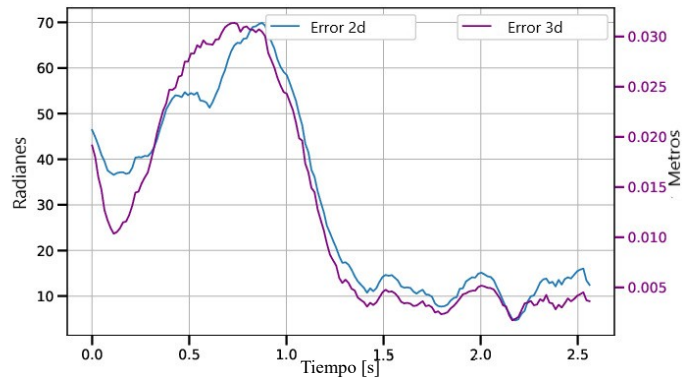


Figura 5.12: Error de seguimiento en los espacios de imagen y operacional para una velocidad de 12.7 cm/s.

del experimento. La Tabla 5.2 muestra los errores de seguimiento en el espacio operacional. El error de seguimiento consiste en el promedio de la norma del error desde el momento en que el objetivo comienza su movimiento hasta el final del experimento cuando el objetivo sale del área de trabajo. Este tiempo puede variar entre 2.5 s y 5 s dependiendo de la velocidad de seguimiento. El área de trabajo permite una trayectoria del objeto que cubre una distancia de 38 cm. Podemos ver que el error promedio siempre es una pequeña fracción de la distancia recorrida por el objetivo y se mantiene siempre por debajo del 3 %.

Velocidad de la cinta	Error promedio
6.5 cm/s	2.5 mm
9.3 cm/s	3.9 mm
12.7 cm/s	11.5 mm

Tabla 5.2: Error de seguimiento en el espacio operacional para la tarea de velocidad constante.

5.6. DISCUSIÓN

En la comparación entre las leyes de control de convergencia exponencial y las variantes por partes, se puede observar cómo la variante por partes es efectiva para mejorar el tiempo de convergencia a aproximadamente la mitad del tiempo original, mientras preserva el error cero en estado estacionario de la ley de control de convergencia exponencial. En aplicaciones prácticas, esto representa una ventaja significativa, ya que puede acelerar los procesos.

Con respecto a las leyes de control diseñadas en el espacio del sensor de visión, en las tareas de posicionamiento estático, se obtuvo un error de posicionamiento promedio de 0.6 mm. Esto implica una mejora en la precisión de posicionamiento en comparación con implementaciones previas de las leyes de control LCM-CSM/CSM (Rendón-Mancha et al., 2010; Lopez-Lara et al., 2020a; Loredó et al., 2022), donde se alcanzó una precisión de aproximadamente 1 mm. Esta mejora se puede atribuir tanto a la implementación de la matriz Jacobiana LCM-CSM que incluye la información de escala de profundidad como a la mayor resolución de las cámaras. En las pruebas realizadas, se observó una pérdida de precisión en la tarea de posicionamiento a medida que el objetivo se aleja de las cámaras. Esto se puede explicar por el hecho de que cuanto más lejos están las cámaras, menor es la correspondencia píxel/mm.

Para la tarea de seguimiento de trayectorias a velocidad constante, se lograron errores de seguimiento de entre 2.5 mm y 5 mm para velocidades de 6.5 a 12.7 cm/s. Estos resultados son competitivos con otros reportados en la literatura. Al igual que en la tarea de posicionamiento, hay un aumento en el error a medida que el objetivo se aleja de las cámaras. Se encontró que las velocidades estimadas promediando las últimas 10 derivadas numéricas producen señales muy ruidosas que se transfieren a la señal de control. Esto puede afectar el rendimiento del robot y generar un error de seguimiento mayor en comparación con una señal de velocidad más limpia. Si se tiene una estimación polinómica de la trayectoria en los últimos 10 pasos, la velocidad se puede calcular analíticamente.

Conclusiones

La presente tesis doctoral se ha centrado en el desafiante problema del modelado y control de robots paralelos reconfigurables, tomando como caso de estudio una arquitectura Delta con capacidad de reconfiguración geométrica. El **objetivo general** de la investigación fue: *“Diseñar y validar experimentalmente esquemas de control, tanto visual como no visual, para el Robot Delta reconfigurable del que se dispone en la facultad de ingeniería, que permita un mayor espacio de trabajo y optimice un índice de desempeño respecto al Robot Delta convencional.”* Para alcanzar esta meta, se abordaron sistemáticamente los aspectos teóricos, analíticos y prácticos, culminando en la implementación y prueba de las estrategias de control propuestas.

RECAPITULACIÓN DE CONTRIBUCIONES Y HALLAZGOS CLAVE

Los principales logros y contribuciones de este trabajo se pueden resumir de la siguiente manera, en correspondencia con los desarrollos presentados en los capítulos precedentes:

1. Modelado Integral y Análisis Cinemático del Robot Delta Reconfigurable (Capítulo 2):

- Se formularon de manera exhaustiva los modelos geométricos y cinemáticos, tanto directos como inversos (problemas de redundancia), para el robot Delta con reconfigurabilidad en el parámetro R de su base. Estos modelos detallados, no reportados previamente con este enfoque para esta arquitectura específica, constituyó la base matemática para todos los análisis y diseños de control subsecuentes.
- Se llevó a cabo un análisis de singularidades que identificó y caracterizó las configuraciones críticas del robot reconfigurable. Este análisis reveló que, si bien la reconfigurabilidad introduce un conjunto infinito de singularidades, también dota al sistema de los grados de libertad necesarios para, potencialmente, evitarlas mediante una gestión activa.

- Se evaluó la idoneidad de los índices de desempeño cinemático tradicionales (manipulabilidad de velocidad ω^v , manipulabilidad de fuerza ω^f , mínimos valores singulares $\sigma_{\min}^v$ y $\sigma_{\min}^f$, y recíproco del número de condición $1/k$) como criterios únicos de optimización. Se demostró, mediante ejemplos y análisis gráficos, que la optimización basada únicamente en estos índices clásicos puede conducir al robot a configuraciones singulares o extremadamente mal condicionadas.
- Como solución a las limitaciones anteriores, se propuso y validó un **nuevo índice de desempeño sensible a singularidades**, $\tilde{k}$. Este índice, construido a partir de funciones de normalización tipo campana para los mínimos valores singulares de velocidad y fuerza, penaliza tanto valores demasiado bajos (ceranos a la singularidad) como excesivamente altos. Se demostró que $\tilde{k}$ es efectivo para guiar la resolución de la redundancia hacia configuraciones seguras y robustas.
- La evaluación del efecto de la reconfigurabilidad, confirmó un incremento sustancial del **82 % en el volumen del espacio de trabajo** geoméricamente alcanzable y mejoras en la distribución y los valores mínimos de la manipulabilidad de velocidad, en comparación con una configuración estándar no reconfigurable del robot Delta (con $R = 0.200$ m).

2. Desarrollo de Estrategias de Control Avanzadas (Capítulo 3):

- Se introdujo una innovadora **ley de control proporcional con ganancias variables por partes**, cuya estabilidad asintótica fue demostrada. Esta estrategia no lineal ofrece una mejora en la velocidad de convergencia del error de seguimiento. Se integró la capacidad de manejar restricciones, como los límites articulares, mediante la proyección de una tarea secundaria en el espacio nulo del Jacobiano.
- Se formularon **leyes de control en velocidad basadas en la información de los encoders**. Estas leyes incorporan explícitamente la matriz Jacobiana del robot reconfigurable y utilizan la pseudoinversa de Moore-Penrose junto con el índice $\tilde{k}$ para la resolución óptima y segura de la redundancia, asegurando la evasión de singularidades.
- Se desarrolló una **ley de control visual en el espacio de la cámara**, adaptando la metodología LCM-CSM para operar en velocidad. Una aportación clave fue la formulación de un **Jacobiano de imagen** (J_{csm}) que explícitamente preserva la dependencia del factor de escala ρ con la profundidad del objeto observado, permi-

tiendo que los parámetros de visión sean constantes y mejorando la validez global del modelo.

3. Validación Experimental y Desempeño (Capítulo 4):

- Las mejoras en el sistema de visión, incluyendo nuevas cámaras y software optimizado, resultaron en un tiempo de ciclo de control de 16 ms.
- En tareas de **posicionamiento estático**, la ley de control visual alcanzó un error promedio de 0.6 **mm** (desviación estándar de 0.445 mm), demostrando alta precisión.
- En tareas de **seguimiento de objetos móviles** con trayectoria lineal (hasta 12.7 cm/s), se obtuvieron errores de seguimiento promedio entre 2.5 mm y 11.5 mm, con una alta precisión de posicionamiento final (< 1.53 mm) al detenerse el objeto.
- La ley de control proporcional con ganancias variables por partes demostró experimentalmente una **mejora en el tiempo de convergencia de hasta un 55 %** (1.8 s vs 4 s) en comparación con el control proporcional convencional, manteniendo la estabilidad.

RESPUESTA A LOS OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Los resultados obtenidos a lo largo de esta tesis permiten afirmar que se ha cumplido satisfactoriamente el objetivo general de *“Diseñar y validar experimentalmente esquemas de control, tanto visual como no visual, para el Robot Delta reconfigurable del que se dispone en la facultad de ingeniería, que permita un mayor espacio de trabajo y optimice un índice de desempeño respecto al Robot Delta convencional.”*

Específicamente:

- Se formularon los modelos cinemáticos y geométricos necesarios (Objetivo Particular 1).
- Se realizó un análisis de singularidades y se propuso el índice $\tilde{k}$ para optimizar el desempeño y evitar dichas singularidades, superando las limitaciones de los índices tradicionales (Objetivo Particular 2).
- Se diseñaron e implementaron leyes de control en velocidad basadas en encoders, utilizando $\tilde{k}$ para la resolución de redundancia y optimización (Objetivo Particular 3).

- Se mejoraron significativamente las capacidades del sistema de visión, logrando una mayor tasa de adquisición y procesamiento (Objetivo Particular 4).
- Se diseñó e implementó una ley de control visual (LCM-CSM en velocidad) que permite el posicionamiento y seguimiento de objetivos, incorporando un Jacobiano de imagen mejorado (Objetivo Particular 5).

La capacidad del robot reconfigurable para operar en un espacio de trabajo un 82 % mayor y la efectividad del índice $\tilde{k}$ y de las leyes de control propuestas para operar de forma segura y precisa validan el cumplimiento del objetivo general.

LIMITACIONES DEL TRABAJO

A pesar de los resultados positivos, es importante reconocer algunas limitaciones del presente estudio. Las leyes de control desarrolladas se basan principalmente en modelos cinemáticos, y no consideran explícitamente la dinámica completa del robot Delta reconfigurable. Si bien esto simplifica el diseño y la implementación, el desempeño en tareas de muy alta aceleración podría beneficiarse de la inclusión de compensación dinámica. La estimación de la velocidad del objetivo ($\dot{s}^*$) en el control visual se realizó mediante derivación numérica, lo cual, como se observó, puede introducir ruido; técnicas de estimación más sofisticadas podrían mejorar el seguimiento. Finalmente, la validación experimental se realizó en un prototipo de laboratorio específico; la generalización a otras plataformas o a entornos industriales requeriría adaptaciones y pruebas adicionales.

IMPLICACIONES Y SIGNIFICADO DEL TRABAJO

Esta tesis contribuye al avance del conocimiento en el campo de los robots paralelos reconfigurables y su control. Las principales implicaciones son:

- La demostración de que la reconfigurabilidad geométrica, gestionada inteligentemente, es una vía viable para superar limitaciones significativas de los robots paralelos convencionales en términos de alcance y desempeño cinemático.
- La propuesta del índice $\tilde{k}$ ofrece una herramienta novedosa y efectiva para la resolución de redundancia en robots paralelos, con un enfoque explícito en la seguridad operativa al evitar singularidades.

- El desarrollo de un Jacobiano de imagen dependiente de la profundidad para el control LMC-CSM en velocidad representa una mejora metodológica que puede beneficiar a otras aplicaciones de control visual donde la profundidad varía significativamente, permitiendo parámetros de visión constantes.
- Las estrategias de control y los resultados experimentales proporcionan una base sólida y un punto de partida para futuras investigaciones y aplicaciones industriales de robots Delta reconfigurables en tareas complejas y dinámicas.

Este trabajo subraya la importancia de un enfoque integrado que combine el modelado preciso, el análisis de desempeño y el diseño de control avanzado para materializar el potencial de las arquitecturas robóticas innovadoras.

TRABAJOS FUTUROS

Los hallazgos y desarrollos de esta tesis abren diversas avenidas para investigaciones futuras, entre las que destacan:

- **Implementación y Validación Extendida:** Probar las leyes de control propuestas en otras arquitecturas de robots paralelos reconfigurables o con diferentes tipos de redundancia para evaluar su generalidad.
- **Control Basado en Dinámica:** Desarrollar e integrar modelos dinámicos del robot Delta reconfigurable en las leyes de control (e.g., control adaptativo o robusto basado en IDC) para mejorar el desempeño en tareas de alta velocidad y aceleración, y para la manipulación de cargas variables.
- **Estimación Avanzada para Control Visual:** Investigar e implementar métodos más sofisticados para la estimación de la velocidad del objetivo ($\dot{s}^*$) y de la profundidad (ρ) en el control visual, como filtros de Kalman extendidos, observadores no lineales o enfoques basados en aprendizaje automático, para mejorar la precisión y robustez del seguimiento de trayectorias complejas.
- **Planificación de Movimiento Óptima:** Desarrollar algoritmos de planificación de trayectorias que exploten activamente la capacidad de reconfiguración del robot para optimizar criterios como el tiempo de ciclo, el consumo energético o la calidad de la tarea, utilizando el índice $\tilde{k}$ y otros para garantizar la evasión de singularidades y el cumplimiento de restricciones.

- **Interacción Física y Aplicaciones Industriales:** Extender las estrategias de control para incluir la interacción física con el entorno (e.g., control de fuerza/impedancia) y explorar la aplicación del robot Delta reconfigurable y sus controles en escenarios industriales específicos que puedan beneficiarse de su versatilidad y desempeño mejorado.
- **Análisis Comparativo de Índices de Desempeño:** Realizar un estudio más profundo sobre la correlación entre el nuevo índice $\tilde{k}$ y otros índices globales o específicos de tarea para comprender mejor sus implicaciones en diferentes contextos operativos.

La continuación de estas líneas de investigación permitirá seguir avanzando en la comprensión y aplicación de robots paralelos reconfigurables, con el potencial de impactar significativamente en la automatización industrial y otras áreas tecnológicas.

Bibliografía

- Asada, H. H. (1983). A geometrical representation of manipulator dynamics and its application to arm design. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-transactions of The Asme*, 105:131–142.
- Balmaceda-Santamaria, A. L., Castillo-Castañeda, E., and Gallardo-Alvarado, J. (2016). A novel reconfiguration strategy of a delta-type parallel manipulator. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 13.
- Borràs, J., Thomas, F., Ottaviano, E., and Ceccarelli, M. (2009). A reconfigurable 5-dof 5-spu parallel platform. *2009 ASME/IFToMM International Conference on Reconfigurable Mechanisms and Robots*, pages 617–623.
- Bradski, G. (2000). The OpenCV Library. *Dr. Dobb's Journal of Software Tools*.
- Briot, S. and Khalil, W. (2015). *Dynamics of Parallel Robots*, volume 35. Springer International Publishing.
- Brisan, C. (2007). Designing aspects of a special class of reconfigurable parallel robots. In Sobh, T., Elleithy, K., Mahmood, A., and Karim, M., editors, *Innovative Algorithms and Techniques in Automation, Industrial Electronics and Telecommunications*, pages 101–106, Dordrecht. Springer Netherlands.
- Champneys, A. R. and di Bernardo, M. (2008). Piecewise smooth dynamical systems. *Scholarpedia*, 3:4041.
- Chen, I.-M. and Yang, G. (1996). Configuration independent kinematics for modular robots. *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2:1440–1445 vol.2.
- Chiacchio, P. (2000). A new dynamic manipulability ellipsoid for redundant manipulators. *Robotica*, 18:381 – 387.
- Clavel, R. (1988). Delta, a fast robot with parallel geometry. In *In: Proceedings of the 18th international symposium on industrial robots, Lausanne, Switzerland*, pages 91–100.
- Cloutier, G. M., Jutard, A., and Bétemps, M. (1994). A robot-task conformance index for the design of robotized cells. *Robotics Auton. Syst.*, 13:233–243.

- Corves, B., Shahidi, S. A., Lorenz, M., Eddine, S. C., and Hüsing, M. (2018). Study of redundantly actuated delta-type parallel kinematic mechanisms. In Zeghloul, S., Romdhane, L., and Laribi, M. A., editors, *Computational Kinematics*, pages 291–298, Cham. Springer International Publishing.
- Doty, K. L., Melchiorri, C., Schwartz, E. M., and Bonivento, C. (1995). Robot manipulability. *IEEE Trans. Robotics Autom.*, 11:462–468.
- Ghazi, M., Nazir, Q., Butt, S. U., and Baqai, A. A. (2018). Accuracy Analysis of 3-RSS Delta Parallel Manipulator. *Procedia Manufacturing*, 17:174–182.
- González, A., Gonzalez-Galvan, E. J., Maya, M., Cardenas, A., and Piovesan, D. (2019). Estimation of camera-space manipulation parameters by means of an extended kalman filter: Applications to parallel robots. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 16(2):1729881419842987.
- Gosselin, C. (1990). Stiffness mapping for parallel manipulators. *IEEE Trans. Robotics Autom.*, 6:377–382.
- Gosselin, C. and Angeles, J. (1990). Singularity analysis of closed loop kinematic chains. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 6(3):281–290.
- Gosselin, C. and Schreiber, L.-T. (2018). Redundancy in Parallel Mechanisms: A Review. *Applied Mechanics Reviews*, 70(1). 010802.
- Haage, M., Dressler, I., Robertsson, A., Nilsson, K., Brogårdh, T., and Johansson, R. (2009). Reconfigurable parallel kinematic manipulator for flexible manufacturing. *IFAC Proceedings Volumes*, 42:145–150.
- Harada, T. and Angeles, J. (2017). From the mcgill pepper-mill carrier to the kindai atarigi carrier: A novel two limbs six-dof parallel robot with kinematic and actuation redundancy. In *2017 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, pages 1328–1333.
- Hartley, A. and Zisserman, A. (2003). Multiple view geometry in computer vision (2. ed.). In *Multiple view geometry in computer vision (2. ed.)*.
- Harris, C. R., Millman, K. J., van der Walt, S. J., Gommers, R., Virtanen, P., Cournapeau, D., Wieser, E., Taylor, J., Berg, S., Smith, N. J., Kern, R., Picus, M., Hoyer, S., van Kerkwijk, M. H., Brett, M., Haldane, A., del Río, J. F., Wiebe, M., Peterson, P., Gérard-Marchant, P., Sheppard, K., Reddy, T., Weckesser, W., Abbasi, H., Gohlke, C., and Oliphant, T. E. (2020). Array programming with NumPy. *Nature*, 585(7825):357–362.
- Hu, L., Gao, H., Qu, H., and Liu, Z. (2022). Closeness to singularity based on kinematics and dynamics and singularity avoidance of a planar parallel robot with kinematic redundancy. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 236(7):3717–3730.

- Khatib, O. (1995). Inertial properties in robotic manipulation: An object-level framework. *The International Journal of Robotics Research*, 14:19 – 36.
- Khosravi, M. A. and Taghirad, H. D. (2011). Dynamic analysis and control of cable driven robots with elastic cables. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, 35(4):543–557.
- Kim, S.-G. and Ryu, J. (2003). New dimensionally homogeneous jacobian matrix formulation by three end-effector points for optimal design of parallel manipulators. *IEEE Trans. Robotics Autom.*, 19:731–736.
- Kong, M., Zhang, Y., Du, Z., and Sun, L. (2007). A novel approach to deriving the unit-homogeneous jacobian matrices of mechanisms. *2007 International Conference on Mechatronics and Automation*, pages 3051–3055.
- Kucuk, S. and Bingul, Z. (2005). Robot workspace optimization based on a novel local and global performance indices. *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics, 2005. ISIE 2005.*, 4:1593–1598.
- Kucuk, S. and Bingul, Z. (2006). Comparative study of performance indices for fundamental robot manipulators. *Robotics Auton. Syst.*, 54:567–573.
- Kuo, Y. L. (2016). Mathematical modeling and analysis of the Delta robot with flexible links. *Computers and Mathematics with Applications*, 71(10):1973–1989.
- Lipkin, H. and Duffy, J. (1988). Hybrid twist and wrench control for a robotic manipulator. *Journal of Mechanisms Transmissions and Automation in Design*, 110:138–144.
- Lopez, A., Maya Mendez, M., Cardenas, A., González-Galván, E., and González, A. (2017). Control en velocidad, basado en visión, de un robot paralelo tipo delta. In *Control en Velocidad, Basado en Visión, de un Robot Paralelo Tipo Delta*.
- Lopez-Lara, J. G., Maya, M. E., González, A., Cardenas, A., and Felix, L. (2020a). Image-based control of delta parallel robots via enhanced LCM-CSM to track moving objects. *Industrial Robot: the international journal of robotics research and application*, 47(4):559–567.
- Lopez-Lara, J. G., Maya, M. E., González, A., Cardenas, A., and Felix, L. (2020b). Image-based control of delta parallel robots via enhanced lcm-csm to track moving objects. *Industrial Robot*.
- Loredo, A., Maya, M., González, A., Cardenas, A., Gonzalez-Galvan, E., and Piovesan, D. (2022). A novel velocity-based control in a sensor space for parallel manipulators. *Sensors*, 22(19).
- Lucas, M. and y Beno Benhabib, J. K. M. (2017). A review of redundant parallel kinematic mechanisms. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, volumen:86:175–198.

- Ma, O. and Angeles, J. (1991). Optimum architecture design of platform manipulators. *Fifth International Conference on Advanced Robotics 'Robots in Unstructured Environments*, pages 1130–1135 vol.2.
- Maya, M., Castillo, E., Lomelí, A., González-Galván, E., and Cárdenas, A. (2013). Workspace and payload-capacity of a new reconfigurable delta parallel robot. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 10(1):56.
- Merlet, J.-P. (2006). *Parallel robots*. Kluwer Academic Publishers.
- Milutinović, D., Slavković, N., Kokotović, B., Milutinović, M., Živanović, S., and Dimić, Z. (2012). Kinematic modeling of reconfigurable parallel robots based on delta concept. In *Proceedings of the 11th International Scientific Conference MMA 2012 – Advanced Production Technologies, Novi Sad, Serbia, September 20-21, 2012*, pages 262–259. University of Novi Sad, Faculty of Technical Sciences, Department for Production Engineering.
- Moosavian, A. and Xi, F. J. (2016). Modular design of parallel robots with static redundancy. *Mechanism and Machine Theory*, 96:26–37.
- Mostashiri, N., Dhupia, J., and Xu, W. (2020). Redundancy in parallel robots: A case study of kinematics of a redundantly actuated parallel chewing robot. In P. P. Abdul Majeed, A., Mat-Jizat, J. A., Hassan, M. H. A., Taha, Z., Choi, H. L., and Kim, J., editors, *RITA 2018*, pages 65–78, Singapore. Springer Singapore.
- Mostashiri, N., Dhupia, J. S., Verl, A. W., and Xu, W. (2018). A review of research aspects of redundantly actuated parallel robots for enabling further applications. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 23(3):1259–1269.
- Nurahmi, L. and Caro, S. (2016). Dimensionally homogeneous jacobian and condition number. *Applied Mechanics and Materials*, 836:42 – 47.
- Pandilov, Z. and Dukovski, V. (2011). Several open problems in parallel robotics. *ACTA TEHNICA CORVINIENSIS – Bulletin of Engineering*.
- Pandilov, Z. and Dukovski, V. (2014). Comparison of the characteristics between serial and parallel robots. *ACTA TEHNICA CORVINIENSIS – Bulletin of Engineering*.
- Patel, S. H. and Sobh, T. M. (2014). Manipulator performance measures - a comprehensive literature survey. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 77:547 – 570.
- Pierrot, F., Reynaud, C., and Fournier, A. (1990). Delta: a simple and efficient parallel robot. *Robotica*, 8(2):105–109.
- Plitea, N., Lese, D., Pisla, D., and Vaida, C. (2013). Structural design and kinematics of a new parallel reconfigurable robot. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 29(1):219–235.

- Pond, G. T. and Carretero, J. A. (2006). Formulating jacobian matrices for the dexterity analysis of parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 41:1505–1519.
- Pond, G. T. and Carretero, J. A. (2007). Quantitative dexterous workspace comparison of parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 42:1388–1400.
- Pulloquina, J. L., Escarabajal, R. J., Ferrándiz, J., Vallés, M., Mata, V., and Urizar, M. (2021). Vision-based hybrid controller to release a 4-dof parallel robot from a type ii singularity. *Sensors*, 21(12):4080.
- PyQt, A. (2012). PyQt reference guide.
- Ranjbaran, F., Angeles, J., and Kecskeméthy, A. (1996). On the kinematic conditioning of robotic manipulators. *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 4:3167–3172 vol.4.
- Rendon-Mancha, J. M., Cardenas, A., Garcia, M. A., Gonzalez-Galvan, E., and Lara, B. (2010). Robot positioning using camera-space manipulation with a linear camera model. *IEEE Transactions on Robotics*, 26(4):726–733.
- Rendón-Mancha, J. M., Cárdenas, A., García, M. A., and Lara, B. (2010). Robot positioning using camera-space manipulation with a linear camera model. *IEEE Transactions on Robotics*, 26(4):726–733.
- Rosyid, A., El-Khasawneh, B., and Alazzam, A. (2020). Review article: Performance measures of parallel kinematics manipulators. *Mechanical Sciences*.
- Shahidi, S. A., Lorenz, M., Eddine, S. C., Husing, M., and Corves, B. (2017). A survey on precision of redundantly actuated delta-type parallel kinematic mechanisms. *2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*.
- Singh, A., Kalaichelvi, V., Karthikeyan, R., and Darwish, A. H. (2022). A survey on vision guided robotic systems with intelligent control strategies for autonomous tasks. *Cogent Engineering*, 9.
- Skaar, S. B., Brockman, W. H., and Hanson, R. S. (1987). Camera-space manipulation. *The International Journal of Robotics Research*, 6:20 – 32.
- Spong, M. W., Hutchinson, S., and Vidyasagar, M. (2005). *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.
- Sánchez-Alonso, R.-E., Castillo Castaneda, E., Gonzalez-Barbosa, J.-J., and Balmaceda-Santamaría, A. (2015). Análisis del desempeño cinetostático de un robot paralelo tipo delta reconfigurable. *Ingeniería, Investigación y Tecnología*, 40:213–224.
- Sánchez-Alonso, R. E., González-Barbosa, J.-J., and y Mario A. García-Murillo, E. C.-C. (2016). Análisis cinemático de un novedoso robot paralelo reconfigurable. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 13(2):247–257.

- Taghirad, H. (2013). *Parallel robots : mechanics and control*. CRC Press.
- Vasilic, G., Zivanovic, S., Kokotovic, B., and Dimic, Z. (2019). Configuring and analysis of a class of generalized reconfigurable 2-axis parallel kinematic machine. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 33(7):3407–3421.
- Wang, S. T., Cheng, G., Pang, Y., and Lodewijks, G. (2015). Integrated stiffness analysis of redundant parallel manipulator based on finite element method. *The Journal of Information and Computational Science*, 12:351–365.
- Wu, J., Wang, J., Wang, L., and You, Z. (2010). Performance comparison of three planar 3-dof parallel manipulators with 4-rrr, 3-rrr and 2-rrr structures. *Mechatronics*, 20:510–517.
- Xi, F., Li, Y., and Wang, H. (2011). Module-based method for design and analysis of reconfigurable parallel robots. *Frontiers of Mechanical Engineering*, 6:151–159.
- Xie, Y., Wang, W., Zhao, C., Skaar, S. B., and Wang, Q. (2020). A differential evolution approach for camera space manipulation. In *2020 2nd World Symposium on Artificial Intelligence (WSAI)*, pages 103–107. IEEE.
- y Eduardo Castillo-Castaneda y Jaime Gallardo-Alvarado, A. L. B.-S. (2016). A novel reconfiguration strategy of a delta-type parallel manipulator. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 13(1):15.
- y L. Schreiber, C. G. (2018). Redundancy in parallel mechanisms: A review. *Applied Mechanics Reviews*, 70(1):15.
- Yoshikawa, T. (1985). Manipulability of robotic mechanisms. *The International Journal of Robotics Research*, 4(2):3–9.
- Yu, A., Bonev, I. A., and Zsombor-Murray, P. J. (2008). Geometric approach to the accuracy analysis of a class of 3-dof planar parallel robots. *Mechanism and Machine Theory*, 43:364–375.
- Zhang, D. and Wei, B. (2014). Comparison and verification of several stiffness models for a family of parallel manipulators. In *Proceedings of the International Conference of Control, Dynamic Systems, and Robotics*.
- Zhang, H., Fang, H., and Zou, Q. (2020). Non-singular terminal sliding mode control for redundantly actuated parallel mechanism. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 17(2):1729881420919548.



UASLP
Universidad Autónoma
de San Luis Potosí



FACULTAD DE
INGENIERÍA

TESIS presentada en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí para obtener el grado de Doctor en Ingeniería Mecánica.

Arturo Franco López
arturo.franco@uaslp.mx.
Mayo, 2025