



Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Facultad de Ingeniería
Centro de Investigación y Estudios de Posgrado

**“Modelado matemático para la optimización de equipos
HIGmill a escala industrial
mediante el balance poblacional (MBP)”**

Tesis

Que para obtener el grado de:

Maestría en Ingeniería de Minerales

Presenta:

I. de M. Roberto Divani Zavala Puente

Asesor:

Dr. Gilberto Rosales Marín

PROYECTO FINANCIADO POR:

Consejo Nacional de Humanidades Ciencia y Tecnología (CONAHCYT).

Beca número: 1241756

San Luis Potosí, S. L. P.

Septiembre 2024





Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Facultad de Ingeniería
Centro de Investigación y Estudios de Posgrado

**“Modelado matemático para la optimización de equipos
HIGmill a escala industrial
mediante el balance poblacional (MBP)”**

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRÍA EN INGENIERÍA DE MINERALES

PRESENTA:

I. de M. Roberto Divani Zavala Puente

SINODALES:

Dr. Gilberto Rosales Marín

Dr. Israel Rodríguez Torres

Dr. Iván Alejandro Reyes Domínguez

M. en C. José Manuel Hernández Covarrubias

San Luis Potosí, S. L. P.

Septiembre 2024



16 de mayo de 2024

**ING. ROBERTO DIVANI ZAVALA PUENTE
P R E S E N T E.**

En atención a su solicitud de Temario, presentada por el **Dr. Gilberto Rosales Marín** Asesor de la Tesis que desarrollará Usted con el objeto de obtener el Grado de **Maestro en Ingeniería de Minerales**, me es grato comunicarle que en la sesión del H. Consejo Técnico Consultivo celebrada el día 16 de mayo del presente año, fue aprobado el Temario propuesto:

TEMARIO:

"Modelado matemático para la optimización de equipos HIGmill a escala industrial mediante el balance poblacional (MBP)"

Resumen

- I. Introducción a la Molienda Ultrafina
- II. Justificación
- III. Objetivos
- IV. Antecedentes de la Molienda Ultrafina y Modelado Matemático
- V. Metodología Experimental
- VI. Resultados y discusiones
- VII. Conclusiones

Bibliografía

"MODOS ET CUNCTARUM RERUM MENSURAS AUDEBO"

A T E N T A M E N T E



DR. EMILIO JORGE GONZÁLEZ GALVÁN
DIRECTOR



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE SAN LUIS POTOSÍ
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIRECCION

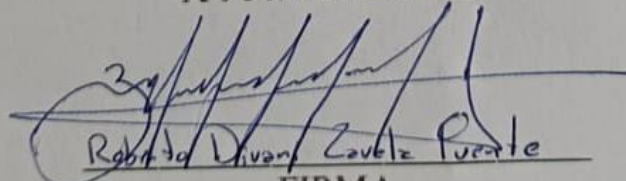


El que suscribe Roberto Divani Zavala Puente,
con domicilio en Sor Juana Inés de la Cruz #124
Colonia / fraccionamiento Magisterial Los Reyes
C.P. 78720 Tel. 488 119 80 42 Ciudad Matamoros
y en mi carácter de autor y titular de la tesis que
lleva como nombre: "Modelado matemático para la optimización de equipos H16mill o escala
industrial mediante el balance poblacional (MBP)", en lo sucesivo "LA OBRA" y por
ende, cedo y autorizo a la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, para que
lleve a cabo la divulgación, publicación, reproducción, así como la digitalización
de la obra, en formato electrónico y sin fines de lucro.

La Universidad Autónoma de San Luis Potosí, se compromete a respetar
en todo momento mi autoría y a otorgarme el crédito correspondiente.

San Luis Potosí, S.L.P., a 9 de Septiembre de 2024.

Atentamente,



FIRMA
AUTOR

Dedicatoria

«-Gracias doy al cielo por la merced que me hace, pues tan presto me pone ocasiones delante donde yo pueda cumplir con lo que debo a mi profesión, y donde pueda coger el fruto de mis buenos deseos.»

-Miguel de Cervantes Saavedra, El Ingenioso Hidalgo Don Quijote de la Mancha.

«...en el momento en el que uno se compromete de verdad, la Providencia también lo hace. Toda clase de cosas comienzan a ocurrir para ayudar a esa persona, cosas que sin su previo compromiso jamás habrían ocurrido.»

-Johann Wolfgang Von Goethe, Poesía y Verdad.

Quiero dedicar este trabajo a Dios (YHVH, Yahveh, Jehová, Soy el que soy, el gran arquitecto...) quien siempre estuvo presente en el breve recorrido de esta aventura.

Quiero dedicar este trabajo a mi familia y a mis amigos, que también son mi otra familia.

Quiero también dedicar este trabajo a cada una de las personas que me compartieron un fragmento de su ser en este lapso de mi vida apoyándome para realizar este trabajo, sin su contribución esto tal vez no sería posible, los aprecio muchísimo.

Y dedicarle este trabajo a mi padre Adolfo de Jesús Zavala Peña por salir de la enfermedad que lo aquejó en el transcurso de este año, te amo.

Agradecimientos

Quiero agradecer a Dios, por permitirme tener este logro y manifestarse, a mi perspectiva, en cada una de las personas que me apoyaron de buen corazón en el camino hacia este grado.

Quiero agradecer a quien considero desde un principio me apoyó con la decisión de optar por el camino del estudio científico en la minería, al Dr. Gilberto Rosales Marín, porque además de ser mi asesor, amigo y estar en todo momento, también, es el padre intelectual que dio dirección a las ideas sobre lo que tenía era hacer metalurgia con su buen consejo, recomendaciones, observaciones y mucha paciencia. Gracias a usted soy el profesionalista que por hoy se desenvuelve en este apasionante mundo de la metalurgia. Gracias por todo.

A mis padres Adolfo de Jesús Zavala Puente y Diana Alicia Puente Álvarez por apoyarme en esta decisión de continuar con mis estudios con su amor y paciencia en cada una de las etapas que conllevó la transición de mis estudios.

A mis sinodales, al Dr. Israel Rodríguez Torres y al Dr. Iván Reyes Domínguez, por sus consejos y observaciones para la elaboración de mi trabajo de tesis.

A la maestra Laila Silahua Abirrached, y a su familia, Madaí, Antar y al Dr. Raúl Almaguer (que en paz descansa) por darme el calor de un hogar mientras residí en SLP. Por los consejos y enseñanzas sobre geología, pero también el ejemplo de ser una buena persona con amor a su profesión.

Al Instituto de Metalurgia y a su personal:

A mis maestros Dr. Roberto Briones, Dr. Cristóbal Pérez Alonso y al Dr. Antonio Aragón Piña, por los conocimientos que me transmitieron y el apoyo que me dieron en todo momento como su alumno.

A Rossy de laboratorio de DRX contagiarme por su amor a los minerales y a la amistad y apoyo que me ofreció durante mis estancias; a Izanami, Laura y Carlos del laboratorio de análisis químicos, por su amistad, colaboración y enseñanza de los equipos de ensayos químicos; y a Manu y a paquito de procesamiento de minerales, por sus amistad, consejos y recomendaciones para mi futura labor como metalurgista.

A mis compañeros Abel Montes, Javier Vilaso, Amir Sánchez, Jessica Martínez, Yuliana Vázquez, Dra. Amanda, Néstor Castillo, Jared López, Alondra Martínez, Arait Montoya y Sócrates Alonso por su sincera amistad, apoyo, y momentos de risa durante la carrera. Deseo triunfen profesionalmente en sus proyectos.

Agradecer al personal administrativo Jenny Zertuche y a Nallely Martínez, por su atención y apoyo para todos los tramites que se realizan constantemente.

Quiero agradecer a mi Sinodal el M. en C. José Manuel Hernández Covarrubias, quien me ayudó en la elaboración de este trabajo de tesis, de manera técnica, profesional y siendo él por el que el trabajo tomó el rumbo en el que me desenvolví en la industria con el equipo que fue objeto de mi estudio, quien estuvo en todo momento al pendiente de mi avance, de mi persona y de mi trabajo en la industria, brindándome la orientación necesaria para cumplir con mis objetivos, sus observaciones como sinodal en mi trabajo y por sus consejos y amistad. Gracias, por tanto.

Quiero agradecer a la empresa Fresnillo PLC y a su personal:

A quien me abrió las puertas a la empresa, el Ing. Leopoldo Avilés, quien me apoyó con las recomendaciones, permisos para llevar a cabo el proyecto y mi estancia en Fresnillo, estando al pendiente de mi persona y su buena vibra.

Al personal de RRHH Alejandro Gonzales Dimas, por estar al pendiente de mi estancia en Fresnillo, coadyuvando para las facilidades que tuve cuando residí en la hacienda Proaño, de Fresnillo y su apoyo en todo momento.

Al equipo que integra la planta de Piritas de Fresnillo PLC:

A Sadam Elías Torres Valle, por la ayuda para la elaboración y coordinación del muestreo que llevé a cabo para este trabajo, estando al pendiente de mí persona y de mi trabajo, brindándome apoyo en todo momento; y por su amistad durante mi estancia en Fresnillo.

A Daniel Saucedo por brindarme el apoyo y el permiso para llevar a cabo dicho trabajo en la planta de piritas, apoyándome en las decisiones que tomé.

A Eduardo Bolaños, por brindarme el apoyo dentro del laboratorio para trabajar con las muestras recolectadas, estar al pendiente de mi persona, por su amistad, consejos y recomendaciones.

Al equipo de piritas: Daniel Méndez, Roberto, Martín, Diego, Manu, Gaby, Samantha y Jara. Por su amistad, consejos, recomendaciones y los gratos momentos que compartí con todo el personal de la Planta de Piritas

A los amigos que hice en Fresnillo, fueron muchos y la experiencia y amistad que me traje son muy apreciables e invaluable, pero sobre todo agradezco a Gabriel Martínez y a Santiago Ortega, por estar apoyándome cuando estuve convaleciente en la hacienda de Proaño.

Y por último agradecer a El Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT), por la beca de la cual me mantuve en el transcurso de este proyecto.

Contenido	
Índice de Figuras	VIII
Índice de tablas.....	XI
Abreviaturas.....	XII
Resumen	XVII
I. Introducción a la Molienda Ultrafina.....	1
II. Justificación	3
III. Objetivos	3
III.1. Objetivo general.....	4
III.2. Objetivos específicos	4
Hipótesis.....	4
IV. Antecedentes de la Molienda Ultrafina y Modelado Matemático	4
IV. 1. Conceptos Básicos de Conminución	6
IV. 2. Mecanismos de rompimiento de partículas.....	6
IV. 3. Teorías de conminución y Energía específica.	9
IV. 3. 1. -Primer Postulado (Peter von Rittinger, 1867).....	9
IV. 3. 2. -Segundo postulado (Friedrich Kick, 1885)	9
IV. 3. 3. -Tercer Postulado (Frederick C. Bond., 1952).....	10
IV. 3. 4. -Principios de Bond	11
IV. 3. 5. – Principio de Energía específica Charles-Walker	13
IV. 4. Conceptos básicos de molienda de medios agitados y modelos de potencia propuestos.....	14
IV. 4.1 Tipos de Molinos de medios agitados.....	16
IV. 4. 2.Descripción de la Tecnología HIGmill.	19
IV. 4. 2.1. Componentes estructurales del equipo y parámetros operativos ..	21
IV. 4. 2.2. Parámetros operacionales	23
IV. 5. Propuesta para el modelado de HIGmill.....	26
IV. 5.1. Modelos de potencia de molinos de medios agitados.....	26
IV. 5. 2. <i>Modelo de potencia para rotores dentados HIGmill</i>	27
IV.5.2. Modelo de Balance poblacional	31
IV.5.2.1. Función de selección y Función de quebrado	33
IV. 5.2.2. Modelo de la función selección específica de Herbst- Fuerstenau de la Función de selección o del Rango Específico de Fractura	35
IV. 5.2.3. Distribución de tiempos de residencia.....	36
IV. 5.2.4. Solución para molienda discontinua.....	38
	VI

IV. 5.2.5. Solución para molienda continua	39
V. Metodología Experimental	42
V.1. Muestreo de operación en planta	42
V.2. Determinación de la viscosidad	46
V.3. Preparación de muestras en el laboratorio.	49
V.3.1. Porcentaje de sólidos.....	49
V.3.2. Determinación de la distribución granulométrica	49
V. 4. Modelamiento matemático de Balance poblacional aplicado a HIGmil	55
VI. Resultados y discusiones	57
VI.1. Caracterización Metalúrgica	57
VI.1.1. Viscosidad	57
VI.1.2. Análisis granulométricos para la determinación de P_{80}	58
VI.1.3. Efecto de la velocidad tangencial vs P_{80}	63
VI.1.4. Efecto de la cantidad de energía específica en la generación de finos (P_{80}).....	65
VI.1.5. Efecto de la temperatura promedio vs P_{80}	67
VI.2. Evaluación del modelo para molienda ultrafina HIGmill	68
VI.2.1 Modelo de potencia.....	68
VI.2.2. Modelado de distribución granulométrica usando el Modelo de Balance Poblacional MBP	71
VI.3 Evaluación del Rendimiento del molino HIGmill	77
VI.3.1. Evaluación de la Cinética de Fractura	77
VI.3.2. Evaluación del rendimiento y condiciones de operación.....	84
VI.3.2.1. Evaluación de la Energía específica	84
VI.3.2.2. Evaluación de la cinética de fractura.....	85
VII. Conclusiones	87
Bibliografía.....	88

Índice de Figuras

Figura 1.- Relación de energía específica contra la reducción de tamaño. (Wang y Forssberg, 2009).	5
Figura 2.-Comparación entre la eficiencia de energía específica de molienda y tamaño pasante. Modificado de Yan 1995 (como lo citó Gupta y Yann 2016).	6
Figura 3.-Curva esfuerzo-deformación que se presenta sobre un material de aluminio. (Askeland, 1998).	7
Figura 4.- Esquema que muestra las fuerzas entre un sólido. a) fuerza cohesiva; b) energía potencial.	8
Figura 5.-Esfuerzos que generan la ruptura de las partículas. (Austin y Concha, 1994).	9
Figura 6.-Representación de los mecanismos de rotura en la reducción de tamaño a) molienda convencional; b) molienda de medios agitados.	15
Figura 7.-Tamaño de partícula en función de la energía específica log-log. (Kwade y Shwades, 2007, modificado por Roberto Divani Zavala Puente).	16
Figura 8.- a)Vertimill por fuera; b) Vertimill mostrando la cámara interna de molienda; c) Towermill mostrando su cámara interna de molienda (Vertimill® - Metso, s. f.-b; FLSmidth® Tower Mill, s. f.).	17
Figura 9.-a) SDMill con vista de la camara interna; b) VXPmill con vista a la cámara de molienda; c)Isamill comúnmente dispuesto en planta. (Stirred Media Detritors (SMD) - Metso, s. f.; VXPmill For Fine & Ultra Fine Grinding FLSmidth, s. f.-b; (Molienda ultrafina)).	18
Figura 10.-HIGmill, sus principales componentes y funcionamiento. (Letho, 2013, modificado por Roberto Divani Zavala Puente).	19
Figura 11.-Circuito de HIGmill. (Letho, 2013, modificado por Roberto Divani Zavala Puente).	21
Figura 12.-Componentes estructurales de HIGmill. (Heath et al. 2017, Modificado por Roberto Divani Zavala Puente).	22
Figura 13.-Rotores de molienda HIGmill. Almenados y planos de caucho (a, c) y acero (b, d). (Altun et al, 2023).	22
Figura 14.- MINERAX bolas de cerámica de 75% de alúmina y 25% de zircón. (Hassall et al, 2016).	23
Figura 15.-Velocidad de deslizamiento, la cual es producida por la bola y la pulpa dentro del molino.	29
Figura 16.- Velocidad de ascenso, la cual es la que permite la fluidización de las bolas del molino.	30
Figura 17.-Esquemización del Balance Poblacional.	33
Figura 18.-Diagrama de flujo de la planta de Piritias de Fresnillo PLC. La sección correspondiente a los molinos verticales HIGmill y los puntos de muestreo son identificados mediante flechas rojas.	42
Figura 19.-Diagrama de árbol de las variables que se controlaron durante el muestreo.	44
Figura 20.-Molino "A" de lado derecho; mientras que del lado izquierdo se tiene el molino "b". Fotografía de molinos de Planta de piritas, Fresnillo PLC, Fresnillo, Zacatecas.	45

Figura 21.-Embudo Marsh para la determinación de viscosidad con sus dimensiones.	46
Figura 22.-Breve esquema de cómo se realiza el llenado del recipiente.	49
Figura 23.-Diagrama de preparación de muestra para tamizado y medición de tamaño por cyclosizer.	50
Figura 24.-Cyclosizer Warman modelo M12, laboratorio metalúrgico de la planta de beneficio Proaño, Fresnillo Zacatecas.	51
Figura 25.-Patrón de flujo dentro de una unidad ciclónica. (Tomada de Wills, 2016).	52
Figura 26.- Diagrama de modelo HIGmill.	56
Figura 27.- a) P_{80} de las campañas realizadas con un total de dieciocho muestreos; b) F_{80} de cada una de las campañas.....	58
Figura 28.- a) Velocidad tangencial (m/s) vs P_{80} (μm).....	59
Figura 29.- a) Velocidad de deslizamiento (m/s) vs Nivel de llenado de bola (%); b) Velocidad de ascenso (m/s) vs Nivel de llenado de bola (%).	59
Figura 30.- Distribuciones granulométricas de la primera campaña, 40% de sólidos y las tres velocidades del eje de los rotores, (6.5 m/s, 9.6 m/s y 10.5 m/s).....	60
Figura 31.- Distribuciones granulométricas de la primera campaña, 45% de sólidos y las tres velocidades del eje de los rotores, (6.5 m/s, 9.6 m/s y 10.5 m/s).....	60
Figura 32.- Distribuciones granulométricas de la segunda campaña, 40% de sólidos y las tres velocidades del eje de los rotores, (6.5 m/s, 9.6 m/s y 10.5 m/s).....	61
Figura 33.- Distribuciones granulométricas de la segunda campaña, 45% de sólidos y las tres velocidades del eje de los rotores, (6.5 m/s, 9.6 m/s y 10.5 m/s).....	62
Figura 34.- Distribuciones granulométricas de la tercera campaña, 40% de sólidos y las tres velocidades del eje de los rotores, (6.5 m/s, 9.6 m/s y 10.5 m/s).....	62
Figura 35.- Distribuciones granulométricas de la tercera campaña, 45% de sólidos y las tres velocidades del eje de los rotores, (6.5 m/s, 9.6 m/s y 10.5 m/s).....	63
Figura 36.- P_{80} de la primera campaña de 40% de nivel de llenado de bolas a diferentes velocidades tangenciales y porcentaje de sólidos.	64
Figura 37.- P_{80} de la segunda campaña de 50% de nivel de llenado de bolas a diferentes velocidades tangenciales y porcentaje de sólidos.	64
Figura 38.- P_{80} de la tercera campaña con 60% de nivel de llenado de bolas a diferentes velocidades tangenciales y porcentaje de sólidos.	65
Figura 39.- P_{80} (μm)vs E_e (kWh/ton).....	66
Figura 40.- Variación del porcentaje de sólidos y la energía específica para cada una de las velocidades tangenciales de cada campaña.	67
Figura 41.- Temperaturasvs muestreosvs P_{80}	68
Figura 42.- Gráfico de las potencias de todas las campañas, potencia experimental y potencia modelada de Velocidad tangencial (m/s) vs Potencia (kWh).	69
Figura 43.- Gráfico de las potencias de la primera campaña de 40% de nivel de llenado de bolas a un 40% de sólidos potencia experimental vs potencia modelada.	70
Figura 44.- a) Velocidad tangencial (m/s) vs Potencia (kWh).....	70
Figura 45.- Granulometrías Experimentales y simuladas, 40% de nivel de llenado de bolas a 40% de sólidos.	71

Figura 46.- Granulometrías Experimentales y simuladas, 40% de nivel de llenado de bolas a 45% de sólidos.	72
Figura 47.- Granulometrías Experimentales y simuladas, 50% de nivel de llenado de bolas a 40% de sólidos.	73
Figura 48.- Granulometrías Experimentales y simuladas, 50% de nivel de llenado de bolas a 45% de sólidos.	74
Figura 49.- Granulometrías Experimentales y simuladas, 60% de nivel de llenado de bolas a 40% de sólidos.	75
Figura 50.- Granulometrías Experimentales y simuladas, 60% de nivel de llenado de bolas a 45% de sólidos.	76
Figura 51.- Gráfico donde se muestra la velocidad de deslizamiento y la velocidad de ascenso a cada condición de muestreo.	77
Figura 52.- Gráfico de cinética de fractura, tamaño de partícula (μm) vs la función selección específica (ton/kWh).	79
Figura 53.- Gráfico de cinética de fractura, tamaño de partícula (μm) vs la función selección específica (ton/kWh).	80
Figura 54.- Gráfico de cinética de fractura, tamaño de partícula (μm) vs la función selección específica (ton/kWh).	81
Figura 55.- Gráfico de cinética de fractura, tamaño de partícula (μm) vs la función selección específica (ton/kWh).	82
Figura 56.- Gráfico de cinética de fractura, tamaño de partícula (μm) vs la función selección específica (ton/kWh).	83
Figura 57.- Gráfico de cinética de fractura, tamaño de partícula (μm) vs la función selección específica (ton/kWh).	83
Figura 58.- Gráfico donde se muestra la variación de la energía específica y el P_{80} a cada condición de muestreo.	84
Figura 59.- Gráfico donde se muestra la variación de la velocidad de fractura y el P_{80} a cada condición de muestreo.	85

Índice de tablas

Tabla 1.- Principales variables típicas de operación.	23
Tabla 2.- Parámetros operacionales del proceso de HIGmill a ajustar de acuerdo con el P_{80}	24
Tabla 3.- Modelos DTR para molinos rotatorios presentado por Luckie y Austin, (Luckie y Austin, 1994, Modificado por Roberto Divani Zavala Puente).....	38
Tabla 4.-Tabla para registro para toma de variables del proceso en operación....	43
Tabla 5.-Dimensiones y condiciones del equipo y mineral.	43
Tabla 6.-Ejemplo de etiquetado.....	45
Tabla 7.- diámetro efectivo de separación de partícula.....	54
Tabla 8.- Factores de corrección determinados.	54
Tabla 9.- Viscosidades de las campañas y cada muestreo.....	57
Tabla 10.- Parámetros del modelo de potencia obtenidos por cada campaña.....	68
Tabla 11.- Parámetros del modelo de balance poblacional, 40% de nivel de llenado de bolas a 40% de sólidos.....	71
Tabla 12.- Parámetros del modelo de balance poblacional, 40% de nivel de llenado de bolas a 45% de sólidos.....	72
Tabla 13.- Parámetros del modelo de balance poblacional, 50% de nivel de llenado de bolas a 40% de sólidos.....	73
Tabla 14.- Parámetros del modelo de balance poblacional, 40% de nivel de llenado de bolas a 45% de sólidos.....	74
Tabla 15.- Parámetros del modelo de balance poblacional, 60% de nivel de llenado de bolas a 40% de sólidos.....	75
Tabla 16.- Parámetros del modelo de balance poblacional, 40% de nivel de llenado de bolas a 45% de sólidos.....	76
Tabla 17.- Simulación para la optimización del HIGmil de planta Piritas, de Fresnillo PLC.	86

Abreviaturas

A	Función compleja que no definen Manheim y Simenfalvi del modelado de potencia basado en la agitación del rotor
A_p	Área donde se ejerce presión debido a los medios de molienda (m^2)
A_{marsh}	Área transversal del orificio de embudo Marsh en el modelo de viscosidad de Pitt (2000) ($17.8 \times 10^{-6} m^2$)
a	Corresponde al valor de una pendiente modelada en la ecuación de Kwade y Schwades
a_s	Factor de forma superficial
a_v	Factor de forma volumétrico
B_{ij}	Función que describe la distribución granulométrica de las fracciones finas en la población de partículas progenie
b_{ij}	Fracción de masa quebrada de clase de tamaño j que aparece en la clase de tamaño i
C	Constante dada el tipo de equipo usada en conminución que describe la ecuación empírica de Charles - Walker
C_B	Constante de forma según Bond
c_{ij}	Función recursiva para la resolución de la función de transición a la cinética de molienda discontinua dada por Luckie y Austin
C_p	Concentración del trazador en el producto
d_b	Diámetro de los medios de molienda (m)
d_f	Tamaño promedio característico de la alimentación que se reducirá de tamaño
d_g	Diámetro del grano de medio de molienda en el modelo de Manheim y Simenfalvi (m)
d_{ID}	Diámetro interno del molino (m)
$D_{b,ref}$	Corrección del diámetro del medio con respecto a un diámetro de medio de referencia en el modelo de potencia de Radziscewski y Allen (2014) (s/u)
$d_{ij}(t)$	Función de transferencia en la resolución a la ecuación de la cinética de molienda discontinua dado por Luckie y Austin
d_g	Diámetro del medio de molienda en el modelo de potencia de Manheim y Simenfalvi (m)
d_k	Diámetro de agitador en el modelo de potencia de Manheim y Simenfalvi (m)
d_p	Tamaño promedio característico del producto(m)
E_B	Consumo de Energía específica Según Bond (kwh/ton corta)
E_e	Energía específica (kWh/ton)
E_K	Consumo de Energía específica Según Kick (kwh/ton corta)
E_R	Consumo de energía específica según Rittinger (kwh/ton corta)
E_m	Energía específica necesaria para producir la calidad del producto demandada en la ecuación de Kwade y Schwades (kWh/ton)
E_m^b	Es la energía consumida por la calidad del producto demandada en la ecuación de Kwade y Schwades (kJ/kg)

$E(\tau)$	Energía consumida en función de un intervalo de tiempo de residencia según Kwade y Shwedes (kW/h)
e_j	Transformada de Laplace de la función de distribución de tiempos de residencia con respecto a S_j
F_c	Fuerza centrífuga (N)
$F_{Cyclosizer,f}$	Factor de corrección debido a la tasa de flujo en el equipo
$F_{Cyclosizer,g}$	Factor general de corrección
$F_{Cyclosizer,ge}$	Factor de corrección debido a la gravedad específica del material
$F_{Cyclosizer,t}$	Factor de corrección debido a la temperatura
$F_{Cyclosizer,te}$	Factor de corrección debido al tiempo de elutriación
F_{80}	Producto a 80% de tamaño pasante en alimentación (μm)
GE	Gravedad específica del mineral (kg/m^3)
g	Constante de fuerza de gravedad, denotada por g , es la aceleración debida a la gravedad en la superficie de la Tierra. En la tierra, tiene un valor aproximado de 9.8 m/s^2
h	Altura de la cámara interna del molino (m)
h_b	Altura de la cama de bolas (m)
k	Es un factor de corrección en el modelo de potencia de Radziscewski y Allen (2014) (s/u)
K_B	Constante de Bond, la cual es igual a $(10 W_i)$
K_K	Constante de Kick
k_p	Es el coeficiente de consistencia en el modelo de potencia de fluido de Skelland (1967) (Pa s^n)
K_R	Constante de Rittinger
k_{1-4}	Parámetros del modelo de potencia de Heath et al. para el modelo de potencia que proponen
M_τ	Masa total constante de partículas dentro del molino (ton)
$-m, -n, c, e, f$	Exponentes del modelo de potencia de Manheim et al. (2012)
m	Masa movida por el molino (kg)
m_p	Es masa del producto que explica Kwade y Schwades en su ecuación (ton)
m_τ	Masa de partículas con edad t dentro del molino
n	Velocidad del agitador (1/min)
n_d	Número de discos sumergidos (-)
np	Es el índice del comportamiento del flujo modelo de potencia de fluido de Skelland (1967) (d/u)
P	Potencia del molino HIGmill (kW)
p_i	Granulometría de descarga (μm)
$p_{s,c}$	Presión debido a la fuerza centrífuga (N/m^2)
$p_{s,g}$	Presión de sólidos debido a la gravedad reducida (N/m^2)
$P_{(stat)}$	Consumo de energía en operación estacionaria en la ecuación de Kwade y Schwades (kW/h)
P_τ	Potencia dada en los molinos verticales en el modelo de Radziszewski y Allen (kW)

$P_{(\tau)}$	Consumo de potencia dado cierto tiempo de residencia en la ecuación de de Kwade y Schwades (kW/h)
P_{80}	Producto a 80% de tamaño en pasante después de la etapa de conminución (μm)
P_0	Consumo de potencia en un tiempo inicial en la ecuación de Kwade y Schwades (kW/h)
Q	Flujo volumétrico (m^3/s)
$Q(x)$	Factor de corrección para bajo rango de fractura de la función selección
Re	El número de Reynolds (Re) es un parámetro adimensional utilizado en mecánica de fluidos para predecir el régimen de flujo de un fluido, como si será laminar o turbulento, siendo laminar con valores < 2100 , de transición con valores de entre $2100-4000$, y turbulento >4000 .
Re_p	Número de Reynolds de partícula, parámetro adimensional que describe el comportamiento del flujo alrededor de partículas suspendidas en un fluido
R_r	Razón entre abertura entre mallas por las cuales pasará el material de alimentación y el producto de la conminución.
r	Radio interno del molino (m)
r_{rotor}	Radio del tipo de rotor (m)
r_{reje}	Radio del eje del rotor (m)
S_F	Superficie específica de alimentación (m^2/kg)
S_i	Función selección, es el rango de fractura de la clase de tamaño i ($1/\text{min}$)
S_j	Rango de fractura de las partículas de tamaño j ($1/\text{s}$)
S_i^E	Energía asociada al rango de fractura de la clase de tamaño i (ton/kWh)
S_p	Superficie específica del producto (m^2/kg)
S_1	Función de selección o rango de fractura específica (min^{-1}) de tamaño 1
T	Tiempo de molienda
$t_{V\text{Marsh}}$	tiempo para la descarga del volumen del embudo Marsh (s^{-1})
U_{rise}	Velocidad de asenso nominal (m/s)
U_s	Número de asentamiento de Stokes (m/s)
U_{slip}	Velocidad de deslizamiento, es la velocidad relativa entre el fluido y las bolas (m/s)
V_t	Es el volumen agitador en el modelo de potencia de Radziscewski y Allen (2014) (m^3)
v	Velocidad (m/s)
v_f	Tamaño promedio volumétrico inicial (m^3)
v_p	Tamaño promedio volumétrico final (m^3)
v_t	Velocidad tangencial del tipo de rotor (m/s)
V_{tan}	Velocidad Tangencial (m/s)
W	Consumo de energía específica (kWh/ton corta)

W_i	Índice de trabajo, que corresponde a la energía total para reducir una tonelada corta de material (kwh/ton corta) de un tamaño teóricamente infinito hasta partículas que en un 80% sean inferiores a 100 micrómetros
w_i	Fracción de tamaño i en molienda
$w_i(t)$	Es la masa para partículas de la clase i después de un tiempo determinado o el producto
$w_j(0)$	Fracción de partículas en tiempo 0, es decir, la alimentación
w_j	Fracción de tamaño j en molienda
w_k	Es el ancho de los discos en modelo potencia de Manheim et al. (m) (2012)
X_i	Valor superior del intervalo de tamaño es denominado por i
Xm	Velocidad de fractura máxima para un material dado
X_p	Tamaño del producto molido en la teorización de Kwade y Schwades (μm)
X_0	Tamaño de referencia, por lo general 1 mm
x_1	Es una constante característica del embudo que tiene un valor aproximadamente en 0.016 para el embudo estándar de Marsh en el modelo de viscosidad de Pitt (2000) (s/u)
x_2	Es una constante característica del embudo que tiene que un valor aproximadamente en 9.2×10^6 para el embudo estándar de Marsh en el modelo de viscosidad de Pitt (2000) (s/u)
X_{50}	Tamaño a 50% de pasante de medios de molienda
$x_{R\&A}$	Corrección de dispersante en el modelo de potencia de Radziszewski y Allen
α_0	Parámetro asociado a la velocidad de rompimiento de la función selección (min^{-1})
α_1	Parámetro de la función selección asociado al mineral
β_0	Parámetro asociado a la función B_{ij}
β_1	Parámetro asociado a la función B_{ij}
β_2	Parámetro asociado a la función B_{ij}
δ	Parámetro que caracteriza el grado de no normalización del coeficiente ϕ
Λ	Índice que define con qué rapidez el rango de fractura decrece
μ	Viscosidad de pulpa (N s/m^2)
μ_e	Viscosidad efectiva en el modelo de viscosidad de Pitt. (cp)
μm	Abreviatura de micrómetros.
μ_p	Tamaño de partícula en la que $Q(x)$ es 0.5
π	Número irracional que representa la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. Su valor numérico aproximado es de 3.14159.
ρ	Densidad (kg/m^3)
ρ_b	Densidad de los medios de molienda (kg/m^2)

$\rho_{m,ref}$	Corrección de la densidad del medio con respecto a una densidad del medio de referencia en el modelo de potencia de Radziscewski y Allen (2014) (s/u)
ρ_s	Densidad de pulpa (kg/m ²)
$\rho_{sl,ref}$	Corrección de la densidad de la pulpa con respecto a una densidad de pulpa de referencia en el modelo de potencia de Radziscewski y Allen (2014) (s/u)
ρ_{sus}	Densidad de la suspensión usado por Manheim y Simenfalvi del modelado de potencia basado en la agitación del rotor (kg/m ³)
σ_{pulpa}	Densidad de pulpa (g/cm ³)
τ	Tiempo de residencia (h)
ϕ	Fracción en volumen de sólidos cuando la cama de los medios de molienda no ha fluidizado (está parado el molino) o bien el porcentaje de nivel de llenado de bolas en el molino (%)
Φ	Función de distribución de tiempos de residencia
ω	Velocidad de rotación de los rotores del molino (rev/s)
$\omega_{R\&A}$	Velocidad de rotación, en el modelo de potencia de Radziszewski y Allen (rad/s)
$\emptyset$	Parámetro asociado a la función B_{ij} que depende del tipo de material
$[B]$	Matriz de funciones de distribución de roturas individuales (triangular inferior, n×n)
$[I]$	Matriz identidad (diagonal n×n)
$[J]$	Matriz con los elementos de la función de distribución de tiempos de residencia.
$[K]$	Matriz de funciones de tasa de rotura discretizadas de tamaño (diagonal, n×n)
$[T]$	Matriz de eigenvectores propios ($([I]-[B])[K]$) que tienen elementos t_{ij} (triangular inferior, n×n)
$ w_i(t) $	Representa un vector de los tamaños del producto
$ w_j(0) $	Vector con los tamaños de la alimentación.

Resumen

En la actualidad, México es uno de los principales productores de minerales en el mundo y una parte importante de su economía se basa en la minería. Dado este contexto, debe existir un desarrollo tecnológico sostenible en la extracción de los recursos minerales que permita eficientar la extracción minimizando los costos ambientales.

En este trabajo de tesis, se tuvo como propósito el desarrollar un modelo matemático utilizando el enfoque de balance poblacional (MBP) para la optimización de la operación a escala industrial de los molinos con tecnología de medios agitados de par molienda fina y ultrafina, específicamente los de Metso-Outotec HIGmill. Este trabajo se fundamentó en la necesidad de implementar modelos matemáticos como herramientas para mejorar la eficiencia de equipos industriales.

En este contexto, se realizó una revisión de la literatura que aborda los antecedentes relacionados con los mecanismos de ruptura de partículas, la energía requerida para llevar a cabo dichas rupturas y los principios fundamentales de la conminución. También se exploraron los conceptos esenciales relacionados con la molienda en medios agitados y se analizaron modelos de potencia previamente propuestos para la operación de los molinos de medios agitados. En este trabajo se ofrece una revisión detallada de la operación de los molinos HIGmill incluyendo sus variables operativas, su estructura y los mecanismos responsables de la fragmentación de partículas en el interior del molino. Se presenta y examina el modelo de potencia propuesto por Heath et al. en 2017, específicamente diseñado para los HIGmill.

Para ello se implementó una metodología de muestreo realizada en la planta de Piritas de Fresnillo PLC sobre uno de los dos molinos HIGmill con que cuenta la unidad, muestreando un compósito de cuatro cortes por hora, siendo el corte cada 15 minutos, a diferentes condiciones de llenado de bola, porcentaje de sólidos y velocidad tangencial del eje del rotor (m/s) y una medición de la viscosidad. Una vez obtenidas las muestras, se determinó el porcentaje de sólidos, la distribución granulométrica de cada una, y los cálculos pertinentes para aplicar el modelo de potencia propuesto por Heat et al (2017), y con ello aplicar el modelo de balance poblacional.

Los resultados mostraron que, conforme aumenta la velocidad tangencial de los rotores se extrae una mayor cantidad de energía y con ello se genera una cantidad de material más fino en el producto de la descarga del molino. Mientras mayor sea el porcentaje de sólidos en la alimentación, más pequeña será la energía específica para la reducción del material y se producirá en la descarga del molino un producto ligeramente más grueso. También se encontró que, a mayores velocidades tangenciales hay una mayor temperatura promedio en los molinos, y que para temperaturas mayores a 29.09°C se tendrá un producto menor a 23.34 μm .

Por otro lado, el modelo de potencia muestra predecir la cantidad de energía usada para cada una de las condiciones examinadas a un nivel de llenado de bolas. A partir del mismo se implementó el modelo de balance poblacional, el cual tiene

XVII

una desviación estándar para cada una de las muestras que oscila entre 0.01 y 1.78, siendo la media del modelo SSE 0.71, lo cual indica una excelente predicción. Mostrando que dicha implementación, al momento de evaluar el ajuste de los parámetros del modelo para la función selección puede arrojar datos sobre cómo es que se presentan la fractura del material.

Con ello se evaluaron las mejores condiciones de muestreo, siendo la óptima la condición de 50% de nivel de llenado de bolas a una velocidad tangencial de 10.5 m/s y a un porcentaje de sólidos del 45%, la cual presenta una energía específica de 19.05 kWh/ton, y una velocidad de rompimiento dada por el parámetro α_0 de la función selección de 0.000456542 min⁻¹.

Bajo las condiciones estudiadas, habiendo realizado una serie de simulaciones, se encontró que las condiciones óptimas de operación son a un nivel de 56% de llenado de bola, un flujo de alimentación de 100 m³/h, 49% de porcentaje de sólidos, una velocidad tangencial de 10.5 m/s, con un P₈₀ de 23.0 ± 1 µm.

I. Introducción a la Molienda Ultrafina

La minería en México es un sector esencial de la economía nacional que abastece más de 70 sectores productivos; además, es el pilar en el bienestar y calidad de vida de 696 comunidades repartidas en 212 municipios del país. Aunque en la situación actual ha habido un ligero retroceso económico por las condiciones internas del país, datos del informe anual de la CAMIMEX señalan que la minería se mantiene con una participación en el PIB nacional (2022) del 4.335%. En otra situación, las inversiones de los proyectos mineros en desarrollo y construcción puestos en marcha son de 5 mil 265 millones de dólares, con un alza de 9.5% con respecto al 2021.

En épocas recientes, la explotación de depósitos minerales con mineralogías complejas y leyes bajas, especialmente aquellas cuyo tamaño de liberación está por debajo de 50 μm (Urias García, 2022), ha generado desafíos económicos y ambientales significativos. Para abordar estos desafíos se han implementado tecnologías de reducción de tamaño, como la molienda ultrafina o molienda en medios agitados (Gupta y Yan, 2016). Estas tecnologías buscan liberar los minerales en partículas más pequeñas, con un tamaño de P_{80} de 20 μm , las cuales son consideradas como “ultrafinas” en el procesamiento de minerales, reduciendo costos energéticos y por ende el impacto ambiental (Magdalena et al., 2021).

La tecnología de molinos de medios agitados es una alternativa a los medios de molienda convencional (molinos de bolas, semi autógenos y de barras). Esto debido a que, en la molienda de bolas (que es un equipo ampliamente usado para la reducción de tamaño); por citar un ejemplo, a tamaños más finos que un P_{80} de 75 μm , la eficiencia de la molienda disminuye rápidamente (Shi et al., 2009). Usualmente, para aumentar la eficiencia y reducción de tamaño de estos equipos, estos se acoplan con un clasificador; a estos circuitos se les conoce como circuitos cerrados. El límite práctico y económico para la molienda de bolas, según Gao y Weller (1994), es de aproximadamente 40 a 45 μm .

Con respecto a los molinos de bolas convencionales, los molinos de medios agitados presentan ventajas notables. La utilización de estos molinos representa una reducción de consumo de energía entre 30–40%, con un producto equivalente a la molienda de bolas (40 a 45 μm). Además, la inversión de capital requerida es significativamente menor. Los costos operativos y de mantenimiento también son sustancialmente menores. Por ejemplo, al usar molinos de medios agitados con una alimentación promedio de 500 a 300 μm es posible producir un producto de tamaño tan pequeño como 20 μm (Gupta y Yan, 2016).

La tecnología molinos de medios agitados surge en el año de 1928 y está basada en la idea del uso de un agitador y medios de molienda esféricos (Radziszewski y Allen, 2014) partiendo básicamente de 2 equipos. La tecnología de medios de molienda agitados o vertical se implementó por primera vez en 1987 en el desarrollo de un molino vertical japones (Japan Tower Mill Company Ltd), para la

molienda de piedra caliza (Stief et al., 1987). Y, en el diseñado en 1990 (IsaMill) por Mount Isa Mines (MIM, ahora Glencore) y Netzsch Feinmahltechnik, abordando específicamente el requisito de molienda fina hasta un P_{80} de 7 μm para la explotación del depósito McArthur River de MIM (Anderson y Bandarian, 2019). Sin embargo, fue hasta el año 2012 cuando la empresa Metso-Outotec desarrolló una serie de pruebas para la implementación de una tecnología de molienda de medios agitados denominada HIGmill (High Intensity Grinding Mill), a escala piloto, que mostraron resultados prometedores (Letho et al., 2013) para ser implementada y escalada en las empresas mineras. Un ejemplo de esto es el desarrollo industrial en Kevitza, al norte de Finlandia por parte de Firts Quantum Minerals (FQM), la cual obtuvo resultados exitosos con respecto al rendimiento metalúrgico y eficiencia energética (Letho et al., 2017).

La implementación de modelos matemáticos desempeña un papel importante en la comprensión de los procesos metalúrgicos, así como en la mejora del diseño de maquinaria, configuración de circuitos y la optimización de los parámetros operativos en las plantas de procesamiento (Tavares, 2014). La clasificación de estos modelos se puede hacer en: modelos empíricos, fundamentales y fenomenológicos. Herbst J., Lo Y. y Flintoff B (Fuerstenau, 2003) describen sus características como:

- Modelos empíricos: son aquellos que frecuentemente usan ecuaciones algebraicas de regresión lineal, multivarianza, redes neuronales y que se ocupan de una gran cantidad de datos. Corresponden al concepto de “caja negra” de Morrell; por ejemplo, la ley de la conminución de Bond (Bond, 1952).
- Modelos fenomenológicos: se constituyen de una serie de ecuaciones algebraicas o diferenciales con base en principios físicos o químicos. Requieren calibración de los equipos y un ejemplo de estos es el modelo de balance poblacional (Herbs y Fuerstenau, 1980).
- Modelos fundamentales: comúnmente con base en leyes fundamentales de la física o química, requieren una mínima calibración, y aquí aplican modelos de elemento discreto o dinámica de fluidos computacional (Delgadillo y Rajamani, 2006).

Según Richardson J. y Morrison R. (Fuerstenau, 2003), los modelos clasifican según el grado de sofisticación de estos en:

- Modelos mecanicistas: Que intentan explicar el funcionamiento unitario desde primeros principios y son a menudo muy teórico.
- Modelos semi empíricos: Que tienen alguna base tanto en teoría como en datos operativos/experimentales.
- Modelos totalmente empíricos: Basados en supuestos de ingeniería y datos operativos/experimentales. A menudo se basan en correlaciones estadísticas en lugar de teorías para describir el comportamiento observado.

El conocimiento de la distribución completa de tamaño de partícula es necesario para simular el comportamiento del producto en equipos auxiliares como

cribas y clasificadores. Por esta razón se utilizan modelos de balance poblacional (MDP) en el diseño, optimización y control de circuitos de molienda (Napier-Munn et al., 1996). El modelo de balance poblacional (MBP) describe una familia de técnicas de modelado que implican ubicar y controlar distribuciones totales de tamaño de partículas (o parciales) durante el proceso de trituración, o en cualquier unidad de procesamiento de minerales. Estas técnicas permiten simular circuitos de molienda sin asumir que todas las distribuciones de tamaño de partículas tienen una forma "normal", pero desde el punto de vista computacional; a diferencia de otros modelos, el modelo requiere más parámetros de configuración (Wills, 2016). Se ha demostrado que la aplicación de estos modelos puede generar beneficios significativos, como el aumentar la recuperación metalúrgica, lograr una reducción en el consumo de energía y disminuir sustancialmente los costos, recuperando hasta con un retorno de inversión de 0.25 para la mejora de proyectos y tiempos de recuperación cortos, que van de 1 a 12 meses (Herbst, 1996), y coadyuvar en el dimensionamiento de molinos industriales (Dunne, et al., 2000).

Por lo tanto, es relevante el implementar un modelo matemático para simular la distribución granulométrica de producto en un molino HIGmill escala industrial y la energía que requiere para su funcionamiento, y así conocer los parámetros óptimos para su operación.

II. Justificación

Con una inversión de 155 millones de dólares (CAMIMEX, 2023), el proyecto “Planta Piritas” de Fresnillo PLC, ubicada en el municipio de Fresnillo, del estado de Zacatecas, prevé una producción anual de 14 mil onzas de oro y 35 millones de onzas de plata. La planta inició su operación en el mes de mayo del año 2023 y tiene como objetivo el tratamiento de depósitos de jales históricos, subproducto de la planta Proaño de Fresnillo PLC, mediante la remolienda y la concentración por flotación. La etapa de remolienda de la planta cuenta con la instalación de dos molinos de tecnología de molienda de medios agitados HIGmill de Metso-Outotec, para obtener un producto de un P_{80} de 22 μm , que es el tamaño en que la flotación permite la mayor recuperación de oro y plata en el tratamiento de estos relaves.

Bajo este contexto y dados los desafíos cada vez mayores en la disminución en la ley de los minerales, así como a la necesidad de procesar minerales con granulometrías más finas; la molienda fina y ultrafina se ha vuelto crucial, las cuales se realizan mediante tecnologías de molienda avanzadas, como los molinos de medios agitados. Estos molinos ofrecen una mayor eficiencia energética, así como una mejor liberación de los minerales.

III. Objetivos

III.1. Objetivo general

Desarrollar un modelo semi empírico para el equipo de molienda de medios agitados ultrafina HIGmill de escala industrial de planta Piritas de Fresnillo PLC, basado en un modelo de potencia y en el modelo de balance poblacional (MBP) para la predicción de reducción de fractura y el consumo de potencia.

III.2. Objetivos específicos

Con el fin de cumplir con el objetivo general se plantean a continuación los siguientes objetivos específicos:

- Conocer las características físicas (dimensiones, equipos del molino y viscosidad), parámetros operacionales y los mecanismos de reducción de tamaño involucrados en el equipo HIGmill ubicado en la Planta de Piritas de la empresa Minera Fresnillo.
- Caracterizar el molino HIGmill mediante técnicas de muestreo metalúrgico y las condiciones en que opera para con ello conocer el porcentaje de sólidos, las granulometrías de alimentación y producto y la viscosidad de la pulpa.
- Analizar e implementar el modelo de potencia para predecir la energía consumida en la operación del HIGmill.
- Implementar el modelo de balance poblacional para conminución para predecir la distribución granulométrica y el índice de fractura generados por el molino HIGmill a escala industrial.
- Evaluar si el modelo de balance poblacional propuesto describe el comportamiento de datos experimentales, mediante el análisis combinado del balance poblacional y el modelo de potencia.

Hipótesis

Mediante el modelo de balance poblacional y parámetros físicos medibles en planta (porcentaje de sólidos potencia del molino y análisis granulométricos) es posible elaborar un modelo matemático para predecir la distribución granulométrica del producto de molienda a escala industrial.

IV. Antecedentes de la Molienda Ultrafina y Modelado Matemático

La industria minero-metalúrgica experimenta una tendencia hacia el procesamiento de minerales usando molienda ultrafina, debido a que la mayoría de los minerales estratégicos actuales se encuentran con una mayor diseminación en la corteza terrestre; es decir, se tiene una menor ley de cabeza de los minerales a tratar. Un ejemplo de esto es la disminución del contenido nativo, la cual ha generado desafíos en el procesamiento de minerales, especialmente en minerales que contienen asociaciones de oro con calcopirita, arsenopirita o pirita. Esto ha promovido un creciente interés en la molienda fina o ultrafina.

Las moliendas finas y ultrafinas inducen a la distorsión de la estructura cristalina. En el caso de cobre se ha demostrado que, generan un efecto mecanoquímico que aumenta la disolución del metal en un 25% después de la etapa de molienda fina (Palaniandy, 2015). La molienda fina o ultrafina se considera la estrategia más eficaz para reducir costos y aumentar la capacidad de recuperación en la industria minera actual.

La tecnología de los molinos agitados suele clasificarse en molinos verticales y molinos horizontales. Estos molinos requieren menor espacio y energía que los molinos de bolas convencionales, al mismo tiempo logran una reducción similar en tamaño, en el rango de tamaño fino. Debido a estas ventajas, los molinos agitados se están adoptando cada vez más en operaciones de molienda fina o remolienda, con el propósito de liberar partículas finas de minerales altamente dispersos. Las principales diferencias entre los diseños de los molinos radican en la forma o geometría del molino, la configuración del agitador y el método utilizado para separar los medios de molienda del mineral.

Dentro de las leyes se establece que cuanto mayor sea el rango de liberación de partículas a un determinado P_{80} , mayor será la energía específica requerida para lograrlo, como se ilustra en la Figura 1. Sin embargo, Gupta y Yan (2016) demostraron que las tecnologías de molienda con medios agitados tienen un mejor aprovechamiento de la energía en la conminución de una muestra de mineral, con contenido de oro, usando 6 mm de diámetro de bolas de alúmina, con respecto a la molienda usando molinos de bola, como se muestra en la Figura 2. Esto debido a que un tamaño de bola menor involucra un área superficial mayor la cual es aprovechada para la reducción de tamaño.

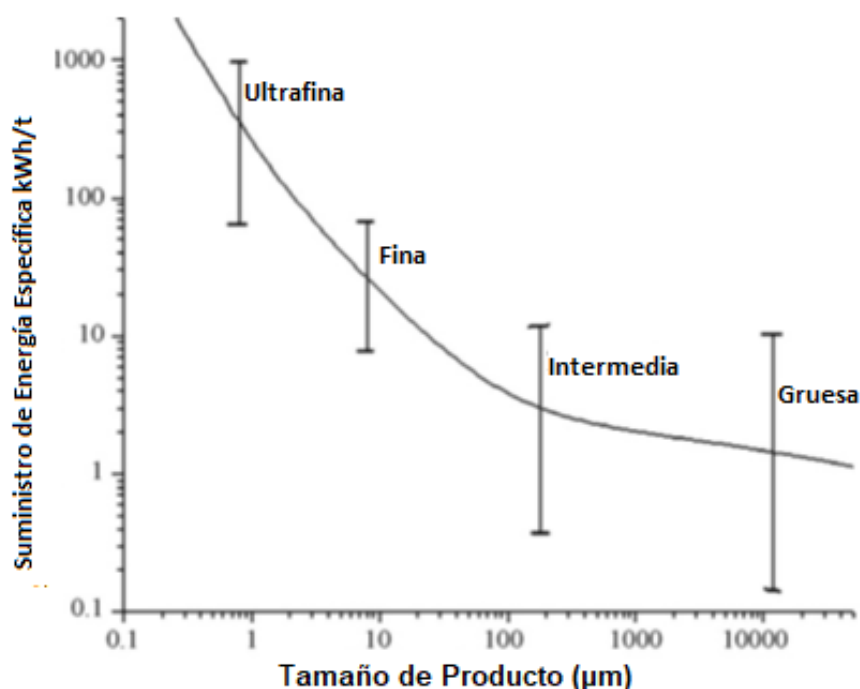


Figura 1.- Relación de energía específica contra la reducción de tamaño. (Wang y Forssberg, 2009).

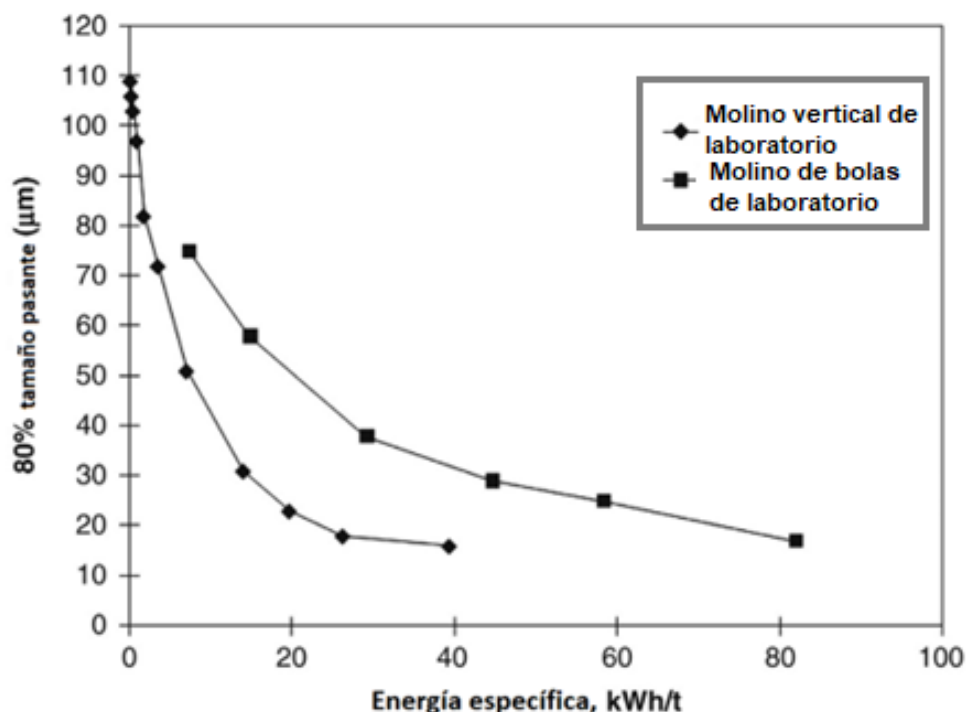


Figura 2.-Comparación entre la eficiencia de energía específica de molienda y tamaño pasante. Modificado de Yan 1995 (como lo citó Gupta y Yann 2016).

IV. 1. Conceptos Básicos de Conminución

La conminución se refiere a la reducción del tamaño de material mineral con el propósito de procesarlo. Uno de los objetivos de la conminución es lograr la liberación del mineral de valor que está atrapado en los minerales menos valiosos, en un tamaño de partícula lo más grande posible. El establecer correlaciones para conocer la energía consumida para la reducción de tamaño se hace con la finalidad de aumentar la eficiencia energética y así dimensionar y/o optimizar el equipo de conminución de los minerales, ya que también gran parte de la inversión económica en una operación minero-metalúrgica se usa en esta etapa.

IV. 2. Mecanismos de rompimiento de partículas

Es conocido que existe una estrecha relación entre las propiedades químicas de un material, su posición en la tabla periódica, su afinidad por ciertos tipos de enlaces químicos y su estructura. En química, se reconocen principalmente tres tipos de enlaces químicos: covalente, iónico, y metálico. La disposición de un material puede manifestarse de manera definida (cristalina) porque sus componentes se combinan en unidades individuales que forman una estructura cristalina. La "cristalinidad" implica una distribución ordenada de los átomos en una estructura que se repite de manera periódica a través de una red cristalina espacial (Aragón, 2021).

Dependiendo de la naturaleza de la estructura de un material, éste puede exhibir un comportamiento plástico o elástico. El comportamiento plástico se manifiesta cuando se aplica una fuerza al material y éste se deforma, deformación que persiste incluso después de retirar la fuerza aplicada. El comportamiento elástico se produce cuando un material al someterse a una fuerza recupera su forma original, una vez que cesa dicha fuerza. En la práctica, los materiales pueden mostrar ambos comportamientos según la magnitud de las fuerzas aplicadas, como se ilustra en la Figura 3 para una aleación de aluminio.

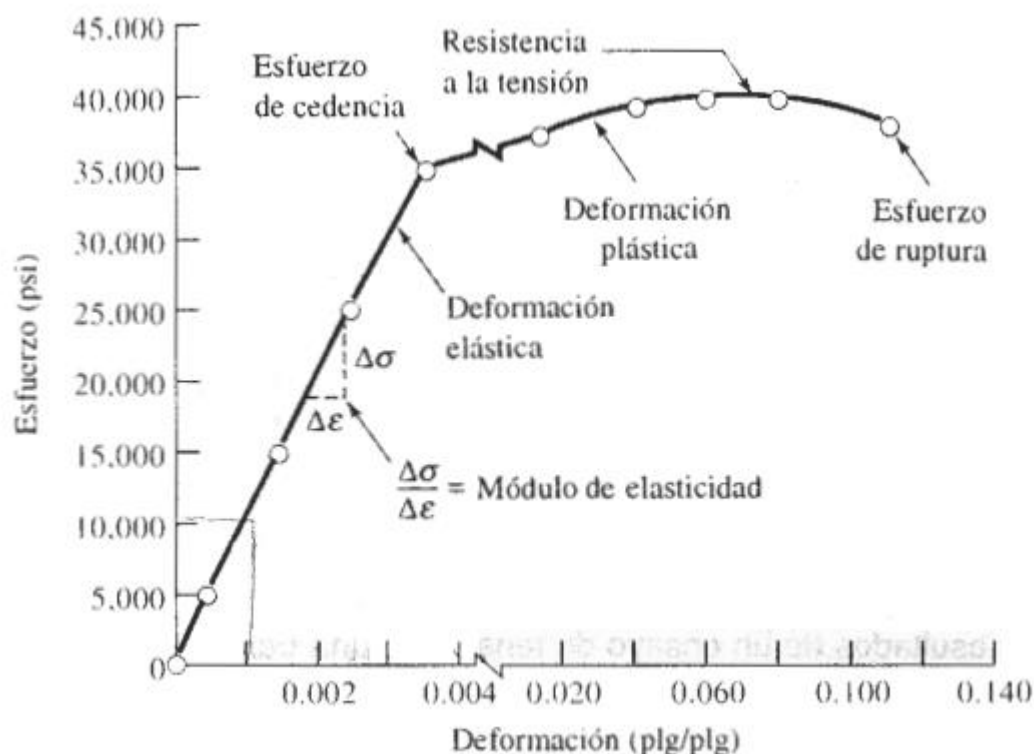


Figura 3.-Curva esfuerzo-deformación que se presenta sobre un material de aluminio. (Askeland, 1998).

La resistencia cohesiva ideal es un concepto que describe a un sólido compuesto por planos de moléculas sometidos a una tensión unidimensional simple. Cuando un sólido se encuentra en un estado deformado, cada molécula experimenta un equilibrio de fuerzas, pero este equilibrio puede romperse mediante la aportación de energía externa. La máxima fuerza de atracción que un sólido puede ejercer sobre una capa de su superficie corresponde con el punto de inflexión en la curva de esfuerzo y deformación. En este punto, la fuerza aplicada se iguala a la relación entre la energía suministrada y la distancia en la que actúa esta fuerza de separación. Cuando una tensión externa supera este máximo se perturba el equilibrio de fuerzas, lo que provoca una aceleración entre los planos interiores del sólido y, en última instancia, conduce a la desintegración de estos planos, como se muestra en la Figura 4.

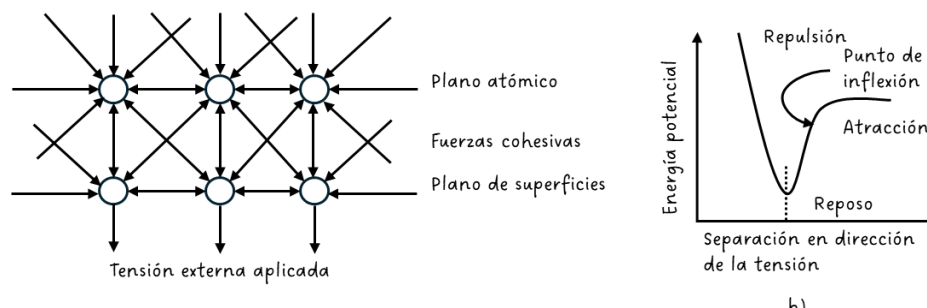


Figura 4.- Esquema que muestra las fuerzas entre un sólido. a) fuerza cohesiva; b) energía potencial.

Se establece que la fractura se presenta a partir de fallas (grietas microscópicas dentro del material), y ésta puede presentarse de manera frágil o dúctil. La fractura frágil se caracteriza por una deformación inicial elástica, antes de la ruptura, y una alta tasa de propagación de agrietamiento. La fractura dúctil se presenta paralelamente a una deformación plástica, alrededor de las grietas antes y durante de la propagación.

Los materiales en estado sólido contienen usualmente un gran número de grietas microscópicas. Los sólidos al ser sometidos a una tensión, los esfuerzos se concentran en las puntas de las fallas, estableciéndose un frente de ruptura por donde se propaga la grieta (Griffith, 1920). Dichas grietas son conocidas como grietas de Griffith. En este contexto se han establecido cuatro suposiciones fundamentales. Primero, se asume que la concentración de esfuerzos se localiza en la punta de la falla. Segundo, se postula que el sólido se deforma hasta un punto en el que los enlaces intermoleculares en la punta de la falla se estiran al límite de su ruptura. Tercero, se considera que el estado de esfuerzo es replicable en la punta para una expansión infinitesimal de la falla. Cuarto, se supone que la energía necesaria para expandir la falla, como una grieta que se propaga, está disponible, dado que el sólido no puede relajarse inmediatamente ante la aplicación de esfuerzos externos.

Los tipos de esfuerzos que conllevan los procesos de conminución son descritos por Austin y Concha (1994) como compresión, tensión y cizalle (Figura 5).

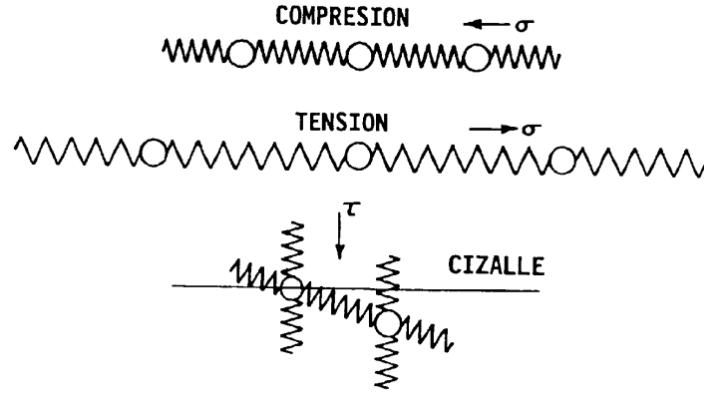


Figura 5.-Esfuerzos que generan la ruptura de las partículas. (Austin y Concha, 1994).

IV. 3. Teorías de conminución y Energía específica.

Las teorías clásicas de la conminución comprenden los postulados de Von Rittinger (1867), Kick (1885) y Bond (1952).

IV. 3. 1. -Primer Postulado (Peter von Rittinger, 1867)

Rittinger postuló una relación entre la energía específica consumida y el incremento de superficie durante la conminución. Conocida como la 1° ley de la conminución, ésta establece que “La energía específica consumida en la reducción de un sólido es directamente proporcional a la nueva superficie específica creada”. Este postulado sólo toma en consideración superficies homogéneas, su formalización matemática (Ecuación 1) establece:

$$E_R = K_R \left[\left(\frac{1}{d_p} \right) - \left(\frac{1}{d_f} \right) \right] \quad (1)$$

donde E_R es la energía específica consumida bajo el principio de Rittinger (kWh/ton), K_R es la constante de Rittinger, d_p es el tamaño promedio característico del producto(m), d_f es el tamaño promedio característico de la alimentación (m). En la práctica, se podría decir que este modelo matemático ajusta bien la etapa de chancado (reducción de grandes terrones de material en tamaños más pequeños, adecuados para su posterior manipulación) (Hukki, 1961).

IV. 3. 2. -Segundo postulado (Friedrich Kick, 1885)

Kick propuso una teoría estableciendo que “La energía requerida para producir cambios análogos en el tamaño de cuerpos geoméricamente similares es

proporcional al volumen de los cuerpos”, que se interpreta como “iguales cantidades de energía producirán iguales cambios geométricos en el tamaño del sólido”.

Considerando lo anterior, dentro de un cuerpo ideal (isotrópico, homogéneo y sin fallas) Kick sólo consideró la energía para deformar el sólido hasta su ruptura, despreciando la energía adicional para la ruptura de éste. De acuerdo con este postulado, cada evento de fractura consumirá una unidad de energía. Su formalización matemática se expresa (Ecuación 2):

$$E_K = K_K \ln \left(\frac{v_f}{v_p} \right) \quad (2)$$

Donde E_K la es la energía específica consumida bajo el principio de Kick (kWh/ton corta), K_K es la constante de Kick, v_f es el tamaño promedio volumétrico inicial (m^3), y v_p es el tamaño promedio volumétrico final (m^3). Se ha observado que este principio ajusta matemáticamente, preferentemente, a las moliendas finas (Hukki, 1961).

IV. 3. 3. -Tercer Postulado (Frederick C. Bond., 1952)

Conociendo los postulados anteriores sobre la reducción de tamaño, Bond (1952) publicó el estudio “Crushing and grinding calculations”. Partiendo de los principios anteriores y con base en sus observaciones experimentales sobre las distribuciones granulométricas en los eventos de conminución, estableció que *“La energía consumida para reducir el tamaño en 80% de un material es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del tamaño 80%; siendo este último igual a la abertura del tamiz (en micrómetros) que deja pasar el 80% del peso de las partículas”*. Su formalización matemática se expresa como (Ecuación 3):

$$W = 10W_i \left(\frac{1}{\sqrt{P_{80}}} - \frac{1}{\sqrt{F_{80}}} \right) \quad (3)$$

Donde W es la energía específica consumida expresada en tonelada corta (kWh/ton corta), W_i es el índice de trabajo que corresponde a la energía específica consumida para reducir una tonelada corta de material (kwh/ton corta) de un tamaño teóricamente infinito hasta partículas que en un 80% sean inferiores a $100 \mu m$. F_{80} es el producto a 80% de tamaño pasante en alimentación (μm) y P_{80} es el producto a 80% de tamaño en pasante después de la etapa de conminución (μm). Bond expresó la energía específica consumida como:

$$W_i = K_B \left(\frac{1}{\sqrt{100}} - \frac{1}{\sqrt{\infty}} \right) \therefore W_i = \left(\frac{K_B}{10} \right) \quad (4)$$

Por lo tanto

$$W_i = K_B \left(\frac{1}{\sqrt{100}} - \frac{1}{\sqrt{\infty}} \right) \therefore W_i = \left(\frac{K_B}{10} \right) \quad (5)$$

$$K_B = 10W_i \quad (6)$$

Donde K_B es la constante de Bond ($10 W_i$). Definiendo la reducción del 80% (R_r) como una diferencia entre abertura entre mallas por las cuales pasará el material de alimentación y el producto de la conminución, respectivamente; se tiene:

$$R_r = \frac{F_{80}}{P_{80}} \quad F_{80} = R_r P_{80} \quad (7)$$

Por lo tanto

$$F_{80} = R_r P_{80} \quad (8)$$

Remplazando (8) en (3):

$$W = 10W_i \left(\frac{1}{\sqrt{P_{80}}} - \frac{1}{\sqrt{R_r P_{80}}} \right) \quad (9)$$

$$W = \frac{10W_i}{\sqrt{P_{80}}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{R_r}} \right) \quad (10)$$

$$W = W_i \sqrt{\frac{100}{P_{80}}} \left(\frac{\sqrt{R_r}-1}{\sqrt{R_r}} \right) \quad (11)$$

La Ecuación 11 muestra otra formalización matemática del principio de Bond.

IV. 3. 4. -Principios de Bond

Bond basó su postulado de conminución en fenómenos que observó durante su trabajo, como investigador en Allis-Chalmers®, de los cuales dedujo tres:

Primer principio: dado que una partícula de tamaño finito fue obtenida debido a la ruptura de una partícula de tamaño de aproximadamente 100 μm , todas consumen energía para encontrarse en su tamaño actual. De ello se parte que, todo sistema de partículas tiene su propio “registro energético” o nivel de energía que ha sido consumido para llevar a ese sistema a su tamaño. Solamente una partícula de tamaño infinito puede ser la que tenga un registro igual a cero. Entonces, el consumo de energía en la conminución es la diferencia entre el registro energético del producto y el registro de energía de alimentación, señalado (Ecuación 12) como:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Consumo} \\ \text{de Energía} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Registro de Energía} \\ \text{en Producto} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Registro de Energía} \\ \text{de Alimentación} \end{array} \right] \quad (12)$$

Segundo principio: la energía específica consumida para la conminución es proporcional a la longitud de las nuevas grietas producidas. Como la longitud exterior de una grieta (como lo explica Griffit) es proporcional a la raíz cuadrada de su superficie, el consumo de energía es proporcional a la diferencia entre la raíz cuadrada de la superficie específica obtenida después del evento de conminución. Entonces se describe como (Ecuación 13):

$$E_B = C_B [S_P^{1/2} - S_F^{1/2}] \quad (13)$$

Donde E_B es el consumo de energía específica (kWh/ton corta), según la formulación de Bond, C_B es una constante de proporcionalidad de Bond, S_p es la superficie específica del producto (m^2/kg), y S_F es la superficie específica de alimentación (m^2/kg).

Remplazando las superficies específicas en términos de tamaño promedio volumétrico superficial ($\bar{d}_p$) y de los factores de forma superficial (a_s) y factores de forma volumétrico (a_v):

$$E_B = K_B \left[\frac{1}{\bar{d}_p^{1/2}} - \frac{1}{\bar{d}_f^{1/2}} \right] \quad (14)$$

Considerando:

$$K_B = \left[\frac{a_s}{\rho_s \cdot a_v} \right]^{\frac{1}{2}} C_B \quad (15)$$

Lo que hizo Bond en su teorización fue dejar de lado el tamaño promedio volumétrico superficial por el uso del tamaño 80% pasante (ahora conocido como D_{80}) del producto “ P_{80} ” y el tamaño pasante de la alimentación “ F_{80} ”:

$$E_B = K_B \left(\frac{10}{\sqrt{P}_{80}} - \frac{10}{\sqrt{F}_{80}} \right) \quad (16)$$

Anteriormente, se estableció que $K_B = 10 W_i$ (Ecuación 6), donde también las ecuaciones 11 y 16 son fórmulas matemáticas alternas del tercer postulado de conminución de Bond. El W_i es una función del material, del equipo de conminución y de las condiciones de operación. Por esta razón, su determinación debe llevarse a cabo mediante condiciones experimentales estándar.

Tercer principio: la falla más débil del material determina el esfuerzo de ruptura, pero la energía específica consumida total está controlada por la distribución de fallas en todo el rango de tamaños involucrado correspondiendo al promedio de ellas.

IV. 3. 5. – Principio de Energía específica Charles-Walker

R.J. Charles (1957) en su artículo “Energy-size reduction relationships in comminution” postuló una relación general entre el consumo de energía específica vs el tamaño de partícula, en la cual se engloban las leyes de la conminución descritas por Rittinger, Kick y Bond. Por otro lado, Walker et al. (1937) propusieron una ecuación diferencial empírica análoga a la de Charles (1957), conocida como el postulado Charles-Walker.

De acuerdo con los autores, la relación del consumo de energía específica en la conminución con la reducción de tamaño de las partículas se expresa mediante la siguiente ecuación empírica (Ecuación 17):

$$d(E_e) = -C \frac{d(d_p)}{d_p^{n_c}} \quad (17)$$

Esta ecuación establece que, un consumo diferencial de energía específica $d(E_e)$ requerido para producir un cambio infinitesimal en el tamaño promedio de una partícula $d(d_p)$ es inversamente proporcional al tamaño de partícula elevada a un exponente n_c . Las constantes C y n_c son característicos del material y el equipo de conminución.

La demostración de Charles (1957) de que las leyes de la conminución propuestas por Rittinger, Kick y Bond son casos particulares de la integración de la ecuación empírica que planteo (Ecuación 17) para casos donde los valores de n_c son evaluados en 2, 1 y 1.5.

Así, la ley de Rittinger se obtiene mediante la integración de la ecuación 17 considerando n_c igual a 2 (Ecuación 18):

$$\int_0^E d(E_e) = -C \int_{d_f}^{d_p} \frac{d(d_p)}{d_p^2} \quad (18)$$

$$E_e = -C \left[-\left(\frac{1}{d_p}\right) - \left(-\left(\frac{1}{d_f}\right)\right) \right] \therefore E_e = C \left[\left(\frac{1}{d_p}\right) - \left(\frac{1}{d_f}\right) \right] \quad (19)$$

Ecuación igual a la Ecuación 1, donde C es igual a K_R .

Para el caso de n_c igual a 1 se obtiene la ley de Kick (1994) (Ecuación 20):

$$\int_0^E d(E_e) = -C \int_{d_f}^{d_p} \frac{d(d_p)}{d_p} \quad (20)$$

$$E_e = -C [\ln(d_p) - \ln(d_f)] \therefore E_e = C \ln\left(\frac{d_f}{d_p}\right) \quad (21)$$

Siendo esta ecuación análoga a la Ecuación 2, donde C es igual a K_K .

La ley de Bond se obtiene evaluando n_c igual a 1.5 (Ecuación 22):

$$\int_0^E d(E_e) = -C \int_{d_f}^{d_p} \frac{d(d_p)}{d_p^{1.5}} \quad (22)$$

$$E_e = -C \left[\left(-\frac{2}{d_p^{1/2}}\right) - \left(-\frac{2}{d_f^{1/2}}\right) \right] \therefore E_e = 2C \left[\left(\frac{1}{d_p^{1/2}}\right) - \left(\frac{1}{d_f^{1/2}}\right) \right] \quad (23)$$

Siendo esta ecuación análoga a la Ecuación 3, donde $2C$ es igual a K_B .

IV. 4. Conceptos básicos de molienda de medios agitados y modelos de potencia propuestos.

La molienda convencional se lleva a cabo utilizando molinos rotatorios horizontales o de tambor, que pueden ser autógenos, semiautógenos, molinos de bolas o de barras. El mecanismo de rompimiento más común en este tipo de molienda es el impacto y la abrasión (Figura 6 a). Por otro lado, la molienda de medios agitados se diferencia en que utiliza un mecanismo de molienda basado en bolas de menor tamaño, donde la reducción de tamaño se logra a través del rompimiento por atrición de partículas esféricas (Radziszewski y Allen, 2014). Esto provoca que, el principal mecanismo de fractura en este tipo de molienda es por el desgaste causado de los medios de molienda debido a los esfuerzos de cizalle que se favorecen, estos esfuerzos se presentan en la molienda de bolas; sin embargo, el molino HIGmill es un equipo diseñado mecánicamente para magnificar la molienda por abrasión.

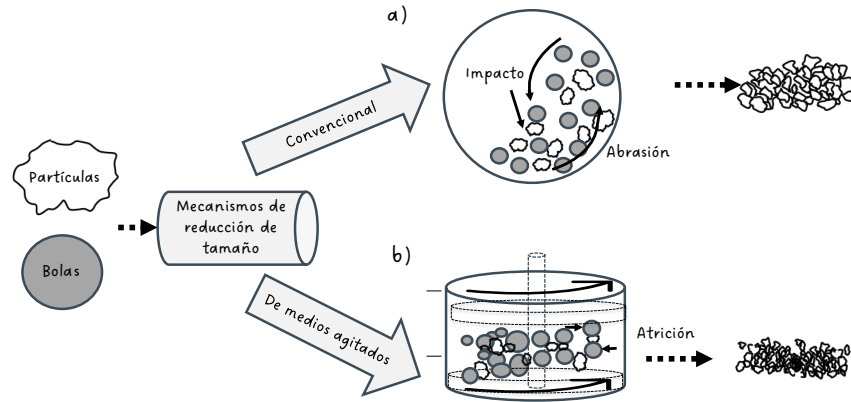


Figura 6.-Representación de los mecanismos de rotura en la reducción de tamaño a) molienda convencional; b) molienda de medios agitados.

Kwade (1999) menciona que, el mecanismo para someter las partículas a estrés es que los medios de molienda (bolas de tamaño entre 0.2–4 mm) se muevan rápidamente en dirección tangencial, y al chocar entre ellos con menor velocidad aplastan a la partícula que queda atrapada. Kwade y Schwedes (2007) demostraron que el agitador cumple un papel fundamental al acelerar los medios de molienda vía la generación de energía cinética que se aprovecha para la acción de molienda. La fuerza centrífuga resultante empuja las bolas hacia la pared, lo que a su vez crea la presión necesaria para llevar a cabo el proceso de atrición (Figura 6 b).

Partiendo de diversos enfoques, se han propuesto distintos modelos con el fin de explicar los mecanismos de fractura y la reducción de tamaño. Uno de ellos es el modelo de tensión de Kwade y Schwedes (2007), el cual expresa que el consumo de energía específica, que es la energía que se transfiere a la cámara de molienda, se puede expresar en pruebas batch (sin considerar el desgaste de medios de molienda) mediante la Ecuación 24:

$$E_m(t) = \frac{E(\tau)}{m_p} = \int_0^t \frac{(P(\tau) - P_0)d\tau}{m_p} \quad (24)$$

Donde E_m es el consumo de energía específica para producir la calidad del producto demandada (kWh/ton), $E(\tau)$ es la energía consumida en cierto intervalo de tiempo de residencia (kW/h), m_p es la masa del producto (ton), $P(\tau)$ es el consumo de potencia en cierto tiempo de residencia (kW/h) y P_0 es el consumo de potencia en un tiempo inicial (kW/h). Y, de manera continua acorde con la Ecuación 25:

$$E_m = \frac{P_{(stat)} - P_0}{m_p} \quad (25)$$

Donde $P_{(stat)}$ es el consumo de energía en operación estacionaria (kW/h).

Con este modelo se deduce que, en un amplio rango, la relación entre el tamaño fino del producto y la energía específica consumida puede ser descrito mediante una función de potencia, la cual es (Ecuación 26):

$$X_p = a E_m^b \quad (26)$$

Donde X_p es el tamaño del producto (μm), a corresponde al valor de una pendiente modelada y E_m^b es la energía consumida por la calidad del producto demandada (kWh/ton) y los medios de molienda usados. Los resultados del modelado fueron dados en términos de X_{50} (el tamaño a 50% de pasante de medios de molienda) el cual es un parámetro que determina la generación de finos. En la Figura 7 se muestra el producto fino en función de la energía específica, donde se observa que, a un menor tamaño de bola hay un producto más fino y un consumo de energía específica mayor.

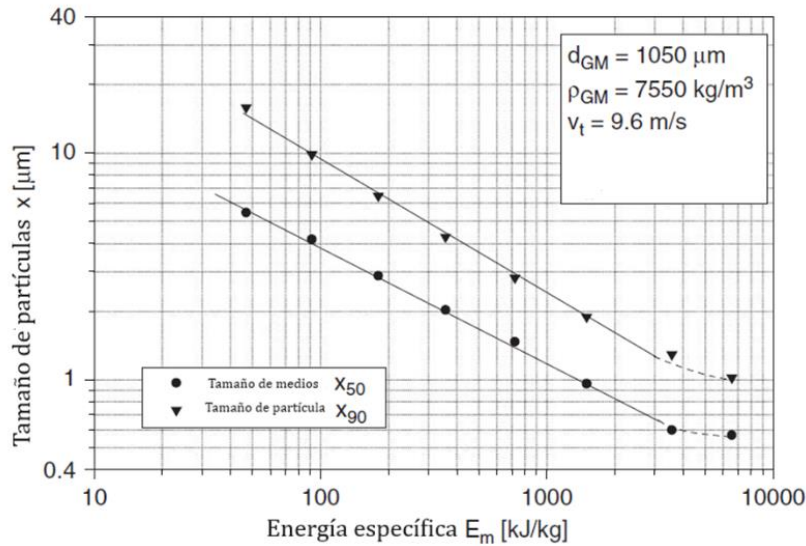


Figura 7.-Tamaño de partícula en función de la energía específica log-log. (Kwade y Shwades, 2007, modificado por Roberto Divani Zavala Puente).

IV. 4.1 Tipos de Molinos de medios agitados

Los molinos de medios agitados pueden clasificarse en la categoría de molinos inducidos por gravedad y molinos fluidizados (Palaniandy, 2015). Dentro de los primeros, el comercial más conocido es el Vertimill y el Towermill; para los segundos es el SMDmill, VPXmill, IsaMill y HIGmill.

El molino Vertimill (Figura 8 a y b) opera mediante un motor acoplado que gira un tornillo interno a una velocidad constante para agitar los medios de molienda y la pulpa; por lo que, por medio del mecanismo de atrición va moliendo las partículas. A medida que las partículas son molidas, se elevan hasta la parte superior del molino y se desbordan hacia un tanque de separación, en el cual,

mediante un cambio de rotación en la pulpa, provocan turbulencias que clasifican el material, haciendo que las partículas más gruesas sedimenten. Este material grueso retorna al fondo del Vertimill, mientras que el producto fino sale a través de una tubería vertical (*Vertimill®* - Metso, s. f.-b).

El Towermill (Figura 8 c) tiene una característica importante sobre su diseño: sólo está compuesto por un tornillo agitador central, el cual es su único componente móvil en contacto con la pulpa y el medio de molienda de acero, lo que produce la reducción de tamaño por atrición. Esto proporciona una máxima eficiencia en la molienda, ya que la rotura del material es por atrición y no por impacto. Esto ocurre en los tipos de molienda 7a y 7b cuyos principios se rigen bajo la molienda vertical ultrafina. El tornillo que contiene, de doble hélice, proporciona una transferencia de energía eficiente al medio esférico de acero, lo que provoca una reducción inmediata del tamaño de partícula antes de salir por la parte superior del molino (*FLSMidth® Tower Mill*, s. f.).

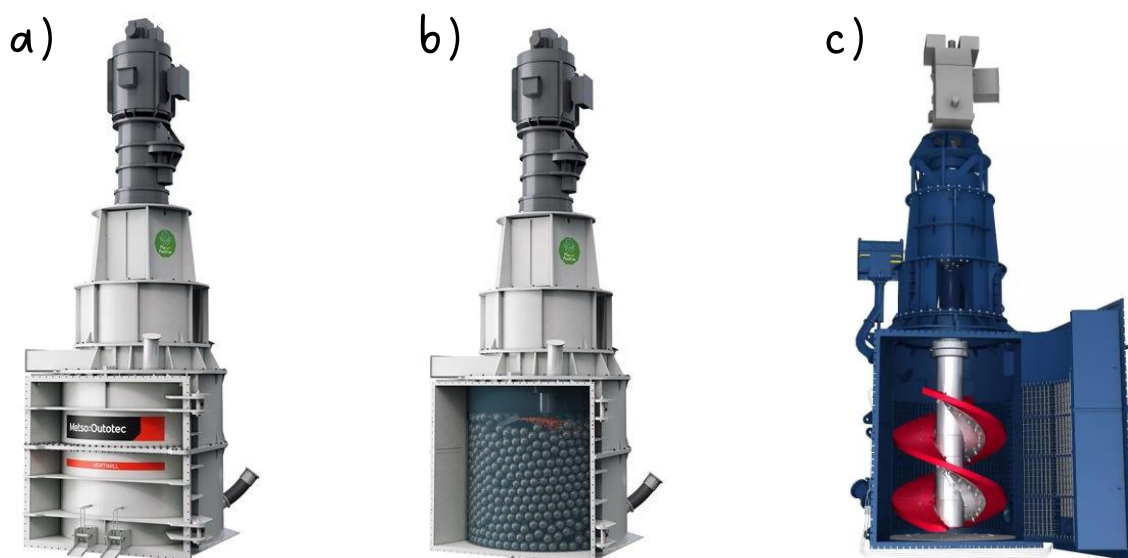


Figura 8.- a) Vertimill por fuera; b) Vertimill mostrando la cámara interna de molienda; c) Towermill mostrando su cámara interna de molienda (*Vertimill®* - Metso, s. f.-b; *FLSMidth® Tower Mill*, s. f.).

El Detritor de Medios Agitados (SMDmill) (Stirred Media Detritors, SMD, - Metso, s.f.) es un molino de molienda de medios fluidizados (Figura 9 a). Su mecanismo de molienda aprovecha la energía rotacional de los brazos del impulsor para impartir un movimiento de alta energía al medio y a la mezcla pulpa dentro del molino. Esto provoca fuerzas de compresión y corte entre partículas que producen el mecanismo de molienda para una molienda fina.

El VXPmill (VXPmill For Fine & Ultra Fine Grinding | FLSmidth, s.f.-b) es un molino de medios agitados dispuesto verticalmente (Figura 9 b). Está diseñado con

un impulsor modular que tiene un tornillo con rotes perforados y espaciadores extraíbles. La pulpa ingresa por la parte inferior, se desplaza hacia arriba a través de la cámara del molino y se desborda a través de una rejilla de retención de medios en la parte superior. Los discos giratorios de poliuretano activan medios de molienda cerámicos inertes dentro de la cámara de molienda, lo que permite el movimiento de la pulpa del medio de molienda, y esto produce una trituración por atrición de las partículas de la suspensión.

El Isamill (Anderson y Bandarian, 2019) es un molino de medios agitados dispuesto horizontalmente (Figura 9 c). En el equipo, la pulpa entra a través del molino y los discos trituradores agitan la pulpa y los medios de molienda, de manera que se centrifugan hacia lo largo de la cara de los discos y el revestimiento de la carcasa, al llegar al revestimiento de la carcasa el medio se retorna al área del eje del molino. Este evento se presenta en la cara de cada uno de los discos, donde hay suficiente medio de molienda presente, y establece una cámara de medio de molienda agitado entre cada uno de los discos de molienda. La pulpa para moler ingresa frente a la tapa del extremo del eje en un extremo del molino, y debe pasar a través de cada una de las cámaras de molienda en serie antes de salir. En el extremo de descarga del molino se encuentra el separador de producto, que utiliza un espacio más pequeño entre el disco final y el disco del rotor para centrifugar cualquier partícula gruesa y medio de molienda hacia la carcasa. El rotor, que actúa como una bomba, devuelve este material a las zonas de molienda. Este mecanismo permite que el producto molido fluya a través del molino y salga, mientras retiene el medio de molienda en el interior.

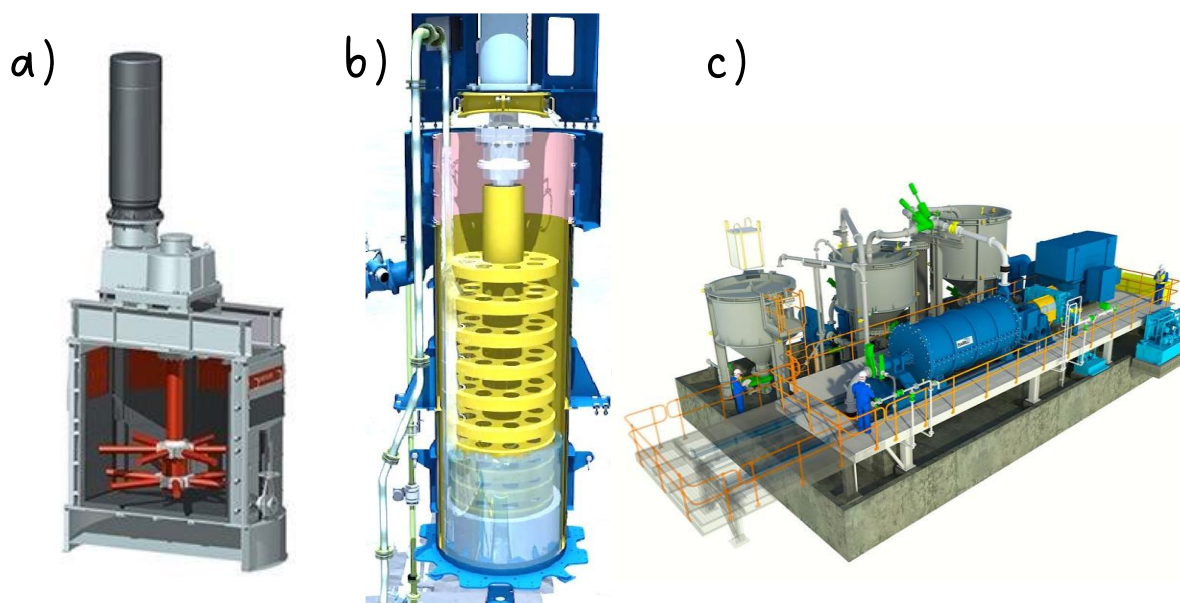


Figura 9.-a) SDMmill con vista de la cámara interna; b) VXPmill con vista a la cámara de molienda; c) Isamill comúnmente dispuesto en planta. (Stirred Media Detritors (SMD) - Metso, s. f.; VXPmill For Fine & Ultra Fine Grinding | FLSmidth, s. f.-b; (Molienda ultrafina)).

IV. 4. 2.Descripción de la Tecnología HIGmill.

El molino de molienda de alta intensidad (HIGmill por sus siglas en inglés - High Intensity Grindind Mill), Figura 10, es un molino de medios agitados vertical que utiliza discos (rotores), diseñados para estar fijos en el eje, pero permitiendo crear zonas espaciadas a lo largo; es decir, tienen un área que permite el paso de la pulpa; y medios de molienda de cerámica. Su aplicación se centra en procesos de remolienda en circuitos de flotación, o en procesos hidrometalúrgicos para tamaños de partículas pequeños que requieren ser tratados mediante lixiviación dinámica. El HIGmill es utilizado para requerimientos de molienda fina y ultrafina, desde tamaños menores a 300 μm hasta por debajo de 5 μm .

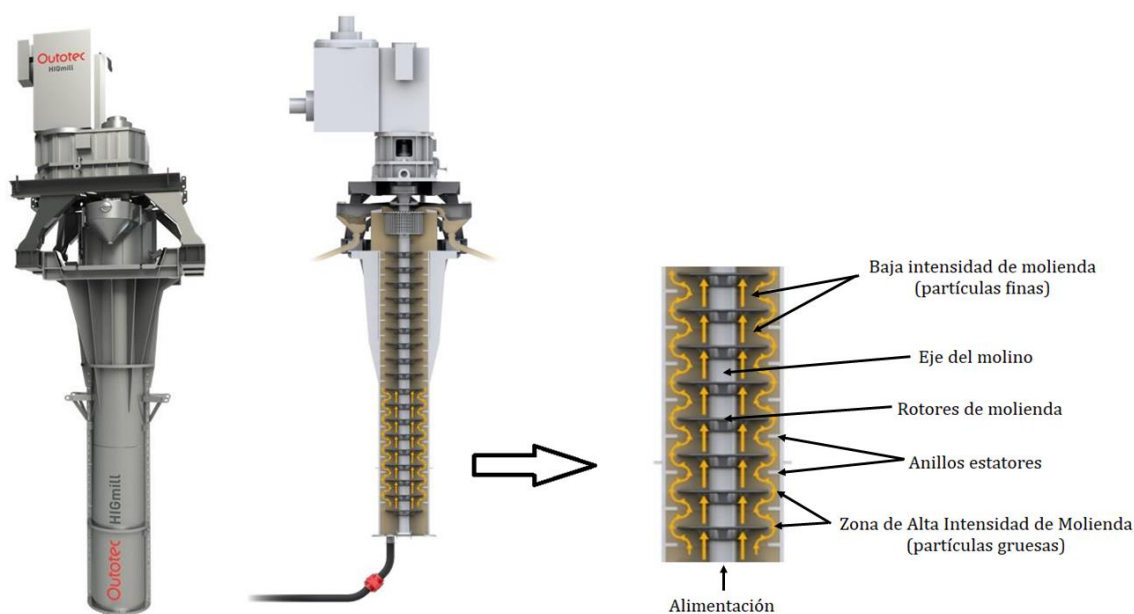


Figura 10.-HIGmill, sus principales componentes y funcionamiento. (Letho, 2013, modificado por Roberto Divani Zavala Puente).

La pulpa se bombea al molino y el producto molido se descarga por la parte superior del mismo. En esta tecnología, la molienda se logra mediante la rotación de los discos fijados al eje lo que genera la fractura de mineral por la interacción de las partículas con el relleno de bolas de cerámica de aproximadamente 3 mm de diámetro que recubren desde la base hasta el espacio dispuesto entre los discos a un porcentaje de llenado de estas bolas.

Debido a la disposición vertical del molino, se produce una clasificación interna en la que las partículas más grandes tienden a asentarse en la parte inferior y los extremos, mientras que las partículas más pequeñas tienden a moverse hacia el centro y arriba. Las partículas más largas son impulsadas hacia la cubierta exterior por la fuerza centrífuga, lo que resulta en un mayor tiempo de residencia.

La pulpa fluye hacia arriba a través de los rotores y los medios de molienda, donde el mineral se reduce a un tamaño de partícula específico.

Un clasificador ubicado en la parte superior de la cámara evita la mezcla de los medios de molienda con el producto final, asegurando así una separación efectiva entre los medios de molienda y el producto molido. Este diseño vertical y el proceso de clasificación interna contribuyen a la eficacia de este equipo en la obtención de partículas finamente molidas.

Por lo general, en un circuito de molienda HIGmill (Figura 11) se coloca previamente un hidrociclón que clasifica las partículas finas de las partículas gruesas, estas últimas son las que son reducidas de tamaño por el molino; a este tipo de circuito se le conoce como “*circuito directo*” (Zavala, 2022). La densidad de pulpa se ajusta antes de bombearla hacia el molino. El molino vertical cuenta con un medidor de tamaño de partícula, el cual proporciona información casi inmediatamente, así como el consumo de energía específica. En el molino se instala un variador para ampliar y controlar el rango de velocidad del movimiento del rotor.

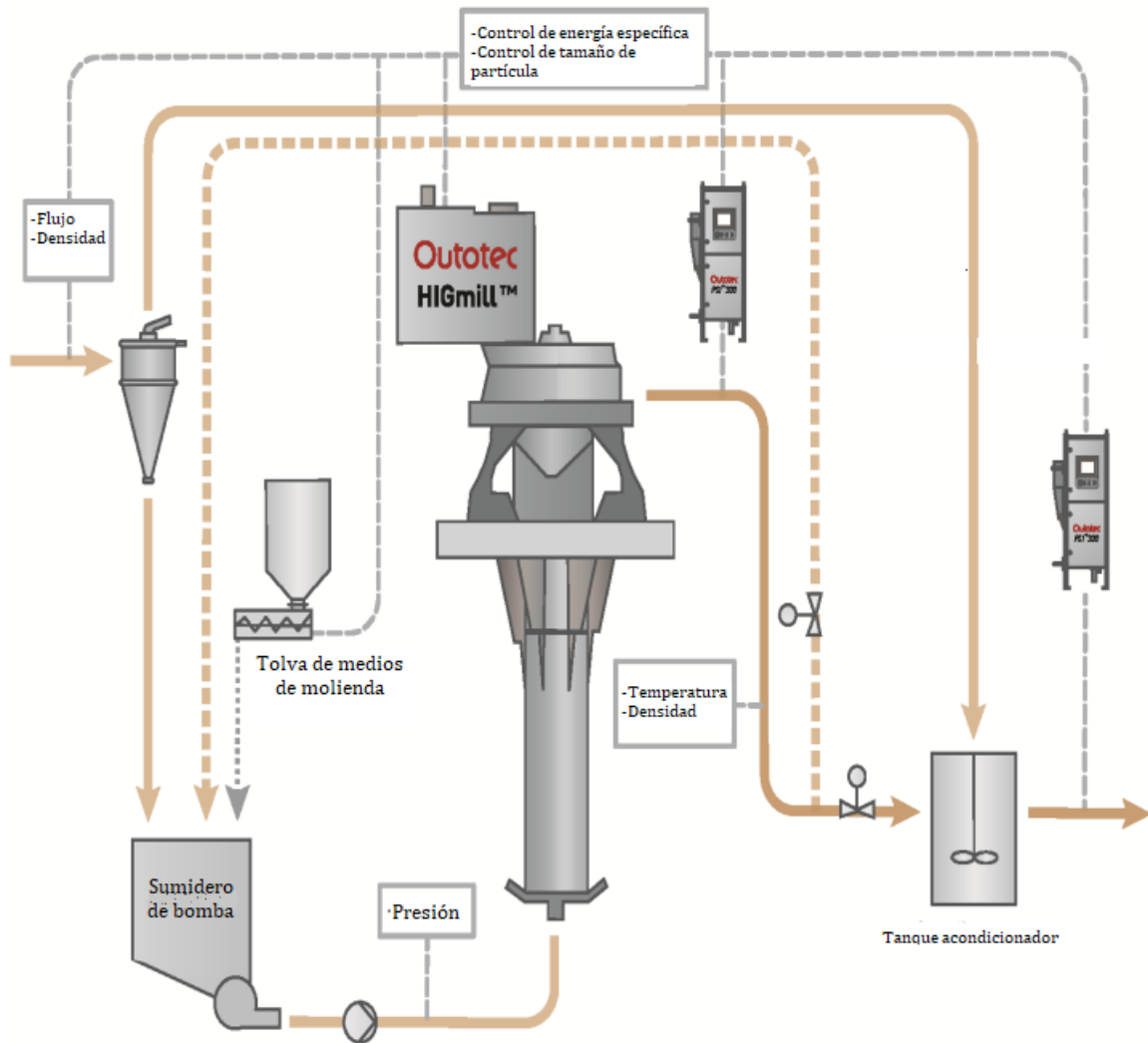


Figura 11.-Circuito de HIGmill. (Letho, 2013, modificado por Roberto Divani Zavala Puente).

IV. 4. 2.1. Componentes estructurales del equipo y parámetros operativos

Sus principales componentes se presentan en la Figura 12:

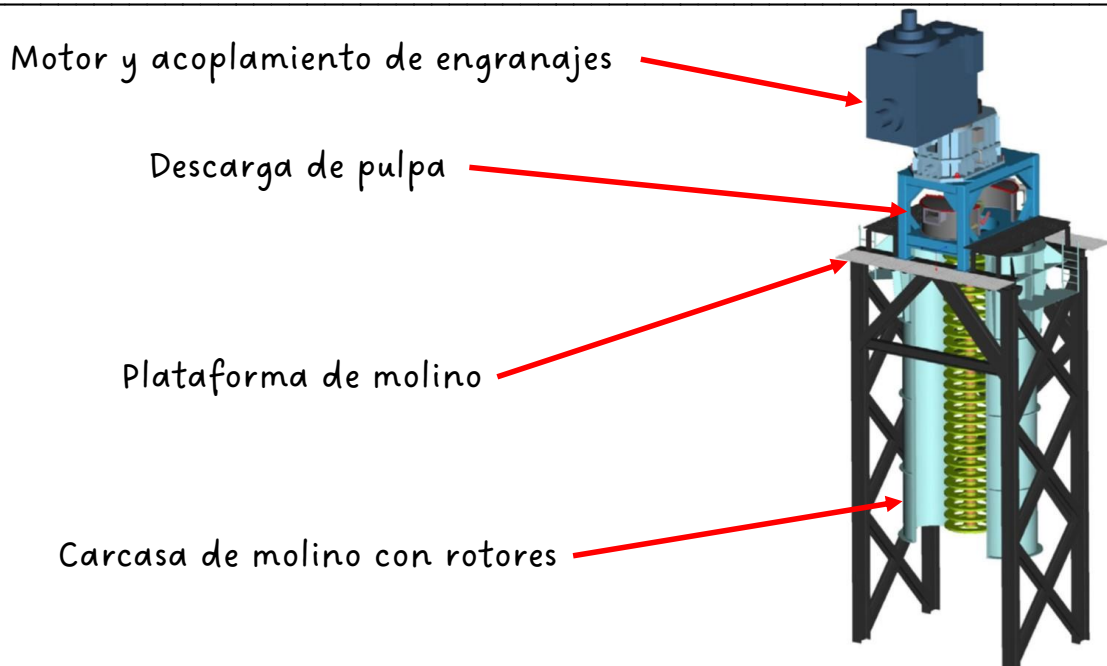


Figura 12.-Componentes estructurales de HIGmill. (Heath et al. 2017, Modificado por Roberto Divani Zavala Puente).

Los tipos de rotores de molienda se muestran en la Figura 13 de los cuales para este trabajo de tesis se consideraron los rotores dentados (Figura 13 a, 13 b).



Figura 13.-Rotores de molienda HIGmill. Almenados y planos de caucho (a, c) y acero (b, d). (Altun et al, 2023).

Los medios de molienda (Figura 14) son esferas de cerámica compuestas de alúmina (Al_2O_3) y zircón (ZrSiO_4), el funcionamiento del molino tiene una influencia en la eficiencia de la molienda, el desgaste general de sí mismas y el desgaste de los componentes internos del molino (Hassall et al, 2016). Hasall et al. (2016) han demostrado que, a nivel industrial, la elección correcta de los medios de molienda (hierro o guijarros hechos de cerámico) eficientiza la molienda, además de minimizar el desgaste del molino dependiendo de la calidad de las bolas; mostrando los autores que los mejores medios de molienda fueron guijarros hechos de cerámico.



Figura 14.- MINERAX bolas de cerámica de 75% de alúmina y 25% de zircón. (Hassall et al, 2016).

IV. 4. 2.2. Parámetros operacionales

Los parámetros principales de operación del molino se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1.- Principales variables típicas de operación.

Valores de los parámetros principales de operación	
Variable operativa	Valores típicos
Caudal o flujo volumétrico (m^3/h)	99-102
Velocidad del eje del rotor (m/s)	8.5 - 9.6
Nivel de llenado de bolas (%)	40 - 50
Porcentaje de sólidos (%)	47.4 - 49.9
Amperaje (A)	185.6 - 203.55
P ₈₀ PSI (μm)	19.75 - 26.27

Mientras que los parámetros operacionales (valores automatizados) se ajustan de acuerdo con las condiciones que establezca el tamaño de liberación P₈₀. Así, de acuerdo con el valor de P₈₀, el sistema automático PSD (Particle Size Distribution) deberá ajustar los valores mostrados en la Tabla 2.

Tabla 2.- Parámetros operacionales del proceso de HIGmill a ajustar de acuerdo con el P_{80} .

Parámetros propuestos de HIGmill
Energía específica de molienda (kWh/ton)
Velocidad fija: el molino es controlado a cierta velocidad tangencial de los rotores en todo momento. (m/s)
Potencia fija: El molino opera bajo cierta potencia fija. (kWh)

El equipo HIGmill al ser relativamente nuevo, presenta poca información en cuanto a su funcionamiento y estudio, en contraste con la molienda convencional y otros molinos de molienda ultrafina. Desde su puesta en marcha a nivel global para el procesamiento de minerales en 2012, ha habido estudios en cuanto a su aplicación a escala piloto. De los trabajos reportados de la operación del HIGmill se consideran los puntos más sobresalientes:

- Letho et al. (2013) presentaron un trabajo donde informaron las características del HIGmill, así como su importancia para los retos que afronta el procesamiento de minerales en las etapas de remolienda. De ello partieron para presentar la filosofía de control del molino demostrando la ventaja de poseer una herramienta de control para variar la velocidad del eje del impulsor y así determinar la energía específica del mineral para lograr los requerimientos de tamaño en el producto.
- Junnola, (2013) presentó un trabajo sobre la influencia de los parámetros en la eficiencia de molienda en un molino HIG5 de escala piloto. Por otro lado, realizó la estandarización de pruebas a nivel laboratorio continuas y por lotes, comprobando que las pruebas semicontinuas son equivalentes a pruebas continuas.
- Erb et al. (2015) realizaron una serie de pruebas para revisar un HIG25, que es un HIGmill a tamaño escala para laboratorio de 25 litros. Los autores analizaron la factibilidad de implementar un HIGmill para un circuito de procesamiento de molienda terciario, de escala laboratorio, reduciendo una muestra de F_{80} de 100 μm a un P_{80} de 53 μm . Asimismo, evaluaron un HIG200/75 (de 200 litros de capacidad y un motor de 75 kW) a una aplicación primaria a escala piloto, reduciendo de un F_{80} de 700 μm , con un máximo de 3 mm, a un P_{80} de 194 μm , a fin de probar si se podría implementar su uso a una escala de trabajo de alimentación a granulometrías gruesas de 3 a 5 mm. Los resultados mostraron tener factibilidad de implementación.
- Letho et al. (2016) presentaron la implementación de un HIGmill de 700 kW para un circuito cobre-níquel de flotación, procesando los *underflow*, U/F, (más gruesos) de una clasificación previa por hidrociclones, que fluctuaba entre 90-100 μm que posteriormente eran alimentados al molino. El molino redujo los U/F entre 30-40 μm , aumentando así la recuperación de cobre,

aunque los datos presentados de recuperación de cobre no fueron mostrados claramente.

- Hassall et al. (2016) estudiaron el efecto de la morfología de diferentes bolas de cerámicas durante la operación de molinos de medios agitados, presentando un caso de estudio sobre el molino antes mencionado (Letho et al., 2016), mostrando que el desgaste de bola se mantiene uniforme en un rango de 2.5 a 3.15 mm, demostrando que la elección correcta de los medios de molienda, así como la mezcla de tamaños de bola, contribuye al nivel de éxito de la operación del molino.
- Paz et al. (2021) realizaron, en conjunto con AngloGold Ashanti (AGA) Sunrise Dam Gold Mine, un estudio de un HIGmill de 3500/23000 (3500 kW y 23000 litros) con un P_{80} de 10-12 μm ; observando un aumento en la recuperación de oro del 6% gracias a la liberación de componentes valiosos.
- Mezquita et al. (2022), en la mina Santa Elena de First Majestic Silver Corp. (FMSC) en México, implementaron un proceso de molienda ultrafina en un proceso de lixiviación dinámica para operar en un rango de P_{80} de 15 a 30 μm , mostrando que la implementación de HIGmill trajo consigo una recuperación de plata de 4% y de oro del 0.7%, debido a la liberación de componentes valiosos.
- Altun et al. (2023) ampliaron la comprensión de la operación del molino HIGmill para el caso de un circuito de cobre, demostrando que un porcentaje de sólidos de 50% mejora la eficiencia en 30%, que un nivel de llenado de bolas de 70% es más eficiente que un nivel de 64% en el cual operaba el molino estudiado. Asimismo mostraron que, la velocidad del eje del molino afecta directamente la eficiencia energética; la elección del medio de molienda puede hacer más eficiente el consumo de energía; y que los rotores de acero mejoraban la eficiencia energética con respecto a los de caucho, con la desventaja de un desgaste más rápido, por lo que consideraron más duraderos los de caucho sujetando a un análisis la viabilidad del cambio de los componentes internos del molino.
- Can et al. (2023) estudiaron la operación de dos circuitos de molienda de medios agitados, uno horizontal por medio de un molino IsaMill a escala piloto y otro vertical de HIGmill a escala industrial, con minerales de características similares para comparar el rendimiento de ambos molinos según la disposición de estos. En la comparación del aprovechamiento de la energía y la granulometría del producto, la disposición vertical fue más energéticamente eficiente en la producción de un P_{80} de 35 μm en un 54%, que los autores atribuyen a la compactación de los medios de molienda. Para la molienda fina (20 μm), la orientación horizontal (IsaMill) resultó más energéticamente eficiente, lo que los autores atribuyen a la orientación del molino. De acuerdo con los autores, estudios en simulación para molinos verticales por el método del elemento discreto han mostrado que la zona donde hay una alta energía (parte inferior del molino donde está la alimentación), disminuye hacia el lado externo de la descarga, situación que no acontece en el molino de orientación horizontal. Finalmente compararon los rendimientos de los molinos evaluando la energía de tensión, mostrando

que para los tamaños gruesos se tienen resultados similares; sin embargo, en los tamaños finos, el IsaMill tenía un producto más fino cuando se operaba al mismo nivel de energía de tensión que el HIGmill.

Por otro lado, el modelado matemático del equipo HIGmill se ha realizado aplicando un modelo de potencia para rotores dentados (Heath et al., 2017), que se analizará más adelante. También Heath, A., Belke, J., Lehto, H., Orser, T. (Keikkala, 2018) elaboraron un modelado por medio del elemento discreto con la finalidad de implementar rotores dentados en lugar de los discos que se usaban en el eje del molino. Observaron que las bolas se deslizaban sobre la superficie de los discos planos, y que la adición de estructuras dentadas al disco reducía el deslizamiento que se presentaba en los discos planos, al mantener la capa de bolas sobre la superficie de los rotores. También, los rotores dentados generaron un mayor esfuerzo cortante entre bolas más alejadas de los rotores hacia la mayor parte del volumen de las bolas. Keikkala et al. (2018) demostraron que, al implementar rotores dentados en una planta de procesamiento de Kevitsa, Finlandia; estos aumentaron la eficiencia energética entre 28.3-50.3% en contraste con los discos planos; y aumentaron la eficiencia de molienda en un 5.2% con respecto al disco plano; Y en un molino de laboratorio, al cambiar los discos planos por los rotores dentados, se mejoró la eficiencia de 21.4 al 30.9%.

Larsson et al. (2021) elaboraron un modelado multifísico a un HIG5 donde acoplaron el modelo de elementos finitos de partículas para modelar el fluido del molino, modelando medios de molienda con el método de elemento discreto y la estructura del molino con el método de elementos finitos. Los resultados del modelamiento se validaron con la operación de un molino para predecir el consumo de potencia; además, el modelo predice el comportamiento de los medios de molienda, así como del fluido cerca de los rotores, como muestran las observaciones experimentales, y con ello prever los patrones de desgaste que concuerdan con dichas observaciones experimentales.

IV. 5. Propuesta para el modelado de HIGmill.

Con el fin de modelar la molienda HIGmill se aplicará el modelo de potencia propuesto por Heath et. al (2017), al cual se integrará el modelo de balance poblacional, a continuación, se describen ambos modelos.

IV. 5.1. Modelos de potencia de molinos de medios agitados

Mannheim et al. (2012) propusieron un modelo de potencias basado en la agitación del rotor mediante la Ecuación 27:

$$P = Ad_k^5 n^3 \rho_{sus} \left(\frac{d_k^2 n \rho_{sus}}{\mu} \right)^{-m} \left(\frac{d_k n^2}{g} \right)^{-n} \left(\frac{w_k}{d_k} \right)^c \left(\frac{D_m}{d_k} \right)^e \left(\frac{d_g}{d_k} \right)^f \quad (27)$$

donde A es una función compleja que no definen los autores, d_k es el diámetro de agitador (m), D_m es el diámetro del molino (m), d_g es el diámetro del medio de molienda (m), n es la velocidad del agitador (1/min), ρ_{sus} es la densidad de la suspensión (kg/m³), μ viscosidad de la suspensión (Pa·s), g aceleración por la gravedad (m/s²), w_k es el ancho de los discos (m). Sin embargo, a pesar de que aparentemente cuentan con datos experimentales, no parece que los autores hayan intentado ajustar el modelo o determinar los exponentes $-m, -n, c, e, f$.

Por otro lado Radziszewski y Allen (2014) propusieron una ecuación de potencia usando una analogía de un reómetro basándose en la viscosidad:

$$P_\tau = \mu_{est} \omega_{R\&A} V_t \quad (28)$$

donde la viscosidad μ_{est} (N s/m²) viene dada por:

$$\mu_{est} = k(a\omega_{R\&A}^{-b}) \left(\frac{D_b}{D_{b,ref}}\right)^c \left(\frac{\rho_m}{\rho_{m,ref}}\right)^d \left(\frac{\rho_{sl}}{\rho_{sl,ref}}\right)^e \left(\frac{100 - x_{R\&A}}{100}\right)^f \quad (29)$$

Donde P_τ es la potencia (kW), k es un factor de corrección (s/u), $a\omega_{R\&A}$ es la velocidad de rotación (rad/s), V_t es el volumen agitador (m³), D_b el diámetro del medio de molienda (m), ρ es la densidad (kg/m³, subíndices m = medio o sl = pulpa), $-b$ subíndice de relación de la línea de tendencia de la viscosidad con la rotación, $D_{b,ref}$ corrección del diámetro del medio con respecto a un diámetro de medio de referencia (s/u), $\rho_{m,ref}$ corrección de la densidad del medio con respecto a una densidad del medio de referencia (s/u), $\rho_{sl,ref}$ corrección de la densidad de la pulpa con respecto a una densidad de pulpa de referencia (s/u) y $x_{R\&A}$ es una corrección de dispersante (s/u).

La Ecuación 29 proporciona una correlación razonable con los datos de la literatura para varios molinos a escala de laboratorio (< 14 kW). Radziszewski y Allen (2014) también ajustaron exitosamente el modelo a un molino Vertimill piloto y a escala real; sin embargo, el modelo requirió algunos ajustes para cada nuevo conjunto de datos. No obstante, afirman que ninguno de los modelos actuales son lo suficientemente precisos para predecir la potencia del molino de medios agitados para la escala de molinos a la cual están diseñando y fabricando actualmente.

La limitación de estos dos modelos para el diseño de unidades/circuitos es que se basan en datos limitados, en particular datos autoconsistentes de una gama de tamaños de molinos. Es decir, aunque pueden describir correctamente los efectos de rpm del impulsor, el tamaño del cordón del llenado de porcentaje de bolas, y la tasa de fluidización para un determinado diseño del molino (probablemente piloto) ya que esos datos están disponibles, los modelos pueden tener una predicción limitada en un rango de tamaño de molinos.

IV. 5. 2. Modelo de potencia para rotores dentados HIGmill

Heath et. al (2017) desarrollaron un modelo de predicción de potencia de HIGmill para rotores dentados, partiendo de los datos recabados en tres molinos HIGmill: escala laboratorio (20 kW), escala piloto (75 kW) y uno pequeño a escala industrial (700 kW). La ecuación propuesta es la descripción de la potencia en función de diferentes variables, tanto de las dimensiones del HIGmill como de la operación de éste:

$$P = f(v_t, d_r, n_d, h_b, \mu, \rho_s, \rho_b, d_b) \quad (30)$$

Donde P es la potencia del molino (kW), v_t es la velocidad tangencial del rotor de molienda (m/s), d_r es el diámetro del rotor de molienda (m), n_d es el número de discos sumergidos (s/u), h_b es la altura de la cama de bolas (m), μ es la viscosidad de pulpa (N s/m²), ρ_s es la densidad de pulpa (kg/m³), ρ_b es la densidad del medio de molienda (kg/m³), y d_b es el diámetro del medio de molienda (m). No obstante, el efecto de fluidización, entendiendo la fluidización como el proceso en el cual un lecho de partículas sólidas se comporta como un fluido cuando se le somete a un flujo ascendente de un fluido a través de él (Crowe, 2001), y el nuevo rotor; debe considerarse en el cálculo del uso de la potencia suministrada al equipo (kWh/ton), incluso con el lecho de bolas parcialmente fluidizado.

La velocidad de sedimentación de una sola partícula viene dada por la ecuación de Stokes:

$$U_s = \frac{d_b^2 g (\rho_b - \rho_s)}{18\mu} \quad (31)$$

Donde U_s es el número de asentamiento de Stokes (m/s), g es la aceleración debida a la gravedad (m/s²). En el caso de una cama de bolas, también debe incluirse los efectos del impedimento por la alta fracción de volumen de partículas, y el efecto de operar por encima de un número de Reynolds de partículas igual a 1. Hay muchas funciones (Heath, 2002) propuestas para estos efectos, la que usaron los autores fue la ecuación de Richardson y Zaki, para el comportamiento del obstáculo y la ecuación de Schiller Naumann para números moderados de Reynolds (Re_p). La combinación resulta en:

$$U_s = \frac{d_b^2 g (\rho_b - \rho_s)}{18\mu} \frac{(1 - \phi)^{4.65}}{(1 + 0.15 Re_p^{0.687})} \quad (32)$$

Donde ϕ es la fracción en volumen de sólidos de las partículas constituidas por bolas y mineral cuando la cama de los medios de molienda no ha fluidizado (cuando no está realizando una labor de molienda, es decir, a un $t=0$ min). El número de Reynolds viene dado por:

$$Re_p = \frac{d_b \rho_s U_s}{\mu} \quad (33)$$

Dado que la ecuación de Schiller-Naumann incluye el número de Reynolds de las partículas, el cual depende de la velocidad de sedimentación, es necesario emplear una solución numérica para resolverla.

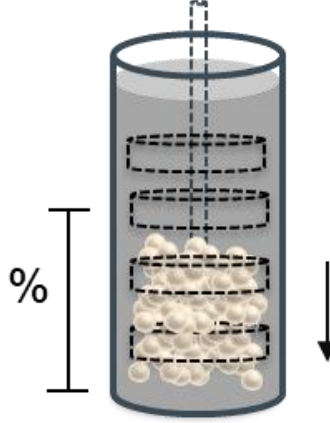


Figura 15.-Velocidad de deslizamiento, la cual es producida por la bola y la pulpa dentro del molino.

La ley de Stokes está escrita en relación con un marco de referencia fijo (a menudo una columna de sedimentación graduada); sin embargo, la fluidización de las bolas debe escribirse en términos de la velocidad relativa entre el fluido y las bolas; es decir, la velocidad de deslizamiento (U_{slip}) (Figura 15). En estado estacionario, considerado para este trabajo, las bolas son estacionarias en la dirección vertical, por lo tanto, la tasa crítica de aumento de fluidización lo cual implica un movimiento de la carga (partículas y bolas) viene dada por:

$$U_{slip} = \frac{U_s \phi}{1 - \phi} \quad (34)$$

La Ecuación (34) proporciona la velocidad crítica de deslizamiento para comenzar a levantarlos medios de molienda cuando están empaquetadas hasta una fracción de volumen, que los autores del modelo (Heath Al, 2016) consideraron, de aproximadamente 64%. No obstante, dependiendo de la cantidad de pulpa alimentada al molino, la velocidad de aumento real puede ser mayor o menor que dicha velocidad crítica. El patrón de flujo real en el molino es complejo debido al impulso impartido por los rotores y los rotores fijos que constituyen una serie de placas de orificios en el molino. De modo simple, los autores consideraron un flujo pistón; entonces, la velocidad de ascensión nominal (U_{rise}) (Figura 16) se puede calcular a partir del flujo volumétrico de alimentación (Q), el diámetro interno del molino (d_{ID}) y el volumen de espacio ocupado por los medios de molienda (ϕ), cabe mencionar que los espacios entre los rotores que permiten en el paso de la pulpa en ascenso, está considerado en dicho factor:

$$U_{rise} = \frac{Q}{\pi \left(\frac{d_{ID}}{2}\right)^2 (1 - \phi)} \quad (35)$$

Donde U_{rise} está en (m/s), Q en (m³/s), y d_{ID} en (m).

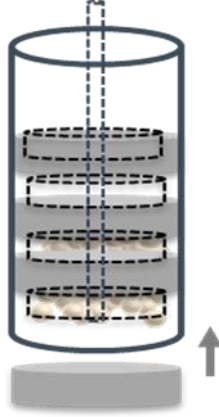


Figura 16.- Velocidad de ascenso, la cual es la que permite la fluidización de las bolas del molino.

Cuando la velocidad de ascensión nominal es igual a la velocidad de deslizamiento, las bolas comenzarán a ascender; es decir, se soportarán hidrodinámicamente, en lugar de mecánicamente a través del lecho compacto de perlas. Las velocidades de ascensión más bajas, se da debido a que la fuerza de ascenso de la carga supera la fuerza gravitatoria que actúa sobre las bolas, las cuales empezarán a moverse hidrodinámicamente y el resto mecánicamente. Aquí se asume que el consumo de energía del molino (ignorando por el momento las fuerzas centrífugas debidas al impulsor) es únicamente debido a la relación entre la velocidad de ascenso y de deslizamiento es menor; es decir, se requiere una mayor fuerza de deslizamiento para propiciar eventos de fractura que de ascenso que actúen en el lecho fluidizado.

Por conveniencia, la relación de velocidades se convierte a una presión de sólidos debido a la gravedad reducida ($p_{s,g}$) (N/m²):

$$p_{s,g} = 0.5gh_b(\rho_b - \rho_s)\max(0, 1 - \frac{U_{rise}}{U_{slip}}) \quad (36)$$

El 0.5 es debido a la presión promedio; es decir, a la mitad del lecho de bolas. Los autores consideraron también que, si la tasa de aumento de la velocidad de ascenso es más alta que la velocidad de deslizamiento, no necesariamente se infiere que las bolas serán llevadas a la parte superior y salgan del molino junto con la pulpa molida. Esto se da debido a que la velocidad de sedimentación, como consecuencia de la diferencia de masa, actúa en una proporción menor en las partículas de mineral que sobre las bolas, lo cual se muestra en la Ecuación 32.

La presión de los sólidos también se puede impartir a los medios de molienda a través de las fuerzas centrífugas del impulsor. Comenzando con la ecuación para la fuerza centrífuga:

$$F_c = \frac{mv^2}{r} \quad (37)$$

Donde F_c es la fuerza centrífuga (N), m es la masa (kg), v la velocidad lineal (m/s), y r el radio interno del molino(m).

Los autores mencionan que la masa de material movida por el rotor no es fácil de calcular ya que sólo rota la parte central de la cama de bolas y no la zona cercana a la carcasa del molino. No obstante, se asumirá que una fracción del volumen hacia la punta del rotor gira a la misma velocidad de rotación (es decir, rpm, no m/s) que el rotor, y se incluye un parámetro de ajuste del modelo (k_1). Para acomodar la suposición que se obtiene, después de un reordenamiento:

$$p_{s,c} = \frac{F_c}{A_p} = \frac{k_1 \int_{r_{eje}}^{r_{rotor}} 8\pi^3 h \omega^2 (\rho_b - \rho_s) r^2 dr}{2\pi r h} = k_1 \frac{4}{3} \pi^2 \omega^2 (\rho_b - \rho_s) (r_{rotor}^2 - r_{eje}^2) \quad (38)$$

Donde $p_{s,c}$ es la presión debido a la fuerza centrífuga (N/m²), F_c fuerza centrífuga (N), A_p el área donde se ejerce presión debido a los medios de molienda (m²), ω velocidad de rotación de los discos (s⁻¹), h es la altura de la cámara de molienda (m).

Tomando las consideraciones anteriores, el modelo matemático para la potencia en HIGmill se presenta combinando la ecuación de la presión debida a la gravedad reducida (Ecuación 36) y a la presión debida a la fuerza centrífuga (Ecuación 38), Heat et al. (2017) proponen (Ecuación 39):

$$P = k_1 n_d d_r^{k_2} v_t^{k_3} (p_{s,g} + k_4 p_{s,c}) \quad (39)$$

Los parámetros k_1 y k_4 son ajustados mediante mínimos cuadrados entre las mediciones y el modelo propuesto, usando la función solver de Excel®.

$$\phi_{min} = \left(\frac{Potencia\ medida - Potencia\ modelada}{Potencia\ Medida} \right)^2 \quad (40)$$

IV.5.2. Modelo de Balance poblacional

El Modelo de Balance Poblacional (PBM, por sus siglas en inglés), es un modelo fenomenológico que simula la evolución de la distribución del tamaño de las partículas; por ejemplo, para un proceso de molienda, y análogamente permite dar claridad los mecanismos de reducción de tamaño de las partículas, entre ellos impacto, abrasión, el cizalla y la atrición.

En el caso de molienda, los PBM están basados en los conceptos de función de selección (velocidad de ruptura) y distribución de quebrado (función de generación de progenie). La función de quebrado se obtiene mediante pruebas cinéticas de molienda y la función de selección por medio de cálculo inverso, o directamente mediante estudios de energía consumida. Dos enfoques pueden usarse para estimar la función de selección. El primero está basado en la probabilidad de captura y fractura, donde se considera que una partícula atrapada entre dos bolas que impactan se muele sólo si el impacto del medio de molienda genera, o activa, al menos una sola grieta dentro de la partícula que causa la fragmentación (Nomura et al., 1991); suposición basada en los espectros de energía de impacto (Tavares y Carvalho, 2009; Tuzcu y Rajamani, 2011) y la probabilidad de quebrado (Vogel y Peukert, 2003; Bwalya et al., 2001). El segundo depende de los cálculos basados en la función de selección de Austin y de Herbst y Fuerstenau, que se examinarán consecuentemente.

En el análisis de la fractura de los materiales es útil considerar que, inicialmente la fractura de cada fracción de tamaño es de primer orden y la *función de selección* es la tasa fraccional (proporción) que un determinado tamaño de partícula se fragmente en partículas más pequeñas, por lo que la *función de quebrado* es la distribución de esos fragmentos madre después de producida la fractura.

La ley de conservación de la materia establece que la materia no puede desaparecer o ser creada espontáneamente. La masa que entra a un sistema debe dejar el sistema, o acumularse, o transformarse dentro del sistema. El PBM se formula como un balance numérico de las partículas que son dispuestas a un evento de conminución, siendo:

$$\text{Acumulado} = \text{Entrada} - \text{Salida} + \text{Cantidad Generada o Consumida} \quad (41)$$

La expresión discretizada para un sistema cerrado en estado transitorio por lotes o batch, donde la entrada y salida son iguales a cero, es:

$$\frac{dw_i}{dt} = -S_i w_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ i>1}}^{i-1} b_{ij} S_j w_j(t), \quad n \geq i \geq j \geq 1 \quad (42)$$

donde w_i es la fracción de masa para la clase i , S_i es la función de selección de la clase de tamaño i o rango de fractura específica. b_{ij} es la fracción de masa quebrada de clase de tamaño j que aparece en la clase de tamaño i , S_j es la velocidad de fractura de las partículas de tamaño j , y w_j es la fracción de material de tamaño j . La Figura 17 muestra una representación esquemática del balance poblacional, donde se estima la producción de partícula después de un evento de fractura (Δt), la distribución de los productos de S_i y b_{ij} representa al balance poblacional.

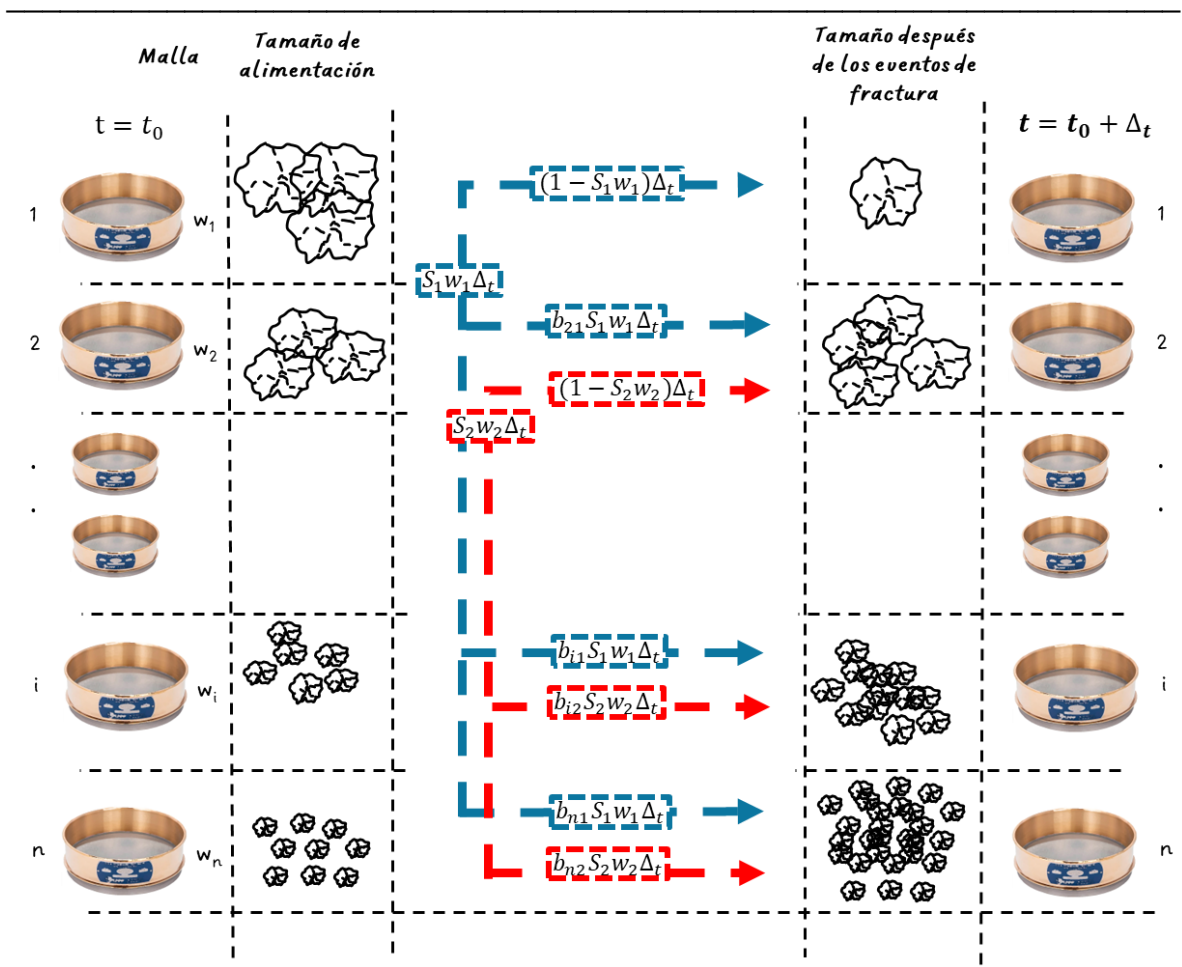


Figura 17.-Esquematación del Balance Poblacional.

IV.5.2.1. Función de selección y Función de quebrado

Cuando una fractura se produce, el material quebrado a cierta fracción de tamaño dado, por lo general, sigue una cinética de primer orden, por lo que el rango de fractura del material para la fracción de tamaño superior se puede expresar como:

$$-\frac{dw_i}{dt} = S_i w_i(t) \quad (43)$$

donde S_i es la función de selección de la clase de tamaño i o rango de fractura específica y w_i es la fracción masa de tamaño de la clase i . Asumiendo que S_1 es función de un periodo de tiempo específico, la ecuación anterior puede ser integrada con respecto al tiempo y así obtener:

$$\log(w_1(t)) - \log(w_1(0)) = -\frac{S_1 t}{2.303} \quad (44)$$

donde $w_1(t)$ y $w_1(0)$ son la fracción de tamaño de partículas de tamaño de clase 1 en el tiempo t y el tiempo cero, respectivamente. S_1 es la función de selección o rango de fractura específica (min^{-1}) de tamaño 1 y t es el tiempo de molienda. Una línea recta, cuya pendiente es $-S_1 / 2.303$, se obtiene a partir del gráfico $w_1(t)$ vs t en escala logarítmica de la función lineal resultante. Sin embargo, en algunos casos se observa una desviación de la cinética de primer orden debido a las diferencias en las características del mineral (composición química y estructura cristalina) y en las condiciones de molienda.

La fórmula utilizada para describir la variación de la función de selección o rango de fractura específica S_i (1/s) en función del tamaño de partícula es:

$$S_i(d) = \alpha_0 \left[\frac{X_i}{X_0} \right]^{\alpha_1} \cdot Q(x) \quad (45)$$

y $Q(x)$ es el factor de corrección para un rango de fractura mínimo el cual se expresa como:

$$Q(x) = \frac{1}{1 + \left[\frac{X_i}{\mu_p} \right]^\Lambda} \quad (46)$$

donde el parámetro α_0 , asociado a la velocidad de rompimiento, y el parámetro α_1 , relacionado al material molido; son parámetros dependientes del mineral en un molino particular bajo condiciones de operación definidos. X_i es el tamaño de las partículas (mm), X_0 es un tamaño de referencia, por lo general 1 mm, μ_p es el tamaño de partícula en la que $Q(x)$ es 0.5 y Λ es un índice que define con qué rapidez el rango de fractura decrece. La ecuación que relaciona el tamaño X_m (donde la velocidad de fractura es máxima para un material dado) con el parámetro μ_p se define como:

$$\mu_p = X_m \cdot \left(\frac{\Lambda}{\alpha} - 1 \right)^\gamma \text{ en condición que } \Lambda > \alpha \quad (47)$$

La función de selección o rango de fractura específica aumenta con el tamaño de partícula debido a que los esfuerzos que mantienen unida a la partícula son menores conforme el tamaño aumenta. Esto se atribuye a que en el interior de las partículas más grandes es mayor la cantidad de microdefectos, con esto la probabilidad de que una partícula grande contenga un defecto que iniciará la fractura, bajo las condiciones de estrés predominantes en un molino, será mayor. Cuando el tamaño de partícula es menor no significa que la resistencia de las partículas disminuye, y por lo tanto no se producirá un aumento en el rango de fractura específica (S_i). A medida que el tamaño de partícula decrece significativamente, con respecto al de las partículas alimentadas, los mecanismos productores de esfuerzos predominantes en el molino (impacto y abrasión) son

insuficientes para provocar la fractura, y la función de selección o rango específico de fractura pasa por un máximo y disminuye conforme el tamaño de partícula aumenta (King, 2001).

La función individual de quebrado, B_{ij} , puede expresarse de manera acumulada como (Ecuación 48):

$$B_{ij} = \phi \left[\frac{X_i - 1}{X_j} \right]^{\beta_1} + (1 - \phi) \left[\frac{X_i - 1}{X_j} \right]^{\beta_2} \quad (48)$$

La función individual de quebrado B_{ij} describe la distribución granulométrica de las fracciones finas en la población de partículas progenie. X_i es el valor superior del intervalo de partículas de tamaño i . Los parámetros ϕ , β_1 y β_2 son los parámetros del modelo que se obtienen a partir de los datos experimentales. La función b_{ij} queda expresada (Ecuación 49) como:

$$b_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} B_{ij} - B_{i+1j} & , \quad i > j \\ 1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_{ij} & , \quad i = n \\ 0 & , \quad i \leq j \end{array} \right\} \quad (49)$$

B_{ij} representa la fracción de peso acumulada del material separado de tamaño j que aparece en el intervalo de tamaño i . El subíndice 1 se refiere a la cantidad de material original de tamaño 1 en el momento $t = 0$; el subíndice i se refiere a un tamaño más pequeño que el tamaño j y el subíndice j se refiere al tamaño de material que aparece en la malla i que ha sido fracturado. Además, el coeficiente ϕ se puede relacionar con el tamaño como:

$$\phi = \beta_0 \left[\frac{X_i}{X_1} \right]^{-\delta} \quad (50)$$

Donde δ caracteriza el grado de no normalización.

IV. 5.2.2. Modelo de la función selección específica de Herbst- Fuerstenau de la Función de selección o del Rango Específico de Fractura

La variación de la función de selección o rango de fractura específica, S_i , y de la función individual de quebrado, B_{ij} , con las condiciones de molienda se puede explicar describiendo la variación de estas funciones con la entrada de energía específica en el molino y examinando cómo la entrada de energía específica varía a su vez con el tamaño del molino, el diseño y las condiciones de operación. Este

método indirecto es particularmente útil para escalar ambas funciones hasta escala batch (por lotes) y el trabajo de prueba a escala piloto. Esto se llama el procedimiento de escalamiento de energía específica y fue desarrollado inicialmente por Herbst y Fuerstenau (Herbst y Fuerstenau, 1974; 1980).

La función de selección o rango específico de fractura de la clase de tamaño i es igual a la red de entrada de energía específica a la carga del molino.

$$S_i = S_i^E \frac{P}{M} \quad (51)$$

Donde S_i^E es la función selección específica de la función de selección para partículas de la clase de tamaño i . P es la potencia neta consumida por el molino excluyendo la potencia sin carga que se requiere para superar las pérdidas mecánicas (kWh) y por fricción en el molino, y M es la masa de la carga en el molino excluyendo los medios (ton).

La energía específica la tasa de fractura se reporta comúnmente en ton/kWh. La característica esencial del modelo de Herbst-Fuerstenau es que S_i^E es una función del material y no varía con las condiciones de molienda, ni con las dimensiones del molino. Esta suposición es igual al postulado de que la cantidad de fracturas que ocurren en el interior del molino es proporcional a la cantidad de energía que ha absorbido el material que se está moliendo, y es indiferente a cómo la energía se imparte realmente a las partículas o a qué velocidad. Así, el método se puede utilizar para escalar los rangos de la función de selección, S_i , en amplios rangos operativos. De hecho, se ha encontrado a partir de observaciones experimentales que S_i^E es una función de la distribución del tamaño del medio de bola en el molino.

Herbst y Fuerstenau (1968, 1973), Herbst y Fuerstenau (1973), Herbst et al. (1982) y Rosales et al. (2019) han aplicado la Ecuación 51 bajo la forma:

$$S_i^E = S_i \frac{M}{P} \quad (52)$$

Lo anterior para elaborar un escalamiento a través de la energía específica de la función de selección, la cual es proporcional a la entrada de energía específica de masa al molino.

IV. 5.2.3. Distribución de tiempos de residencia

Los modelos macroscópicos tienen la característica de representar la operación de molienda de manera general y mediante una metodología estadística. Con ello se ha demostrado que en la práctica el conocimiento estadístico del tiempo de

residencia de las partículas en el molino es suficiente para completar el modelo de molienda continua. Para ello se elige un parámetro representativo el tiempo de residencia de las partículas dentro del molino, describiendo el comportamiento de ellas mediante la distribución de tiempos de residencia.

El tiempo de residencia de una partícula señala el intervalo de tiempo en el que la partícula permanece en el sistema desde un tiempo t_1 , hasta la salida del sistema en un tiempo t_2 . No todas las partículas poseen un tiempo de residencia análogo, por ello se puede deducir que la salida del sistema se obtendrá una distribución de los tiempos de residencia. La función de distribución de tiempos de residencia como función continua del tiempo se representa como:

$$\varphi_i(t)dt = \frac{dm_\tau}{M_\tau} \quad (53)$$

Donde φ_i es la función de distribución de tiempos de residencia (DTR), m_τ es la masa de partículas con edad τ dentro del molino y M_τ es la masa total constante de partículas dentro del molino.

El valor medio o tiempo promedio de residencia se representa:

$$\bar{t} = \int_0^\infty \varphi_i(t) dt \quad (54)$$

El tiempo promedio también resulta ser igual a:

$$\bar{t} = \frac{M_\tau}{Q} \quad (55)$$

Donde Q es el flujo volumétrico constante dentro del molino (m^3/h).

Para la medición experimental del DTR se utilizan trazadores que se vierten en la alimentación de los equipos, molinos en este caso, midiendo la concentración del trazador a la salida del sistema. Este debe tener la característica de ser inerte con características análogas a los materiales del sistema, además de ser detectable de manera sencilla. Los métodos para la medición de los tiempos de residencia dependen de la configuración de los circuitos, para el caso de interés se tiene el método de inyección de un trazador al sistema por inyección pulso, donde se tiene que:

$$\varphi_i(t) = \frac{C_p(t)}{\int_0^\infty C_p(t)dt} \quad (56)$$

Donde C_p es igual a la concentración del trazador en el producto.

Para reactores ideales, el flujo observado en la práctica puede representar diferentes características a lo que se refiere la varianza o desviación estándar de la función de DTR, lo cual se asocia al grado de mezcla en el sistema. El reactor de mezcla perfecta es aquel en el cual el contenido es homogéneo, de manera que la composición a la salida es exactamente igual a la composición en cada punto interior del molino (Austin y Concha, 1994). Para el caso del flujo pistón ocurre lo contrario, donde el material pasa sin mezclarse, cada elemento del material permanece en el reactor el mismo tiempo. La Tabla 3 presenta los modelos de la función de DTR y su transformada de Laplace con respecto de S_j .

Tabla 3.- Modelos DTR para molinos rotatorios presentado por Luckie y Austin, (Luckie y Austin, 1994, Modificado por Roberto Divani Zavala Puente).

Modelo del flujo	Función DTR	Transformada de Laplace de DTR con respecto a S_j
Pistón	$\delta\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$e^{(-S_j\tau)}$
Mezcla perfecta	$\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$	$\frac{1}{1 + S_j\tau}$

IV. 5.2.4. Solución para molienda discontinua

La solución del sistema para la clasificación de tamaño (integrando respecto al tiempo y para molienda discontinua o Batch) fue dada por Reid (Reid, 1965), y simplificada por Luckie y Austin (Luckie y Austin, 1972) como:

$$w_i(t) = \sum_{j=1}^i d_{ij} w_j(0) \quad , \quad i \geq 1 \quad (57)$$

Donde $w_i(t)$ es la fracción en peso para partículas de la clase i después de un tiempo determinado o el producto, $w_j(0)$ es la fracción de partículas alimentadas en tiempo 0, $d_{ij}(t)$ es una función de transición que indica la fracción de tamaño en la alimentación que está siendo transferida del tamaño j al tamaño i representad por:

$$d_{ij}(t) = \begin{cases} 0 & , \quad i < j \\ e^{-S_i t} & , \quad i = j \\ \sum_{k=j}^{i-1} c_{ik} c_{jk} (e^{-S_k t} - e^{-S_i t}) & , \quad i > j \end{cases} \quad (58)$$

Y $c_{ij}(t)$:

$$c_{ij}(t) = \begin{cases} -\sum_{k=i}^{j-1} c_{ik}c_{jk} & , \quad i < j \\ 1 & , \quad i = j \\ \left(\frac{1}{S_i - S_j}\right) \sum_{k=j}^{i-1} S_k b_{ik} c_{jk} & , \quad i > j \end{cases} \quad (59)$$

Siendo $c_{ij}(t)$ una función recursiva para la resolución de la función de transición.

IV. 5.2.5. Solución para molienda continua

La molienda continua se puede describir mediante el modelo de molienda discontinua mediante la función de distribución de tiempos de residencia para representar de modo estadístico el tiempo de molienda de cada partícula de material. Esto tiene base en las siguientes suposiciones (Austin y Concha, 1994):

1. El régimen es permanente
2. La cinética de rompimiento se describe mediante ecuaciones lineales y
3. La función de distribución de tiempos de residencia es única para todos los tamaños de partícula.

Cuando la cinética de molienda se describe mediante ecuaciones lineales la molienda continua se comporta similarmente a la molienda discontinua; tal que, cada fracción de partículas con un tiempo de residencia en el molino adquiere la misma distribución granulométrica que tendría si hubiese sido molida en forma discontinua. Por ello es por lo que la granulometría de salida de un molino continuo se obtiene ponderando la solución de la molienda discontinua para el mismo molino con la función de distribución de tiempos de residencia. Entonces:

$$w_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_i(0)\varphi(t)dt \quad (60)$$

Considerando la solución a la molienda discontinua, Austin, Klimpel y Luckie (Austin y Concha, 1994) escriben la Ecuación 57 de la forma:

$$w_i(t) = \sum_{j=1}^i d_{ij} w_j(0) \quad , \quad n \geq i \geq 1 \quad (61)$$

$$d_{ij} = \begin{cases} e_j & , \quad i = j \\ \sum_{k=j}^{j-1} c_{ik} (e_k - e_i) & , \quad i \neq j \end{cases} \quad (62)$$

$$c_{ij}(t) = \begin{cases} -\sum_{k=i}^{j-1} c_{ik} c_{jk} & , \quad i < j \\ 1 & , \quad i = j \\ \left(\frac{1}{S_i - S_j} \right) \sum_{k=j}^{i-1} S_k b_{ik} c_{jk} & , \quad i > j \end{cases} \quad (63)$$

Donde:

$$e_j = \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-S_j t} dt \quad (64)$$

Siendo e_j la transformada de Laplace de la función de distribución de tiempos de residencia con respecto a S_j . Mas adelante se mostrará que dependiendo del tipo de la función de distribución de tiempos de residencia se lleva a cabo la resolución del modelo propuesto para este trabajo.

Herbst (Herbst et al, 1980) mostró la solución matricial de un número de ecuaciones diferenciales lineales del modo de la Ecuación 57, de tal que:

$$|w_i(t)| = e^{-[I]-[B]][K]|w_j(0)| \quad (65)$$

Donde $|w_i(t)|$ representa un vector de los tamaños del producto, siendo esta fracción representada comúnmente a los tamaños de una progresión geométrica en raíz de 2, (esto debido a la serie de tamices Tyler), $[I]$ una matriz identidad (diagonal $n \times n$), $[B]$ es una matriz de funciones de distribución de roturas individuales (triangular inferior, $n \times n$), $[K]$ es una matriz de funciones de tasa de rotura discretizadas de tamaño (diagonal, $n \times n$), y $|w_j(0)|$ es un vector con los tamaños de la alimentación.

Y simplificó esta expresión de tal modo que:

$$|w_i(t)| = |[T] \times [J] \times [T]^{-1}| \times |w_j(0)| \quad (66)$$

Donde $[T]$:

$$t_{ij} = \begin{cases} 0 & , i < j \\ 1 & , i = j \\ \sum_{k=j}^{i-1} \frac{b_{ik} S_k}{S_i - S_j} T_{kj} & , i > j \end{cases} \quad (67)$$

y $[J]$:

$$j_{ij} = \begin{cases} e^{-S_i t} & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases} \quad (68)$$

Donde $[T]$ es la matriz determinante de eigenvectores propios ($([I] - [B])[K]$) que tienen elementos t_{ij} (triangular inferior, $n \times n$), y $[J]$ es una matriz con los elementos de la función de distribución de tiempos de residencia.

V. Metodología Experimental

Para alcanzar los objetivos planteados se realizó la recopilación e integración de datos mediante la siguiente metodología:

- V.1. Muestreo de la pulpa de entrada y producto del molino operación en de planta.
- V.2. Determinación de la viscosidad dinámica mediante embudo Marsh.
- V.3. Preparación de las muestras recolectadas en el laboratorio.
- V.4. Desarrollo del modelo matemático basado en el balance poblacional. aplicado para llevar a cabo una simulación de la distribución de partículas del producto de un molino HIGmill.

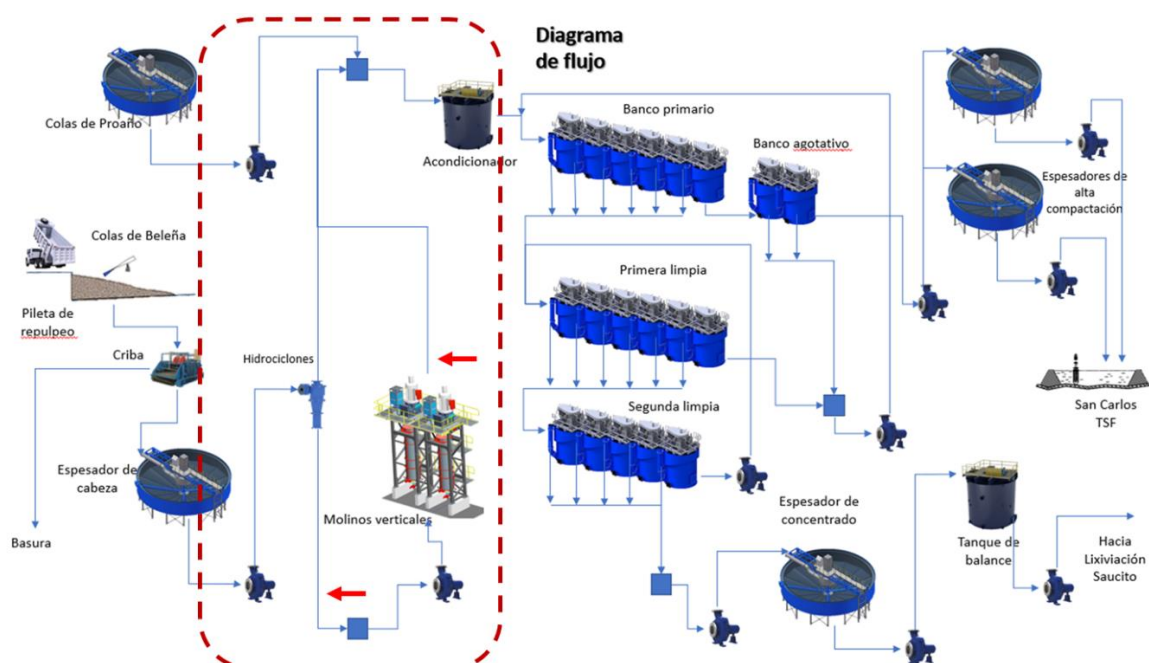


Figura 18.-Diagrama de flujo de la planta de Piritas de Fresnillo PLC. La sección correspondiente a los molinos verticales HIGmill y los puntos de muestreo son identificados mediante flechas rojas.

V.1. Muestreo de operación en planta

Al ser un molino de escala industrial en el que estudió para el trabajo, el muestreo se presentó de manera continua sobre el flujo del equipo. El muestreo consistió en hacer un corte de muestra de los flujos de entrada y alimentación (Figura 18), a alguno de los dos molinos HIGmill (HIG1800/9000F) con los que cuenta la planta de Piritas de Fresnillo PLC, dispuesto de la siguiente manera en el diagrama de planta. Para las muestras obtenidas se determinó viscosidad, la cual se obtuvo a través de un viscosímetro Marsh; distribuciones granulométricas y porcentaje de sólidos. Al momento de realizar el muestreo del flujo, también se registró desde el cuarto de control las variables del proceso: a) consumo de energía (potencia); b) nivel de llenado de bola; c) revoluciones por minuto del funcionamiento de la flecha de los

rotores del molino; d) velocidad tangencial del eje de los rotores; e) temperatura dentro del molino; f) energía específica consumida; g) flujo de alimentación; h) toneladas que ingresa en la alimentación; i) porcentaje de sólidos que entra al molino y; j) viscosidad de la pulpa de alimentación (Tabla 4).

Tabla 4.-Tabla para registro para toma de variables del proceso en operación.

Primer Campaña																		
Muestreo: 40% Llenado de bola; 40% de sólidos; 6.5 m/s Vt																		
Hora	Potencia	Molino	Velocidad tangencial	P ₉₀ de PSI	Energía específica (SE)	Flujo volumetrico Q	Alimentación	Sólidos (Densímetro)	Densidad de pulpa (Densímetro)	Temperaturas				Viscosidad		Vibración Vertical	Vibración Horizontal	Torque
										Alimentación	Cámara del molino 20%	Cámara del molino 40%	Cámara de descarga del molino	Viscosidad alimentación				
	(kW)	RPM	m/s	µm	(kW/h/t)	m³/h	TPH	%	t/m³					(°C)	(°C)	(°C)	(°C)	

Asimismo, se obtuvieron las dimensiones del equipo, las cuales son presentadas en la Tabla 5. El equipo es alimentado con un mineral que tiene una gravedad específica de 2.7 kg/m³.

Tabla 5.-Dimensiones y condiciones del equipo y mineral.

Dimensiones del molino HIGmill (HIG1800/9000F) y de los medios de molienda		
Volumen del equipo	8.89	m ³
Volumen neto del equipo	6.77	m ³
Altura del molino	5.83	M
Diámetro interno del molino	1.39	M
# de discos	15.00	#
Distancia entre discos	0.388	m
Diámetro del de rotor	1.16	m
Diámetro del Eje	0.2	m
Densidad de bola	4.7	kg/m ³
Diámetro de bola	0.0032	m
Número de discos cubiertos por bola	*	#
altura de bolas	*	m

(*) estos datos son obtenidos ya una vez variando el llenado del equipo parando la operación para medir la altura de la cama de bolas, y lo cual se realizó por campaña, siendo para la primera campaña un total de 5.94 discos cubiertos por bola y una altura de 2.30 metros; para la segunda campaña un total de 7.8 discos cubiertos por bola y una altura de 3.03 metros; y para la tercera campaña un total de 8.97 discos cubiertos por bola y una altura de 3.48 metros.

Para el presente trabajo de investigación se mantuvo en promedio un flujo constante de alimentación de pulpa al molino de 100 m³/h, y se variaron las condiciones de porcentaje de medios de molienda, velocidad tangencial y porcentaje de sólido con que la pulpa alimenta al molino previo a la toma de muestra.

Con ello se pretendió llevar a cabo, inicialmente, 18 muestreos (36 considerando toma de muestra de alimentaciones y descarga, que, a partir de ahora, dependiendo de las condiciones, se mencionará como muestreo). Las condiciones de muestreo se describen a detalle en el diagrama 1 (Figura 19), y se partió de tres campañas de seis muestreos, cada una en función de la variable operacional del porcentaje de nivel de llenado de bolas.

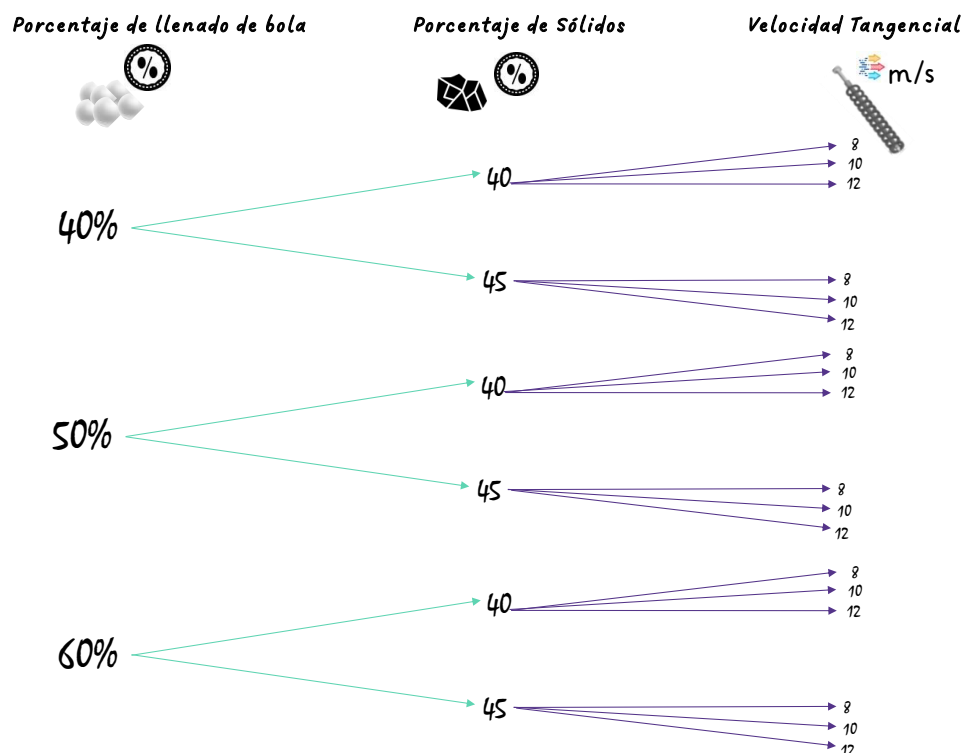


Figura 19.-Diagrama de árbol de las variables que se controlaron durante el muestreo.

Una campaña se constituyó de seis muestreos en total, un porcentaje de nivel de llenado de bolas, dos condiciones de porcentaje de sólidos y tres condiciones de velocidad tangencial del rotor, se consideró realizar la toma de un compósito de duración de una hora, haciendo cuatro cortes de toma de muestra cada 15 minutos. Tomando en consideración que entre muestreo se esperó una estabilización de la distribución granulométrica de descarga en la cámara del molino, y que el tiempo de residencia promedio es aproximadamente 3 min, el tiempo de estabilización, entre cada variación fue aproximadamente de 15 min. Cada condición de muestreo tomó un lapso de una hora con corte de muestra de cada 15 min; es decir, que se obtuvieron cuatro muestras por cada condición por lo que cada campaña tuvo una duración de veinticuatro horas.

Para el muestreo se prepararon cubetas con el etiquetado abreviado correspondiente a cada campaña, muestreo, nódulo de flujo (alimentación y descarga), la condición de nivel de llenado de bolas, porcentaje de sólidos y

velocidad tangencial del rotor, quedando de la siguiente manera el etiquetado (Tabla 6):

Tabla 6.-Ejemplo de etiquetado.

Campaña	Muestreo	Flujo	% De llenado de bola	% de sólidos	Velocidad Tangencial
1	1	Alim. Molino	40%	40%	6.5 m/s
Abreviación					
#1.1.- Alim. Molino: 40% b; 40% S; 6.5 Vt					

El trabajo se realizó sobre el molino “A”, de los dos molinos con los que cuenta la planta (Figura 20).



Figura 20.-Molino "A" de lado derecho; mientras que del lado izquierdo se tiene el molino "b". Fotografía de molinos de Planta de piritas, Fresnillo PLC, Fresnillo, Zacatecas.

V.2.Determinación de la viscosidad

Para determinar la viscosidad se usó un embudo Marsh con el cual mediante un modelo matemático (Ecuación 74) de tiempo de descarga se puede determinar la viscosidad del fluido (Figura 21), el cual consiste en un cono de 6 pulgadas (152 mm) de ancho y 12 pulgadas de alto (305 mm) cuyo vértice está fijado al cono por un tubo de 2 pulgadas (50.8 mm) de largo y 3/16 de pulgada (4.76 mm) de diámetro ancho.

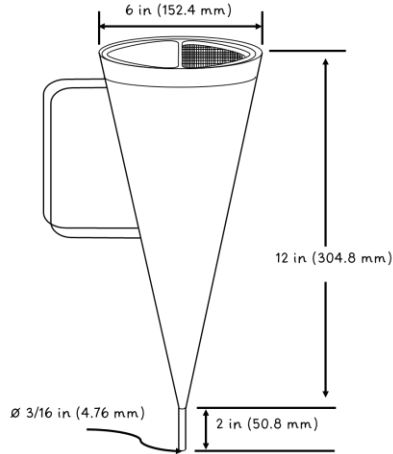


Figura 21.-Embudo Marsh para la determinación de viscosidad con sus dimensiones.

La viscosidad se toma midiendo el tiempo de descarga de un litro de material que se rellena en el embudo Marsh, hasta rellenar un recipiente graduado a un cuarto galón (946.35 ml). La viscosidad de descarga del embudo Marsh se conoce como viscosidad de embudo Marsh. Este instrumento no es un reómetro y su aplicación es mayormente con el fin de medir fluidos no newtonianos en lodos de perforación. La viscosidad efectiva se puede determinar aplicando el modelo realizado por Pitt (Pitt, 2006), quien simuló numéricamente el comportamiento de flujo. Para ello se considera que un cono líquido invertido supone una fuerza hidrostática que causa una caída de presión a través del orificio del cono. Esta caída se convierte en energía cinética parcialmente disipada en la fricción del fluido que pasa por el orificio. Partiendo de la fórmula de Skelland (Skelland, 1967) para un fluido de ley de potencia (fluido no newtoniano independiente del tiempo) en un flujo laminar a través de un tubo (desestimando los efectos de entrada) se describe como (Ecuación 69):

$$h\rho g = \frac{1}{2}\rho v^2 + 2k_p \left(\frac{3n+1}{n} \right)^{np} \left(\frac{v^{np} L}{r^{np+1}} \right) \quad (69)$$

Donde h es la altura del líquido sobre el orificio (m), ρ es la densidad (g/cm^3) y g es la aceleración de la gravedad (m/s^2); L y r son la longitud y el radio del tubo, respectivamente (m); k_p es el coeficiente de consistencia (Pa s^n) y np es el índice del comportamiento del flujo (d/u) de la ley de potencia del fluido.

Mediante mezclas de fluidos no newtonianos elaborados con celulosa xantana e hidroxietilcelulosa se determinó con reómetros la viscosidad de las mezclas y la viscosidad usando el modelo en función del tiempo de descarga. Al simular se encontró consistente la suposición de que lo que mide esencialmente el embudo Marsh es la viscosidad, y los resultados, Pitt (Pitt, 2000) los mostró mediante la Ecuación 70:

$$t = t_{VMarsh} \left(1 + x_1 \left[\frac{\mu_e}{\rho} - \frac{t_{VMarsh}}{A_{marsh}} \right]^{1.2} \right) \quad (70)$$

donde t es el tiempo real donde en que el fluido se transporta por el embudo Marsh para el volumen V , t_{VMarsh} es el tiempo para la descarga del volumen del embudo Marsh (s^{-1}), A_{marsh} es el área transversal del orificio del embudo Marsh (m^2), x_1 es una constante característica del embudo aproximadamente en 0.016 para el embudo estándar, μ_e es la viscosidad efectiva, ρ es la densidad. El término adimensional $\left(\frac{\mu_e}{\rho} \right) \left(\frac{t_{VMarsh}}{A_{marsh}} \right)^{1.2}$ está compuesto por un término representativo de la propiedad del fluido (viscosidad cinemática) y la geometría del embudo Marsh.

Una manera más práctica de representar la Ecuación 70, aunque no dimensionalmente homogénea, es:

$$t = t_{VMarsh} + x_2 \left(\frac{\mu_e}{\rho} \right)^{1.2} \quad (71)$$

En las condiciones de campo, donde V es un cuarto de galón, μ_e está en centipoise, y la densidad ρ en g/cm^3 , entonces t_{VMarsh} es 24.5 segundos y x_2 tiene un valor de 0.58 aproximadamente. Cuando V es un litro, t_{VMarsh} es 26.0 segundos, y $\left(\frac{\mu_e}{\rho} \right)^{1.2}$ están en unidades SI, entonces x_1 se cambia a x_2 y se convierte en 9.2×10^6 . Esto, al despejar el término de viscosidad de la Ecuación 71 permite expresar la viscosidad efectiva como (Ecuación 72):

$$\mu_e = \exp \left[\frac{\ln \left(\frac{t - 24.5}{0.58} \right)}{1.2} \ln(\rho) \right] \quad (72)$$

De la expresión anterior, y en condiciones de campo, se puede plantear otra expresión empírica formulada por Pitt (Pitt, 2000) que puede ser aplicada con un error del 3%, y es más práctica para su uso en campo

$$t = 25 + \frac{\mu_e}{\rho} \quad (73)$$

que, al reescribirse puede usarse para estimar la viscosidad (Ecuación 74):

$$\mu_e = \rho(t - 25) \quad (74)$$

La metodología (Figura 22) de medición se realizó de la siguiente manera:

1. Durante el muestreo se tomó una muestra cada dos cortes (cada 30 minutos).
2. El embudo Marsh se mantuvo verticalmente, mientras el orificio pequeño era tapado con un dedo, y el embudo se rellenó con la muestra (pulpa) hasta la altura de la malla.
3. Una vez lleno el embudo, al momento de retirar el dedo del orificio se activó un cronometro para medir el tiempo de descarga de la pulpa a un recipiente graduado a un cuarto de galón, hasta un volumen de 946.35 ml.
4. Una vez llenado el recipiente hasta el volumen de 946.35 ml con la pulpa, se volvió a tapar el orificio y se paró el cronometro para medir y registra el tiempo correspondiente.
5. La densidad de pulpa se obtuvo una vez teniendo los datos de los porcentajes de sólidos aplicando la siguiente fórmula (Ecuación 75):

$$\sigma_{pulpa} = \frac{1}{\left[1 + \frac{\frac{\%de sólidos}{100}}{GE} - \frac{\% de sólidos}{100} \right]} \quad (75)$$

donde σ_{pulpa} es la densidad de la pulpa (g/cm^3) y GE es la gravedad específica del mineral (kg/m^3) (que para este trabajo de tesis es de 2.7 kg/m^3 , dato que proporciona el departamento de investigación metalúrgica de planta), misma que se obtiene de los datos de control de procesos de planta.

6. Finalmente, para la determinación de la viscosidad, con el tiempo medido, se usó la fórmula 74, y se aplicó un factor de conversión de 0.001 al resultado, para que la medida quede registrada en las unidades de N s/m^2 .

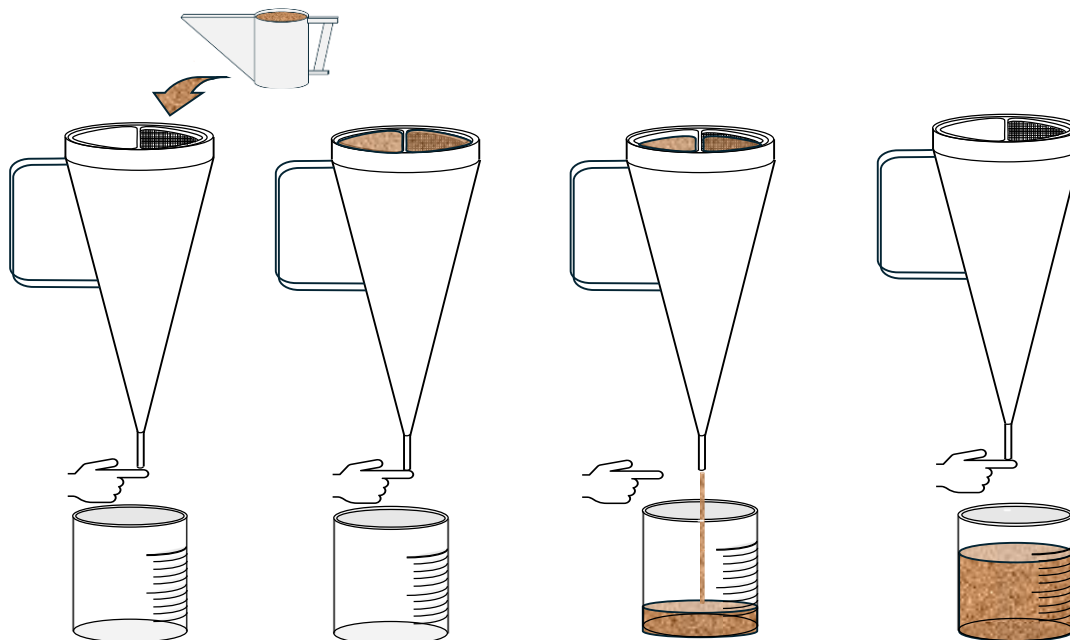


Figura 22.-Breve esquema de cómo se realiza el llenado del recipiente.

V.3. Preparación de muestras en el laboratorio.

Una vez obtenidas las muestras de las campañas, éstas se trasladaron al laboratorio metalúrgico de la planta de beneficio Proaño en Zacatecas, donde se realizó su preparación para la determinar el porcentaje de sólidos y distribución granulométrica.

V.3.1. Porcentaje de sólidos

Para evaluar el porcentaje de sólidos; primeramente, se homogenizó la muestra dentro de la cubeta con un vaso de plástico sujetándola con un guante de propileno, después se tomaron dos vasos de 500 ml de muestra representativa y se pusieron en una charola de aluminio, previamente pesada; para pesar el peso de la charola con la muestra húmeda. Después, la muestra se secó en un horno a una temperatura de 180°C durante 24 horas y se retiró del horno, manteniéndola en reposo hasta alcanzar temperatura ambiente. Una vez seca y a temperatura ambiente, la muestra seca se pesó en la charola; consecuentemente se obtuvo el peso de las muestras húmeda y seca restando el peso de la charola al peso de la muestra húmeda con charola y seca con la charola. Finalmente, se procedió a dividir el peso de la muestra seca (masa de sólidos) entre el peso de la muestra húmeda (masa de pulpa) y se multiplicó por cien para determinar el porcentaje de sólidos.

V.3.2. Determinación de la distribución granulométrica

Para esta medición, las muestras contenidas en las cubetas fueron deslamadas usando la malla #400 (Tyler), con un deslamador, el cual es un equipo de metal

circular donde se inserta la malla a trabajar que tiene acoplado un motor que genera vibración y con ésta se favorece el paso de las partículas a través de la malla. Para esto se usó un vaso de precipitado de 100 ml y un guante de propileno, con el cual se homogeneiza la muestra dentro de la cubeta, para poner en una charola un contenido de siete vasos homogeneizados de muestra. Después, se procedió a pasar el material a través de la malla, en la cual tenía por debajo una cubeta de 20 litros; el retenido por la malla se colocó en una charola, se secó en horno a una temperatura de 180°C durante 24 horas, consecuentemente se puso a reposar hasta alcanzar la temperatura ambiente; después se pesó el producto y se tamizó por las mallas #70, #100, #140, #200, #270, #325 y #400 en un RO-TAP programado a 20 minutos de agitación.

El pasante final de la malla #400 que fue tamizado, se pesó y se agregó al producto deslamado el cual se secó para posteriormente homogenizarlo y obtener la distribución de partícula. Previamente a ello, al pasante del proceso de deslamado en la cubeta se pasó a otra cubeta, se dejó sedimentando durante 24 horas y después se decantó el agua sobrante de la cubeta, y el producto se vació en una charola para secarlo en un horno durante 24 horas a una temperatura de 180 °C, después se sacó y se dejó en reposo hasta alcanzar la temperatura ambiente. El producto seco se pesó, consecuentemente se desgrumó para evitar aglomeraciones en el proceso de clasificación mediante cyclosizer. Para el desgrume de la muestra se le pasó un rodillo de aluminio suavemente a la muestra seca compactada para evitar la fractura de partículas al momento de descompactar la muestra; se desgrumó pasando el contenido a través de la malla #70, y se prepararon muestras representativas de 240 gramos divididas en 6 vasos de precipitado (siendo 40 gramos por ciclo de cyclosizer y haciendo seis ciclos por muestra) para usarse en un cyclosizer Warman modelo M12. (Figura 23).

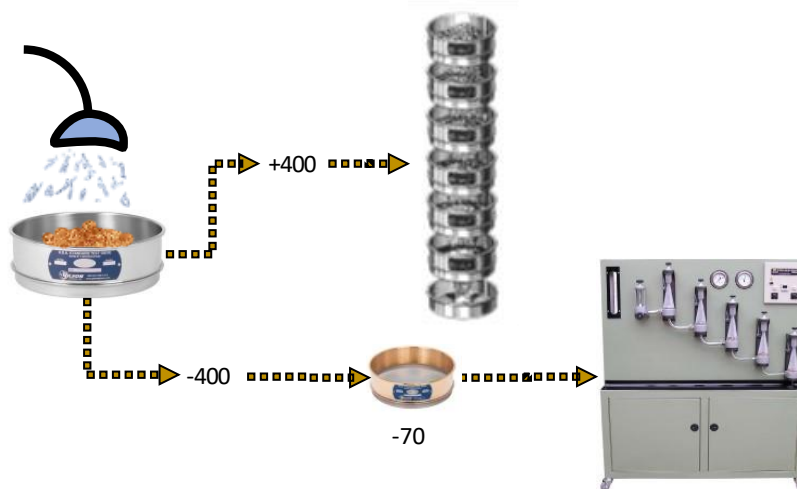


Figura 23.-Diagrama de preparación de muestra para tamizado y medición de tamaño por cyclosizer.

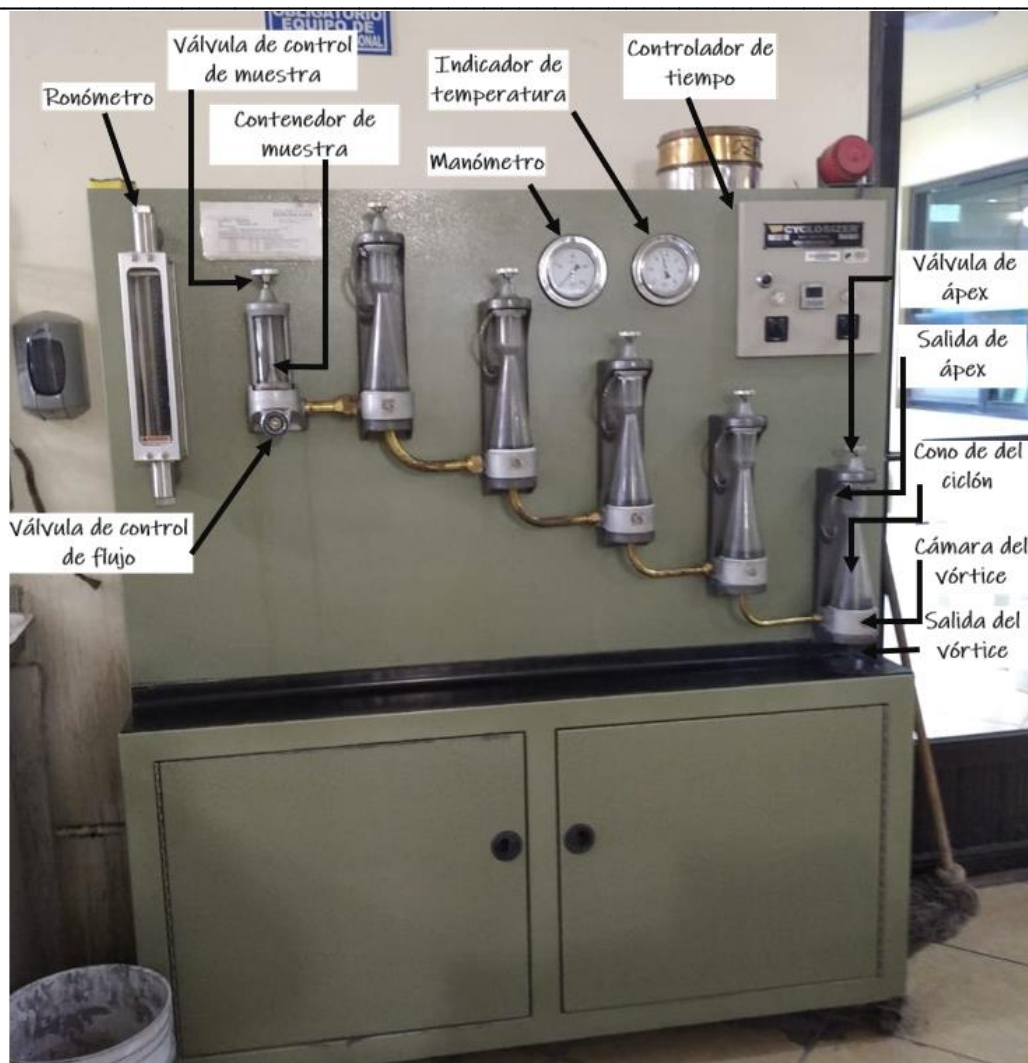


Figura 24.-Cyclosizer Warman modelo M12, laboratorio metalúrgico de la planta de beneficio Proaño, Fresnillo Zacatecas.

La operación del cyclosizer (Figura 24) consiste en la separación de tamaños por medio de la velocidad de asentamiento que tienen las partículas a través del seno de un fluido y viene dada por la ecuación de Stokes (Ecuación 31). Aquellas partículas que tengan una velocidad terminal menor que la velocidad del fluido se irán al rebose, mientras que aquellas que tengan una velocidad terminal mayor que la velocidad del fluido se hundirán al rebose. De acuerdo con Ecuación 31, mayor es el tamaño de partícula, mayor es la velocidad terminal que presenta. La elutriación se lleva a cabo hasta que no haya indicios de que se esté llevando a cabo una clasificación adicional mediante la observación de la turbidez que presente la unidad ciclónica, o hasta que la diferencia de cambio en el peso de los productos sea despreciable.

El diseño de los hidrociclones (unidad ciclónica) del cyclosizer es para que el mineral entre por efecto de la presión de manera tangencial en la sección cónica, donde las fuerzas centrifugas separa el contenido grueso, lo cual se esquematiza en la Figura 25.

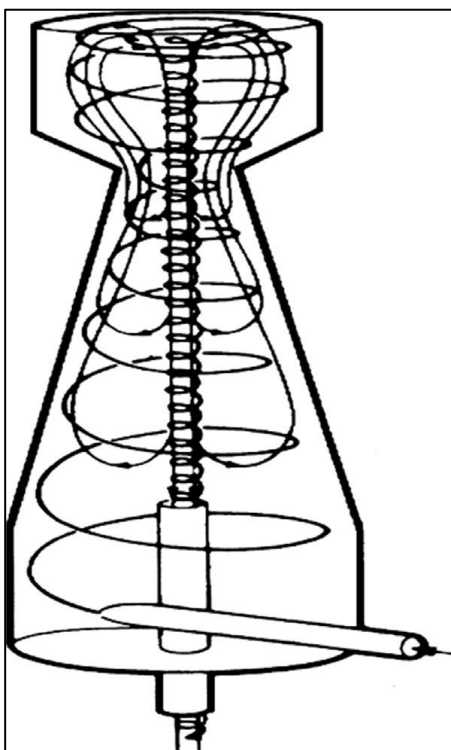


Figura 25.-Patrón de flujo dentro de una unidad ciclónica. (Tomada de Wills, 2016).

La unidad ciclónica colecta partículas en rangos de tamaños establecidos mediante la elutriación. La geometría de los hidrociclones prevé la recirculación del material del ápex, por lo que se logra una separación efectiva. El cyclosizer posee 5 hidrociclones invertidos colocados en serie que permiten la recirculación continua del material por el ápex, permitiendo que la partícula más gruesa se acumule dentro del ápex del primer hidrociclón, y la más fina en el quinto. Las variables de operación son: a) velocidad de flujo del agua; b) temperatura; c) tiempo de elutriación y; d) gravedad específica de las partículas. Las tres primeras se encuentran estandarizadas para la operación, mientras que la gravedad específica es función del tipo de material.

Para el procedimiento del uso del equipo se llevaron a cabo los siguientes pasos:

1. Antes de iniciar la operación es necesario comprobar que el equipo esté limpio para prevenir la contaminación.
2. Se tomó uno de los 6 vasos de 40 g de precipitado de 250 ml, añadiendo 150 ml de agua al mineral y mezclando hasta que se obtuvo una mezcla sin grumos.
3. Con la bomba apagada, se retiró el contenedor de la muestra de su soporte girando el contenedor hasta que uno de los lados metálicos quedó de frente y se tiró hacia arriba para desacoplarlo.
4. La válvula del contenedor se abrió por completo y se eliminó el agua. Se vertió la mezcla del mineral en el contenedor, utilizando una piseta para lavar

- las paredes del vaso de precipitado y asegurándose de no dejar residuos de mineral.
5. El contenedor de muestra se aforó con agua hasta que el nivel estuvo por encima de la tapa del contenedor. Se cercioró de que no haya burbujas de aire y la válvula del contenedor se cerró.
 6. El contenedor se recolocó en el equipo y se giró hasta que el lado de cristal estuvo de frente.
 7. El suministro de agua al tanque se abrió y se verificó que el flujo fuera constante, esperando hasta que el tanque se llene (es decir, hasta que la válvula de flotador se cerró).
 8. Se confirmó que la válvula de control estuviera cerrada.
 9. Se encendió la bomba desde el panel de control.
 10. La válvula de control de flujo se abrió lentamente, permitiendo que el agua hubiese expulsado el aire de la tubería.
 11. Las burbujas de aire restantes se eliminaron en los ciclones abriendo y cerrando individualmente las válvulas del ápex. Este proceso se realizó empezando por purgar el aire en el ciclón No.1 y finalizó con el ciclón No. 5.
 12. El flujo del rotámetro se ajustó a 11.6 l/min.
 13. La válvula del contenedor de muestra se abrió y el controlador de tiempo ajustó para una elutriación de 20 minutos.
 14. Se aseguró de tener una cubeta de 20 l para recuperar el mineral fino del ciclón 5 (muestra 6).
 15. Para la recolección de la muestra 6, se abrió la válvula de toma de muestra y se cerró la válvula de colas. Se esperó a que la cubeta se llenara y se devolvieron las válvulas a su estado inicial (válvula de recolección de muestra cerrada y válvula de colas abierta).
 16. Cuando sonó la alarma del sistema, indicando la finalización del proceso de 20 minutos, se detuvo el contador de tiempo.
 17. El pequeño tubo de plástico del colector de drenaje se tomó y se descargó el contenido de los ápex en una charola previamente etiquetada con el número de ciclón correspondiente. Se abrió la válvula lentamente para evitar que el flujo saliera de la charola, comenzando con el ciclón No. 5 y terminando con el No. 1. Se anotó la temperatura y la presión con las que se trabajó. En caso de utilizar un flujo menor al indicado se registra dicho flujo.
 18. Se dejó reposar las charolas durante un aproximado de 30 min y se decantó el exceso de agua.
 19. La charola por secar se colocó en el horno siguiendo el mismo procedimiento mencionado para los productos de los deslames.

El límite de tamaño de separación de los ciclones está definido por el proveedor y es el diámetro nominal de separación de partícula (Tabla 7). No obstante, resulta esencial establecer el tamaño efectivo debido a que las condiciones de operación difieren de los estándares. Para establecer el tamaño efectivo se realizan cálculos de factores de corrección. Los datos operativos necesarios, tales como temperatura, velocidad de flujo, tiempo de elutriación y densidad del mineral, se correlacionan en la gráfica correspondiente que brinda el manual de uso del equipo, y a partir de ello

se obtiene el valor de corrección, que para este caso quedaron definidos en la Tabla 8)

Tabla 7.- diámetro efectivo de separación de partícula.

Número de ciclón	Tamaño efectivo de separación de partícula (μm)
1	44
2	33
3	23
4	15
5	11

Tabla 8.- Factores de corrección determinados.

Condiciones de operación	Medida	Factor
Temperatura ($^{\circ}\text{C}$)	20	1
Gravedad específica	2.7	0.99
Flujo volumétrico (l/min)	11.6	1
Tiempo de elutriación (min)	20	0.94
Factor general		0.82

El factor de corrección general se obtiene al multiplicar los factores de corrección que corresponden a cada una de las condiciones de operación (Ecuación 76).

$$F_{Cyclosizer,g} = F_{Cyclosizer,t} \cdot F_{Cyclosizer,ge} \cdot F_{Cyclosizer,f} \cdot F_{Cyclosizer,te} \quad (76)$$

Donde $F_{Cyclosizer,g}$ es el factor general de corrección, $F_{Cyclosizer,t}$ es el factor de corrección debido a la temperatura, $F_{Cyclosizer,ge}$ es el factor de corrección debido a la gravedad específica del material, $F_{Cyclosizer,f}$ es el factor de corrección debido a la tasa de flujo en el equipo, y $F_{Cyclosizer,te}$ es el factor de corrección debido al tiempo de elutriación.

Finalmente, se procedió a realizar la distribución granulométrica de los pasantes para determinar el P_{80} de cada muestra. Con ello se caracterizó metalúrgicamente la operación del equipo y su efecto en los P_{80} de los productos de cada muestreo, analizando el efecto que tiene en la velocidad tangencial, en la cantidad de energía específica suministrada en la generación de finos y el efecto de la temperatura promedio del equipo.

V. 4. Modelamiento matemático de Balance poblacional aplicado a HIGmil

El modelamiento matemático, como se describió en la sección sobre el modelo matemático de balance poblacional (MBP), se realizó una vez obtenidos los resultados del muestreo y dimensiones del equipo.

Primeramente, se desarrolló la resolución del modelo de potencia partiendo de los parámetros recabados en los muestreos, ajustando los parámetros del modelo por ternas de muestreos en que están fijos el porcentaje de nivel de llenado de bolas y porcentaje de sólidos, variando las velocidades tangenciales del rotor (6.5 m/s, 9.6 m/s y 10.5 m/s), determinando los parámetros por cada condición estudiada en esta tesis. Después, considerando que la cinética de quebrado del modelo depende de la función de la distribución de tiempos de residencia (DTR) para la molienda continua, el modelo de DTR usado para este equipo se tomó como un reactor de flujo pistón (Tabla 3); y para obtener los parámetros de cada una de las funciones S_i (α_0 , α_1 , λ y μ_p) y b_{ij} (ϕ , β_1 y β_2) se realizó un ajuste de parámetros, minimizando el error entre los valores experimentales y calculados. La función objetivo es (Ecuación 77):

$$\text{Función objetivo} = \sum [p_i(\text{experimental}) - p_i(\text{simulada})]^2 \quad (77)$$

Siendo p_i la granulometría de descarga. Todo lo anterior se programó en hojas de Excel. En retrospectiva, la integración del modelo quedó esquematizada como se muestra en la Figura 26.

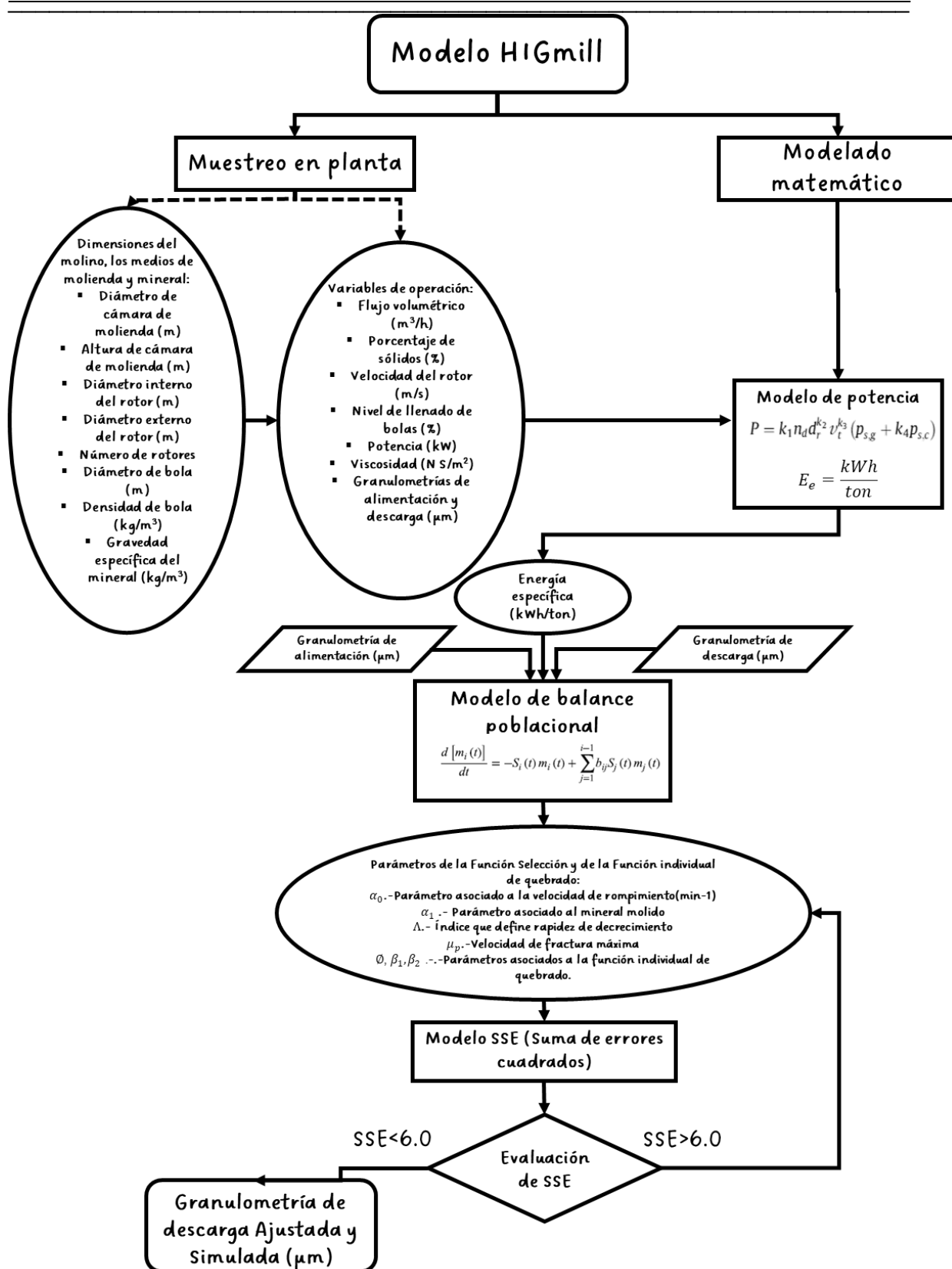


Figura 26.- Diagrama de modelo HIGmill.

VI. Resultados y discusiones

VI.1. Caracterización Metalúrgica

La caracterización metalúrgica es el proceso de análisis de las propiedades fisicoquímicas del mineral con el fin de medir la sensibilidad mecánica en el procesamiento de minerales, esta información es de gran utilidad para el desarrollo de modelos semiempíricos. Las propiedades medidas se muestran a continuación:

VI.1.1. Viscosidad

Para cada uno de los muestreos realizados, se obtuvieron las siguientes viscosidades, las cuales se muestran en la Tabla 9. Asimismo, cada una de las muestras fue etiquetada acorde a las condiciones de muestreo planteadas en la metodología. Por ejemplo, una etiqueta 45%B; 40%S; 6.5Vtan corresponde a los valores obtenidos del molino operando a 45% de nivel de llenado de bolas, 40% de sólidos en la pulpa y 6.5 m/s del rotor (velocidad tangencial). Cabe mencionar que la variación de los datos entre los distintos muestreos presentó muy pocos cambios, registrándose cambios de valores entre los datos de ± 0.02 .

Tabla 9.- Viscosidades de las campañas y cada muestreo.

Muestreo	Densidad de pulpa	Tiempo tomado, t	Viscosidad
	(kg/cm ³)	(segundos)	(N s/m ²)
40%B;40%S;6.5Vtan	1.33	32	0.00930142
40%B;40%S;9.6 Vtan	1.33	32	0.00934345
40%B;40%S;10.5Vtan	1.35	32	0.00943585
40%B;45%S;6.5Vtan	1.40	35.61	0.01480205
40%B;45%S;9.6 Vtan	1.39	34.48	0.01319313
40%B;45%S;10.5 Vtan	1.40	35.9	0.01524547
50%B;40%S;6.5Vtan	1.34	32.9	0.01058712
50%B;40%S;9.6 Vtan	1.30	29.5	0.00585942
50%B;40%S;10.5Vtan	1.31	32.96	0.01041865
50%B;45%S;6.5Vtan	1.39	43.16	0.02519565
50%B;45%S;9.6 Vtan	1.40	41.82	0.02355046
50%B;45%S;10.5Vtan	1.41	36.87	0.01669036
60%B;40%S;6.5Vtan	1.33	32.43	0.00987716
60%B;40%S;9.6 Vtan	1.32	34.35	0.0123736
60%B;40%S;10.5Vtan	1.32	32.94	0.01044325
60%B;45%S;6.5Vtan	1.40	34.51	0.01331422
60%B;45%S;9.6 Vtan	1.39	35.21	0.01419911
60%B;45%S;10.5Vtan	1.39	34.48	0.01313788

Las mediciones en las viscosidades por cada una de las campañas mostraron pequeña variación. No obstante, las mayores variaciones se presentaron en los muestreos 50%B;40%S;9.6 Vtang y 50%B;45%S;10.5Vtag. Esto se debe al porcentaje de sólidos y a las incidencias de la operación en planta. Dado que la alimentación al HIGmill es usado para un tratamiento de jales mineros, estos deben ser transformados a pulpa mediante un proceso conocido como repulpeo, el cual consiste en la adición de agua para alcanzar aproximadamente 45% de sólidos. Con este porcentaje, la pulpa recién creada es clasificada por una batería de catorce hidrociclones en el cual el flujo el flujo de gruesos (U/F) es sometido a molienda ultrafina. La variación de flujo en el hidrociclón y la cantidad de floculante añadido resulta en las variaciones recién mencionadas.

VI.1.2. Análisis granulométricos para la determinación de P_{80}

El análisis granulométrico se utiliza para determinar la distribución de tamaños de partículas en una muestra, en el caso de las operaciones de conminución estos análisis permiten conocer el tamaño real de las muestras tanto de alimentación al equipo como de descarga. Este factor sirve para evaluar el grado de rompimiento y así conocer si el mineral valioso está siendo liberado de la roca encajonante (ganga) o no. Para este análisis y el correcto modelado del equipo el F_{80} de alimentación fue considerado constante, bajo las consideraciones experimentales para cada una de las campañas, de tal forma que para la primera campaña se tuvo un valor de 89.04 μm , para la segunda campaña fue de 84.06 μm mientras que para la tercera campaña fue de 88.73 μm . En la Figura 27a se observa que los P_{80} más finos corresponden a las velocidades tangenciales de 10.5 m/s por cada una de las campañas y porcentaje de sólidos de 40%.

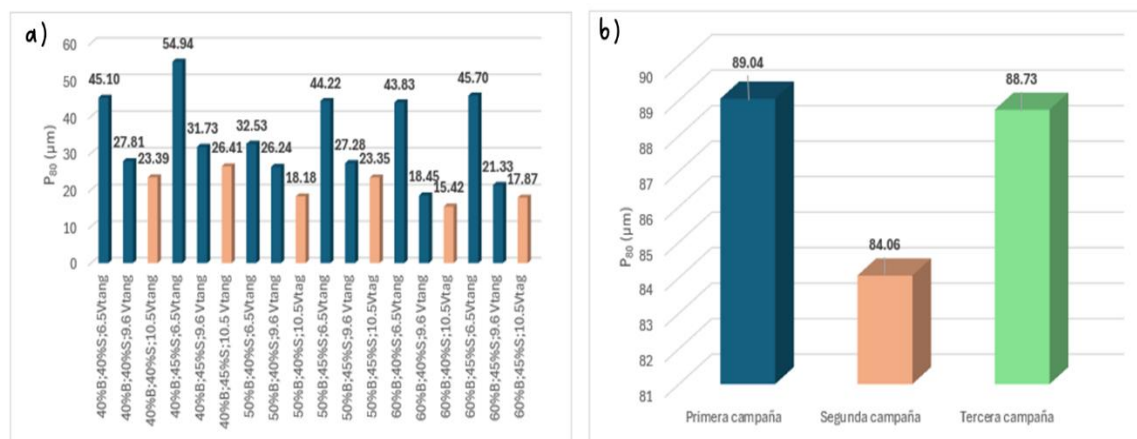


Figura 27.- a) P_{80} de las campañas realizadas con un total de dieciocho muestreos; b) F_{80} de cada una de las campañas.

En la Figura 28 se muestra la correlación lineal de la variable que tienen efecto significativo en la reducción de tamaño (P_{80}). Esto debido a que la correlación es de 0.8029. Esto coloca a la variable como una de las que más influye en la

obtención de un producto ultrafino. Esto puede deberse a que la atrición es efecto de los esfuerzos tangenciales, los cuales pueden disminuir el tamaño de partícula con bajo consumo de energía. Como es de esperarse, a mayor velocidad tangencial de los rotores existirá una mayor abrasión y, por lo tanto, una generación amplia de finos.

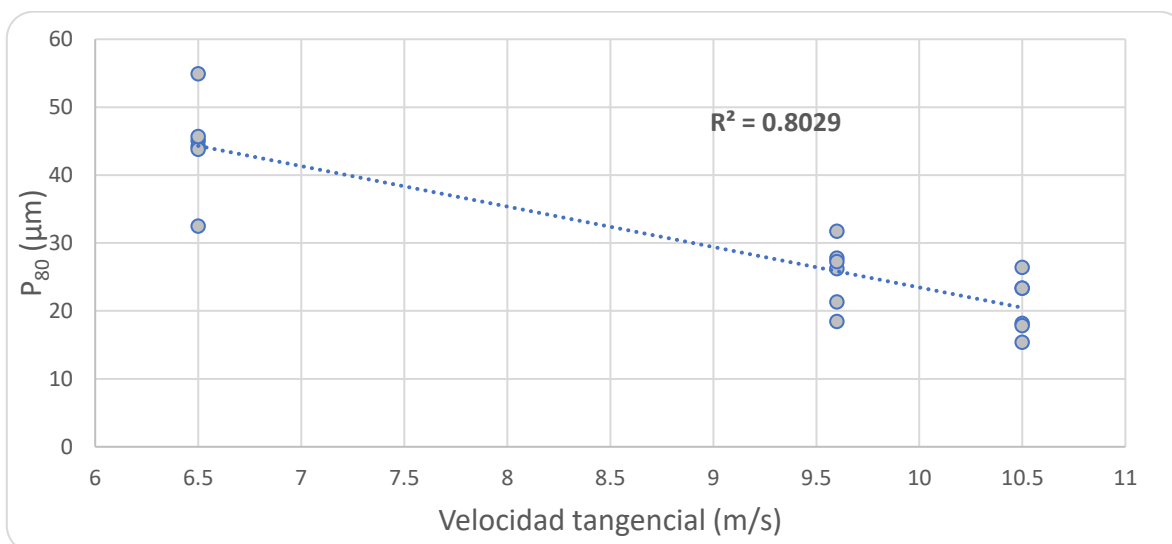


Figura 28.- a) Velocidad tangencial (m/s) vs P₈₀ (μm).

La segunda variable de gran relevancia en la generación de finos es el porcentaje de nivel de llenado de bolas, ya que influye significativamente tanto en la velocidad de deslizamiento (Ecuación 34) como en la velocidad de ascenso (Ecuación 35). La velocidad de deslizamiento mide el grado de fractura entre las bolas-mineral, mientras que la velocidad de ascenso, que determina la rapidez con la que la pulpa abandona la zona de molienda, son parámetros cruciales. Cuando la velocidad de deslizamiento supera la de ascenso, se favorece la fractura del mineral. Por otro lado, si la velocidad de ascenso es mayor, el mineral sale más rápidamente de la zona de rompimiento, lo que resulta en una menor fractura. La Figura 29 muestra la correlación de lo anteriormente explicado.

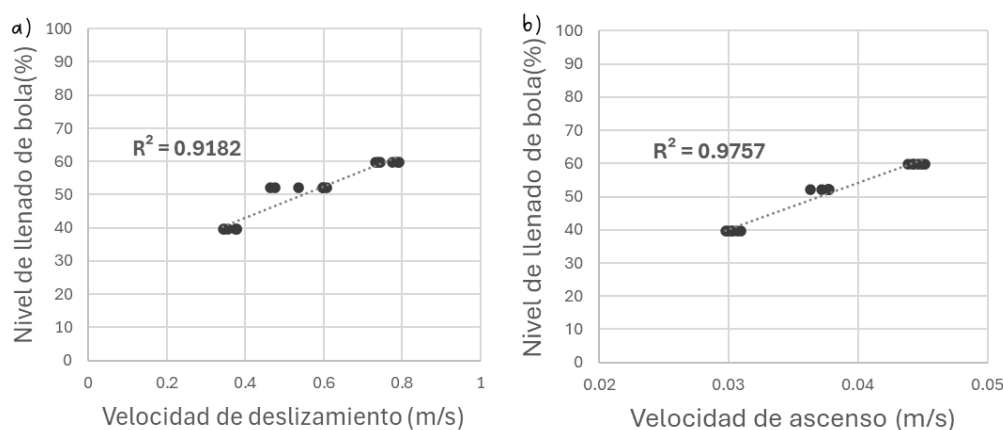


Figura 29.- a) Velocidad de deslizamiento (m/s) vs Nivel de llenado de bola (%); b) Velocidad de ascenso (m/s) vs Nivel de llenado de bola (%).

Para la primera campaña, la cual se realizó con 40% de nivel de llenado de bolas, variando el porcentaje de sólidos (40 y 45) y tres velocidades tangenciales del eje de los rotores (6.5, 9.6 y 10.5 m/s); las distribuciones granulométricas para los dos porcentajes de sólidos se muestran en la Figura 30 y 31. Se aprecia que, para un nivel de llenado de 40%B;40%S (Figura 30), independientemente de la velocidad tangencial, se presenta una generación de finos ligeramente mayor con respecto a las condiciones 40%B;45%S (Figura 31).

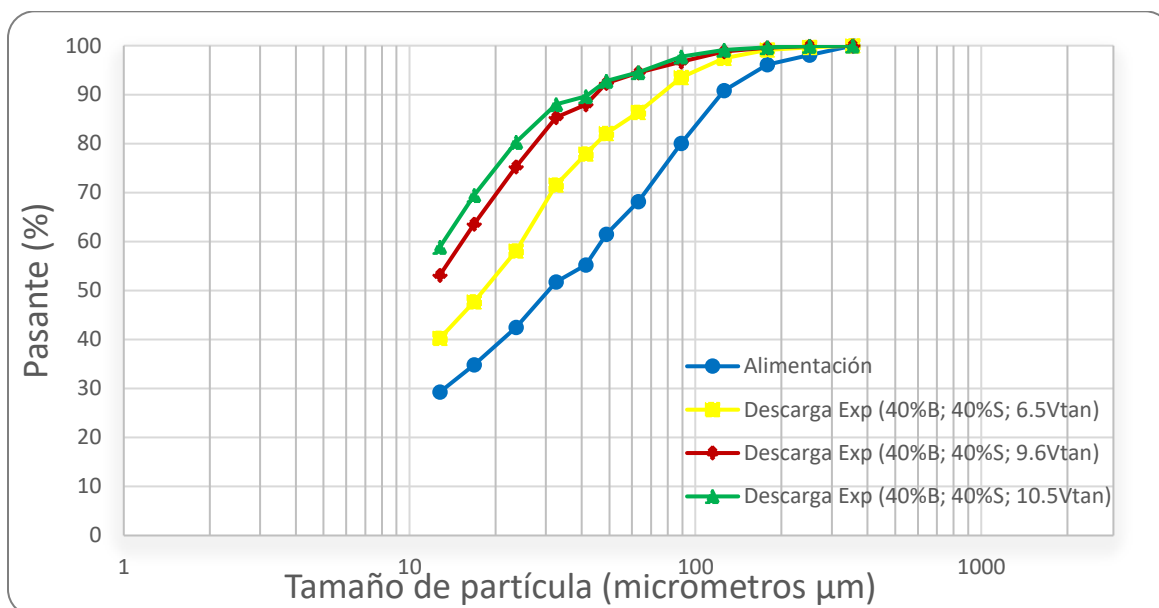


Figura 30.- Distribuciones granulométricas de la primera campaña, 40% de sólidos y las tres velocidades del eje de los rotores, (6.5 m/s, 9.6 m/s y 10.5 m/s).

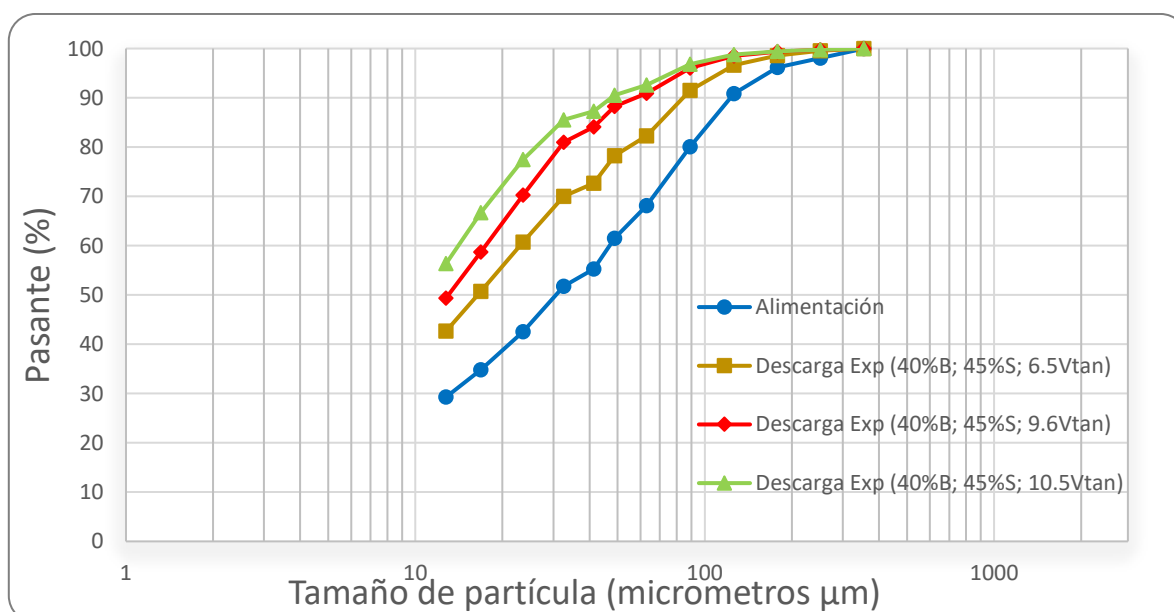


Figura 31.- Distribuciones granulométricas de la primera campaña, 45% de sólidos y las tres velocidades del eje de los rotores, (6.5 m/s, 9.6 m/s y 10.5 m/s).

Para la segunda campaña, la cual se realizó con un 50% de nivel de llenado de bolas, variando el porcentaje de sólidos (40 y 45) y tres velocidades tangenciales del eje de los rotores (6.5, 9.6 y 10.5 m/s) (Figura 32 y Figura 33), se observa que se genera un producto más fino que la campaña anterior (40%), debido al incremento de la cantidad de medios moledores. Al parecer, la diferencia de densidades en la pulpa y el aumento del nivel de llenado de bolas aumenta el área superficial de los medios moledores la cual tiene un mayor contacto con el mineral y otras bolas lo que genera que las partículas adheridas a la bola encuentren una mayor resistencia, pero también una mayor área donde puedan quedar atrapadas para ser molidas.

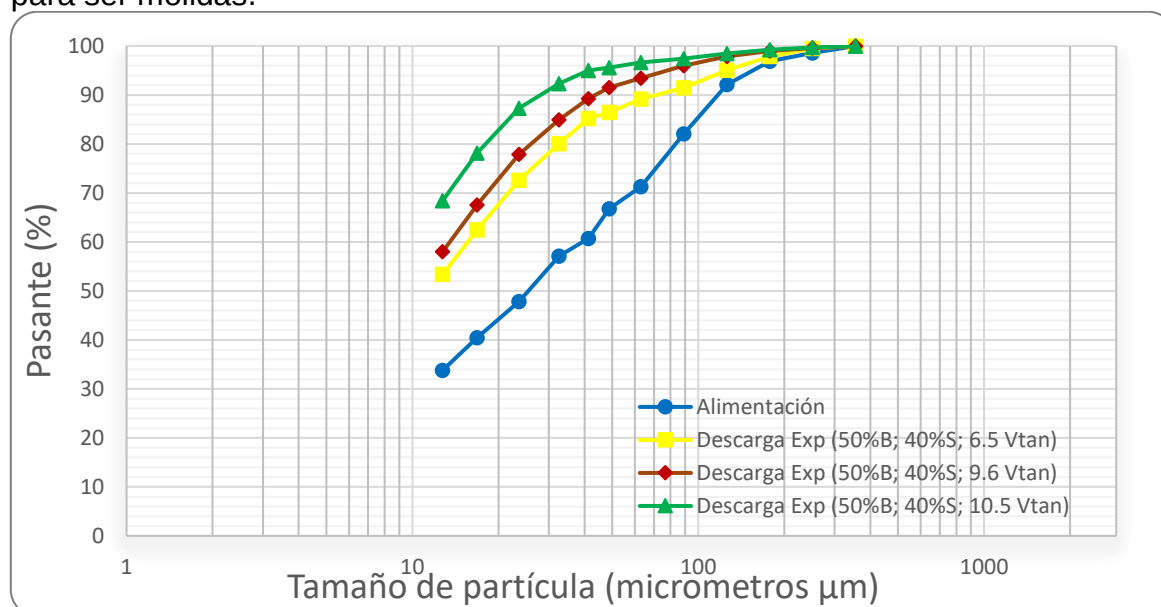


Figura 32.- Distribuciones granulométricas de la segunda campaña, 40% de sólidos y las tres velocidades del eje de los rotores, (6.5 m/s, 9.6 m/s y 10.5 m/s).

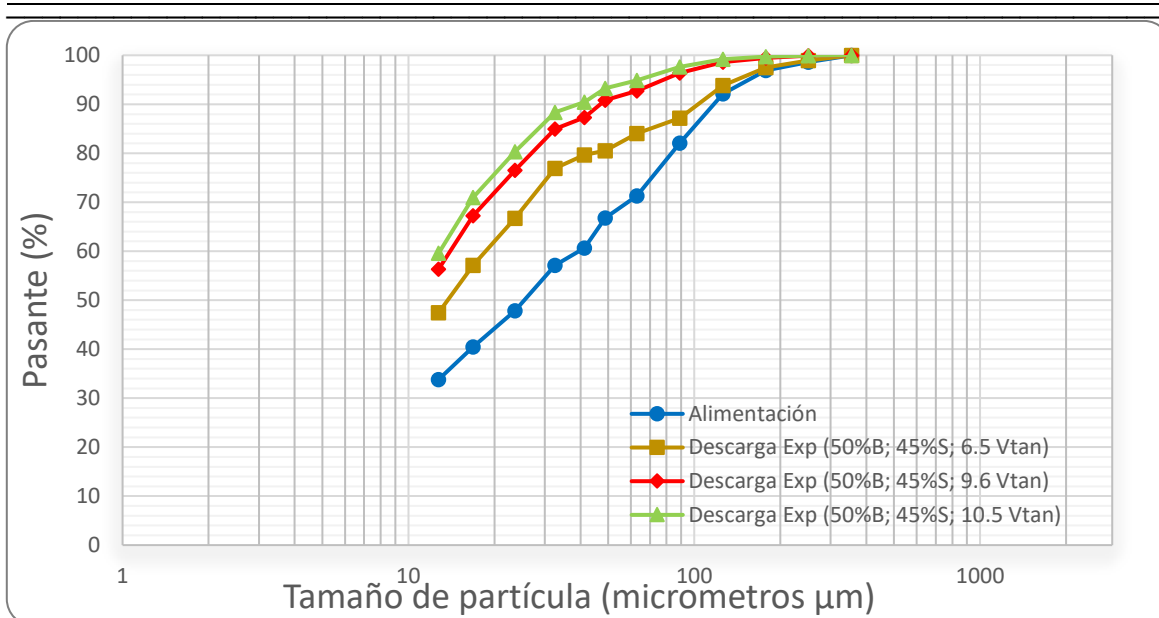


Figura 33.- Distribuciones granulométricas de la segunda campaña, 45% de sólidos y las tres velocidades del eje de los rotores, (6.5 m/s, 9.6 m/s y 10.5 m/s).

En la tercera campaña, 60% de nivel de llenado de bola, variando el porcentaje de sólidos (40 y 45) y tres velocidades tangenciales del eje de los rotores (6.5, 9.6 y 10.5 m/s) (Figura 34 y Figura 35); se aprecia que, el P_{80} para la mayoría de la muestra es más fino. Es decir, se produce una mayor cantidad de finos, con esto se puede concluir que el nivel de llenado es un factor importante debido a que tiene una influencia directa en el incremento de la generación de finos, lo cual puede explicarse que hay una mayor cantidad de medios molidores, una mayor área en que los medios tienen contacto con el mineral.

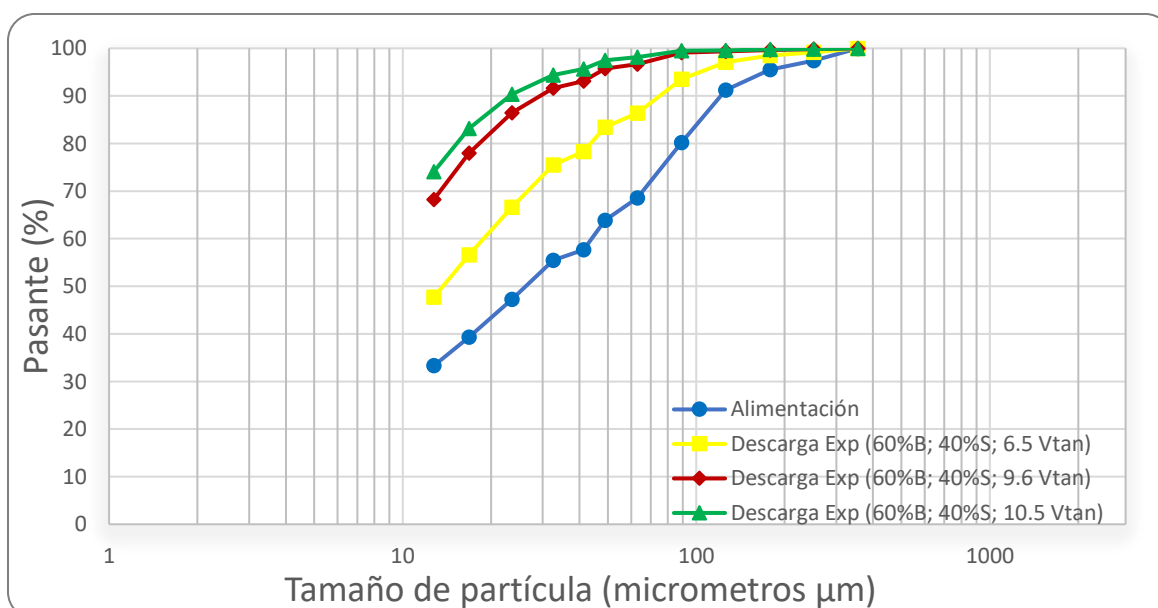


Figura 34.- Distribuciones granulométricas de la tercera campaña, 40% de sólidos y las tres velocidades del eje de los rotores, (6.5 m/s, 9.6 m/s y 10.5 m/s).

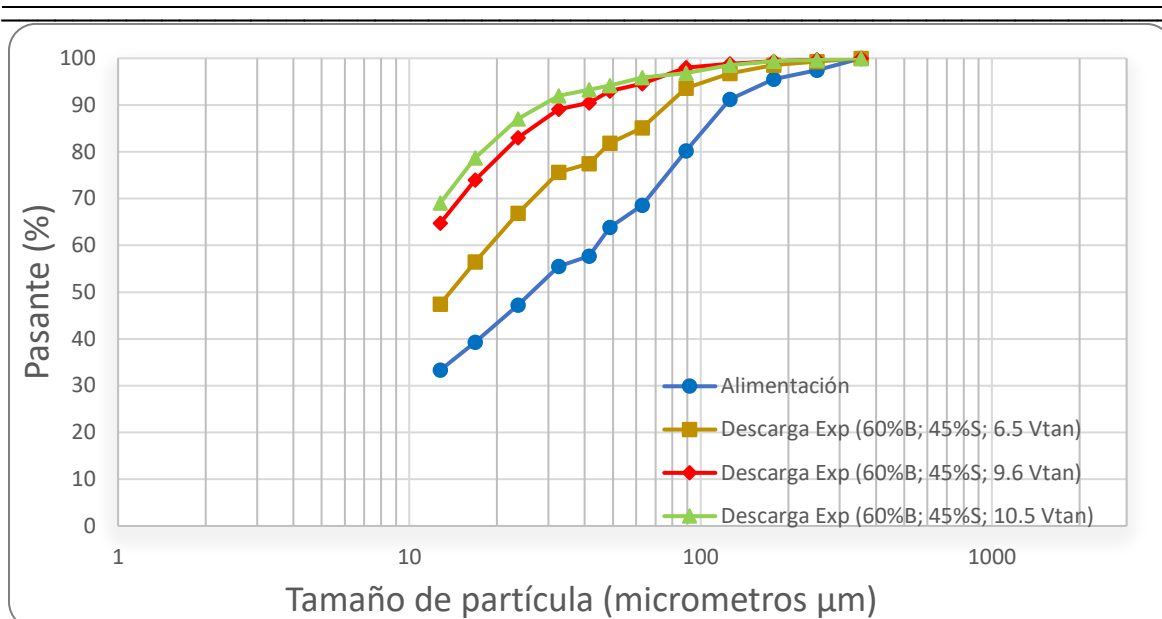


Figura 35.- Distribuciones granulométricas de la tercera campaña, 45% de sólidos y las tres velocidades del eje de los rotores, (6.5 m/s, 9.6 m/s y 10.5 m/s).

VI.1.3. Efecto de la velocidad tangencial vs P_{80}

Con el fin de analizar el efecto de la velocidad tangencial en la producción de finos, se presentan las Figuras 36, 37 y 38. La Figura 36 presenta los resultados de la primera campaña, realizada con 40% de nivel de llenado de bolas, variando el porcentaje de sólidos (40% y 45%) y tres velocidades tangenciales del eje de los rotores (6.5, 9.6 y 10.5 m/s). Se aprecia que, en general; para ambos porcentajes de sólidos, un incremento en la velocidad tangencial produce una disminución en el P_{80} por lo que existe una mayor generación de finos, y esto es consistente a lo largo de todas las campañas.

Sin embargo, es importante notar que, independientemente de la campaña y la velocidad tangencial del rotor, la mayor generación de finos se obtiene con un menor porcentaje de sólidos; es decir, se obtiene un menor P_{80} cuando hay una menor cantidad de masa en el sistema. Este efecto puede deberse a que, al incrementar la cantidad de sólidos, aumenta la densidad de la pulpa y por ende la viscosidad, lo cual dificulta la transferencia de energía mecánica necesaria para generar fractura en toda la carga del molino. Como se aprecia en la Tabla 9, el valor promedio de la viscosidad en las pruebas con 45% de sólidos es más alto

Para la primera campaña, a un 40% de nivel de llenado de bolas, se encontró (Figura 36) una variación del P_{80} , el cual para 45% es mayor que para 40%; habiendo una diferencia de 9.8 μm para la velocidad tangencial de 6.5 m/s, 3.92 μm para 9.6 m/s, y 3.02 μm para 10.5 m/s.

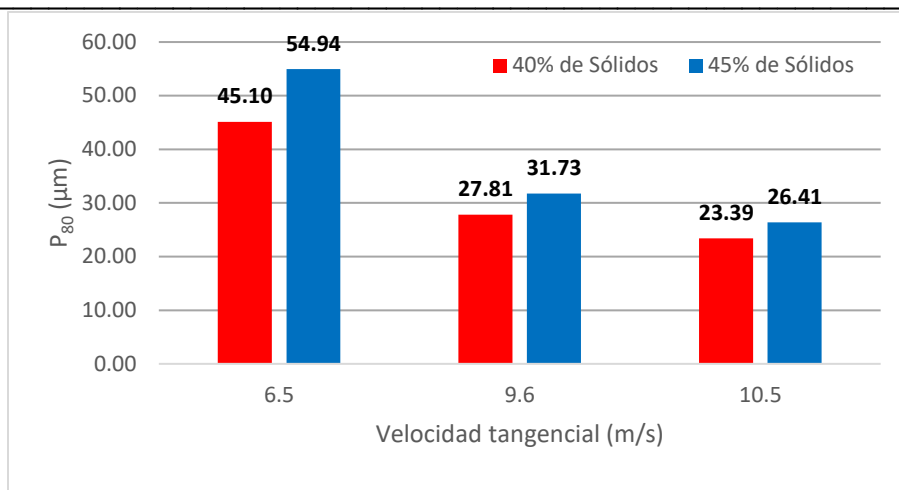


Figura 36.- P₈₀ de la primera campaña de 40% de nivel de llenado de bolas a diferentes velocidades tangenciales y porcentaje de sólidos.

Para la segunda campaña, a un 50% de nivel de llenado de bolas, se encontró (Figura 37) que el P₈₀ aumenta en el intervalo 40-45% de nivel de llenado de bolas; habiendo una diferencia de 11.69 μm para la velocidad tangencial de 6.5 m/s, 1.03 μm para la de 9.6 m/s, y 5.17 μm para la de 10.5 m/s.

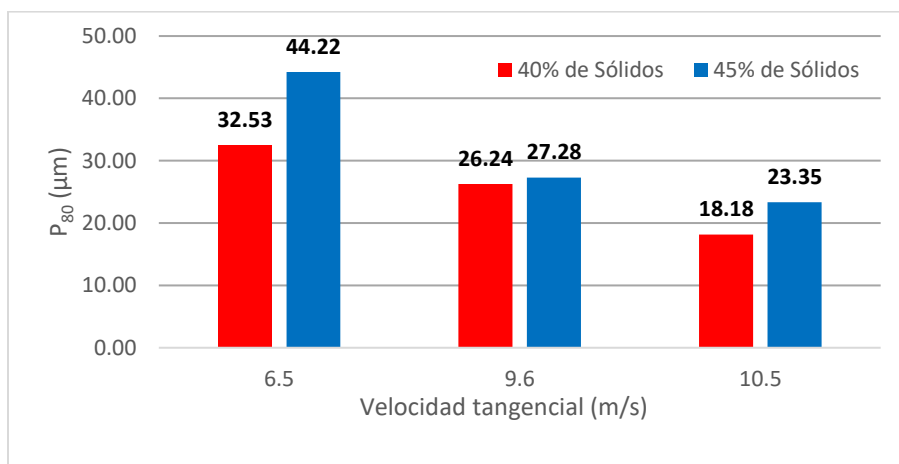


Figura 37.- P₈₀ de la segunda campaña de 50% de nivel de llenado de bolas a diferentes velocidades tangenciales y porcentaje de sólidos.

Para la tercera campaña, de un 60% de nivel de llenado de bolas, se encontró (Figura 38) que el P₈₀ aumenta para el mismo intervalo (40-45 % de nivel de llenado de bolas); obteniéndose una diferencia de 1.87 μm para la velocidad tangencial de 6.5 m/s, 2.87 μm para la de 9.6 m/s, y 2.45 μm para la de 10.5 m/s.

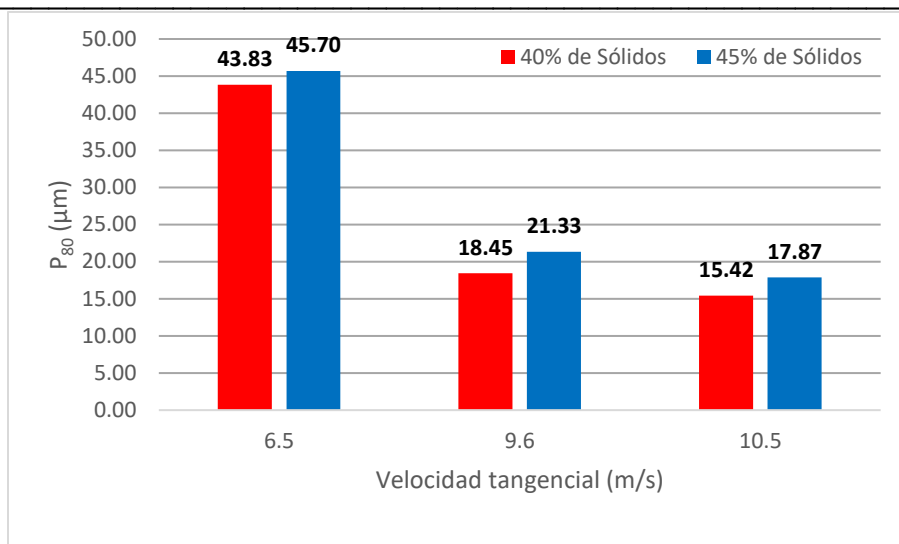


Figura 38.- P_{80} de la tercera campaña con 60% de nivel de llenado de bolas a diferentes velocidades tangenciales y porcentaje de sólidos.

VI.1.4. Efecto de la cantidad de energía específica en la generación de finos (P_{80})

Como se mencionó, la energía específica (kWh/ton) se define como la cantidad de energía suministrada durante una hora para producir una tonelada de mineral. Esta energía específica varía dependiendo de las condiciones de operación; tales como, el porcentaje de nivel de llenado de bolas, la velocidad tangencial, el porcentaje de sólidos y la cantidad de toneladas procesadas. En la Figura 39 se muestra el consumo de energía específica para moler una tonelada de mineral a los P_{80} previamente determinados. Como se aprecia en todos los gráficos, existe una tendencia coherente con las leyes de la conminución de minerales, que establece: "mientras mayor sea la reducción de tamaño del mineral (P_{80}), mayor deberá ser la energía específica suministrada". Es importante destacar que esto no implica necesariamente que una mayor energía específica sea la opción más eficiente para lograr valores menores de P_{80} .

Para todas las campañas se correlacionó logarítmicamente el P_{80} frente la energía específica. En el caso de la primera campaña, con un nivel de llenado de bolas de 40%, para 40% de sólidos, el consumo de energía específica se relaciona con el P_{80} con un R^2 de 0.9997; Para la misma campaña (40% de nivel de llenado de bola), la energía específica se relaciona con el P_{80} con un R^2 de 0.9999 para 45% de sólidos. En el caso de la segunda campaña, con un 50% de nivel de llenado de bolas, la energía específica se relaciona con el P_{80} , para 40% de sólidos, con un R^2 de 0.8491; para la misma campaña (50% de nivel de llenado de bola), la energía específica se relaciona con el P_{80} , para 45% de sólidos, con un R^2 de 0.996; Y por último, la tercera campaña, a un 60% de nivel de llenado de bolas, la energía específica se relaciona con el P_{80} , en el caso de 40% de sólidos, con un R^2 de 0.9932; Y para 45% de sólidos, para la tercera campaña (60% de bola), la energía específica se relaciona con el P_{80} con un R^2 de 0.9932.

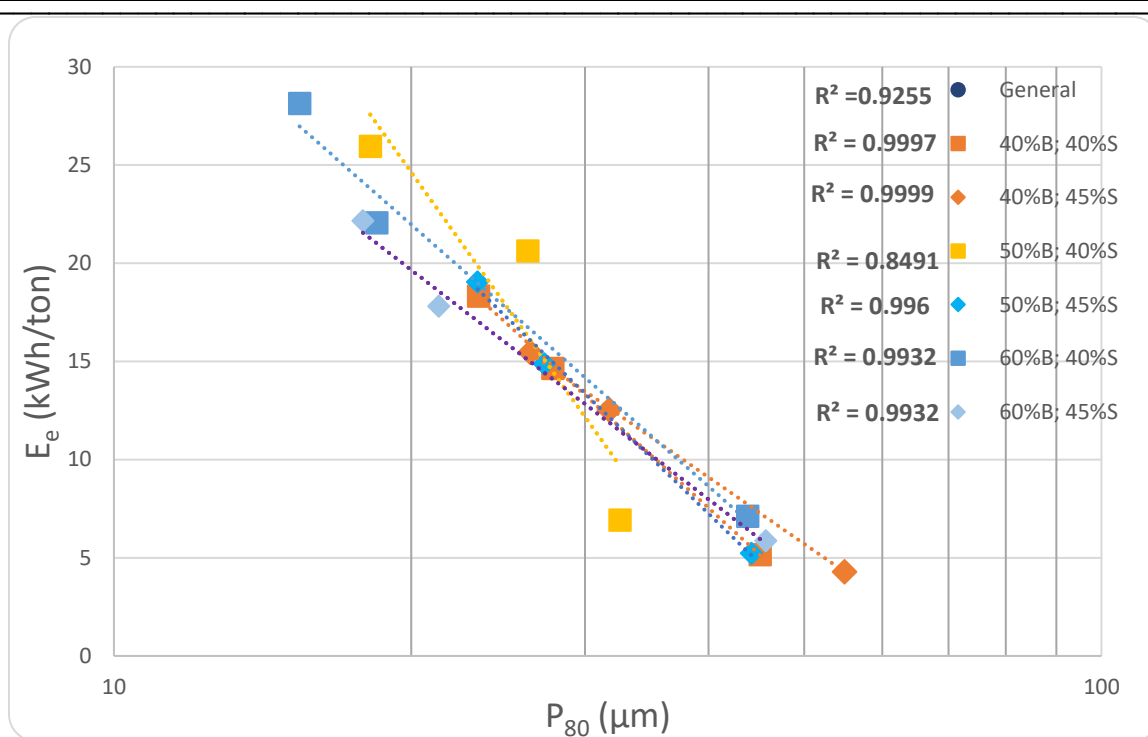


Figura 39.- P_{80} (μm) vs E_e (kWh/ton).

Se observa que, a medida que la energía específica aplicada en el proceso aumenta, el producto resultante es más fino. En las tres campañas realizadas, se obtuvo un coeficiente de determinación (R^2) de 0.9255, con la excepción de las condiciones de 50% de nivel de llenado de bolas y 40% de sólidos. Esta excepción podría atribuirse a variaciones involuntarias en los parámetros de operación, dado que, como se mencionó anteriormente, la alimentación del equipo HIGmill proviene del flujo bajo (Underflow, U/F) de una batería de hidrociclones, cuyo proceso está orientado al tratamiento de jales mineros.

En la Figura 40 se muestra la cantidad de energía específica para cada una de las pruebas con 40 y 45% de sólidos. Como se observa, las pruebas realizadas a 45% de sólidos tienen menor consumo de energía específica, independientemente del nivel de bola o velocidad de rotación. Esto se debe a que en estos equipos el flujo de sólidos y agua se mantienen constantes, por lo cual al tener mayor cantidad de partículas finas dentro del molino, el flujo de toneladas a procesar se incrementa, lo que trae como consecuencia que las partículas deban abandonar la zona de molienda más rápidamente por el incremento proporcional de la presión y la masa; por lo que el molino consume una menor cantidad de energía específica y el tamaño de P_{80} será más grande; o sea, se tendrá una menor reducción de tamaño.

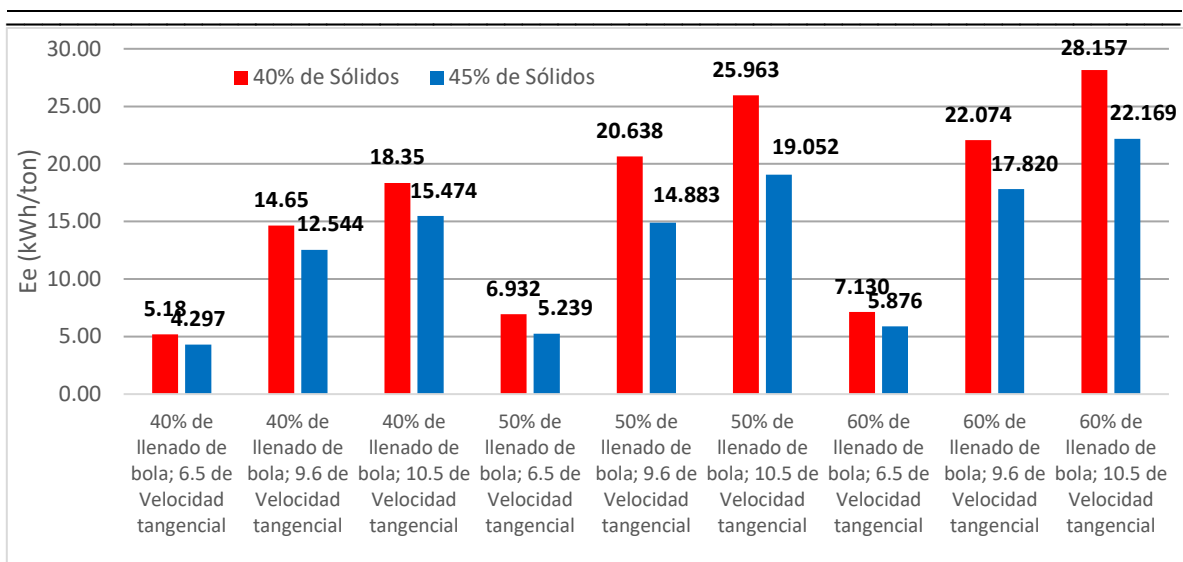


Figura 40.- Variación del porcentaje de sólidos y la energía específica para cada una de las velocidades tangenciales de cada campaña.

VI.1.5. Efecto de la temperatura promedio vs P_{80}

Un aumento en temperatura es el resultado de la transferencia de energía cinética a energía potencial, la cual se utiliza para la reducción de tamaño. Sin embargo, otros factores como la fricción entre las bolas, el aumento en el porcentaje de sólidos y la velocidad de rotación del rotor durante la molienda ultrafina; también contribuyen a este aumento de temperatura. En este caso, el molino cuenta con tres cámaras de molienda, cada una equipada con un termopar para la medir la temperatura. La temperatura mostrada en la Figura 40 es el promedio registrado durante el muestreo de estas tres cámaras. Como se observa en la Figura 40, las temperaturas oscilan entre 26.3 y 31.02°C. En cada campaña, las pruebas que muestran una menor temperatura corresponden a una velocidad tangencial de rotor de 6.5 m/s, manteniéndose constante en cada set de pruebas. Esto permite deducir que el incremento de temperatura es proporcional a la velocidad tangencial. Como es de suponerse, el incremento en el movimiento de la pulpa genera mayores esfuerzos de cizalle, lo que incrementa la abrasión y produce, en su mayoría, valores de P_{80} más bajos; es decir, una mayor generación de finos.

Es importante notar que, ante el incremento del nivel de llenado de bola, así como del porcentaje de sólidos; se incrementa la temperatura logrando un P_{80} con más generación de finos. Sin embargo, esta condición de excesiva abrasión podría generar un desgaste interno en los rotores, bolas y carcasa del HIGmill. Esto se refleja en el incremento de temperatura que tienen las pruebas 60B;40S;10.5Vtan y 60B;45S;10.5Vtan.

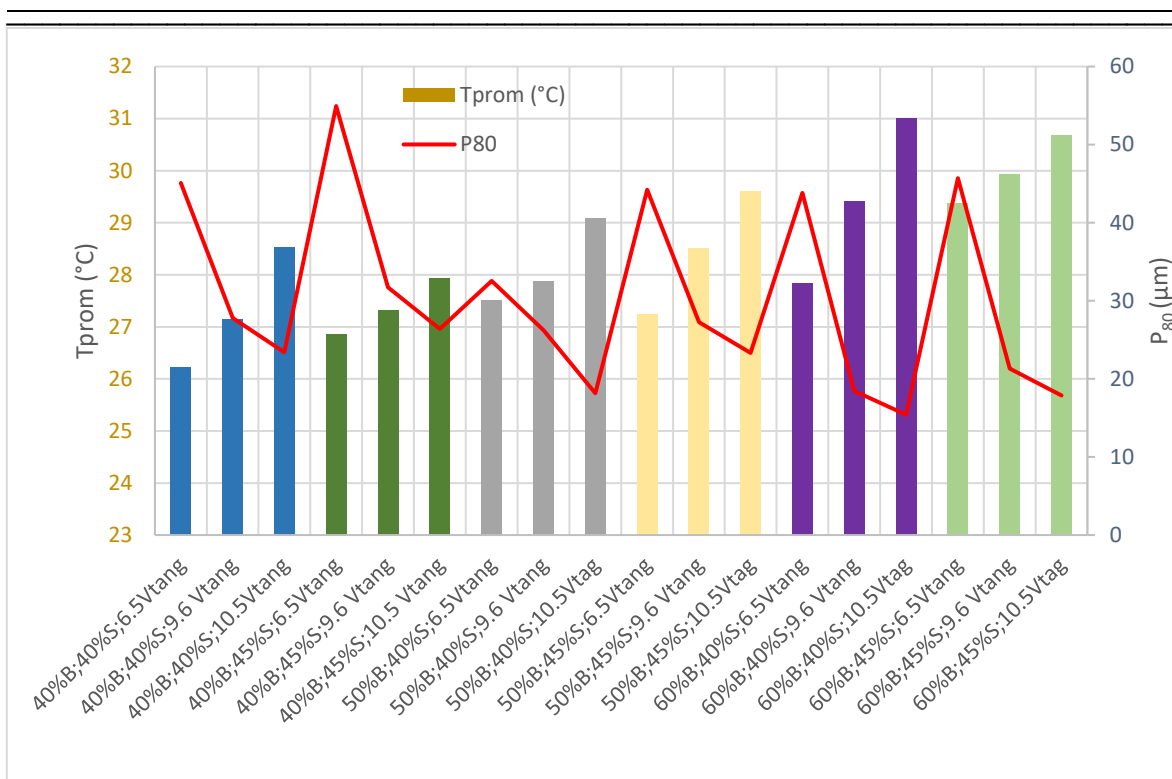


Figura 41.- Temperaturas vs muestras vs P₈₀.

VI.2. Evaluación del modelo para molienda ultrafina HIGmill

VI.2.1 Modelo de potencia

En el modelamiento de la potencia, usando el modelo propuesto por Heath (Heath al, 2017) (Ecuación 39), se obtuvieron los siguientes resultados, elaborando el ajuste de los parámetros k_1 , k_2 , k_3 y k_4 en función de las velocidades tangenciales, v_t , del agitador para cada porcentaje de sólidos de cada campaña (Tabla 10).

Tabla 10.- Parámetros del modelo de potencia obtenidos por cada campaña.

Parámetros de ajuste	Primera campaña 40% de Nivel de bola		Segunda campaña 50% de Nivel de bola		Tercera campaña 60% de Nivel de Bola	
	40% de Sólidos	45% de Sólidos	40% de Sólidos	45% de Sólidos	40% de Sólidos	45% de Sólidos
k_1	7.0823×10^{-6}	6.28×10^{-6}	4.3377×10^{-6}	4.2964×10^{-6}	3.9431×10^{-6}	4.3595×10^{-6}
k_2	0.78882	0.78882	0.78882	0.78882	0.70932	0.70932
k_3	2.72646	2.78900	2.78872	2.78872	2.75976	2.71184
k_4	0.99352	0.99235	0.99235	0.99235	0.99241	0.99376

Así, para la primera todas las campañas se obtuvo el cálculo de las potencias en general (Figura 42):

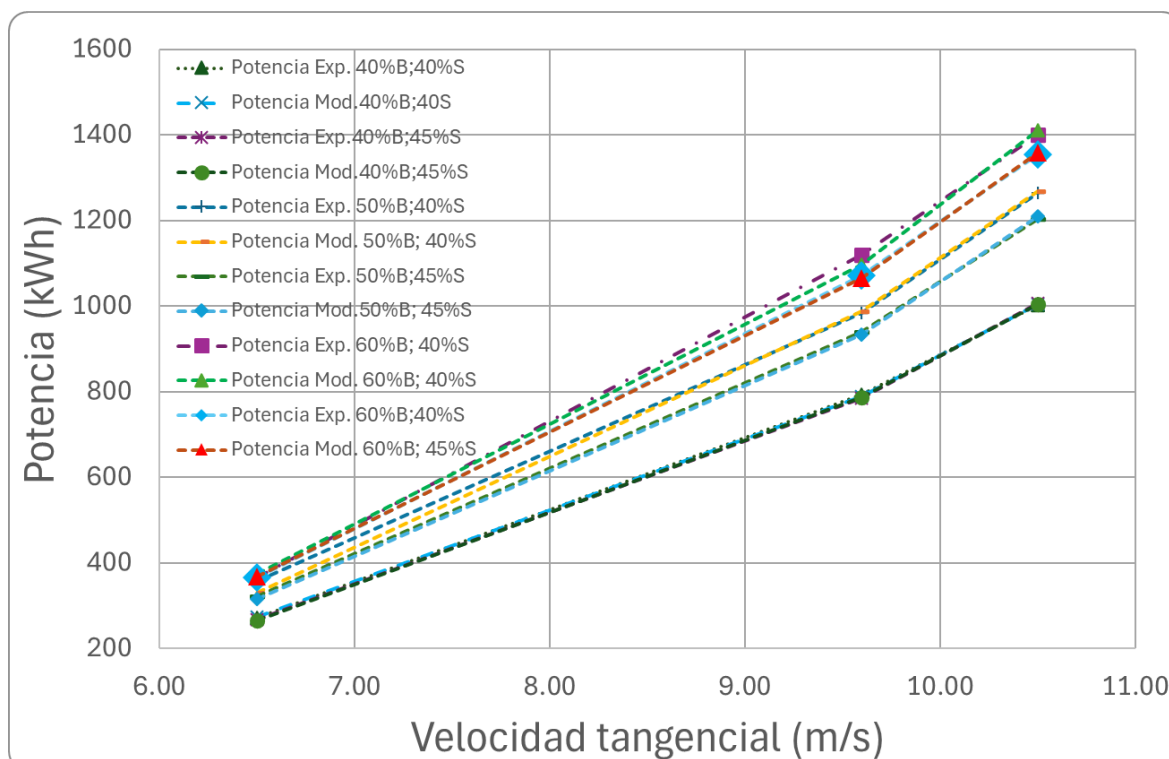


Figura 42.- Gráfico de las potencias de todas las campañas, potencia experimental y potencia modelada de Velocidad tangencial (m/s) vs Potencia (kWh).

Las potencias experimentales y modeladas fueron correlacionadas (Figura 43), obteniendo un R^2 de 0.9999 para la primera campaña a un nivel de llenado de bolas de 40% y un 40% de sólidos y un R^2 de 0.9999 para la primera campaña a un nivel de llenado de bolas de 40% y un 45% de sólidos; de un R^2 de 0.9999 para la segunda campaña a un nivel de llenado de bolas de 50% y un 40% de sólidos; de un R^2 de 0.9999 para la segunda campaña a un nivel de llenado de bolas de 50% y un 45% de sólidos; y un R^2 de 0.9998 para la tercera campaña a un nivel de llenado de bolas de 60% y un 40% de sólidos y un R^2 de 0.9988 para la tercera campaña a un nivel de llenado de bolas de 60% y un 45% de sólidos. Este gráfico indica que, la cercanía entre los datos medidos en planta y los obtenidos mediante el ajuste del modelado de potencia presentan muy poca variación.

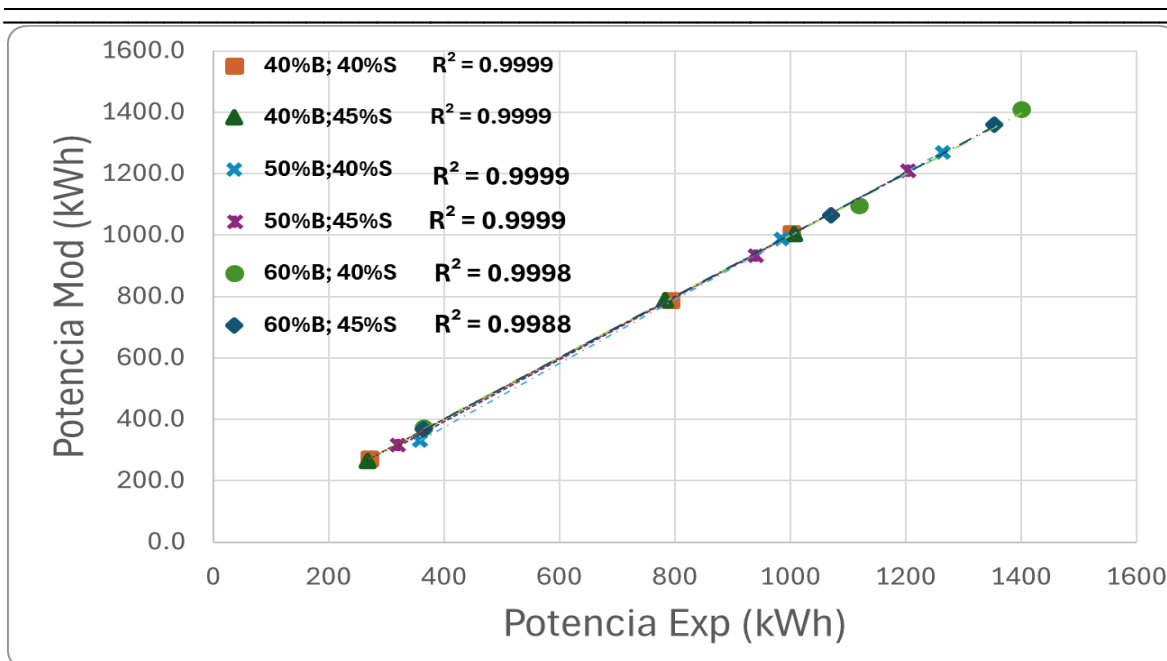


Figura 43.- Gráfico de las potencias de la primera campaña de 40% de nivel de llenado de bolas a un 40% de sólidos potencia experimental vs potencia modelada.

El modelo de potencia muestra un buen ajuste para cada uno de los muestreos elaborados. Los parámetros k_1 , k_2 , k_3 y k_4 , en promedio tienen un valor de 5.05×10^{-6} , 0.762, 2.76 y 0.993, respectivamente.

Se correlacionaron (Figura 44) con la potencia las variables de velocidad tangencial, nivel de llenado de bolas y porcentaje de sólidos. Se encontró que la velocidad tangencial tiene mayor correlación con la potencia de los molinos con un R^2 de 0.9026. Esto concuerda con el parámetro que mayor influencia tiene en el modelo, siendo k_3 el exponencial que relaciona la velocidad tangencial con la potencia (Ecuación 39).

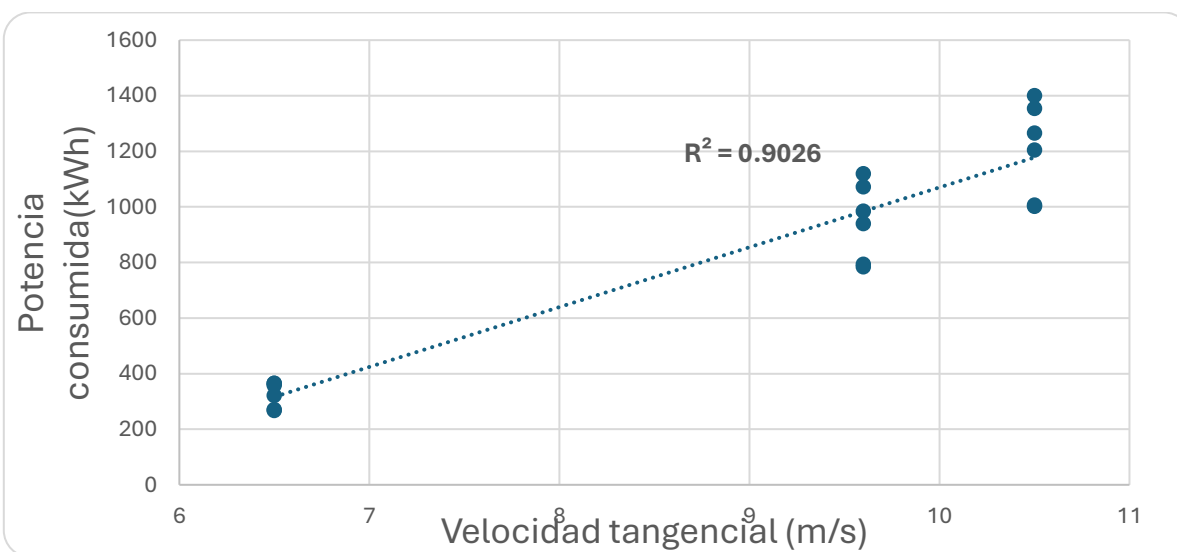


Figura 44.- a) Velocidad tangencial (m/s) vs Potencia (kWh).

VI.2.2. Modelado de distribución granulométrica usando el Modelo de Balance Poblacional MBP

Una vez obtenidos los datos sobre las distribuciones granulométricas, condiciones de operación y dimensiones del molino; con el modelo de potencia ajustado se obtuvieron las distribuciones granulométricas simuladas con el modelo de balance poblacional. Para 40% de nivel de llenado de bolas, 40% de sólidos, y las tres velocidades tangenciales (6.5, 9.6 y 10.5 m/s), que corresponden a 40%B;40%S;6.5Vtan, 40%B;40%S;9.6Vtan, 40%B;40%S;10.5Vtan, se obtuvieron las siguientes distribuciones granulométrica simuladas (Figura 45). Se observa un buen ajuste en la distribución simulada con respecto a los datos experimentales. El cálculo de los parámetros del modelo, que son descritas en las Ecuaciones (45)-(50), se muestra en la Tabla 11.

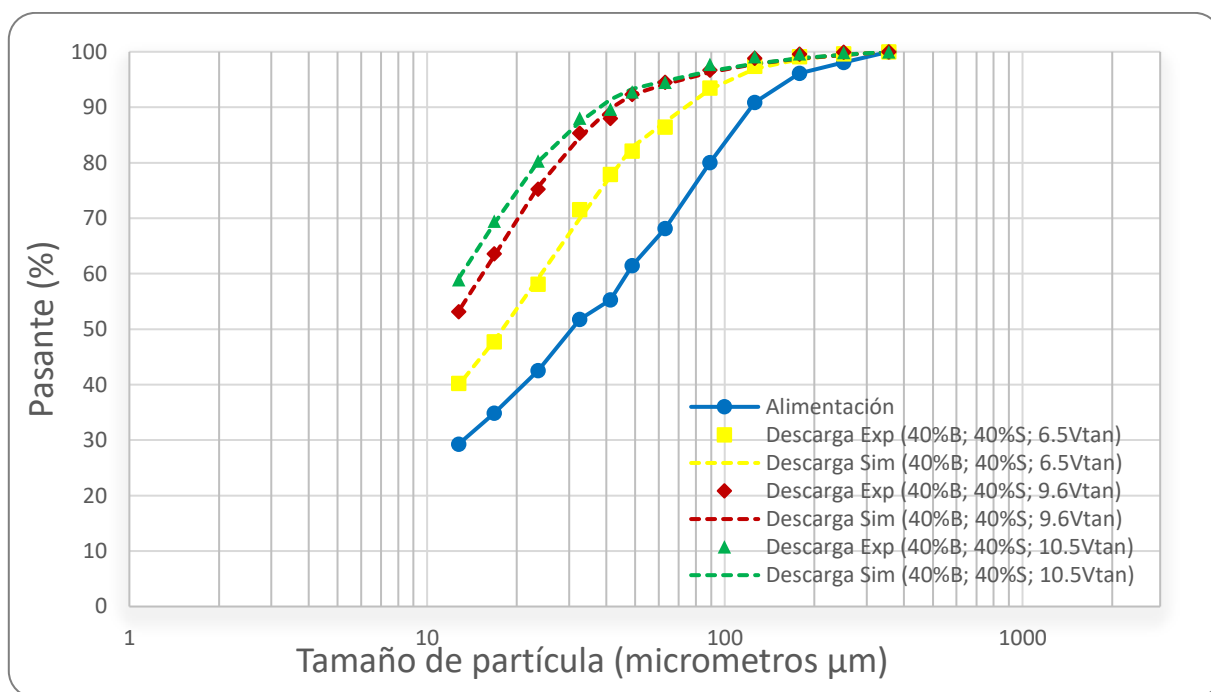


Figura 45.- Granulometrías Experimentales y simuladas, 40% de nivel de llenado de bolas a 40% de sólidos.

Tabla 11.- Parámetros del modelo de balance poblacional, 40% de nivel de llenado de bolas a 40% de sólidos.

Parámetros		40%B;40%S;6.5Vtan	40%B;40%S;9.6 Vtan	40%B;40%S;10.5Vtan
Función de Selección	α_0	0.001496316	0.001069288	0.001149
	α_1	1.530248148	1.530248148	1.530
	Λ	1.896005359	2.505000388	2.5
	μ_p	43.68093724	49.53919723	44
Función de quebrado	ϕ	0.4094	0.410075666	0.41008
	β_1	2.0972	2.097162665	2.097

	β_2	2.0972	2.097152769	2.1
Función obj.	#	0.78	0.62	0.58

Para 40% de nivel de llenado de bolas, a un 45% de sólidos, y las tres velocidades tangenciales (6.5, 9.6 y 10.5 m/s), las cuales corresponden a 40%B;45%S;6.5Vtan, 40%B;45%S;9.6Vtan, 40%B;45%S;10.5Vtan, las distribuciones granulométricas simuladas se muestran en la Figura 46.

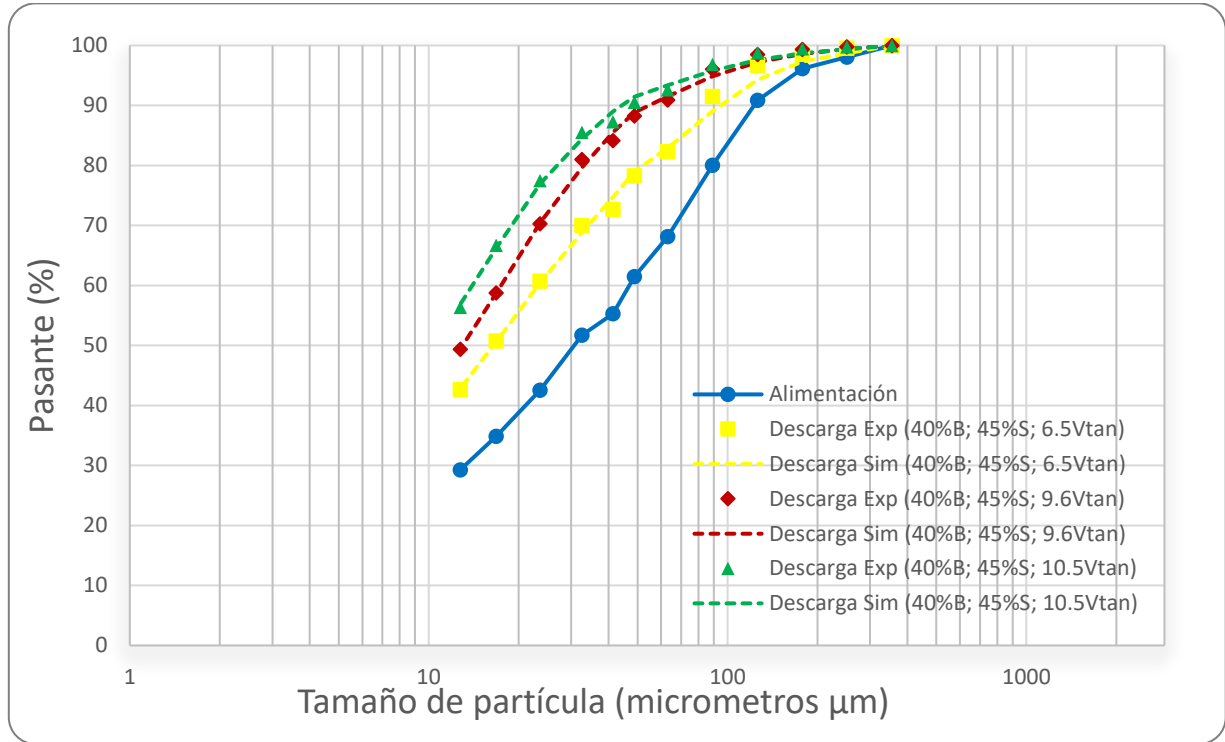


Figura 46.- Granulometrías Experimentales y simuladas, 40% de nivel de llenado de bolas a 45% de sólidos.

El cálculo de los parámetros del modelo, usando las ecuaciones (45)-(50), se muestra en la Tabla 12.

Tabla 12.- Parámetros del modelo de balance poblacional, 40% de nivel de llenado de bolas a 45% de sólidos.

Parámetros		40%B;45%S;6.5Vtan	40%B;45%S;9.6 Vtan	40%B;45%S;10.5 Vtan
Función de Selección	α_0	0.002776996	0.000969213	0.001531441
	α_1	1.530248148	1.593661584	1.492380316
	Λ	2.509696234	2.332761474	2.332761474
	μ_p	34.38303335	40.45232671	39.73805331
Función de quebrado	ϕ	0.408638837	0.410283552	0.411827966
	β_1	2.097162665	2.097162665	2.097162665
	β_2	2.097152769	2.097152769	2.097152769
Función obj.	#	1.02	0.73	0.78

En el caso de 50% de nivel de llenado de bolas a un 40% de sólidos, y las tres velocidades tangenciales (6.5, 9.6 y 10.5 m/s), las cuales corresponden a 50%B;40%S;6.5Vtan, 50%B;40%S;9.6Vtan, 50%B;40%S;10.5Vtan, las distribuciones granulométricas simuladas se presentan en la Figura 47.

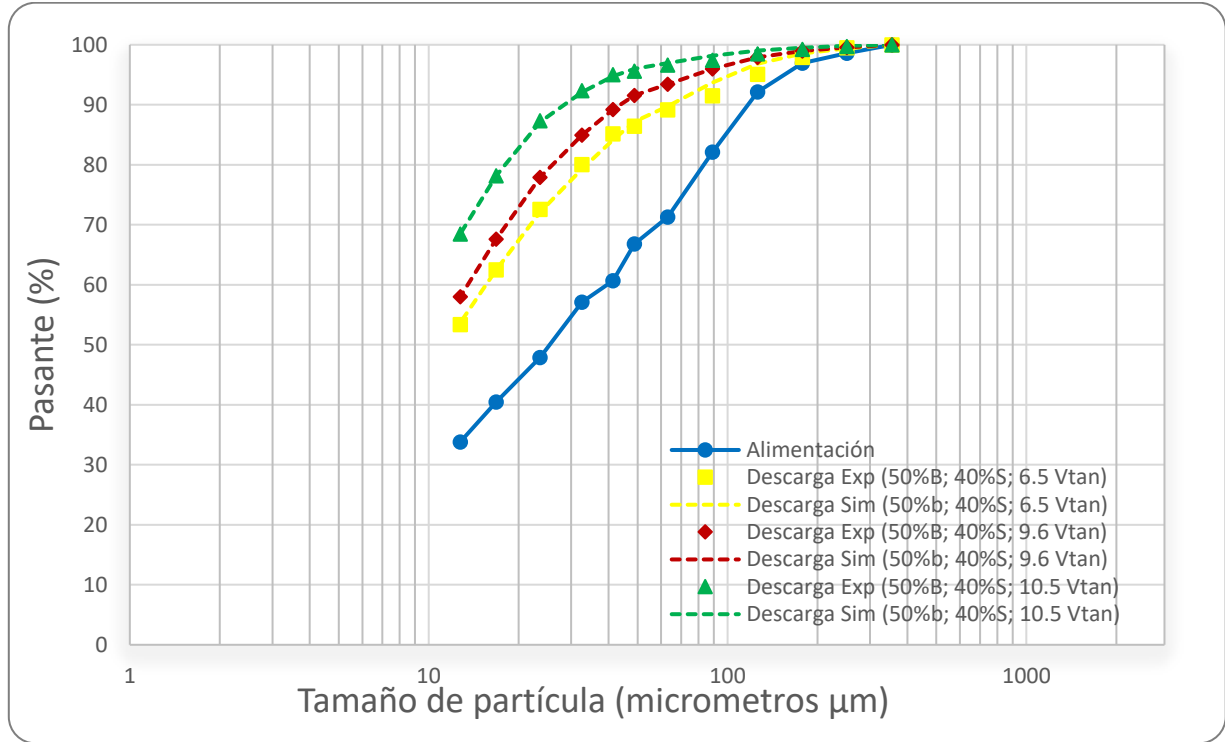


Figura 47.- Granulometrías Experimentales y simuladas, 50% de nivel de llenado de bolas a 40% de sólidos.

El cálculo de los parámetros del modelo, usando las ecuaciones (45)-(50), se presenta en la Tabla 13.

Tabla 13.- Parámetros del modelo de balance poblacional, 50% de nivel de llenado de bolas a 40% de sólidos.

Parámetros		50%B;40%S;6.5Vtan	50%B;40%S;9.6 Vtan	50%B;40%S;10.5Vtan
Función de Selección	α_0	0.001155706	0.000410143	0.000385805
	α_1	1.827056164	1.827056164	1.923171681
	Λ	2.5	2.5	2.5
	μ_p	28.37365066	32.29913923	30.2012039
Función de quebrado	ϕ	0.324047077	0.324047077	0.415629948
	β_1	2.06306132	2.06306132	2.06306132
	β_2	2.049214906	2.049214906	2.049214906
Función obj.	#	0.82	0.01	0.26

En el caso de 50% de nivel de llenado de bolas, 45% de sólidos, y las tres velocidades tangenciales (6.5, 9.6 y 10.5 m/s), las cuales corresponden a 50%B;45%S;6.5Vtan, 50%B;45%S;9.6Vtan, 50%B;45%S;10.5Vtan, se obtuvieron las siguientes distribuciones granulométricas simuladas (Figura 48):

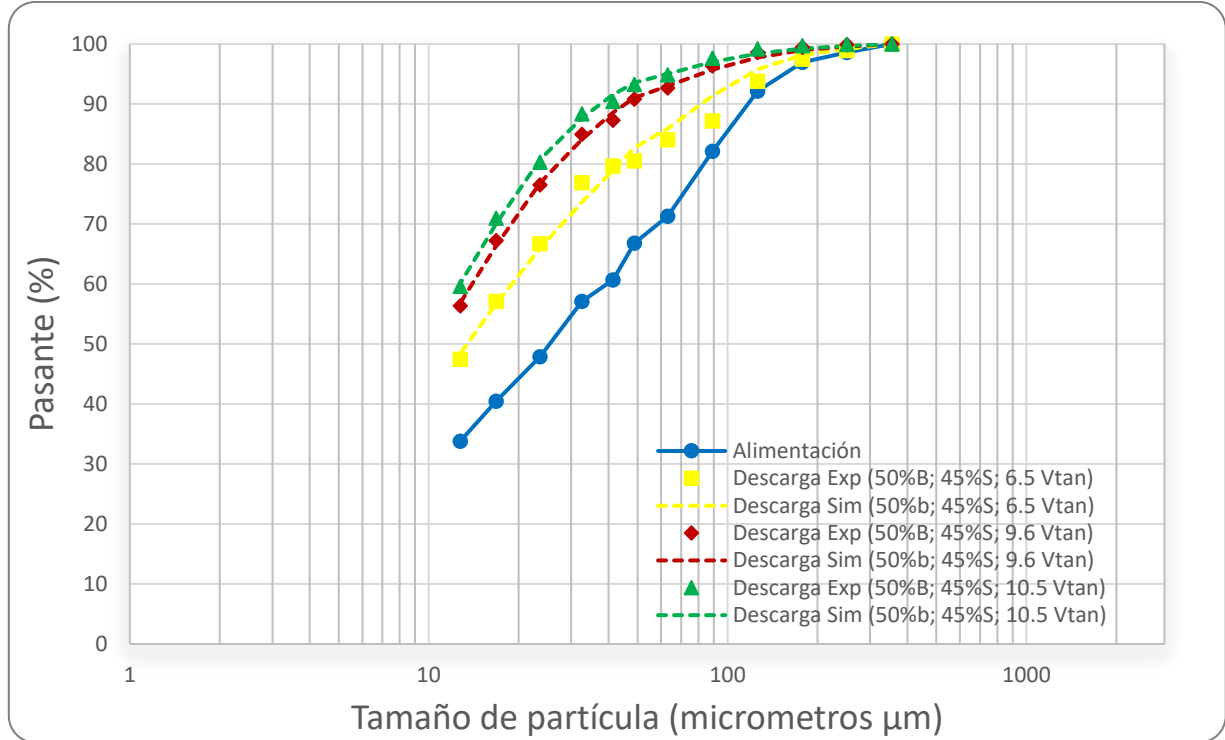


Figura 48.- Granulometrías Experimentales y simuladas, 50% de nivel de llenado de bolas a 45% de sólidos.

El cálculo de los parámetros del modelo, usando las ecuaciones (45)-(50), se presenta en la Tabla 14.

Tabla 14.- Parámetros del modelo de balance poblacional, 40% de nivel de llenado de bolas a 45% de sólidos.

Parámetros		50%B;45%S;6.5Vtan	50%B;45%S;9.6 Vtan	50%B;45%S;10.5Vtan
Función de Selección	α_0	0.001277196	0.000713469	0.000456542
	α_1	1.827056164	1.827056164	1.827056164
	Λ	2.5	2.5	2.5
	μ_p	28.49301483	26.34354297	34.65880164
Función de quebrado	ϕ	0.415629948	0.200784306	0.415629948
	β_1	2.06306132	2.06306132	2.06306132
	β_2	2.049214906	2.049214906	2.049214906
Función obj.	#	1.78	0.61	0.56

Para 60% de nivel de llenado de bolas, 40% de sólidos, y las tres velocidades tangenciales (6.5,9.6 y 10.5 m/s), las cuales corresponden a 60%B;40%S;6.5Vtan,

60%B;40%S;9.6Vtan, 60%B;40%S;10.5Vtan; las distribuciones granulométricas simuladas correspondiente se muestran en la Figura 49.

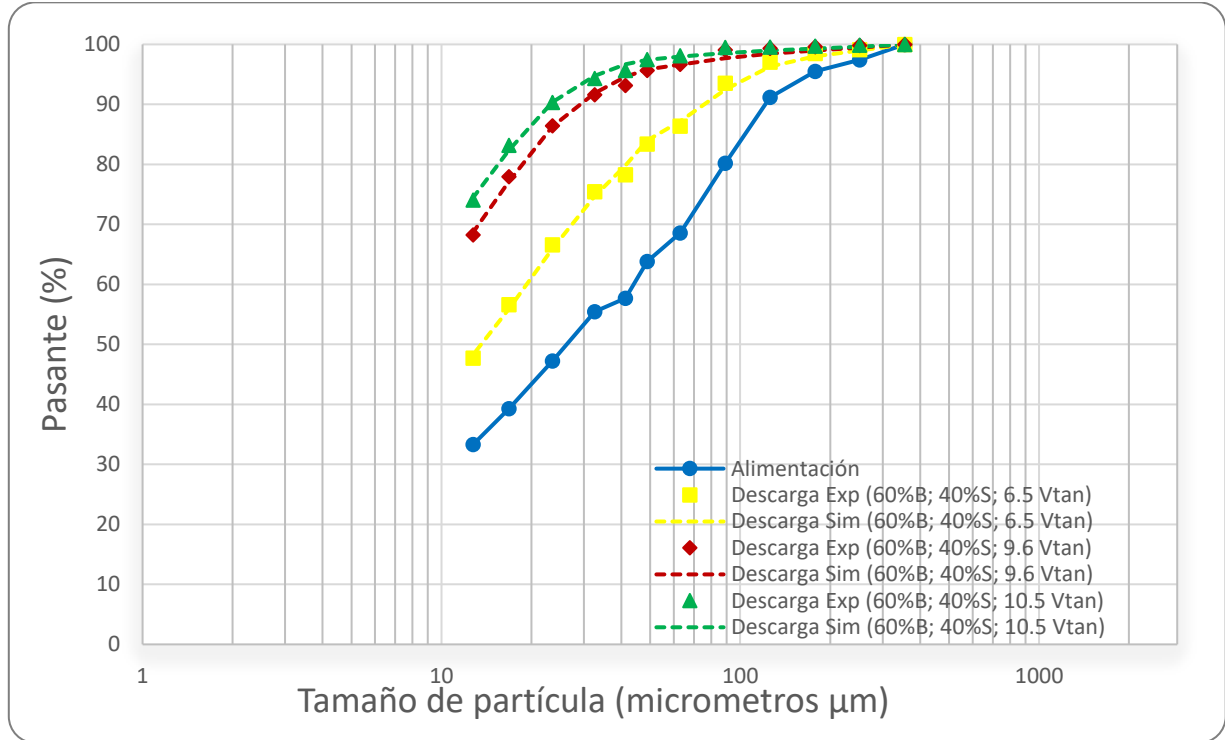


Figura 49.- Granulometrías Experimentales y simuladas, 60% de nivel de llenado de bolas a 40% de sólidos.

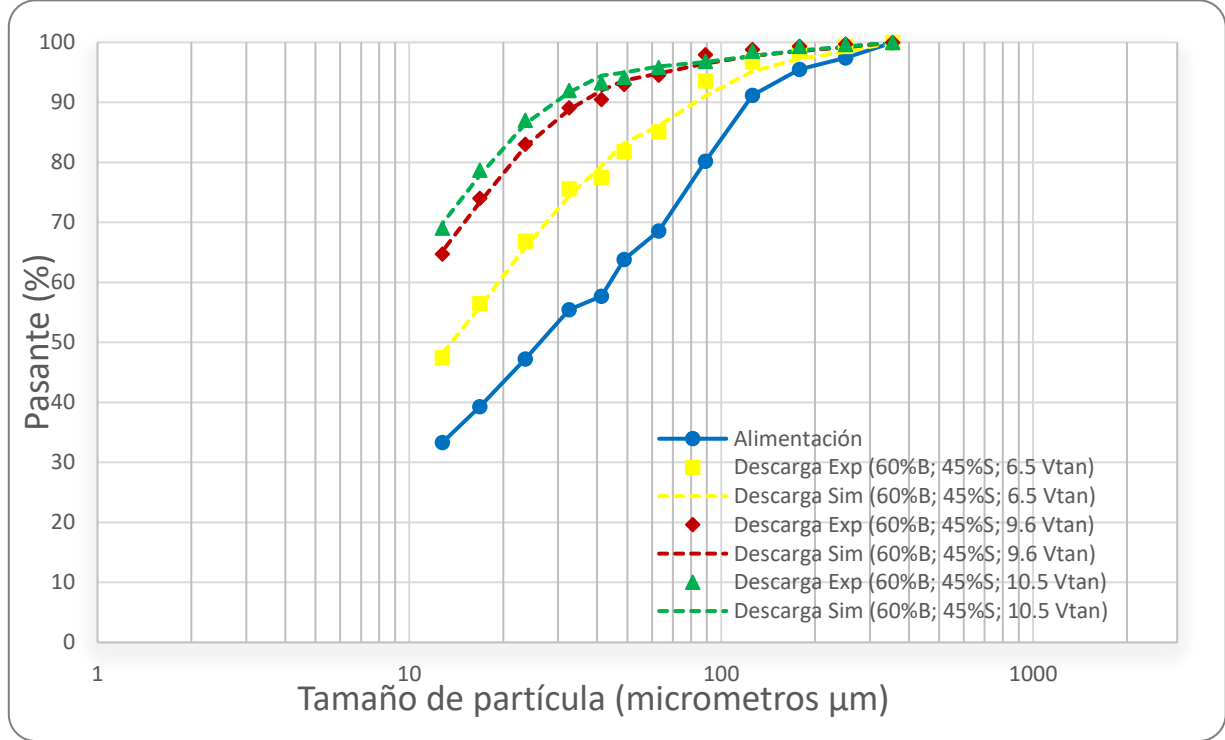
El cálculo de los parámetros del modelo, usando las ecuaciones (45)-(50), queda mostrado en la Tabla 15.

Tabla 15.- Parámetros del modelo de balance poblacional, 60% de nivel de llenado de bolas a 40% de sólidos.

Parámetros		60%B;40%S;6.5Vtan	60%B;40%S;9.6 Vtan	60%B;40%S;10.5Vtan
Función de Selección	α_0	0.000969	0.000922861	0.000799028
	α_1	1.503	1.498063633	1.498063633
	Λ	2.1	2.500315677	2.500315677
	μ_p	48	52.76545008	54.76024639
Función de quebrado	$\emptyset$	0.44838	0.939184362	0.448378013
	β_1	1.337	1.337028467	1.337028467
	β_2	1.1	1.074354017	1.074354017
Función obj.	#	0.78	0.61	0.45

Finalmente, para el caso de 60% de nivel de llenado de bolas, 45% de sólidos, y las tres velocidades tangenciales (6.5,9.6 y 10.5 m/s), las cuales

corresponden 60%B;45%S;6.5Vtan, 60%B;45%S;9.6Vtan, 60%B;45%S;10.5Vtan; se obtuvieron las siguientes distribuciones granulométricas simuladas (Figura 50):



El cálculo de los parámetros del modelo, usando las mismas ecuaciones que el resto de los casos, queda mostrado en la Tabla 16.

Tabla 16.- Parámetros del modelo de balance poblacional, 40% de nivel de llenado de bolas a 45% de sólidos.

Parámetros		60%B;45%S;6.5Vtan	60%B;45%S;9.6 Vtan	60%B;45%S;10.5Vtan
Función de Selección	α_0	0.001138567	0.000939787	0.001070743
	α_1	1.498063633	1.498063633	1.498063633
	Λ	2.500315677	2.500315677	2.500315677
	μ_p	52.66463586	50.72320546	46.48665833
Función de quebrado	ϕ	0.448378013	0.448378013	0.448378013
	β_1	1.337028467	1.337028467	1.337028467
	β_2	1.074354017	1.074354017	1.074354017
Función obj.	#	1.22	0.68	0.57

Las granulometrías simuladas muestran un buen ajuste a las granulometrías experimentales para todos los casos usando el modelo de balance poblacional. A

partir de ello se puede evaluar las mejores condiciones operativas del molino, como se muestra en la sección VI.3.2.2.

VI.3 Evaluación del Rendimiento del molino HIGmill

VI.3.1. Evaluación de la Cinética de Fractura

La Figura 51 presenta un gráfico comparativo entre la velocidad de deslizamiento y la velocidad de ascenso para cada una de las muestras analizadas. En el gráfico se puede observar que la velocidad de deslizamiento es aproximadamente diez veces mayor que la velocidad de ascenso. Esta velocidad está relacionada directamente con la fractura que ocurre en la cámara de molienda, por lo que es posible deducir que el porcentaje de llenado de bolas en el molino afecta la fractura. Esto debido a que las bolas, siendo las primeras en entrar en contacto con el mineral, son responsables de la fractura inicial del material. Por otro lado, la velocidad de ascenso determina la rapidez con la que el mineral molido es expulsado por la parte superior del HIGmill. De este modo, se concluye que una mayor velocidad de deslizamiento favorece un proceso de molienda más eficiente.

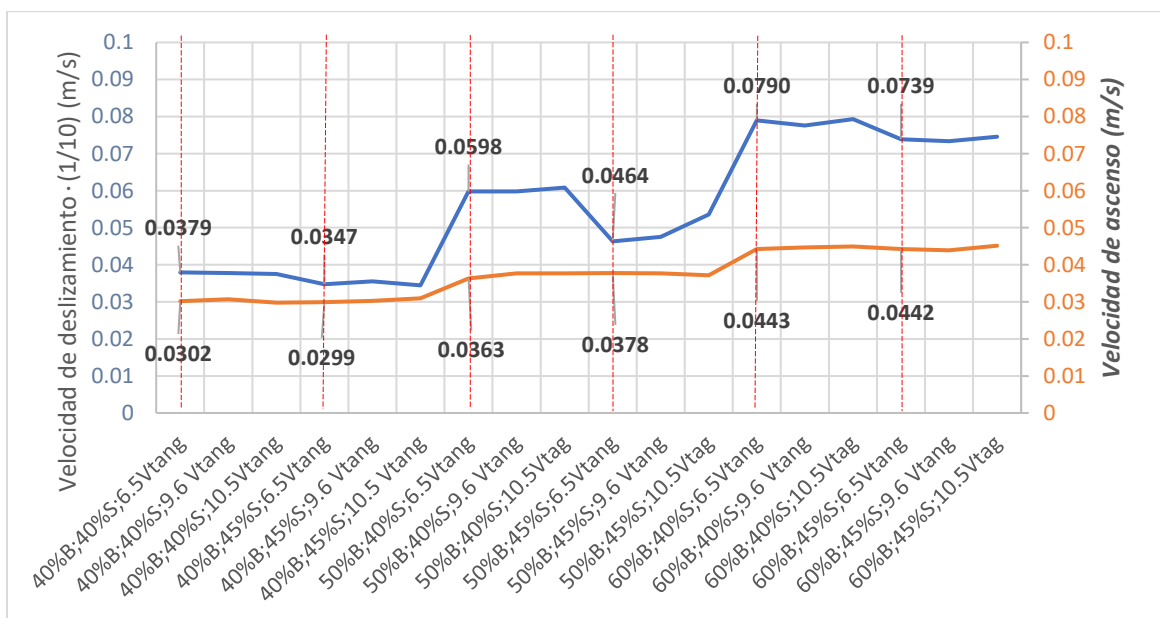


Figura 51.- Gráfico donde se muestra la velocidad de deslizamiento y la velocidad de ascenso a cada condición de muestreo.

Como se observa en la Figura 51, en todas las muestras analizadas, la velocidad de deslizamiento predomina sobre la velocidad de ascenso, que es consistentemente menor. Este comportamiento es porque un aumento en la velocidad de ascenso implica un tiempo de residencia más corto de las partículas en la cámara de molienda, lo que resulta en partículas más grandes debido a su rápida expulsión de la zona de molienda. En cambio, si en la prueba se registra una velocidad de deslizamiento mayor que la velocidad de ascenso, se obtendrá un producto con una mayor proporción de partículas finas.

La cinética de fractura puede evaluarse mediante la función de selección específica (S_i^F , ton/kWh) (Ecuación 52). Al utilizar los parámetros de esta función es posible determinar la velocidad a la que se generan los eventos de fractura dentro del molino, bajo las diferentes condiciones propuestas en este trabajo. Esta medida de la velocidad de rompimiento se relaciona al parámetro α_0 (min^{-1}), que corresponde a la intersección de la línea con la abscisa en el gráfico de tamaño de partícula contra S_i^F .

Como se aprecia en la Figura 52, para un 40% de nivel de llenado de bolas, 40% de sólidos, y tres velocidades tangenciales (6.5, 9.6, y 10.5 m/s), correspondientes a las condiciones 40%B;40%S;6.5Vtan, 40%B;40%S;9.6Vtan, y 40%B;40%S;10.5Vtan; se obtuvieron las velocidades de rompimiento para las condiciones dadas las cuales son $0.001496316 \text{ min}^{-1}$, $0.001069288 \text{ min}^{-1}$, y $0.001149 \text{ min}^{-1}$, respectivamente. Se observa que la velocidad de rompimiento más alta se alcanza para la condición 40%B;40%S;6.5Vtan. Esta prueba es la que tiene una menor velocidad tangencial; al parecer, esto favorece la velocidad de deslizamiento y, por lo tanto, una mayor fractura del mineral. Además, al tratarse de un rango de partículas más gruesas, se presenta una mayor velocidad de rompimiento.

Se observa que la velocidad tangencial es el parámetro que más influye sobre la velocidad de rompimiento, la velocidad tangencial de 6.5 m/s para todas las muestras analizadas es la que mayor velocidad de fractura presenta, esto se observa en las Figuras 52 a la 57. Esto puede deberse a que a esta velocidad, como se comentó, a pesar de ser la menor velocidad de movimiento (estudiada en este trabajo), favorece velocidades de deslizamiento mayores que las velocidades de ascenso.

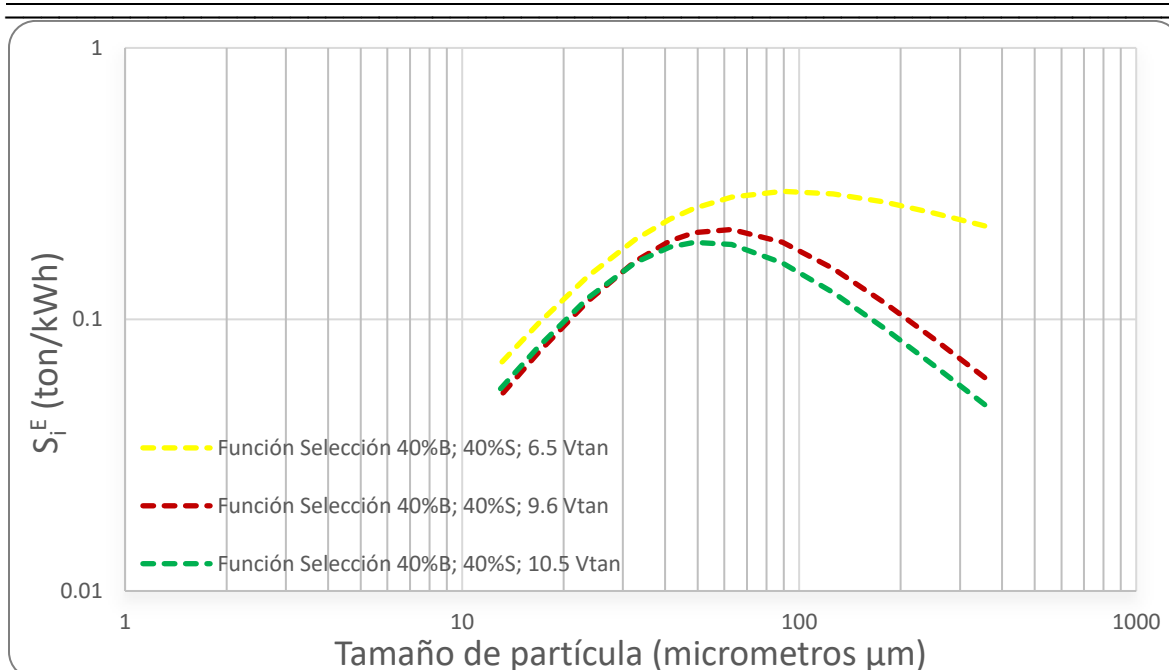


Figura 52.- Gráfico de cinética de fractura, tamaño de partícula (μm) vs la función selección específica (ton/kWh).

Como se observa, las velocidades tangenciales de 9.6 m/s y 10.5 m/s muestran diferencias pequeñas, hasta un tamaño de 35 μm , siendo ligeramente mayor la velocidad de 10.5 m/s. A partir de 35 μm , para la velocidad de 10.5 m/s se aprecia un incremento significativo, lo cual podría atribuirse al efecto de los rotores sobre la velocidad de deslizamiento, ya que, para un mineral de mayor tamaño, el contacto entre las bolas y el movimiento de los rotores facilita la generación de partículas finas debido a que, para esta velocidad de rotación, la velocidad de deslizamiento es tal que permite la fractura.

En la Figura 53, cuya condición es 40% de nivel de llenado de bolas, 45% de sólidos y las tres velocidades tangenciales (6.5, 9.6 y 10.5 m/s) que corresponden a 40%B;45%S;6.5Vtan, 40%B;45%S;9.6Vtan, 40%B;45%S;10.5Vtan; se obtuvieron las velocidades de rompimiento de $0.002776996 \text{ min}^{-1}$, $0.000969213 \text{ min}^{-1}$ y $0.001531441 \text{ min}^{-1}$, correspondientemente. Se observa un aumento de la velocidad de rompimiento de 40%B;45%S;10.5Vtan con respecto a 40%B;45%S;9.6Vtan, efecto semejante a las condiciones anteriores.

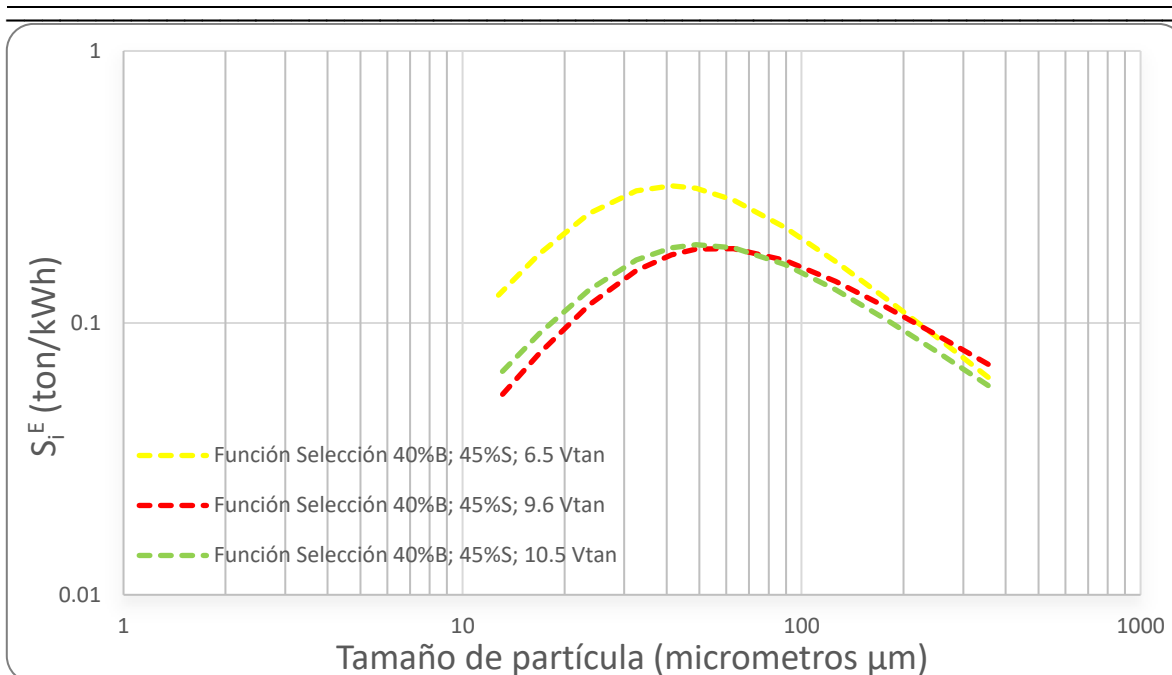


Figura 53.- Gráfico de cinética de fractura, tamaño de partícula (μm) vs la función selección específica (ton/kWh).

En la Figura 54, cuyas condiciones son 50% de nivel de llenado de bolas, 40% de sólidos y las tres velocidades tangenciales (6.5, 9.6 y 10.5 m/s), que corresponden a 50%B;40%S;6.5Vtan, 50%B;40%S;9.6Vtan, 50%B;40%S;10.5Vtan; se obtuvieron las velocidades de rompimiento de $0.001155706 \text{ min}^{-1}$, $0.000410143 \text{ min}^{-1}$ y $0.000385805 \text{ min}^{-1}$, respectivamente. Las diferencias que se aprecian en la velocidad de rompimiento podrían deberse a una diferencia significativa entre las velocidades de ascenso y descenso (Figura 51), como consecuencia del aumento en la cantidad de bolas, en combinación con un mayor contenido de sólidos que incrementa el área disponible para la molienda. Esto favorece la fractura por deslizamiento de las bolas, tanto en la cámara de molienda como durante su ascenso por los rotores. Sin embargo, este fenómeno puede generar un alto desgaste debido a la interacción bola-mineral en la cámara de molienda, así como un desgaste en la interacción mineral-rotor durante el ascenso. Esto puede deducirse del aumento de temperatura que se presenta y que se documentó para estas campañas estudiadas.

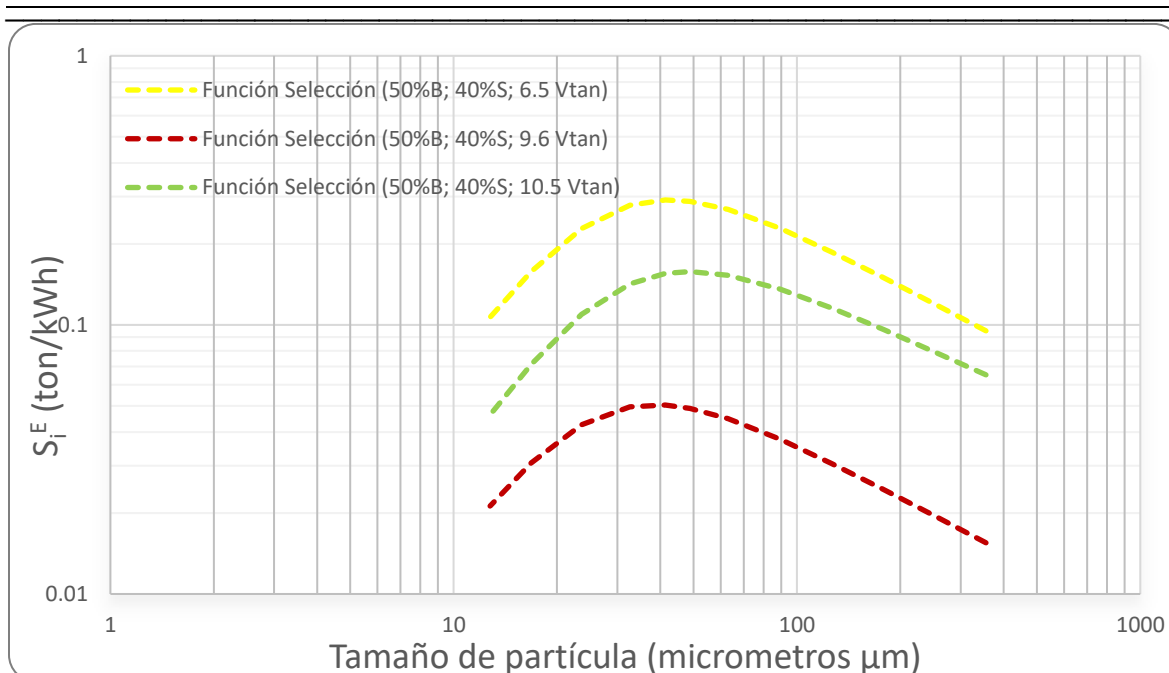


Figura 54.- Gráfico de cinética de fractura, tamaño de partícula (μm) vs la función selección específica (ton/kWh).

Para el 50% de nivel de llenado de bolas, 45% de sólidos y las tres velocidades tangenciales (6.5, 9.6 y 10.5 m/s), las cuales corresponden a 50%B;45%S;6.5Vtan, 50%B;45%S;9.6Vtan, 50%B;45%S;10.5Vtan, se obtuvieron las velocidades de rompimiento de la Figura 55. Las velocidades de rompimiento fueron $0.001277196 \text{ min}^{-1}$, $0.000713469 \text{ min}^{-1}$ y $0.000456542 \text{ min}^{-1}$, correspondientemente. Se observa un efecto igual que para la primera campaña con 40% de sólidos, en cuanto a la velocidad de rompimiento. Este efecto también puede ser descrito como para el caso previo. No obstante, para la velocidad tangencial de 9.6 m/s se observa que es ligeramente superior a la de 10.5 m/s. Esto puede deberse a que, a 9.6 m/s aún existe una mayor fuerza de deslizamiento sobre las partículas finas. Sin embargo, para los tamaños gruesos, la velocidad de ascenso adquiere mayor relevancia. Esto explica el porqué, tanto a 9.6 m/s como a 10.5 m/s, la velocidad de ascenso permite que las partículas más grandes salgan rápidamente de la zona de molienda, lo que resulta en velocidades de ruptura similares, a pesar de una mayor velocidad de rotación. Este efecto de la velocidad de ascenso, observado también en la Figura 51, podría estar relacionado con el incremento en el contenido de sólidos. También pudiera deberse a un posible efecto de centrifugación sobre las partículas gruesas, las cuales debido a su mayor masa específica, pudieran colocarse en las paredes entre los rotores y el molino recibiendo una molienda menor. Sin embargo, un estudio más amplio se requeriría para comprender cuál de estas hipótesis tendría más relevancia.

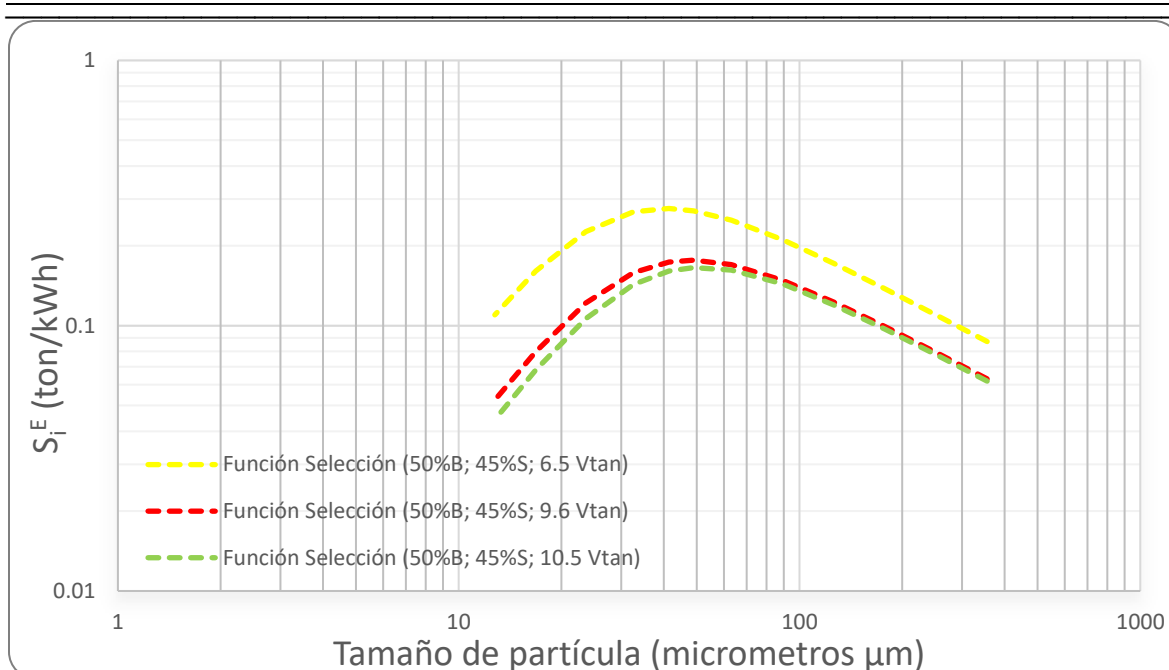


Figura 55.- Gráfico de cinética de fractura, tamaño de partícula (μm) vs la función selección específica (ton/kWh).

Para el 60% de nivel de llenado de bolas, a un 40% de sólidos, y las tres velocidades tangenciales (6.5, 9.6 y 10.5 m/s), las cuales corresponden a 60%B;40%S;6.5Vtan, 60%B;40%S;9.6Vtan, 60%B;40%S;10.5Vtan, se obtuvieron las velocidades de rompimiento de la Figura 56. Las velocidades de rompimiento fueron de $0.000969 \text{ min}^{-1}$, $0.000922861 \text{ min}^{-1}$ y $0.000799028 \text{ min}^{-1}$, correspondientemente. Se presenta un efecto igual que la anterior.

Para el 60% de nivel de llenado de bolas, 45% de sólidos y las tres velocidades tangenciales (6.5, 9.6 y 10.5 m/s), las cuales corresponden a 60%B;45%S;6.5Vtan, 60%B;45%S;9.6Vtan, 60%B;45%S;10.5Vtan; se obtuvieron las velocidades de rompimiento de la Figura 57. Las velocidades de rompimiento fueron de $0.001138567 \text{ min}^{-1}$, $0.000939787 \text{ min}^{-1}$ y $0.001070743 \text{ min}^{-1}$, correspondientemente. Se observa un efecto ligeramente igual a la primera campaña (Figura 52 y Figura 53).

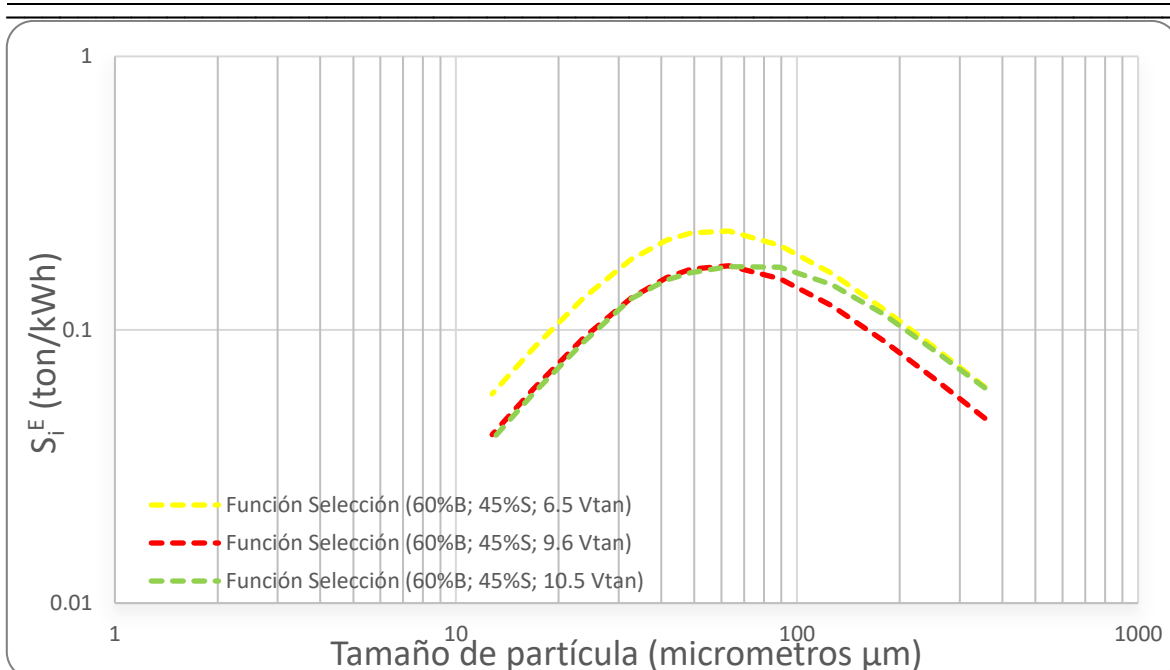


Figura 56.- Gráfico de cinética de fractura, tamaño de partícula (μm) vs la función selección específica (ton/kWh).

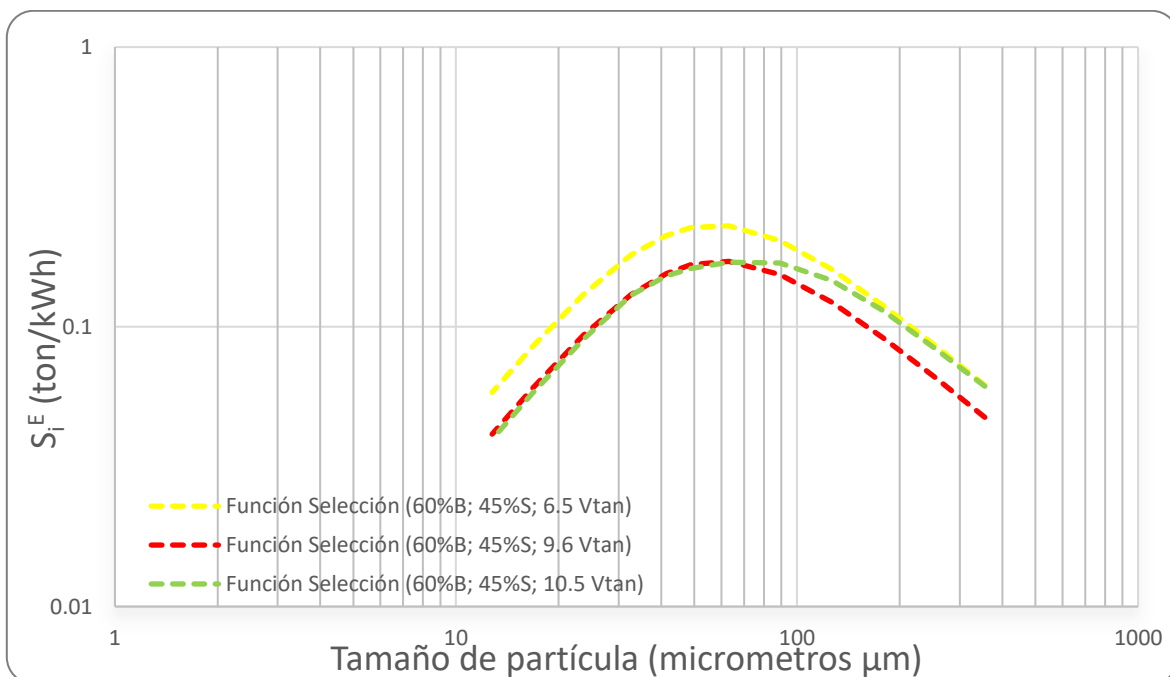


Figura 57.- Gráfico de cinética de fractura, tamaño de partícula (μm) vs la función selección específica (ton/kWh).

VI.3.2. Evaluación del rendimiento y condiciones de operación

VI.3.2.1. Evaluación de la Energía específica

Como se mostró en la sección de caracterización metalúrgica, la energía específica, es inversamente proporcional al P_{80} , esto hace que un mayor consumo de energía específica contribuya a la descarga de un producto más fino (Figura 58).

En la Figura 58 se muestra cómo, al aumentar la energía específica se produce un producto más fino. Lo que se busca en la operación en planta es la producción de material fino, y específicamente en la planta de Piritas de Fresnillo, de un P_{80} de 22 μm , por lo que se evaluaron las mejores condiciones a 45% de sólidos. Evaluando la energía específica mejor aprovechada de operación en planta, aparentemente las mejores condiciones son: 60% de nivel de llenado de bolas y velocidad tangencial de 9.6 m/s, las cuales presenta un P_{80} de 21.32 μm y 17.82 kWh/ton de energía específica; que, en contraste, es más baja que la otra condición: 50% de nivel de llenado de bolas, 10.5 m/s de velocidad tangencial, P_{80} de 23.34 μm y energía específica de 19.05; siendo una diferencia en la energía específica de 1.23 kWh/ton.

Evaluando los requerimientos de planta, y considerando que los componentes internos tienen un mayor desgaste con 60% de nivel de llenado de bolas, la condición óptima de trabajo es con 50% de nivel de llenado de bolas con un 45% de sólidos a una velocidad tangencial de 10.5 m/s.

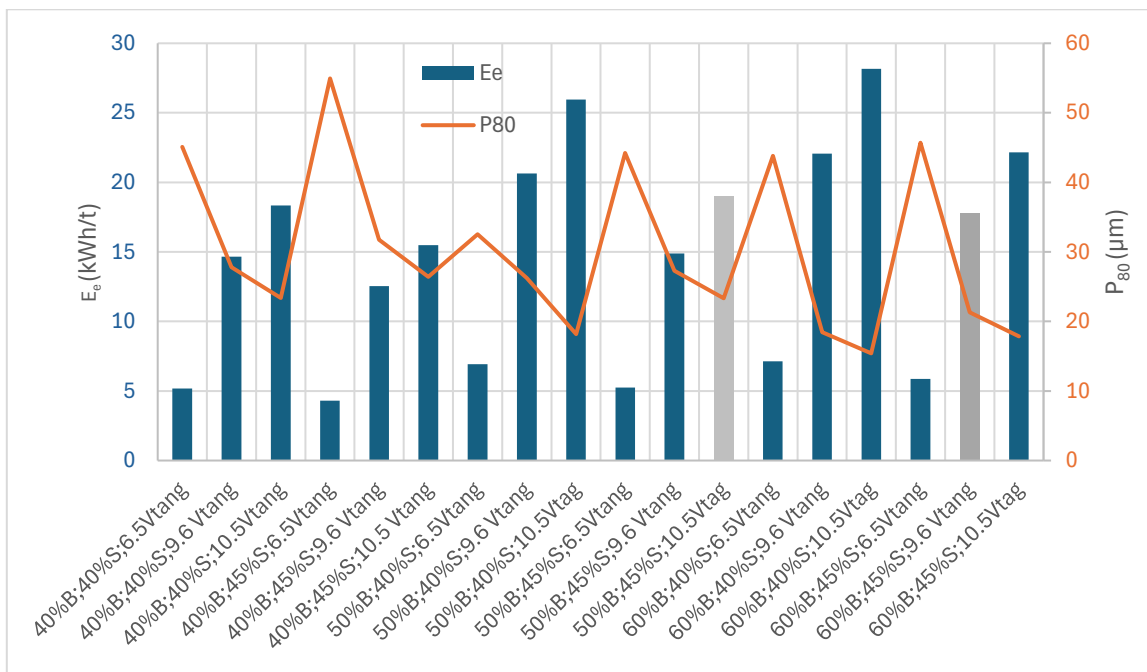


Figura 58.- Gráfico donde se muestra la variación de la energía específica y el P_{80} a cada condición de muestreo.

VI.3.2.2. Evaluación de la cinética de fractura

Se mostró que, la tendencia de la cinética de fractura es que conforme más fino sea el producto, decrece la velocidad para la generación del producto. En la Figura 59 se muestra un gráfico de doble eje donde se presentan las campañas y la velocidad de fractura en condición del parámetro α_0 (min^{-1}) obtenido de la resolución del balance poblacional vs el P_{80} .

En el gráfico se observa una ligera variación de la velocidad de fractura, disminuyendo para la velocidad tangencial de 9.6 m/s y aumentando ligeramente para 10.5 m/s con 40% de nivel de llenado de bolas para 40% y 45% de sólidos, y a 60% de nivel de llenado de bolas con 45% de sólidos. Este fenómeno puede deberse a que aumenta la fricción en la velocidad de 10.5 m/s entre bola-partícula.

La condición más rápida para producir un P_{80} próximo a las 22 μm es de 60% de nivel de llenado de bolas y 9.6 m/s de velocidad tangencial. Sin embargo, la condición de 50% de nivel de llenado de bolas y 10.5 m/s de velocidad tangencial, aunque es 51.42% de la velocidad de la primera condición muestreada, es la óptima en lo referente al desgaste de los componentes internos del molino.

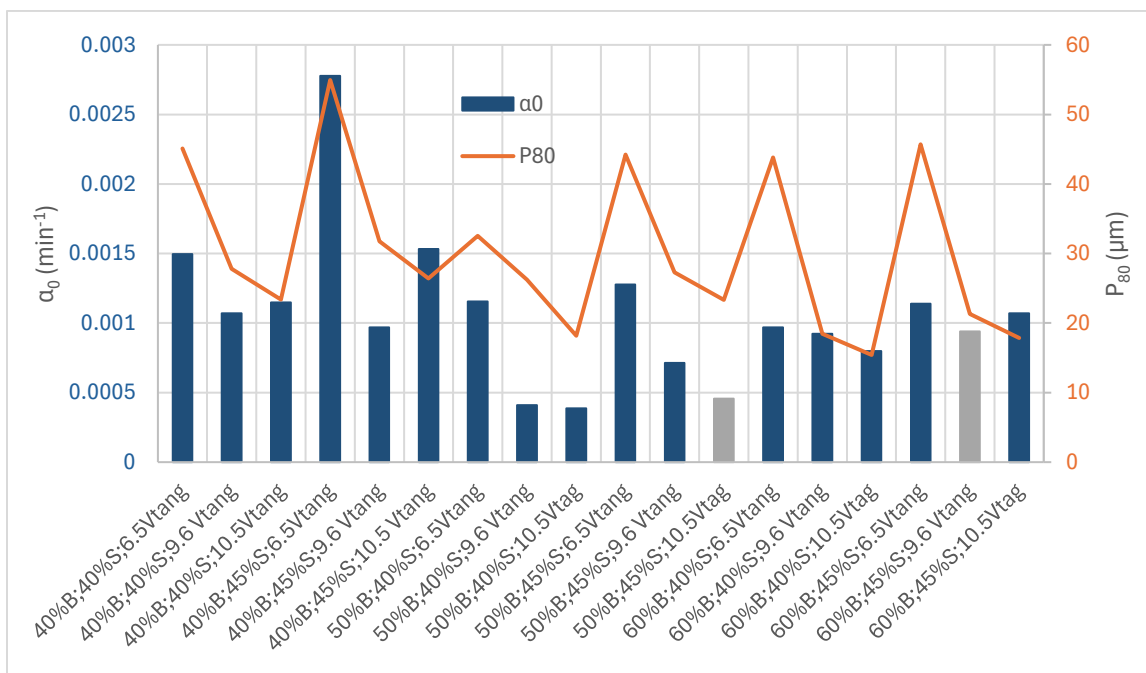


Figura 59.- Gráfico donde se muestra la variación de la velocidad de fractura y el P_{80} a cada condición de muestreo.

Bajo las condiciones y habiendo hecho el análisis correspondiente de todos los parámetros que influyen en la molienda ultrafina vertical, se encontró que, mediante simulaciones considerando el modelo de potencia y el balance poblacional, para obtener un P_{80} de 23 μm (tamaño relativo de liberación $\pm 1 \mu\text{m}$), los parámetros de operación para este molino serán como se muestran en la Tabla 17.

Tabla 17.- Simulación para la optimización del HIGmill de planta Piritas, de Fresnillo PLC.

Simulaciones	Nivel de llenado de bola	Flujo de Alimentación	Porcentaje de sólidos	Velocidad tangencial	Potencia	F_{80}	P_{80}
#	%	m^3/h	%	m/s	(kWh)	μm	μm
Simulación	56	100.0	49.0	10.5	1393.4	84.1	23.0

VII. Conclusiones

En el presente trabajo se estudió un modelo de potencia acoplado a un balance poblacional aplicado a la tecnología HIGmill de escala industrial y, se demostró que puede ser aplicable para evaluar las condiciones operativas del molino.

- ▲ El modelo de potencia predice de manera adecuada los valores experimentales, con un R^2 de 0.9255, al correlacionar los datos experimentales contra los modelados.
- ▲ El modelo de balance poblacional predice de manera adecuada las fracciones de tamaño que representa al análisis granulométrico. Esto debido a que el modelo de SSE tiene una media de 0.71 para todos los muestreos.
- ▲ Los P_{80} más bajos para cada una de las campañas son resultado de una velocidad tangencial (m/s) más alta.
- ▲ Se encontró que la velocidad tangencial (m/s) es el parámetro que tiene un mayor efecto sobre el molino. Cabe mencionar que esta depende de las velocidades de deslizamiento y las velocidades de ascenso, las cuales tienen un efecto significativo en la molienda.
- ▲ De acuerdo con el análisis realizado de los datos en planta, la mejor condición durante el muestreo fue de 50% de nivel de llenado de bola, 45% de sólidos y 10.5 de velocidad tangencial. Sin embargo, al realizar una simulación, se proponen las condiciones que se muestran en la Tabla 17.
- ▲ Se encontró que a una temperatura mayor a 29.09 °C se obtiene un producto de P_{80} de 23.34 μm , a excepción del muestro de 60% de nivel de bola con 40% de sólidos y una velocidad tangencial de 6.5 m/s.
- ▲ Debido a que existen factores como viscosidad, gravedad específica de las partículas, geometría del rotor, dureza y tamaño de bola, se necesitan más estudios para entender la hidrodinámica e interacción de estos factores.

Bibliografía

Austin G. L. y Concha A. F. (1994). Diseño y simulación de circuitos de molienda y clasificación. CYTED, Programa iberoamericano de ciencia y tecnología para el desarrollo.

Altun, O., Darılmaz, Ö., Karahan, E., Sert, T., Altun, D., Toprak, A., Hür, A. (2023). Understanding HIGMill operation at copper regrind application; operating parameters, wear and mineral liberation. *Minerals Engineering*, **191**, 107964. <https://doi.org/10.1016/j.mineng.2022.107964>

Anderson, G., y Bandarian, P. (2019). Improving IsaMill™ energy efficiency through shaft spacer design. *Minerals Engineering*, **132**, 211-219. <https://doi.org/10.1016/j.mineng.2018.12.018>

Aragón Piña A. (2021). Técnicas de caracterización y procedimientos empleados en la mineralogía aplicada al beneficio de minerales. Editorial Ibukku.

Askeland, D. R. (1998). Ciencia e ingeniería de materiales (3a ed.). México DF: International Thomson Editores S.A. de C.V.

Bond, F.C. (1961). Crushing and grinding calculations. *Brit. Chem. Eng. Part I* **6** (6), 378-385 *Part II* **6** (8) 543-548.

Bwalya, M.M., Moys, M.H., Hinde, A.L. (2001). The use of discrete element method and fracture mechanics to improve grinding rate prediction. *Miner. Eng.* **14** (6), 565-573.

Can, M., & Altun, O. (2023). Performance Comparison of the Vertical and Horizontal Oriented Stirred Mill: Pilot Scale IsaMill vs. Full-Scale HIGMill. *Minerals*, **13**(3), 315. <https://doi.org/10.3390/min13030315>

Cámara Minera de México (CAMIMEX). (2023). Información general 2023 [Archivo PDF]. <https://www.camimex.org.mx/index.php/publicaciones/informe-anual/informe/104>

Charles, R. J. 1957. Energy-size reduction relationships in comminution. *Transactions of the AIME* **208**:80–88.

Crowe, C. T., Elger, D. F., y Williams, W. C. (2001). "Engineering Fluid Mechanics." John Wiley & Sons.

Delgadillo Gómez, J. A. (2001). Simulación y optimización del circuito de molienda y clasificación en un circuito de concentración de Fe₃O₄, eliminaciones de SiO₂ en

el concentrado final de Fe_3O_4 . [Tesis de Maestría]. Universidad Autónoma de San Luis Potosí, México.

Delgadillo, JA y Rajamani, RK (2009). Predicción computacional de dinámica de fluidos del núcleo de aire en hidrociclones. Revista internacional de dinámica de fluidos computacional, 23 (2), 189–197.
<https://doi.org/10.1080/10618560902724893>

Dunne, R., Morrell, Stephen, Lane, Greg. (2000). Design of the biggest mill in the world.

Erb, H., van de Vijfeijken, M., Hanuman, Y., Rule, C.M., Swart, W.C.E., Lehto, H. and Keikkala V. (20-24 de septiembre de 2015) . An initial review of the metallurgical performance of the HIGmill in a primary milling application in the hard rock mining industry. [Presentación de conferencia]. SAG CONFERENCE, Vancouver Canadá.

FLSMidth® Tower Mill. (s. f.). FLSmidth. <https://www.flsmidth.com/en-gb/products/milling-and-grinding/flsmidth-tower-mill>

Fuerstenau, M. C. and Han, K. N. (2003). Principles of mineral processing. SME.

Gao, M. W., y Weller, K. R. (1994). A comparison of tumbling mills and stirred ball mills for wet grinding. Australia.

Gao, M.-W., Forssberg, K. S. E., y Weller, K. R. (1996). Power predictions for a pilot scale stirred ball mill. International Journal of Mineral Processing, 44-45, 641–652.
[https://doi.org/10.1016/0301-7516\(95\)00072-0](https://doi.org/10.1016/0301-7516(95)00072-0)

Griffith, A. A. (1920) Phenomena of rupture and flow in solids, Phil. Trans. Roy. Soc. (London).

Gupta A. and Yan D. (2016). Mineral Processing Design and Operations, An Introduction. Second Edition. Elsevier B.V.

Hassall, P., Nonnet, E., Keikkala, V., Komminaho, T., & Kotila, L. (2016). Ceramic bead behavior in ultra fine grinding mills. Minerals Engineering, 98, 232–239.
<https://doi.org/10.1016/j.mineng.2016.08.016>

Heath, A., Keikkala, V., Paz, A., Lehto, H. (2017). A power model for fine grinding HIGmills with castellated rotors. Minerals Engineering, 103-104, 25-32.
<https://doi.org/10.1016/j.mineng.2016.07.017>

Herbst, J.A., Fuerstenau, D.W., (1968). The zero order production of fine sizes in comminution and its implication in simulation. Trans. Am. Inst. Min. Eng. 241 (1968), 538–549.

Herbst, J.A., Fuerstenau, D.W., (1973). Mathematical simulation of dry ball milling using specific power information. Trans. SME – AIME 254, 343–348.

Herbst, J., y Fuerstenau, D. . (1980). Scale-up procedure for continuous grinding mill design using population balance models. International Journal of Mineral Processing, 7(1), 1–31.

Herbst, J.A., Rajamani, R.K., Mular, A.L., Jergensen, G.V., (1982). Developing a Simulator for Ball Mill 1986 Scale-Up: A Case Study. Design and Installation of Comminution Circuit. AIME, New York, pp. 325–345.

Herbst, J. A., y Lo, Y. C. (1996). Financial implications of comminution system optimization. International Journal of Mineral Processing, 44-45, 209–221.

Hukki, R.T. 1961. Proposal for a Solomonian settlement between the theories of von Rittinger, Kick and Bond. Transactions of SME–AIME 220:403–408.

Junnola J. (2013) Basic testwork with the Outotec pilot HIGmill [Tesis de maestría]. Oulun Yliopisto University of Oulu, Finlandia.

Keikkala, V., Paz, A., Komminaho, T., Lehto, H., & Loucas, J. (2018). Energy efficient rotor design for HIGmills. *Minerals Engineering*, 128, 266-274. <https://doi.org/10.1016/j.mineng.2018.08.035>

Kick F. (1885). Das Gesetz der Proportionalen Widerstande und Seine Anwendung. Leipzig, Deutschland. Arthur Felix.

King, R. P., Schneider, C. L., & King, E. A. (2012). Modeling and simulation of mineral processing systems (2nd ed.). Society for Mining, Metallurgy, and Exploration.

Kwade A. (1999). Wet comminution in stirred media mills – research and practical application. Powder technology (105) 14-20.

Kwade, A. y Schewdes, J.. (2007). *Handbook of Powder Technology*. Elsevier Science B.V., pp. 251-382.

Larsson, S., Prieto, J. M. R., Heiskari, H., y Jonsén, P. (2021). A Novel Particle-Based Approach for Modeling a Wet Vertical Stirred Media Mill. *Minerals*, 11(1), 55. <https://doi.org/10.3390/min11010055>

Letho H., Paz A., Roitto I., Asthol A. (16-19 de abril de 2013). Outotec HIGmills; A Fine Grinding Technology. [Memorias de congreso]. 23rd International Mining Congress & Exhibition of Turkey, Antalya, Turquía.

Lehto, H., Musuku Benjamin, Keikkala, V., Kurki, P., y Paz, A. (2016). Developments in stirred media milling testwork and industrial scale performance of Outotec HIGmill. [Presentación escrita]. Comminution '16, Cape Town, South Africa

Luckie, P. T. and Austin, L. G.. (1972). A review introduction to the solution to the grinding equation by digital computation. Mineral Sci. Eng 4, 24-51.

Magdalena, Ricardo; Valero, Alicia; Palacios, Jose-Luis; and Valero, Antonio (2021) "Mining energy consumption as a function of ore grade decline: the case of lead and zinc," Journal of Sustainable Mining: Vol. 20 : Iss. 2 , Article 5.

Mannheim, V., Simenfalvi, Z.. (2012). Determination of power consumption for suspension mixing in stirring equipments (sic) and stirred ball mills. J. Mater. Sci. Eng. A 2 (7), 572–578.

Mezquita, H., Wright, A., Wang, F, Rosario, P. (18-20 de enero de 2022). Implementation of fine grinding and dual circuit concept at Santa Elena Mine. [Presentación en conferencia]. The Canadian Mineral Processors (CMP) 54th annual Canadian Mineral Processors Operators Conference, Ottawa, Canadá.

Molienda ultrafina. (s. f.).
<https://www.glencoretechnology.com/es/technologies/albionprocess/about/ultrafine-grinding>

Nomura, S., Hosoda, K., Tanaka, T., (1991). An analysis of the selection function for mills using balls as grinding media. Powder Technol. 68, 1.

Palaniandy, S. (2015). Impact of mechanochemical effect on chalcopyrite leaching. International Journal Of Mineral Processing, 136, 56-65.
<https://doi.org/10.1016/j.minpro.2014.10.005>

Paz, A., Ypelaan, C., Ryan, T., y McInns (23-25 de junio de 2021). The application of ultra fine grinding for Sunrise Dam Gold Mine. [Presentación en conferencia]. Mill Operator Conference 2021, Brisbane, Queensland, Australia.

Pitt, M.J. (2000) The Marsh Funnel and Drilling Fluid Viscosity: A New Equation for Field Use. SPE Drilling & Completion, 15, 3-6.

Radziszewski, P., y Allen, J. (2014). Towards better understanding of stirred milling technologies - Estimating power consumption and energy use. 46th Annual Canadian Mineral Processors Operators Conference. Ottawa, Ontario.

Reid, K. J. (1965). A solution to the batch grinding equation. Chemical Engineering Science. Vol. 20, pp. 953-963.

Rittinger, P.R. (1867). *Lehuerbuch der Aufbereitungskunde*. Ernst.

Rosales-Marín, G., Andrade, J., Alvarado, G., Delgadillo, J. A., and Tuzcu, E. T. (2019). Study of lifter wear and breakage rates for different lifter geometries in tumbling mill: Experimental and simulation analysis using population balance model. *Minerals Engineering*. 141.

Shi, F., Morrison, R., Cervellin, A., Burns, F., y Musa, F. (2009). Comparison of energy efficiency between ball mills and stirred mills in coarse grinding. *Minerals Engineering*, 22(7-8), 673–680.

Skelland, A. H. P. (1967). Asymptotic Rates of Heat or Mass Transfer in Non-Newtonian Laminar Flow. *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*. 6 (1), 148-151.

<https://doi.org/10.1021/i160021a028>

Stief, D. E., Lawruk, W. A., y Wilson, L. J. (1987). Tower mill and its application to fine grinding. *Mining, Metallurgy & Exploration*, 4(1), 45–50.

Stirred Media Detritors (SMD) - Metso. (s. f.). Metso. <https://www.metso.com/portfolio/smd-series/>

Tavares, L. M. (21-24 de septiembre de 2014). Advanced Modeling of Crushing and Grinding. [Presentación]. International Mineral Engineer Congress 2014

Tavares, L.M., Carvalho, R.M.. (2009). Modeling breakage rates of coarse particles in ball mills. *Miner. Eng.* 22 (7-8), 650–659.

Tuzcu, E.T., Rajamani, R.K.. (2011). Modeling breakage rates in mills with impact energy spectra and ultra fast load cell data. *Miner. Eng.* 24, 252–260.

Urias Gracia (12-14 de octubre de 2022). Desarrollo de un circuito de flotación: impacto de mineralogías complicadas, un caso de estudio. [Memorias de presentación de conferencia]. XX Encuentro Sobre Procesamiento de Minerales San Luis Potosí, S.L.P.

Vertimill®-Metso. (s.f.b). Metso. <https://www.metso.com/es/portafolio/vertimill/>

Vogel, L., Peukert, W.. (2003). Breakage behaviour of different materials- construction of a mastercurve for the breakage probability. *Powder Technol.* 129, 101–110.

VXPMill for fine & ultra fine grinding | FLSmidth. (s. f.). FLSmidth. <https://www.flsmidth.com/en-gb/products/milling-and-grinding/vxpmill>

Walker W.H., Lewis W.K., Gilliland, E.R. (1937). Principles of Chemical Engineering. McGrawHill Company.

Wang, Y., y Forssberg, E. (2007). Enhancement of energy efficiency for mechanical production of fine and ultra-fine particles in comminution. China Particuology, 5(3), 193–20. doi:10.1016/j.cpart.2007.04.003

Warman International LTD. (1997). Cyclosizer instruction manual. Bulletin WCS/2.

Wills Barry A. (2016). Wills' Mineral Processing Technology An Introduction to the Practical Aspects of Ore Treatment and Mineral Recovery.