



Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Facultad de Ingeniería
Centro de Investigación y Estudios de Posgrado

Diseño Analítico del Máximo Decaimiento Exponencial para una Clase de Sistemas con Retardo vía Controladores PI

T E S I S

Que para obtener el grado de:

Maestro en Ingeniería Eléctrica

Presenta:

Ing. Juan Diego Torres García

Asesor:

Dr. César Fernando Méndez Barrios

Co-asesor:

Dr. Adrián René Ramírez López





UASLP
Universidad Autónoma
de San Luis Potosí



FACULTAD DE
INGENIERÍA

20 de mayo de 2021

ING. JUAN DIEGO TORRES GARCÍA
P R E S E N T E.

En atención a su solicitud de Temario, presentada por los **Dres. César Fernando Francisco Méndez Barrios y Adrián René Ramírez López**, Asesor y Coasesor de la Tesis que desarrollará Usted con el objeto de obtener el Grado de **Maestro en Ingeniería Eléctrica**, me es grato comunicarle que en la sesión del H. Consejo Técnico Consultivo celebrada el día 20 de mayo del presente, fue aprobado el Temario propuesto:

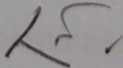
TEMARIO:

"Diseño Analítico del Máximo Decaimiento Exponencial para una Clase de Sistemas con Retardo vía Controladores PI"

1. Introducción.
 2. Fundamentos matemáticos.
 3. Diseño del máximo decaimiento exponencial.
 4. Fragilidad del controlador.
 5. Verificación experimental.
 6. Conclusiones y trabajo a futuro.
- Referencias.

"MODOS ET CUNCTARUM RERUM MENSURAS AUDEBO"

A T E N T A M E N T E


DR. EMILIO JORGE GONZÁLEZ GALVÁN
DIRECTOR

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE SAN LUIS POTOSÍ
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIRECCIÓN

www.uaslp.mx

Av. Manuel Nava 8.
Zona Universitaria • CP 78290
San Luis Potosí, S.L.P.
tel. (444) 826 2330 al39
fax (444) 826 2336

Copia. Archivo.
*etn.

Dedicatoria

Un padre es como un amigo, un guía y un maestro, todo en uno. Por eso quiero dedicar primeramente esta tesis a mi padre Juan, quien tuvo que partir de este mundo sin poder ver la culminación de mi trabajo. Mi padre fue para mí siempre fuente de inspiración, nunca dejó de creer en mí, y yo nunca dejé de creer en él, la vida no me alcanzaría para contar todas las cosas que él hizo por mí, todo lo que me dejó, y toda la falta que me hace ahora que no está. Allá, donde quiera que se encuentre, espero pueda sentirse orgulloso del hombre que dejó atrás y a quien llamó hijo.

Quiero también dedicar esta tesis a mi familia, a mi hermano Alex y a madre Maricarmen, junto a quienes he luchado y soportado momentos difíciles, y a quienes debo, junto a mi padre, el hombre en que me he convertido. También a mi segunda madre, mi tía Marilú, quien además de siempre creer en mí y mostrar su orgullo por quien soy, me regaló dos hermanos más, Chucho y Viri, quienes han estado junto a mí siempre y con quienes estaré siempre agradecido.

Por último, quiero dedicar mi trabajo a quien ha aceptado ya convertirse en mi compañera por el resto de mi vida, mi novia Ceci, quien me ha hecho crecer infinitamente desde que entró a mi vida, quien ha sido para mí amiga, compañera y confidente, quien ha sabido ser fuente de inspiración, de apoyo y de amor, y con quien estaré eternamente agradecido por enseñarme a disfrutar la vida sin dejar de ser quien soy.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres María del Carmen y Juan y a mi hermano Alejandro por todo el apoyo mostrado desde el principio de mi formación, por siempre impulsarme a seguir adelante y nunca permitir que me rindiera sirviendo siempre como guías e inspiración.

Agradezco a mi novia y futura esposa Cecilia por el apoyo incondicional mostrado siempre, por el aliento y por nunca dejar de creer en mí.

Agradezco al doctor César Méndez Barrios por siempre apoyarme, y por contribuir tan fuertemente en mi formación tanto académica como personal. Al doctor Adrián Ramírez por los consejos y su guía a lo largo del desarrollo de esta tesis.

Agradezco a toda la planta de profesores del Posgrado en Ingeniería Eléctrica por contribuir con mi formación, muy en particular agradezco al doctor Raúl Balderas por los consejos, apoyo y explicaciones dadas a lo largo de todo mi proceso.

Agradezco también a mis compañeros, quienes me sirvieron siempre de ejemplo y compañía al momento de estudiar y trabajar.

Agradezco al Concejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico brindado, sin el cual este proyecto no hubiera sido posible, así como también agradezco a la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, y en particular a la Facultad de Ingeniería, en cuyas instalaciones este trabajo fue desarrollado.

Resumen

Esta tesis se enfoca en la caracterización y diseño del máximo decaimiento exponencial para una clase de sistemas lineales de primer orden con un retardo y en lazo cerrado con un controlador proporcional integral (PI). De manera más precisa, mediante un análisis espectral, se desarrolla una técnica de sintonización puramente analítica para los parámetros del controlador, con la cual las trayectorias del sistema en lazo cerrado alcanzan el máximo decaimiento exponencial posible. Con este objetivo, la técnica propuesta utiliza el concepto de σ —estabilidad, el cual cuantifica el desempeño del lazo de control en términos de su habilidad para responder a comandos de control tan rápido como sea posible.

Se introducen dos conceptos que sostienen la metodología propuesta, a saber, la contracción y el colapso del dominio de estabilidad asociado al sistema en lazo cerrado. El primer concepto está relacionado con un movimiento invariante de las hiper-superficies que “encierran” al dominio de estabilidad. El segundo concepto afirma la existencia de una cota superior para el decaimiento exponencial de las soluciones del lazo de control. Cabe mencionar que el problema bajo estudio no es nuevo. Sin embargo, de acuerdo a nuestro conocimiento, no existen en la literatura resultados similares a los desarrollos analíticos obtenidos en este trabajo de tesis.

Finalmente, los resultados obtenidos se corroboran de manera numérica y experimental. En la vertiente experimental, se emplea la técnica de sintonización desarrollada en esta tesis para mejorar el desempeño de un sistema multiagente compuesto por dos robots diferenciales realizando una tarea de seguimiento de trayectoria. Adicionalmente, se presenta un análisis de fragilidad del controlador, sintonizado para dotar al sistema con el máximo decaimiento exponencial, con el objetivo de garantizar la realizabilidad del mismo en una aplicación real.

Abstract

This thesis presents the characterization and design of the maximum exponential decay for a class of first-order linear single-delay systems subject to a PI controller. More precisely, an analytical tuning technique for the parameters of the controller is developed using spectral analysis, with which the trajectories of the closed-loop system are guaranteed to attain their maximum exponential decay rate. With this aim, the proposed technique uses the concept of σ -stability, which quantifies the performance of the control loop in terms of its ability to respond to control commands as fast as possible.

For the proposed methodology, two main concepts are established, namely, the shrinking and the collapse of the stability domain associated with the closed-loop system. The former concept is related with an invariant movement of the hyper-surfaces enclosing the stability domain. The latter concept claims the existence of an upper bound for the exponential decay of the closed-loop system solutions. It is worthy of mention that the problem under investigation is not new. However, to our best knowledge, there are no similar results in the open literature that can compare with the analytical developments proposed in this thesis work.

Finally, the obtained results are verified via numerical simulations and experiments. On the experimental side, the tuning technique developed on this thesis is implemented to improve the performance of a multi-agent system composed by two differential drive robots executing a trajectory following task. In addition, a fragility analysis is presented with the main objective of guaranteeing a realizable controller in the real world.

Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	III
Resumen	V
Abstract	VII
1 Introducción	1
1.1 Estado del arte	1
1.2 Objetivo general de la tesis	5
1.2.1 Objetivos particulares de la tesis	5
1.3 Estructura de la tesis	5
2 Fundamentos matemáticos	7
2.1 Nociones básicas de sistemas con retardos	7
2.2 Soluciones de DDE del tipo retardado	9
2.2.1 Existencia y unicidad de las soluciones	9
2.2.2 Los cuasipolinomios	10
2.2.3 Estabilidad. Caso de sistemas retardados	10
2.2.4 σ –estabilidad	11
2.2.5 Continuidad de las raíces	11
2.3 Mapas de estabilidad	15
2.3.1 Curvas de cruce de estabilidad y puntos de cruce	15
2.3.2 Método de las $\mathcal{D}$ –particiones	16
3 Diseño del máximo decaimiento exponencial	19
3.1 Sistema	19
3.2 Descomposición del plano de los parámetros	21
3.2.1 Tangentes y suavidad de la curva de cruce de estabilidad	22
3.2.2 Direcciones de cruce	24
3.3 Colapso de la región de estabilidad	25
3.4 Resultado principal: el máximo decaimiento exponencial	33
3.5 Ejemplos numéricos	36

3.5.1	Caso estable en lazo abierto.	37
3.5.2	Caso inestable en lazo abierto	39
4	Fragilidad del controlador	41
4.0.1	Ejemplo motivacional	42
4.0.2	Computo de la fragilidad	43
4.0.3	σ -fragilidad	44
4.0.4	Ejemplo ilustrativo 1	46
4.0.5	Ejemplo ilustrativo 2	47
5	Verificación experimental	49
5.1	Aplicaciones a un robot diferencial	49
6	Conclusiones y trabajo a futuro	57
6.0.1	Conclusiones	57
6.0.2	Trabajo a futuro	58
	Anexos	59

Índice de figuras

1.1	Sistema básico de control automático.	1
1.2	Sistema de control en red sujeto a los retardos relacionados con la comunicación entre las distintas partes de esta.	2
1.3	Cadena de suministros sujeta a retardos de producción, toma de decisiones y transporte.	3
2.1	Sistema con retardos y su condición inicial.	9
2.2	Región de soluciones de $P(s)$	12
2.3	Contorno $\mathcal{C}$ sobre el cual se cumple $ f(z) > g(z) $. En rojo se muestran las soluciones de $f(z)$ que pertenecen al interior del contorno, en azul se muestran las soluciones de $f(z) + g(z)$, las cuales también se ubican al interior del contorno.	12
2.4	Se muestran algunas de las raíces del polinomio $P(s)$ en el plano complejo. Las líneas en rojo indican el movimiento de estas dentro del círculo $\mathcal{C}_\ell$ con $\ell \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ conforme se aumenta la perturbación en los parámetros de P	15
2.5	$\mathcal{D}$ -particiones en el plano de los parámetros p_1 y p_2	18
3.1	Trayectorias del sistema (3.1) en lazo abierto. Se observa que ante una entrada de tipo escalón, tenemos una salida que alcanza una magnitud k , dada por la ganancia en lazo abierto, en un tiempo $t = 4T$, dictado por la constante de tiempo del sistema T . Se observa además el efecto del retardo h , ya que el sistema no tiene una repuesta sino hasta $t = h$	20
3.2	Sistema en lazo cerrado con retroalimentación unitaria en el dominio de Laplace.	20
3.3	Direcciones de cruce de las raíces. En este caso, al cruzar en dirección de la región de estabilidad en el plano de los parámetros (verde) se ganan raíces en el semiplano izquierdo, mientras al salir de la región de estabilidad (rojo) se ganan raíces en el semiplano derecho.	24
3.4	Movimiento del eje σ	25
3.5	Contracción de la región de estabilidad conforme aumenta el valor de σ . En este caso, la región azul representa un valor de σ menor al resto de las regiones dibujadas. El punto de colapso se muestra en negro.	26
3.6	Curva paramétrica $\mathcal{T}$ con fase decreciente y cruces con los ejes crecientes.	26

3.7	Autointersección de la recta $\mathcal{T}$. Dado que, según nos indica la teoría de las $\mathcal{D}$ -particiones, el atravesar la curva produce que dos raíces pasen de un lado del plano complejo al otro, este fenómeno puede generar otras regiones de estabilidad dentro del plano paramétrico, por lo que probar que estas no ocurren para la curva estudiada garantiza que la región de estabilidad es única.	27
3.8	Punto en que se encuentran las curvas paramétricas $\mathcal{T}$ y $\mathcal{C}$, se busca que la proyección de la tangente a la curva $\mathcal{C}$ con la normal a la curva $\mathcal{T}$ apunte a la región a la derecha conforme nos movemos en el sentido positivo de la curva $\mathcal{T}$, de manera que el colapso pueda ocurrir. . . .	33
3.9	Pendiente de la curva singular k_i	33
3.10	Región de estabilidad en el plano paramétrico. Se muestra el cambio en la región para diferentes valores de σ y se seleccionan 3 pares de parámetros para comparar su desempeño.	37
3.11	Región de estabilidad en el plano paramétrico. Se muestra la evolución con σ como una tercer dimensión, lo que permite apreciar el punto de colapso como un máximo con respecto a σ	38
3.12	Comparación de la salida del sistema cuando se considera un diseño óptimo del controlador, haciendo uso de el Teorema 3.1, y otros puntos que se encuentran dentro del dominio de estabilidad.	38
3.13	Localización del σ máximo para el caso del sistema (3.36)	39
3.14	Colapso de la región de estabilidad en el plano paramétrico para un sistema inestable en lazo abierto.	40
3.15	Control de la salida del sistema (3.36) mediante un PI sintonizado por medio del resultado en el Corloario 3.1	40
4.1	Fragilidad del controlador PI $\mathbf{k}^* := (k_p^*, k_i^*)$. La medida de la fragilidad del controlador $\mathbf{k}^*$ está dada por d	41
4.3	Ejemplificación de los dos casos posibles de distancia con la frontera de estabilidad.	44
4.4	Fragilidad del controlador con máximo decaimiento exponencial del sistema (4.11) (azul) y del controlador propuesto en Wang et al. (2015) (negro).	47
4.5	Fragilidad de ambos controladores respecto a la región σ -estable, para $\sigma = 0.3$. d_1 corresponde a la fragilidad del controlador $\mathbf{k}_1$, mientras que d_2 corresponde a la fragilidad de $\mathbf{k}_2$	48
5.1	Robot diferencial formado por 2 ruedas, conectadas cada una a motores de CD, y una rueda libre.	50
5.2	Regiones de estabilidad para el Robot 1	51
5.3	Regiones de estabilidad para el Robot 2	51

5.4	Salidas de velocidad controlada del Robot 1. Se muestra en azul la salida correspondiente al controlador óptimo, diseñado a partir del corolario 3.1.	53
5.5	Salidas de velocidad controlada del Robot 2. Se muestra en azul la salida correspondiente al controlador óptimo, diseñado a partir del corolario 3.1.	53
5.6	Esquema de control para el seguimiento de trayectorias de un sistema multiagente compuesto por dos robots diferenciales. En gris se muestra la contribución del controlador PI óptimo dentro del control del sistema.	54
5.7	Seguimiento de trayectorias del sistema multiagente haciendo uso del sistema de control mostrado en la Figura 5.6. En rojo y azul se muestran las trayectorias a seguir por cada uno de los agentes, mientras las líneas punteadas muestran la trayectoria real del agente sometido al algoritmo de control.	55

Índice de tablas

4.1	Fragilidad de ambos controladores.	46
4.2	σ –fragilidad de ambos controladores.	47
5.1	Ganancias calculadas a través del Corolario 3.1	52
5.2	Ganancias calculadas a través de la sintonización tipo λ	52

Lista de símbolos

$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
$\mathbb{C}$	Conjunto de los números complejos
$\mathbb{R}_+$	Conjunto de los números reales positivos
$\mathbb{Z}$	Conjunto de los números enteros
$\mathbb{Z}_+$	Conjunto de los números enteros positivos
$\mathbb{PC}$	Conjunto de las funciones continuas a trozos
$\Re$	Eje real del plano complejo
$\Im$	Eje imaginario del plano complejo
$\forall$	Cuantificador universal, se lee como <i>para todo</i>
$\exists$	Cuantificador existencial, se lee como <i>existe al menos uno</i>
$j := \sqrt{-1}$	Número imaginario
$\bar{z}$	Complejo conjugado de z
■	Final de una demostración
$\mathcal{L}$	Operador de Laplace
$\langle x, y \rangle$	Producto escalar entre los vectores x y y
$\in$	Pertenencia de conjuntos
$\setminus$	Resta de conjunto
$\text{sgn}(f)$	Función signo. Indica si el signo de f es 0, 1 o -1
$\Re(z)$	Parte real del número complejo z
$\Im(z)$	Parte imaginaria del número complejo z
s	Variable compleja de Laplace
t	Tiempo
$d(x_1, x_2)$	Función de la distancia entre dos puntos

Lista de abreviaciones

LHP	Semiplano izquierdo del plano complejo
RHP	Semiplano derecho del plano complejo
DDE	Ecuación diferencial con retardos
ODE	Ecuación diferencial ordinaria
LTI	Lineal en invariante en el tiempo
CD	Corriente directa
NCS	Sistemas de control en red

Capítulo 1

Introducción

1.1. Estado del arte

El control automático es una rama de las matemáticas y la ingeniería que se enfoca en el análisis de sistemas dinámicos para generar metodologías que permitan *imponer comportamientos deseados*. Sin el control automático, la tecnología no existiría tal como la conocemos, pues, es lo que nos permite que los sistemas actúen como deseamos, permitiendo inclusive hacer frente a diferentes problemas como son las incertidumbres paramétricas, condiciones ambientales, entre otras situaciones sobre las que no tenemos control (Doyle et al., 2013). Por esto, el control es por sobretodo una ciencia interdisciplinaria, pues de manera general requerimos únicamente de conocer tres componentes principales: el objetivo de control, el sistema de control a utilizar y la salida o resultado (Golnaraghi and Kuo, 2017). La Figura 1.1 representa de manera general un sistema de control con sus componentes básicos.

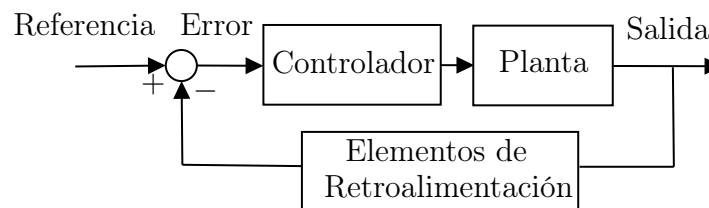


Figura 1.1: Sistema básico de control automático.

Para diseñar un controlador, requerimos primero de modelar matemáticamente el sistema a controlar. Sin embargo, debido a la naturaleza compleja de los sistemas físicos, hacemos uso de modelos simplificados, los cuales no consideran todas las variables que se encuentran verdaderamente implicadas, y por ende, el modelo utilizado es una aproximación al modelo real. Por lo general es posible controlar un sistema partiendo de un modelo simplificado del mismo, no obstante, en ocasiones es necesaria información adicional que permitan tener una mejor aproximación al comportamiento real del sistema. Si bien estos parámetros adicionales cambian de

un sistema a otro, la mayoría de los sistemas de control trabajan en presencia de lo que conocemos como *retardo* temporal (Sipahi et al., 2011), es decir, las acciones de control no ocurren de manera instantánea, sino que requieren de un cierto tiempo. Estos retardos están atribuidos a un gran número de fenómenos, desde el tiempo que toma transmitir información, tomar una decisión, hasta procesar la información recibida.

Entre los sistemas con retardo más comunes se encuentran los sistemas de control en *red* (NCS¹) (Zhang et al., 2001), pues en ellos existe un intercambio constante de información, el cual, si bien en ocasiones pareciera ser instantáneo, en la realidad el enviar, recibir y procesar información requiere de tiempo, sin importar la capacidad de cómputo con que se cuente. La Figura 1.2 ejemplifica un sistema de control en red, en el cual se transmite información entre las distintas partes de la red. Dicha información debe ser procesada para ser de utilidad para el controlador, el cual a su vez debe enviar una respuesta que permita realizar las acciones de control que eventualmente llegarán a la planta que se desea controlar.

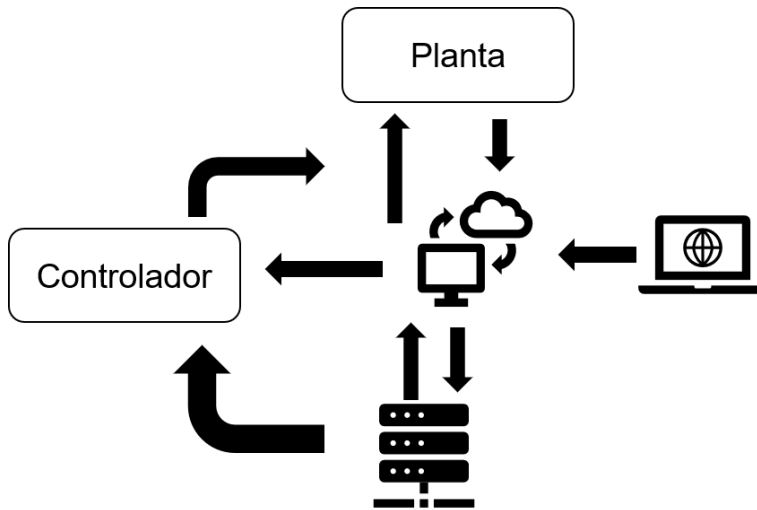


Figura 1.2: Sistema de control en red sujeto a los retardos relacionados con la comunicación entre las distintas partes de esta.

Otro ejemplo clásico de sistema con retardo es el de las cadenas de suministro (Delice and Sipahi, 2009), en donde nos encontramos con retardos procedentes de los tiempos de manufactura, el transporte y la toma de decisiones, entre otros. Estas fuentes de retardos temporales se ilustran en la Figura 1.3. Eventualmente estos retardos se pueden reflejar en pérdidas económicas que pueden llevar al sistema a situaciones complicadas, por lo que considerarlos resulta vital en el desarrollo de estrategias de control.

¹NCS: Networked Control System

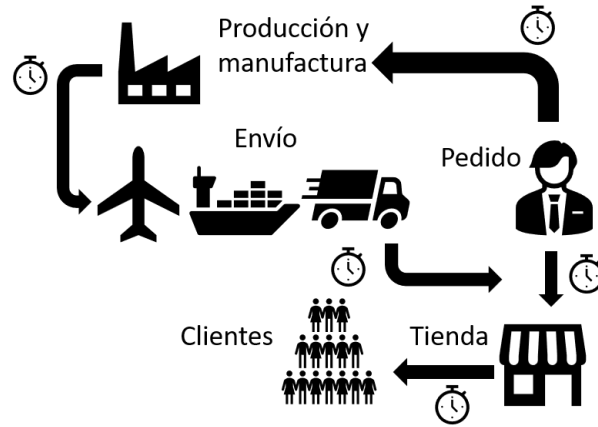


Figura 1.3: Cadena de suministros sujeta a retardos de producción, toma de decisiones y transporte.

Si bien es verdad que no siempre estos retardos han sido considerados en el diseño de controladores, existen en la literatura múltiples pruebas de como la presencia de retardos puede producir malos desempeños, oscilaciones o incluso inestabilidad (Logemann and Townley, 1996; Michiels et al., 2002; Niculescu, 2001). Por ello, el diseño de controladores que alcancen los resultados deseados de manera óptima requiere que la presencia de estos retardos sea considerada (Green, 2000; Sterman, 2002).

En este contexto, existen múltiples estudios de estabilidad en sistemas con retardos que, por lo general, están basados en dos enfoques. Por un lado, existen trabajos donde el retardo es considerado un parámetro controlado, y se busca sintonizarlo para obtener la mejor respuesta posible. Con este énfasis destacan: Ramírez et al. (2015), Ramírez et al. (2017), Hernández-Diez et al. (2019), entre otros. Por otro lado, se puede estudiar la estabilidad de un sistema con retardos inherentes al sistema mismo, y considerar una estrategia de control clásica, libre de retardos, algunos ejemplos que podemos remarcar son: Silva et al. (2001), Guel-Cortez et al. (2019), entre otros.

Este trabajo se enfoca en el segundo caso, en particular en el control de un sistema línea de primer orden con retardo de la forma:

$$G(s) = \frac{ke^{-hs}}{Ts + 1}.$$

El interés en esta clase de sistema está dado por la gran variedad de procesos industriales que pueden ser descritos por esta dinámica (Silva et al., 2001). El trabajo además considera el control por medio de un controlador PI. Es bien sabido que los controladores del tipo PID se presentan de manera común en la industria, en parte por su capacidad para resolver correctamente los problemas de control que se presentan, y en parte por su facilidad de implementación (da Silva et al., 2020).

En este caso nos desprendemos de la parte derivativa del controlador, debido a los problemas de amplificación de ruido de alta frecuencia asociados a este operador.

Por un lado, cabe destacar que los resultados presentados en Ramírez et al. (2015) se enfocan en casos particulares, sujetos en su mayoría a restricciones, y, si bien muchos de ellos se enfocan en sistemas de mayor orden que el estudiado en este trabajo, la solución encontrada suele tener limitaciones. El problema abordado en esta tesis destaca en su *generalidad* pues, si bien se considera un sistema de primer orden, no existe restricción alguna sobre sus parámetros, es decir, se estudia el caso general. Por otro lado, sistemas con la misma estructura que el presentado en este trabajo han sido estudiados con anterioridad. Algunos ejemplos notables se presentan a continuación:

- Silva et al. (2001) solucionan el problema de estabilizar un sistema de primer orden con retardo sujeta a un controlador del tipo PI basándose en algunos resultados clásicos en la estabilidad de ecuaciones diferenciales retardadas, como lo son Pontryagin (1955) y Cooke (1963). En este trabajo, se presenta un algoritmo que permite elegir un valor para k_p dentro de una región de estabilidad y, a partir del valor de k_p elegido, calcular el rango de valores en los que se puede elegir a k_i de manera que el sistema permanezca estable.
- Yi et al. (2012) presenta una metodología basada en la colocación de la abscisa espectral en una posición deseada del plano complejo mediante un controlador del tipo PI. Su análisis está basado en el uso de la función W de Lambert para la solución de la ecuación diferencial retardada. Adicionalmente, este trabajo presenta una extensión de su resultado al uso de controladores PID.
- Wang et al. (2015) nos muestra una solución similar a Yi et al. (2012), pues su trabajo tiene como finalidad el colocar la abscisa espectral del sistema en una posición deseada. Sin embargo, el análisis está basado en una extensión del ya conocido teorema de Hermite-Biehler.

A la luz de los trabajos mencionados queda expuesto un evidente interés por el estudio de esta clase de sistemas, pues éstos abordan temáticas relativas al problema abordado en esta tesis. Adicionalmente, es importante destacar que el problema de detectar el punto en que el sistema alcanza el máximo decaimiento exponencial, no ha sido abordado con anterioridad. Dicho problema resulta de especial interés, pues en ocasiones la presencia del retardo es inevitable, y bajo estas consideraciones, es importante contar con herramientas analíticas que permitan diseñar controladores que garanticen el máximo decaimiento exponencial de la respuesta del sistema en lazo cerrado, véase por ejemplo, (Olfati-Saber, 2005), Ramírez and Sipahi (2018b) y Ramírez and Sipahi (2018a). Otro resultado que no ha sido abordado en la literatura, para esta clase de sistemas, es el del análisis de fragilidad del controlador, el cual, como se presentará más adelante, resulta de especial interés pues ésta nos permite conocer la robustez del controlador ante variaciones en sus parámetros.

1.2. Objetivo general de la tesis

Desarrollar un método analítico, que permita diseñar controladores PI que garanticen el máximo decaimiento exponencial en sistemas de primer orden con retardo:

$$G(s) = \frac{ke^{-hs}}{Ts + 1},$$

donde $h > 0$ es el retardo, $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es la constante de tiempo del sistema y $k > 0$ es la ganancia de lazo abierto.

1.2.1. Objetivos particulares de la tesis

1. Descomposición del plano de los parámetros.
2. Caracterización del máximo decaimiento exponencial dentro del plano de los parámetros.
3. Diseño analítico de controladores PI basado en la caracterización del máximo decaimiento exponencial.
4. Validación experimental de los resultados obtenidos.

1.3. Estructura de la tesis

Los capítulos subsecuentes de la tesis están organizados de la siguiente manera:

El Capítulo 2 presenta las herramientas matemáticas utilizadas a lo largo del trabajo, así como las ideas que permiten desarrollar el enfoque propuesto.

A continuación, el capítulo 3 describe el sistema y controlador a analizar. En este capítulo el plano de los parámetros (k_p, k_i) es estudiado a través del método de las $\mathcal{D}$ -particiones, y mediante un análisis geométrico de la región de estabilidad se localiza el punto en el cual se encuentra el máximo decaimiento exponencial, llevando así a reglas de sintonización que permiten alcanzar dicho desempeño. Posteriormente, dentro de este mismo capítulo, se verifica el resultado por medio de ejemplos numéricos, en los cuales se considera tanto una planta estable en lazo abierto, como el caso de un sistema inestable en lazo abierto.

El Capítulo 4 aborda el problema de la fragilidad del controlador, es decir, en éste se estudia la robustez con respecto a incertidumbres presentes en las ganancias de control.

Por último, el Capítulo 5 presenta una verificación experimental del controlador diseñado. En éste, se consideran motores de CD, los cuales son parte de un robot de tipo diferencial. Un esquema de control que permite seguir trayectorias de un sistema multiagente, compuesto por dos de estos robots, es presentado. Dicho esquema de

control, hace uso de la ley de control diseñada en este trabajo para su correcto funcionamiento.

Capítulo 2

Fundamentos matemáticos

En general, las ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE¹) son la herramienta fundamental a la que se recurre con la finalidad de *capturar* la dinámica de lo que se conoce como un sistema, ya sea éste, mecánico, eléctrico, térmico, biológico, o de otra naturaleza. Al decir que se *captura* la dinámica de un sistema, nos referimos de manera general a describir los cambios que este sufre a lo largo del tiempo. Sin embargo, al hacer uso de ecuaciones de la forma:

$$\dot{x} = f(t, x(t)),$$

implicitamente se asume que la construcción de una solución, es decir, que el comportamiento futuro del sistema, depende únicamente de su *estado* actual. Si bien este tipo de ecuaciones han contribuido fuertemente en la teoría de sistemas dinámicos, en la realidad existen un sin fin de sistemas que requieren de *información adicional* para poder dar una descripción adecuada de estos, y así analizar su comportamiento ante distintas situaciones.

En particular, existen sistemas cuyas dinámicas no requieren únicamente de información presente para poder construir su solución, sino que adicionalmente, su dinámica futura se ve afectada también por sus *valores* pasados. A esta clase de sistemas se les conoce con el nombre de *sistemas con retardos* y a las ecuaciones que los describen como *ecuaciones diferenciales con retardos* (DDE²). La primer ecuación de este tipo presentada en la literatura, data de mediados del siglo dieciocho, sin embargo un estudio sistemático de estas no se presentó sino hasta principios del siglo veinte (Elsgolts and Norkin, 1973).

2.1. Nociones básicas de sistemas con retardos

Existen distintas clasificaciones para los sistemas con retardos, dentro de las más comunes se encuentran:

¹ODE: Ordinary Differential Equations.

²DDE: Delay Differential Equations

- (i) DDE de tipo retardado $\ddot{x} = a\dot{x}(t-h) + bx(t)$
- (ii) DDE de tipo neutral $\ddot{x} = a\ddot{x}(t-h) + bx(t)$
- (iii) DDE de tipo avanzado $\dot{x}(t) = x(t+h)$
- (iv) DDE con retardos distribuidos $\dot{x}(t) = \int_{-h}^0 f(t, x(y+\theta))d\theta$
- (v) DDE con retardos variantes en el tiempo $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau(t)))$

Este trabajo se encuentra enfocado en los sistemas de tipo retardado.

Algunas preguntas que podrían surgir son las siguientes:

1. si el sistema depende de tiempos en el pasado ¿cómo podemos hablar de una condición inicial?
2. a partir de un tiempo inicial t_0 ¿cómo se plantea el problema del valor inicial?

Para dar respuesta a las preguntas anteriores, es importante señalar que en la teoría de sistemas con retardos el estado inicial pertenece al espacio de funciones, y por tanto, es necesario definir el estado inicial a través de una función inicial $\varphi : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde h es el retardo asociado al sistema. En este sentido, Kharitonov (2012) presenta el problema de valor inicial para un sistema de la forma:

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t, x(t), x(t-h)), \quad (2.1)$$

considerando un instante inicial $t_0 \geq 0$ y una función inicial φ , buscamos una solución que satisfaga la siguiente condición inicial:

$$x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0]. \quad (2.2)$$

La función inicial en este caso se asume continua, o bien continua a trozos, y en general se selecciona de acuerdo con el problema que se busca solucionar. Vale la pena mencionar que el caso particular donde $t_0 = 0$ y $\varphi(t) = 0, \forall t \in [-h, 0]$ es válido, pues $\varphi \equiv 0$ pertenece al espacio de funciones continuas, a esta condición inicial se le conoce como *condición inicial trivial*. En lo sucesivo a la condición inicial trivial se le denotará por 0_h .

La Figura 2.1 ilustra la manera en que se construye una solución a partir de sus valores pasados.

El considerar una condición inicial como se acaba de describir, hace que los sistemas con retardos sean vistos como sistemas de dimensión infinita (Kharitonov, 2012). La siguiente definición ayuda a clarificar dicho concepto.

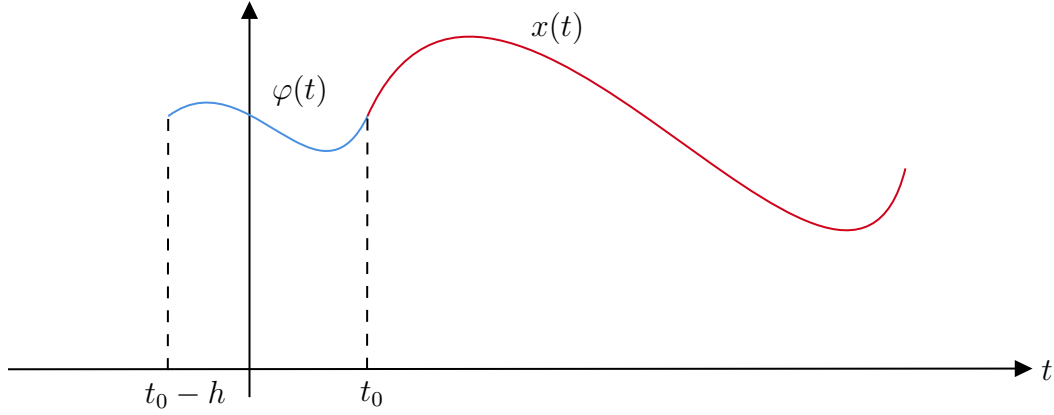


Figura 2.1: Sistema con retardos y su condición inicial.

Definición 2.1

Se dice que un sistema dinámico es finito dimensional, si para determinar una solución particular de éste, se requiere de un número finito de información. Más aún, la cardinalidad del conjunto de información requerido será la dimensión de dicho sistema. Si dicho conjunto es infinito, entonces el sistema se dice infinito dimensional.

Es importante señalar que la dimensión del sistema es independiente de su naturaleza lineal o no lineal, es decir, el sistema puede ser infinto-dimensional, lineal o no-lineal. En consecuencia, si el sistema es lineal, es posible utilizar las herramientas frecuenciales para su estudio, y por tanto, el uso de la transformada de Laplace, resultará de mucha utilidad. En las siguientes secciones se estudia el comportamiento de las soluciones de esta clase de sistemas considerando un enfoque frecuencial.

2.2. Soluciones de DDE del tipo retardado

2.2.1. Existencia y unicidad de las soluciones

Como se mencionó anteriormente, en este trabajo consideramos un sistema del tipo retardado. Existen en la literatura pruebas de la existencia y unicidad de las soluciones de esta clase de sistemas. Si bien este trabajo no aborda la prueba de este resultado, se invita al interesado a consultar la prueba en Kharitonov (2012) o Michiels and Niculescu (2007).

2.2.2. Los cuasipolinomios

Como ya fue puntualizado, los estudios en el dominio frecuencial, es decir que el sistema sea representado mediante una función de transferencia dependiente de la variable $s \in \mathbb{C}$, son posibles para los sistemas del tipo retardado. De entre las propiedades de la transformada de Laplace se considera en particular la siguiente:

$$\mathcal{L}\{x(t-h)\} = X(s)e^{-hs}.$$

Dicha propiedad, relacionada con el desplazamiento temporal, genera polinomios característicos en los sistemas de tipo retardado de la siguiente forma:

$$P(s) = F(s) + D(s)e^{-hs}. \quad (2.3)$$

A la clase particular de funciones con esta estructura se les conoce como *cuasipolinomios*, los cuales tienen como característica el llegar a presentar un número infinito de raíces, lo cual los vuelve difíciles de analizar. Una forma de simplificar su análisis, es a través de la abscisa espectral del sistema, la cual se puede definir de la siguiente manera:

Definición 2.2 (Abscisa espectral)

La abscisa espectral del sistema (2.3) se denota por $\alpha(P)$ y se define como:

$$\alpha(P) := \sup \{ \Re\{s\} : s \in \mathbb{C} \wedge P(s) = 0 \}.$$

2.2.3. Estabilidad. Caso de sistemas retardados

En esta subsección se considerarán las condiciones que definen la estabilidad en sistemas de tipo retardado. La siguiente definición considera el caso de la estabilidad exponencial.

Definición 2.3 (Estabilidad exponencial)

Sea $h > 0$ y considere el siguiente sistema lineal:

$$\dot{x} = A_0 x(t) + \sum_{j=1}^r A_j x(t-jh).$$

Entonces, se dice la solución trivial $x_0(t; t_0, 0_h)$ es exponencialmente estable si $\exists \Delta_0 > 0$, $\sigma > 0$ y $\gamma \geq 1$, tal que para $t_0 \geq 0$ y $\varphi \in \mathbb{PC}([t_0-h, t_0], \mathbb{R}^n)$ con $\|\varphi\|_h < \Delta_0$, la siguiente desigualdad se cumple:

$$\|x(t; t_0, \varphi)\| \leq \gamma \|\varphi\|_h e^{-\sigma(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Por un lado, vemos que la solución se encuentra acotada por una expresión que lleva consigo un decaimiento de tipo exponencial, caracterizado por $e^{-\sigma(t-t_0)}$, donde σ está asociado con la velocidad de dicho decaimiento.

Por otro lado, en el dominio de Laplace, esta estabilidad en sistemas lineales puede ser estudiada a partir de la localización de las raíces de la ecuación característica

$$P(s) = 0.$$

El sistema es entonces estable, si y solo si, todas las raíces se encuentran en el semiplano izquierdo (LHP³) del plano complejo. Por lo que podemos considerar alternativamente el siguiente resultado para la estabilidad exponencial:

Teorema 2.1 (Estabilidad exponencial en el dominio de Laplace)

El sistema se dice exponencialmente estable, si y solo si, todas las raíces de su ecuación característica $P(s) = 0$ se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo.

2.2.4. σ -estabilidad

Consideremos la siguiente definición para σ -estabilidad:

Definición 2.4 (σ -estabilidad)

Se dice que un sistema con función característica $P(s)$ es σ -estable, si y solo si, se cumple:

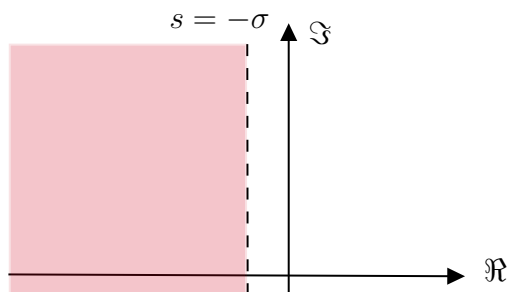
$$\alpha(P) \leq -\sigma.$$

Una metodología simple para estudiar la sigma estabilidad, consiste en trasladar el eje imaginario σ -unidades (véase, (Ogata, 2010)), es decir, realizar el cambio de variable $\hat{s} = s + \sigma$ donde σ es una constante positiva. Una vez realizado el procedimiento anterior, el análisis consiste en estudiar la estabilidad del cuasipolinomio resultante, es decir, de $P(\hat{s} - \sigma)$. La Figura 2.2 ilustra dicho concepto.

2.2.5. Continuidad de las raíces

Como se mencionó anteriormente, los sistemas con retardos tienen funciones características con la forma de cuasipolinomios, los cuales, en general, tienen un número infinito de raíces, y cuya estabilidad puede ser estudiada mediante la ubicación que tienen las raíces de estos dentro del plano complejo. Una propiedad fundamental en este estudio de estabilidad, es la de continuidad de las raíces con respecto a los parámetros, es decir: *Pequeñas variaciones en los parámetros del sistema, inducen*

³LHP:Left Half Plane

Figura 2.2: Región de soluciones de $P(s)$.

pequeñas variaciones en las raíces del mismo. Lo anterior es formalizado a continuación:

Primeramente, es importante introducir el siguiente resultado, el cual eventualmente servirá para llegar al resultado necesario para probar la continuidad de las raíces en cuasipolinomios:

Teorema 2.2 (Teorema de Rouché)

Sean $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones analíticas dentro del contorno simple cerrado $\mathcal{C}^a$. Si $|g(z)| < |f(z)|$ para toda $z \in \mathcal{C}$, entonces $f(z)$ y $f(z) + g(z)$ tienen el mismo número de ceros (incluyendo multiplicidades) dentro de $\mathcal{C}$.

^aEn variable compleja un contorno simple es aquel contorno que es diferenciable en todo punto y que no tiene auto-intersecciones.

La Figura 2.3 ilustra el Teorema de Rouché.

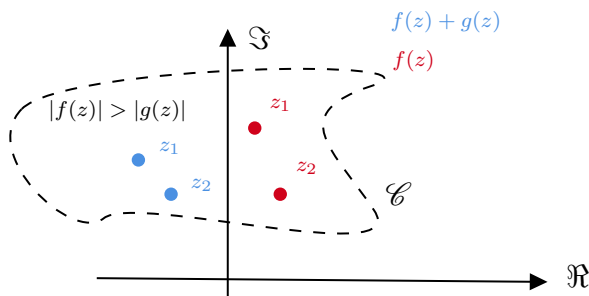


Figura 2.3: Contorno $\mathcal{C}$ sobre el cual se cumple $|f(z)| > |g(z)|$. En rojo se muestran las soluciones de $f(z)$ que pertenecen al interior del contorno, en azul se muestran las soluciones de $f(z) + g(z)$, las cuales también se ubican al interior del contorno.

Con el Teorema de Rouché en mente, consideremos el siguiente resultado:

Teorema 2.3

Sean F , D polinomios y P un cuasipolinomio definidos como:

$$\begin{aligned} P(s) &:= F(s) + D(s)e^{-hs}, \quad h \geq 0, \\ F(s) &:= f_0 + f_1s + \cdots + f_ns^n, \quad f_n \neq 0, \\ D(s) &:= d_0 + d_1s + \cdots + d_ms^m, \end{aligned}$$

donde $n > m$. Sean,

$$\begin{aligned} Q(s) &:= F_q(s) + D_q(s)e^{-hs}, \\ F_q(s) &:= (f_0 + \epsilon_0) + (f_1 + \epsilon_1)s + \cdots + (f_n + \epsilon_n)s^n, \\ D_q(s) &:= (d_0 + \delta_0) + (d_1 + \delta_1)s + \cdots + (d_m + \delta_m)s^m, \end{aligned}$$

donde $\epsilon_j, \delta_\ell \in \mathbb{R} \ \forall j \in \{0, 1, \dots, n\} \wedge \forall \ell \in \{0, 1, \dots, m\}$ tal que $f_n + \epsilon_n \neq 0$. Considérese un círculo $\mathcal{C}_k$ de radio $r_k \in \mathbb{R}_+$ y centro en $s_k \in \mathbb{C}$, la cual es raíz de $P(s)$ con multiplicidad τ_k . Asíumase además que r_k es fijo y satisface la siguiente relación:

$$0 < r_k < \min |s_k - s_j|, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, m.$$

Entonces existen números positivos ϵ y δ , donde $\epsilon > |\epsilon_i|$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $\delta > |\delta_j|$ con $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ tales que $Q(s)$ tiene exactamente τ_k ceros al interior de $\mathcal{C}_k$.

Demostración. Sea $P(s)$ definida como en el Teorema 2.3, y sea

$$\begin{aligned} R(s) &= F_r(s) + D_r(s)e^{-hs} \\ F_r(s) &= \epsilon_0 + \epsilon_1s + \cdots + \epsilon_ns^n \\ D_r(s) &= \delta_0 + \delta_1s + \cdots + \delta_ms^m \end{aligned}$$

Por un lado, dado que $P(s)$ es continua y no nula para toda s que pertenece a $\mathcal{C}_k$, podemos definir μ_k tal que

$$0 < \mu_k \leq |P(s)|$$

Por otro lado, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 |R(s)| &= |F_r(s) + D_r(s)e^{-hs}| \\
 &\leq |F_r(s)| + |D_r(s)|e^{-h\Re(s)} = \sum_{i=0}^n |\epsilon_i| |s^i| + e^{-h\Re(s)} \sum_{j=0}^m |\delta_j| |s^j| \\
 &\leq \epsilon \sum_{i=0}^n |s^i| + \delta e^{-h\Re(s)} \sum_{j=0}^m |s^j|
 \end{aligned}$$

Dado que nos encontramos en un compacto dentro del plano complejo, es decir, que $s \in \mathcal{C}_k$, existe una cota superior para $e^{-h\Re(s)}$, a la cual llamaremos γ , de modo que

$$\begin{aligned}
 \epsilon \sum_{i=0}^n |s^i| + \delta e^{-h\Re(s)} \sum_{j=0}^m |s^j| &\leq \epsilon \sum_{i=0}^n (|s - s_k| + |s_k|)^i + \delta \gamma \sum_{j=0}^m (|s - s_k| + |s_k|)^j \\
 &\leq \epsilon \sum_{i=0}^n (r_k + |s_k|)^i + \delta \gamma \sum_{j=0}^m (r_k + |s_k|)^j.
 \end{aligned}$$

Ahora consideremos $\epsilon_m = \max\{\epsilon, \delta\}$, de modo que

$$\epsilon \sum_{i=0}^n (r_k + |s_k|)^i + \delta \gamma \sum_{j=0}^m (r_k + |s_k|)^j \leq \epsilon_m \left(\sum_{i=0}^n (r_k + |s_k|)^i + \gamma \sum_{j=0}^m (r_k + |s_k|)^j \right)$$

Entonces escogiendo $\epsilon_m < \frac{\mu_k}{\sum_{i=0}^n (r_k + |s_k|)^i + \gamma \sum_{j=0}^m (r_k + |s_k|)^j}$ podemos garantizar $|P(s)| > |R(s)|$ para toda s que esté en $\mathcal{C}_k$, y por una aplicación directa del teorema de Rouché $Q(s) = P(s) + R(s)$ tiene los mismo ceros dentro de $\mathcal{C}_k$ que $P(s)$. ■

De una aplicación directa del resultado anterior se tiene el siguiente corolario:

Corolario 2.1

Sea el polinomio $P(s) = F(s) + D(s)e^{-hs}$ con raíces en $s_1, s_2, \dots, s_k$ con multiplicidades $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$, respectivamente. Entonces existen círculos $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_k$ para los cuales ante una perturbación suficientemente pequeña en sus parámetros el número de raíces de $P(s)$ en el círculo $\mathcal{C}_\ell$ es exactamente τ_ℓ con $\ell \in \{1, 2, \dots, k\}$.

El Teorema 2.3 y su corolario se ilustran en la Figura 2.4.

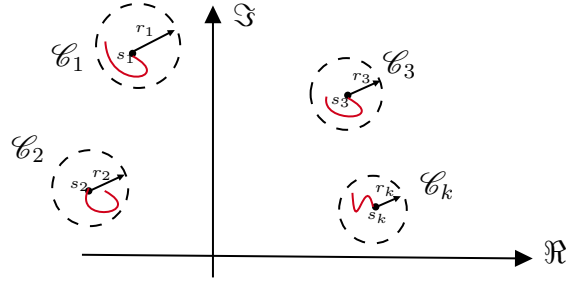


Figura 2.4: Se muestran algunas de las raíces del polinomio $P(s)$ en el plano complejo. Las líneas en rojo indican el movimiento de estas dentro del círculo $\mathcal{C}_\ell$ con $\ell \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ conforme se aumenta la perturbación en los parámetros de P .

2.3. Mapas de estabilidad

2.3.1. Curvas de cruce de estabilidad y puntos de cruce

Debido a la propiedad de continuidad de las raíces, es posible inferir que ninguna raíz pasará del lado inestable del plano complejo al lado estable del mismo, y viceversa, sin atravesar el eje imaginario, el cual hace de frontera entre la estabilidad y la inestabilidad. Esta observación permite definir lo que conocemos como *curvas de cruce de estabilidad*, las cuales proporcionan un conjunto de parámetros para los cuales existe al menos una raíz que se encuentra en la frontera marcada por el eje imaginario. Con esto en mente, consideremos entonces la siguiente definición:

Definición 2.5 (Curvas de cruce de estabilidad)

Dado la ecuación característica

$$P(s, p_1, p_2) = 0, \quad (2.4)$$

donde p_1 y p_2 son parámetros del sistema, se conoce como curva de cruce de estabilidad $\mathcal{T}$ al conjunto $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ tales que al menos un cero de (2.4) se encuentra en el eje imaginario, es decir:

$$P(j\omega, p_1, p_2) = 0, \quad \omega \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}.$$

Definición 2.6 (Puntos y frecuencias de cruce)

Se les conoce como **puntos de cruce** a los puntos $\mathcal{P} = (p_1, p_2) \in \mathcal{T}$. Nos referimos como frecuencias de cruce al conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ tal que para $s = j\omega$ con $\omega \in \Omega$ existe al menos un punto de cruce.

Nota 2.1

Para toda $\omega \in \mathbb{R}$ la siguiente igualdad se cumple:

$$P(-j\omega, p_1, p_2) = \overline{P(j\omega, p_1, p_2)}.$$

Por lo anterior, a lo largo de este trabajo consideramos únicamente valores positivos de ω , es decir $\omega \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

2.3.2. Método de las $\mathcal{D}$ -particiones

Ahora que hemos introducido las nociones de las curvas de estabilidad, es posible estudiar el método conocido como de $\mathcal{D}$ -particiones, el cual parte de la siguiente idea:

Considerando un polinomio de la forma $P(s, \mathcal{P})$, el cual es de grado n , donde $n \in \mathbb{Z}_+$ y $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^m$ es el conjunto de parámetros del polinomio $(p_1, p_2, \dots, p_m)$, para un valor fijo $\mathcal{P}^*$ existen k raíces inestables y $n - k$ raíces estables, y llamamos entonces $\mathcal{D}(k)$ al dominio al cual pertenece $\mathcal{P}^*$, de forma que $\mathcal{D}(0)$ es entonces el dominio de estabilidad (Gryazina, 2004). De este modo, el método permite *descomponer* el espacio de los parámetros en n diferentes dominios caracterizados por el número de raíces estables en su interior.

A continuación se muestra el método para el caso particular de dos parámetros reales descrito en Gryazina (2004).

Consideremos la familia de polinomios con dos parámetros

$$P(s, p_1, p_2) = \{Q(s) + p_1 D(s) + p_2 F(s), \quad p_1, p_2 \in \mathbb{R}\}$$

donde $Q(s)$, $D(s)$ y $F(s)$ son polinomios de grado n .

La curva de $\mathcal{D}$ -partición estaría entonces dada por la siguiente ecuación

$$P(j\omega, p_1, p_2) = 0$$

Resolviendo para los parámetros obtenemos lo siguiente:

$$p_1 = -\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad p_2 = -\frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{2.5}$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} U_D & U_F \\ V_D & V_F \end{vmatrix}, & \Delta_1 &= \begin{vmatrix} U_Q & U_F \\ V_Q & V_F \end{vmatrix}, & \Delta_2 &= \begin{vmatrix} U_D & U_Q \\ V_D & V_Q \end{vmatrix} \\ U_Q &= q_0 - q_2\omega^2 + q_4\omega^4 + \dots, \\ U_D &= d_0 - d_2\omega^2 + d_4\omega^4 + \dots, \\ U_F &= f_0 - f_2\omega^2 + f_4\omega^4 + \dots, \\ V_Q &= q_1 - q_3\omega^2 + q_5\omega^4 + \dots, \\ V_D &= d_1 - d_3\omega^2 + d_5\omega^4 + \dots, \\ V_F &= f_1 - f_3\omega^2 + f_5\omega^4 + \dots,\end{aligned}$$

Para $\Delta \neq 0$ las ecuaciones en (2.5) describen una curva paramétrica. Al cruzar esta curva, dos raíces pasan de un lado del plano complejo al otro. Más aún, la $\mathcal{D}$ -partición contiene las líneas:

$$q_0 + p_1 d_0 + p_2 f_0 = 0, \quad q_n + p_1 d_n + p_2 f_n = 0. \quad (2.6)$$

Obsérvese que estas corresponden al caso particular $\omega = 0$, por lo que la curva descrita por (2.5) comienza en una de estas líneas y termina en alguna otra. Al cruzar estas líneas solo una raíz cruza de un semi-plano al otro.

Si $\Delta = 0$ y $\Delta_1 \neq 0$ o $\Delta_2 \neq 0$, la curva descrita por (2.5) se extiende a infinito, tendiendo así a una curva asintótica. El valor de ω para el cual $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ es llamado *frecuencia aislada*, y para este caso particular la $\mathcal{D}$ -partición no tiene un punto, sino una línea, la cual se dice que es singular.

Ejemplo de $\mathcal{D}$ -partición con 2 parámetros.
Consideremos el polinomio

$$\begin{aligned}P(s, p_1, p_2) &= 4s^2 + s + p_1 s e^{-s} + p_2 e^{-s} \\ Q(s) &= 4s^2 + s \\ D(s) &= s e^{-s} \\ F(s) &= e^{-s}\end{aligned}$$

Mediante el método obtenemos la *partición* del plano (p_1, p_2) como se muestra en la Figura 2.5. En azul aparecen tanto la curva $P(j\omega, p_1, p_2) = 0$ como la línea singular. Obsérvese que, de acuerdo con lo descrito previamente, el *atravesar* la curva $P(j\omega, p_1, p_2) = 0$ añade dos raíces de uno u otro lado del plano, mientras que *atravesar* las líneas singulares añade solo una raíz. Como se podría suponer, el *atravesar* tanto la curva como la línea al mismo tiempo involucra 3 raíces distintas.

En la Figura 2.5 caben destacar dos elementos:

1. La región $\mathcal{D}(0)$, denominado también dominio de estabilidad, en el cual no existen raíces inestables.

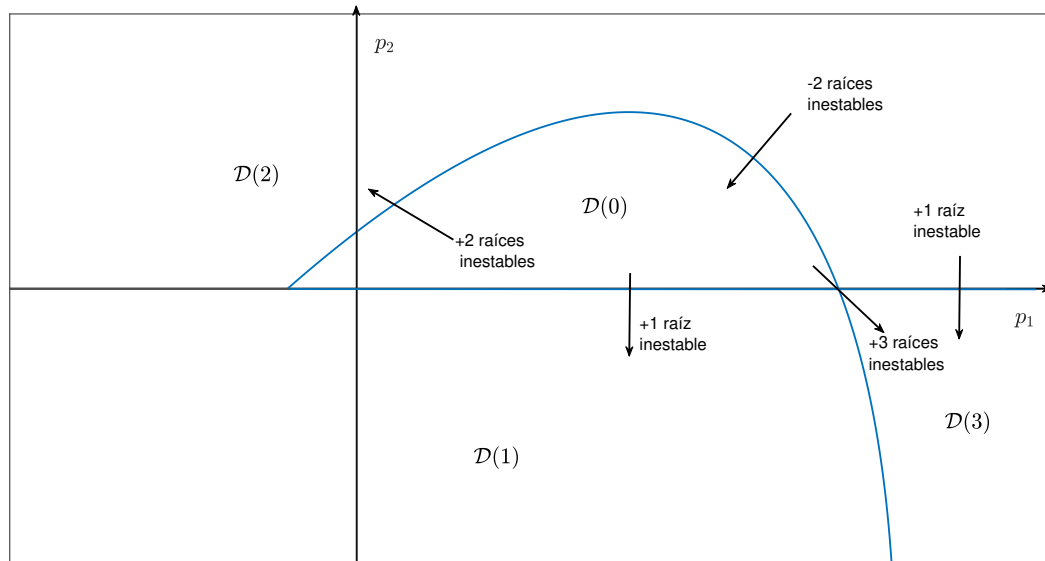


Figura 2.5: $\mathcal{D}$ -particiones en el plano de los parámetros p_1 y p_2 .

2. Las direcciones en que se cruzan la curva y líneas afectan directamente en la manera en que se ganan o pierden raíces. Esta característica será explotada en el capítulo siguiente con el fin de caracterizar el comportamiento de las raíces conforme se cruza la curva que delimita a la región estable.

Capítulo 3

Diseño del máximo decaimiento exponencial

En este capítulo se busca identificar el punto de máximo decaimiento exponencial, para un sistema de primer orden con un retardo, dentro del plano de los parámetros de un controlador del tipo proporcional integral, es decir $(k_p, k_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, haciendo uso de las herramientas presentadas en el capítulo anterior, tales como las curvas de cruce de estabilidad y la teoría de las $\mathcal{D}$ -particiones. Una vez que se caracteriza el punto de máximo decaimiento dentro del plano de los parámetros, reglas de sintonización para las ganancias del controlador PI que permitan obtener dicha respuesta son encontradas.

3.1. Sistema

A lo largo de este capítulo se estudia el sistema descrito por la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{ke^{-hs}}{Ts + 1}, \quad (3.1)$$

cuya dinámica en lazo abierto se caracteriza por tres parámetros:

1. $h > 0$: el retardo del sistema
2. $k > 0$: la ganancia en lazo abierto del sistema
3. $T \in \mathbb{R}$: la constante de tiempo del sistema

La importancia del sistema (3.1) recae en el hecho de que su solución es capaz de capturar el comportamiento dinámico de un gran número de procesos industriales (Silva et al., 2001) como se ilustra en la Figura 3.1, en donde podemos ver de manera gráfica el efecto que cada uno de sus parámetros genera en las trayectorias del mismo.

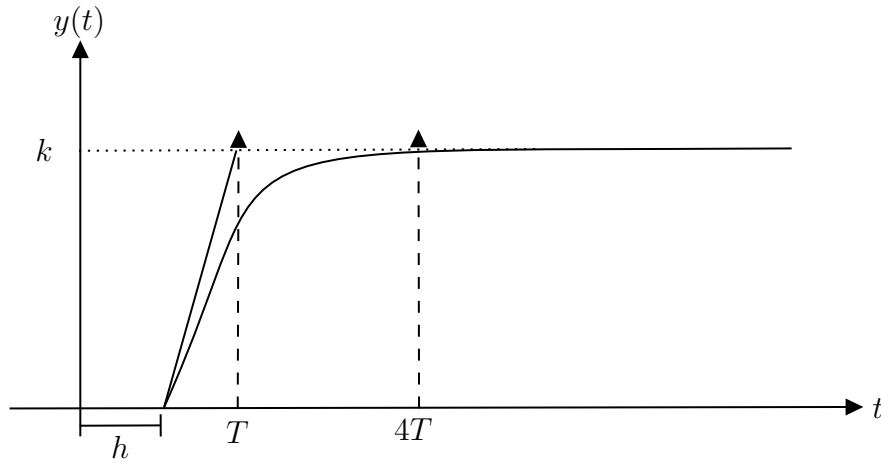


Figura 3.1: Trayectorias del sistema (3.1) en lazo abierto. Se observa que ante una entrada de tipo escalón, tenemos una salida que alcanza una magnitud k , dada por la ganancia en lazo abierto, en un tiempo $t = 4T$, dictado por la constante de tiempo del sistema T . Se observa además el efecto del retardo h , ya que el sistema no tiene una repuesta sino hasta $t = h$.

Adicionalmente, el sistema (3.1) se encuentra sujeto a un controlador PI clásico con la siguiente estructura:

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s}, \quad (3.2)$$

donde k_p y k_i son las ganancias proporcional e integral, respectivamente.

Considerando una retroalimentación de tipo unitaria, como se muestra en la Figura 3.2, la función característica en lazo cerrado está dada por:

$$P(s, k_p, k_i) := (k_p s + k_i)k e^{-hs} + (Ts + 1)s \quad (3.3)$$

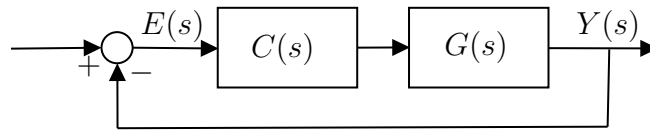


Figura 3.2: Sistema en lazo cerrado con retroalimentación unitaria en el dominio de Laplace.

El objetivo es entonces el de caracterizar y diseñar el máximo decaimiento exponencial para el sistema en lazo cerrado. Para ello vale la pena recordar que, si bien el sistema de lazo cerrado (3.1)-(3.2) tiene un número infinito de raíces, su dinámica está gobernada por las raíces conocidas como *dominantes*; es decir, aquellas que se encuentran más a la derecha dentro del plano complejo, dicho de otra forma, aquellas cuya parte real se encuentra más cercana al eje imaginario.

Para estudiar la estabilidad del sistema tomaremos ventaja de la propiedad de continuidad de las raíces, estudiada en el Capítulo 2. Debido a esta propiedad, podemos asegurar que una raíz solo puede cruzar del semiplano derecho (RHP ¹) al semiplano izquierdo (LHP ²), y viceversa, atravesando el eje imaginario.

Considérese el cambio de variable $s = s - \sigma$, de manera que (3.3) se reescribe como sigue:

$$P(s, \sigma, k_p, k_i) := (k_p(s - \sigma) + k_i)ke^{-h(s-\sigma)} + (T(s - \sigma) + 1)(s - \sigma) \quad (3.4)$$

Este cambio de variable nos permite estudiar la función característica evaluada sobre la línea vertical $s = -\sigma$, que para el caso $\sigma = 0$ representa la frontera de estabilidad.

3.2. Descomposición del plano de los parámetros

A continuación, se busca descomponer el plano paramétrico (k_p, k_i) por medio del método ya mencionado de las $\mathcal{D}$ -particiones, para ello primeramente necesitamos identificar los *puntos de cruce*, es decir, los valores de k_p y k_i para los cuales (3.3) tiene al menos una solución sobre el eje $-\sigma$, es decir

$$P(j\omega, \sigma, k_p, k_i) = 0. \quad (3.5)$$

Cabe mencionar que tales puntos forman la *curva de cruce de estabilidad* $\mathcal{T}$, como se describe en la Definición 2.5.

Proposición 3.1

Para un valor de $\sigma \in \mathbb{R}_+$ y $\omega \in \mathbb{R}_+$ los puntos de cruce (k_p, k_i) están dados por:

$$k_p(\omega, \sigma) = \frac{\omega(2T\sigma - 1)\cos(h\omega) + (\sigma + T(\omega^2 - \sigma^2))\sin(h\omega)}{e^{h\sigma}k\omega}, \quad (3.6)$$

$$k_i(\omega, \sigma) = \frac{(\omega^2 + \sigma^2)(T\omega\cos(h\omega) + (1 - T\omega)\sin(h\omega))}{e^{h\sigma}k\omega}. \quad (3.7)$$

Para el punto singular en $\omega = 0$, se tiene la siguiente expresión:

$$k_i = k_p\sigma + \frac{e^{-h\sigma}}{k}\sigma(1 - T\sigma) \quad (3.8)$$

Demostración. A partir de (3.5) tenemos que:

$$P(j\omega, \sigma, k_p, k_i) := (k_p(j\omega - \sigma) + k_i)ke^{-h(j\omega-\sigma)} + (T(j\omega - \sigma) + 1)(j\omega - \sigma) = 0.$$

¹RHP: Right Half Plane

²LHP: Left Half Plane

Mediante manipulación algebraica se obtiene la siguiente expresión:

$$k_p + \frac{k_i}{j\omega - \sigma} = \frac{T(j\omega - \sigma) + 1}{k} e^{hj\omega} e^{-h\sigma}.$$

Multiplicando $\frac{k_i}{j\omega - \sigma}$ por $\frac{j\omega + \sigma}{j\omega + \sigma}$ y reescribiendo $e^{hj\omega}$ obtenemos:

$$k_p + \frac{k_i\sigma}{-\omega^2 + \sigma^2} + \frac{k_i j\omega}{-\omega^2 - \sigma^2} = \frac{T\sigma \cos(h\omega) - \cos(h\omega) + T\omega \sin(h\omega)}{e^{h\sigma} k} + \frac{T\sigma \sin(h\omega) - \sin(h\omega) - T\omega \cos(h\omega)}{e^{h\sigma} k} j.$$

Por un lado igualando la parte real de ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$k_p + \frac{k_i\sigma}{-\omega^2 - \sigma^2} = \frac{T\sigma \cos(h\omega) - \cos(h\omega) + T\omega \sin(h\omega)}{e^{h\sigma} k}. \quad (3.9)$$

Por otro lado, igualando las partes imaginarias de la expresión se obtiene lo siguiente:

$$\frac{k_i\omega}{-\omega^2 - \sigma^2} = \frac{T\sigma \sin(h\omega) - \sin(h\omega) - T\omega \cos(h\omega)}{e^{h\sigma} k} \quad (3.10)$$

Realizando manipulación algebraica sobre (3.9)-(3.10) se obtienen (3.6)-(3.7). Por último, aplicando la regla de L'Hôpital sobre (3.7) se obtiene (3.8). ■

3.2.1. Tangentes y suavidad de la curva de cruce de estabilidad

Ahora que hemos definido los *puntos de cruce* que conforman la curva $\mathcal{T}$, es de interés conocer la tangente a esta curva, así como los puntos en que esta está bien definida. Para ello, tenemos que tanto k_p como k_i dependen de manera implícita de ω , y consideraremos $\sigma = 0$, sin pérdida de la generalidad. A partir de ahora consideraremos que la *dirección positiva* de la curva corresponde al sentido en que se mueve la misma conforme ω incrementa. La región que se encuentra a *mano izquierda* (*mano derecha*) conforme nos movemos en la dirección positiva será entonces llamada la región a la izquierda (derecha).

Nota 3.1

Dada la convención tomada para definir la región a la izquierda (derecha), una misma región puede ser considerada como la región a la izquierda o a la derecha dependiendo del punto de la curva en que nos encontremos.

Buscando definir la tangente a la curva $\mathcal{T}$, derivamos $P(\mathbf{j}\omega, k_p, k_i)$ con respecto a ω y considerando el teorema de la función implícita se obtiene:

$$\mathbf{j} \frac{\partial P}{\partial \omega} + \frac{\partial P}{\partial k_p} \frac{dk_p}{d\omega} + \frac{\partial P}{\partial k_i} \frac{dk_i}{d\omega} = 0. \quad (3.11)$$

Consideremos ahora las siguientes descomposiciones:

$$\begin{aligned} R_0 + \mathbf{j}I_0 &= \mathbf{j} \frac{\partial P}{\partial \omega} \\ R_1 + \mathbf{j}I_1 &= -\frac{\partial P}{\partial k_p} \\ R_2 + \mathbf{j}I_2 &= -\frac{\partial P}{\partial k_i}. \end{aligned}$$

Entonces, con estas definiciones en mente, separando parte real e imaginaria de (3.11) podemos escribir la siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} R_1 \frac{dk_p}{d\omega} + R_2 \frac{dk_i}{d\omega} &= R_0 \\ I_1 \frac{dk_p}{d\omega} + I_2 \frac{dk_i}{d\omega} &= I_0. \end{aligned}$$

Escribiendo en forma matricial, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ I_1 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dk_p}{d\omega} \\ \frac{dk_i}{d\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 \\ I_0 \end{pmatrix},$$

la cual significa que la curva de la curva $\mathcal{T}$ puede escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{dk_p}{d\omega} \\ \frac{dk_i}{d\omega} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ I_1 & I_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R_0 \\ I_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{R_1 I_2 - R_2 I_1} \begin{pmatrix} I_2 & -R_2 \\ -I_1 & R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_0 \\ I_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{R_1 I_2 - R_2 I_1} \begin{pmatrix} R_0 I_2 - R_2 I_0 \\ R_1 I_0 - I_1 R_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

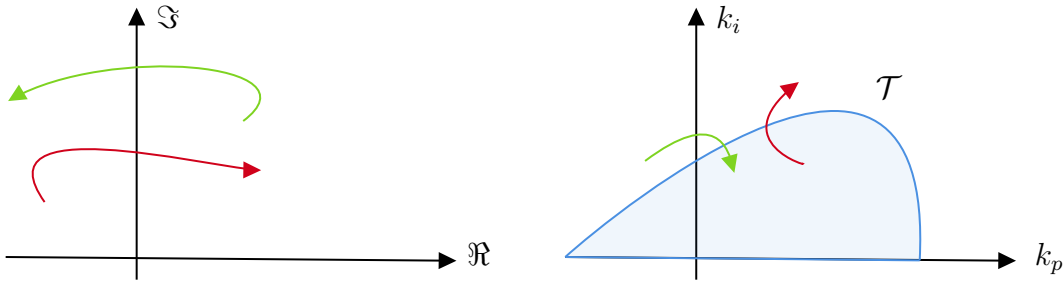
De lo anterior se tiene que la curva $\mathcal{T}$ es suave en todas partes, excepto quizá cuando cualquiera de los siguientes puntos se satisface:

1. $R_1 I_2 - R_2 I_1 = 0$.
2. $\frac{dk_p}{d\omega} = \frac{dk_i}{d\omega} = 0$.

3.2.2. Direcciones de cruce

Debido a la propiedad de continuidad de las raíces podemos asegurar que una raíz solo puede cruzar del RHP al LHP, y viceversa, atravesando el eje imaginario. Sin embargo, en lo general, es necesario determinar si estas cruzan en dirección a la inestabilidad (cruce del LHP hacia el RHP), o bien en dirección a la estabilidad (cruce del RHP hacia el LHP).

Para lo anterior, es posible estudiar el comportamiento de una raíz conforme nos desviamos de la curva de cruce de estabilidad $\mathcal{T}$, descrita en el capítulo anterior, considerando a los parámetros (k_p, k_i) como funciones de $s = j\omega - \sigma$.



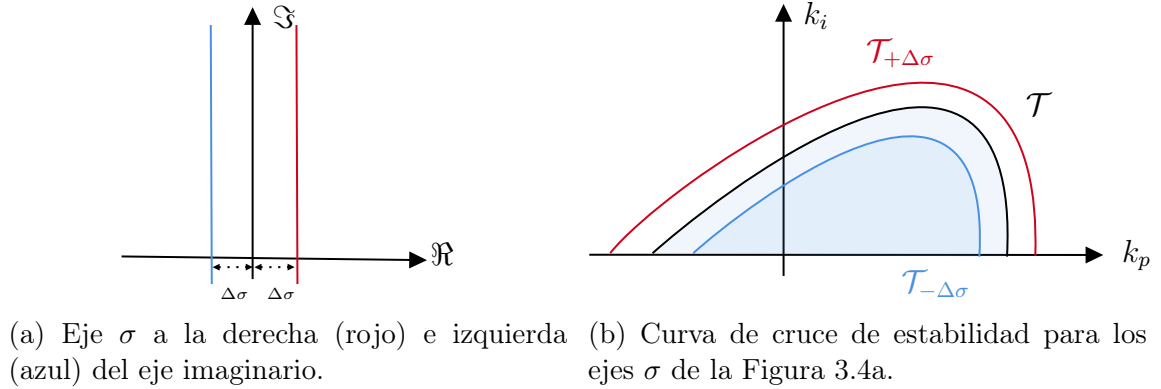
(a) Raíces de la ecuación característica cruzando el eje imaginario en las dos direcciones. (b) Cruce de la curva de cruces de estabilidad en las dos direcciones posibles.

Figura 3.3: Direcciones de cruce de las raíces. En este caso, al cruzar en dirección de la región de estabilidad en el plano de los parámetros (verde) se ganan raíces en el semiplano izquierdo, mientras al salir de la región de estabilidad (rojo) se ganan raíces en el semiplano derecho.

La Figura 3.3 nos muestra como, conforme los parámetros (k_p, k_i) cruzan la curva de cruce de estabilidad, las raíces del sistema en el plano complejo cruzan el eje imaginario del mismo. Para determinar la dirección en que las raíces cruzan el eje imaginario, consideremos la curva $\mathcal{T}$, descrita previamente, y la función característica (3.4) con $\sigma = 0$. Ahora, si el valor de σ cambia, esto es equivalente a hacer un corrimiento en el eje imaginario, por lo que podemos considerar a una curva $\mathcal{T}_\sigma$ como la curva de cruce de estabilidad para el nuevo valor de σ . Esta idea se ilustra en la Figura 3.4

Dado que el interés radica en conocer la dirección en que se mueven las raíces de $P(j\omega, \sigma, k_p, k_i) = 0$ conforme (k_p, k_i) se desvían de $\mathcal{T}$, podemos considerar la curva $\mathcal{C}$, la cual corresponde a los cruces para $P(j\omega^*, \sigma, k_p, k_i)$ cuando σ varía y $\omega = \omega^*$ es fijo.

Tenemos entonces que la tangente a la curva $\mathcal{T}$ está dada por $v = (dk_p/d\omega, dk_i/d\omega)^T$, mientras la tangente correspondiente a la curva $\mathcal{C}$ está dada por $w = (dk_p/d\sigma, dk_i/d\sigma)^T$. Considerando el caso particular con $\sigma = 0$, podemos ver que en cualquier punto de la curva $\mathcal{T}$ existe un cruce con la curva $\mathcal{C}$ para algún $\omega = \omega^*$. En ese punto conside-

Figura 3.4: Movimiento del eje σ .

remos el producto interior entre la normal a la tangente de la curva $\mathcal{T}$ apuntando a región a la izquierda, dada por $\mathbf{n}_v = (-dk_i/d\omega, dk_p/d\omega)^T$ y la tangente a la curva $\mathcal{C}$, es decir:

$$\langle \mathbf{n}_v, \mathbf{w} \rangle = \frac{dk_p}{d\omega} \frac{dk_i}{d\sigma} - \frac{dk_i}{d\omega} \frac{dk_p}{d\sigma}. \quad (3.12)$$

De la Figura 3.4 podemos ver que si (3.12) es mayor a 0, la región a la izquierda de $\mathcal{T}$ estaría ganando un par de raíces complejas conjugadas (recordando que los puntos en la curva representar pares de raíces de este tipo) en el RHP, mientras que si (3.12) es menor a 0 se estaría ganando raíces en el LHP.

Nota 3.2

Por lo visto en el Capítulo anterior referente a la teoría de las $\mathcal{D}$ -particiones sabemos que si el cruce ocurre por la recta singular 3.8 se ganaría o perdería una raíz real, en lugar de un par de raíces complejas.

3.3. Colapso de la región de estabilidad

Conforme el valor de σ incrementa, la región de estabilidad tiende a contraerse como se muestra en la Figura 3.5, por lo que podemos suponer que incrementos continuos en σ eventualmente resultaran en un colapso de la región.

Para que el colapso de la región de estabilidad en el plano (k_p, k_i) ocurra se requiere de los siguientes elementos:

1. un decrecimiento monotónico de la fase de la curva de cruce de estabilidad $\mathcal{T}$, definida como en la Definición 2.5 del capítulo anterior, y considerando $p_1 = k_p$ y $p_2 = k_i$,

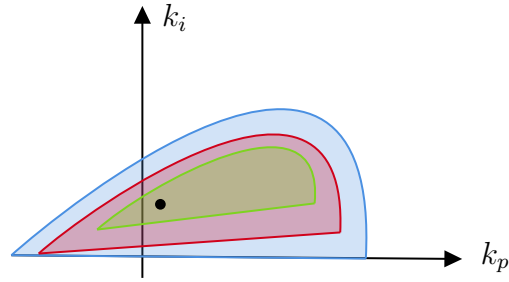


Figura 3.5: Contracción de la región de estabilidad conforme aumenta el valor de σ . En este caso, la región azul representa un valor de σ menor al resto de las regiones dibujadas. El punto de colapso se muestra en negro.

2. un incremento sostenido respecto a ω del radio de intersección entre la curva $\mathcal{T}$ y los ejes k_p y k_i , es decir, que los puntos de cruce de $\mathcal{T}$ con los ejes, conforme ω crece, ocurran cada vez más lejos del origen,
3. una dirección invariante en el movimiento de la curva $\mathcal{T}$ conforme el valor de σ incrementa.

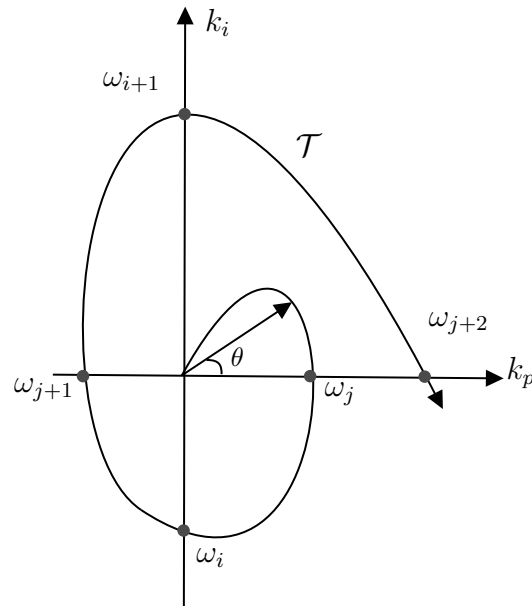


Figura 3.6: Curva paramétrica $\mathcal{T}$ con fase decreciente y cruces con los ejes crecientes.

En la Figura 3.6 se pueden observar a lo que se refieren los puntos 1 y 2. Por un lado, el punto 1 se refiere a que el valor de θ sea decreciente respecto a ω , por lo tanto

$\theta'(\omega) < 0$ para todo $\omega \in \mathbb{R}_+$, es decir, que la curva gira siempre en el sentido de las manecillas del reloj. Por otro lado, el punto 2 se refiere a que las magnitudes de los puntos de cruce $|k_p|$ y $|k_i|$ crecen conforme ocurren intersecciones con cualquiera de los dos ejes, es decir, $|k_{p_j}| < |k_{p_{j+1}}|$ donde $|k_{p_j}|$ corresponde a la magnitud de k_p en $\omega_j < \omega_{j+1}$ y $|k_{i_i}| < |k_{i_{i+1}}|$ donde $|k_{i_i}|$ corresponde a la magnitud de k_i en $\omega_i < \omega_{i+1}$. Estos dos puntos garantizan que dentro de la curva no existirán auto-intersecciones como la mostrada en la Figura 3.7, es decir, que conforme ω aumente su valor, la curva no se cruzará con ella misma, garantizando así que la región de estabilidad sea única en el plano paramétrico. Adicionalmente, el punto 3 nos garantiza que, si la dirección es la adecuada, el colapso mostrado en la Figura 3.5 pueda ocurrir, pues este nos garantiza que la curva se moverá permanentemente en la misma dirección mientras el valor de σ aumente.

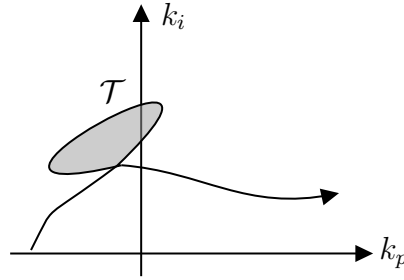


Figura 3.7: Autointersección de la recta $\mathcal{T}$. Dado que, según nos indica la teoría de las $\mathcal{D}$ -particiones, el atravesar la curva produce que dos raíces pasen de un lado del plano complejo al otro, este fenómeno puede generar otras regiones de estabilidad dentro del plano paramétrico, por lo que probar que estas no ocurren para la curva estudiada garantiza que la región de estabilidad es única.

A continuación, se presentan los tres puntos antes mencionados en forma de proposiciones acompañados de sus demostraciones, con el objetivo de probar que cada uno de ellos se cumple para la curva de cruce de estabilidad $\mathcal{T}$ correspondiente al sistema (3.1)-(3.2).

Proposición 3.2 (Punto 1)

Sea la curva de cruce de estabilidad $\mathcal{T}$ en donde k_p y k_i están definidos como en (3.6) y (3.7) respectivamente, con $h > 0$, $k > 0$, $\omega \in \mathbb{R}_+$ y $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Entonces, la fase de $\mathcal{T}$, denotada por θ , decrece monótonicamente con respecto a ω .

Demostración. Note que la fase θ se puede obtener de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \frac{k_i(\omega)}{k_p(\omega)} \\ \implies \theta(\omega) &= \tan^{-1} \left(\frac{k_i(\omega)}{k_p(\omega)} \right). \end{aligned}$$

Por simplicidad en la notación, en lo sucesivo se omite el argumento ω en k_p , k_i y θ , además, nos referimos como f' a la derivada de f con respecto a ω . Para asegurar que θ decrece monótonicamente, su derivada con respecto a ω debe ser negativa para todo $h > 0$, $k > 0$, $\omega \in \mathbb{R}_+$ y $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, es decir $\frac{d\theta}{d\omega} = \theta' < 0$. Derivando respecto a ω obtenemos:

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \theta' = \frac{k'_i k_p - k_i k'_p}{k_p^2 + k_i^2}.$$

Buscamos entonces que $\text{sgn}(\theta') = -1$. Observemos que, dado que el denominador de θ' , es decir $k_p^2 + k_i^2$, es siempre positivo, la siguiente igualdad es verdadera:

$$\text{sgn}(\theta') = \text{sgn}(k'_i k_p - k_i k'_p)$$

De las ecuaciones (3.6) y (3.7) tenemos lo siguiente:

$$k'_i k_p - k_i k'_p = \frac{-(2h\omega + 2T\omega + 2hT^2\omega^3 + 2T\omega \cos(2h\omega) + \sin(2h\omega) - T^2\omega^2 \sin(2h\omega))}{2k^2} < 0. \quad (3.13)$$

Recordando que $k > 0$, la desigualdad (3.13) será verdadera siempre que se satisfaga la siguiente desigualdad:

$$2h\omega + 2T\omega + 2hT^2\omega^3 + 2T\omega \cos(2h\omega) + \sin(2h\omega) - T^2\omega^2 \sin(2h\omega) > 0. \quad (3.14)$$

Reescribiendo a (3.14) como sigue:

$$2h\omega + \sin(2h\omega) + 2T\omega(1 + \cos(2h\omega)) + T^2\omega^2(2h\omega - \sin(2h\omega)) > 0.$$

Se puede notar que:

$$\left. \begin{array}{l} 2h\omega + \sin(2h\omega) > 0 \quad \forall \omega > 0 \\ 2h\omega - \sin(2h\omega) > 0 \quad \forall \omega > 0 \\ 1 + \cos(2h\omega) \geq 0 \quad \forall \omega > 0 \end{array} \right\} \implies \theta' < 0 \quad \forall h, \quad k, \quad \omega, \quad T > 0.$$

Por lo que se puede concluir que la Proposición 3.2 es verdadera para todo $T > 0$.

Por otro lado, el caso $T < 0$ es equivalente a estudiar $T = -T$ cuando $T > 0$. Sin pérdida de la generalidad consideraremos también el recorrido horizontal de la curva paramétrica $\hat{k}_p = k_p - k_{p_i}$, donde k_{p_i} representa el valor de k_p cuando $\omega = 0$, de manera que la curva $\mathcal{T}$ inicie en el origen del plano, es decir que el primer punto de la curva se encuentre en $(k_p = 0, k_i = 0)$. Obsérvese que el desplazamiento propuesto no afecta al comportamiento de la fase de la curva. Estas dos consideraciones permiten reescribir a (3.13) como sigue:

$$\begin{aligned} k'_i \hat{k}_p - k_i \hat{k}'_p &= H(h, \omega, T) = -h\omega + T\omega - hT^2\omega^3 + (h - 2T)\omega \cos(h\omega) \sin(h\omega) \\ &\quad + T\omega(\cos(2h\omega) + \omega(h + T \cos(h\omega)) \sin(h\omega)) - \frac{1}{2} \sin(2h\omega), \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde se sigue buscando que $k'_i \hat{k}_p - k_i \hat{k}'_p < 0$. Observemos que el término dominante de $H(h, \omega, T)$, definida en (3.15), para ω suficientemente grande es $-hT^2\omega^3$, el cual a su vez es negativo para todo $\omega, h, T > 0$ (recordemos que el cambio de variable $T = -T$ implica que $T > 0$), lo que significa que para $\omega \rightarrow \infty$ tenemos que $H(h, \omega, T) < 0$, entonces si $H(h, \omega, T) < 0$ para todo $\omega > 0$, es suficiente probar que $H(h, \omega, T) \neq 0$ para todo $\omega > 0$. Para ello bastará con probar que H no cuenta con soluciones reales en T , pues únicamente nos interesa $T \in \mathbb{R}_+$. Resolviendo entonces para T se puede obtener:

$$T = \frac{-\omega + 2\omega \cos(h\omega) - \omega \cos(2h\omega) - h\omega^2 \sin(h\omega)}{(2(-h\omega^3 + \omega^2 \cos(h\omega) \sin(h\omega)))} \pm \dots$$

$$\frac{\sqrt{2\omega^2 \sin^2((h\omega)/2)(2 - 3h^2\omega^2 + (-4 + h^2\omega^2) \cos(h\omega) + 2 \cos(2h\omega) + 4h\omega \sin(h\omega))}}{(2(-h\omega^3 + \omega^2 \cos(h\omega) \sin(h\omega)))},$$

dado que T es real, el radical de la solución debería ser positivo si existiera alguna T real para la cual $H(h, \omega, T) = 0$. Dicho de otro modo, es de interés:

$$2\omega^2 \sin^2((h\omega)/2)(2 - 3h^2\omega^2 + (-4 + h^2\omega^2) \cos(h\omega) + 2 \cos(2h\omega) + 4h\omega \sin(h\omega)) < 0. \quad (3.16)$$

Por un lado, obsérvese que en (3.16) el término $2\omega^2 \sin^2((h\omega)/2)$ es siempre positivo, por lo que es suficiente probar:

$$2 - 3h^2\omega^2 + (-4 + h^2\omega^2) \cos(h\omega) + 2 \cos(2h\omega) + 4h\omega \sin(h\omega) < 0.$$

Por otro lado, los términos h y ω aparecen siempre juntos, por lo que realizando el cambio de variable $x = h\omega$ podemos reescribir como sigue:

$$f(x) = 2 - 3x^2 + (-4 + x^2) \cos(x) + 2 \cos(2x) + 4x \sin(x) < 0 \quad \forall \quad x > 0.$$

Considerando que $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$, se tiene que f se puede expresar como:

$$f(x) = -3x^2 - 4 \cos(x) + x^2 \cos(x) + 4 \cos^2(x) + 4x \sin(x).$$

Más aún, por simple inspección se observa que $f(0) = 0$.

Ahora, dado que $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ y $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, es claro que las siguientes desigualdades se cumplen:

$$\left. \begin{array}{ll} -4 \cos(x) & \leq 4 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2 \cos(x) & \leq x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ 4 \cos^2(x) & \leq 4 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ 4x \sin(x) & \leq 4x \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \implies f(x) \leq -2x^2 + 4 + 8 =: g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Notando que $g(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, -1.236) \cup (3.236, \infty)$, y sabiendo que f es una función par, se puede asegurar lo siguiente:

$$f(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus (-1.236, 1.236).$$

Por consiguiente el resultado quedará demostrado si se garantiza que la siguiente desigualdad se cumple

$$f(x) < 0 \quad \forall x \in (0, 1.236) =: \mathcal{I}.$$

Para estudiar el comportamiento de $f(x)$ para $x \in \mathcal{I}$ consideremos los puntos críticos de f , para ello:

$$f'(x) = -6x + \cos(x)(6x - 8\sin(x)) - (-8 + x^2)\sin(x) = 0.$$

Debido a la presencia de funciones trigonométricas en la ecuación, la solución analítica de esta no es trivial, sin embargo encontrando las raíces numéricas obtenemos,

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 5.086,$$

dado que $x_2 > 1.236$, y por consiguiente que $f(x_2) < 0$, y sabiendo que $f(x_1) > f(x_2)$, podemos asegurar que $f(x_1)$ representa un máximo local, lo que a su vez significa que para toda $x \in (x_1, x_2)$, $f(x) < 0$, por lo que podemos asegurar entonces que $f(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, lo que prueba el resultado. ■

Ahora que se demostró que la fase de la curva de cruce de estabilidad es decreciente respecto a ω , es decir, que gira siempre en el sentido de las manecillas del reloj, la siguiente proposición nos garantiza que el cruce con los ejes k_p y k_i ocurren cada vez más lejos del origen a medida que ω incrementa.

Proposición 3.3 (Punto 2)

Sean $k_p^\dagger$ y $k_i^\dagger$ los puntos de intersección entre la curva de cruce de estabilidad $\mathcal{T}$ definida por (3.6)-(3.7) y los ejes coordenados k_p y k_i , respectivamente. Entonces, los puntos de intersección se alejan consistentemente del origen del plano (k_p, k_i) a medida que $\omega \in \mathbb{R}_+$ incrementa.

Demostración. Sin pérdida de la generalidad consideraremos $\sigma = 0$. Por un lado, en el cruce con el eje k_p , sabemos que $k_i = 0$, lo que evaluando en la ecuación característica nos lleva a la siguiente expresión:

$$P(j\omega, 0, k_p, 0) = k_p k j\omega e^{-hj\omega} + (Tj\omega + 1)j\omega = 0,$$

resolviendo para k_p

$$k_p = -\frac{Tj\omega + 1}{k} e^{hj\omega}, \tag{3.17}$$

obteniendo la magnitud de ambos lados de la expresión y recordando que h y ω pertenecen a $\mathbb{R}_+$:

$$|k_p| = \frac{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}{|k|}. \tag{3.18}$$

Por otro lado, si la curva cruza con el eje k_i tenemos $k_p = 0$, de manera que de la ecuación característica obtenemos:

$$P(j\omega, 0, 0, k_i) = k_i k e^{-hj\omega} + (Tj\omega + 1)j\omega = 0,$$

lo que resolviendo para k_i lleva a:

$$k_i = -\frac{j\omega - T\omega^2}{k} e^{hj\omega}. \quad (3.19)$$

Bajo las condiciones previamente mencionadas obtenemos la magnitud a ambos lados de la expresión:

$$|k_i| = \frac{\sqrt{\omega^2 + T^2\omega^2}}{|k|}. \quad (3.20)$$

Note que $k_p^\dagger$ y $k_i^\dagger$ se pueden obtener, respectivamente, a partir de k_p y k_i en (3.17) y (3.19) para algún $\omega = \omega^\dagger$. La prueba concluye observando que $|k_p|$ en (3.18) y $|k_i|$ en (3.20) son funciones estrictamente crecientes de $\omega \in \mathbb{R}_+$. ■

Las proposiciones 3.2 y 3.3, garantizan que el comportamiento de la curva de cruce de estabilidad $\mathcal{T}$, conforme recorremos ω desde 0 hasta ∞ , es el de una "espiral creciente", con lo que se puede asegurar que no existen intersecciones de $\mathcal{T}$ con ella misma.

La siguiente proposición nos permite observar el comportamiento de la curva de cruce de estabilidad con respecto a variaciones en σ , es decir, los cambios que surgen en la curva conforme recorremos el eje imaginario.

Proposición 3.4 (Punto 3)

La dirección de movimiento de la curva paramétrica $\mathcal{T}$ definida por (3.6)-(3.7) conforme el valor de σ aumenta, es invariante en el plano (k_p, k_i) .

Demostración. Consideremos las curvas $\mathcal{T}$ y $\mathcal{C}$ descritas previamente en este capítulo. Como se vio anteriormente, existe un punto en que ambas curvas deben cruzar dado que $\omega = \omega^*$ forma parte de la curva $\mathcal{T}$. En este punto en que ambas curvas se encuentran consideremos el producto interno entre la tangente a la curva $\mathcal{C}$, dada por $w = (dk_p/d\sigma, dk_i/d\sigma)^T$, y el vector normal a la tangente de $\mathcal{T}$ apuntando a la región a la izquierda, dado por $n_v = (-dk_i/d\omega, dk_p/d\omega)^T$, para estudiar la dirección de movimiento (DM) de la curva $\mathcal{T}$ conforme el valor de σ aumenta³; es decir,

$$DM = \text{sgn}(\langle n_v, w \rangle) = \text{sgn} \left(\frac{dk_p}{d\omega} \frac{dk_i}{d\sigma} - \frac{dk_i}{d\omega} \frac{dk_p}{d\sigma} \right).$$

³Ver la Figura 3.8 para una interpretación geométrica.

Considerando las definiciones previas podemos desarrollar el producto interno como sigue:

$$\begin{aligned}
 \langle n_v, w \rangle &= \frac{dk_p}{d\omega} \frac{dk_i}{d\sigma} - \frac{dk_i}{d\omega} \frac{dk_p}{d\sigma} = \frac{R_0^2 R_1 I_2 - I_0^2 R_2 I_1 + I_0^2 R_1 I_2 - R_0^2 R_2 I_1}{(R_1 I_2 - R_2 I_1)^2} \\
 &= \frac{R_0^2 (R_1 I_2 - R_2 I_1) + I_0^2 (-R_2 I_1 + R_1 I_2)}{(R_1 I_2 - R_2 I_1)^2} \\
 &= \frac{R_0^2 (R_1 I_2 - R_2 I_1) + I_0^2 (-R_2 I_1 + R_1 I_2)}{(R_1 I_2 - R_2 I_1)^2} \\
 &= \frac{R_0^2 + I_0^2}{R_1 I_2 - R_2 I_1}.
 \end{aligned}$$

Más aún, como

$$\begin{aligned}
 R_1 &= e^{h\sigma} k (\sigma \cos(h\omega) - \omega \sin(h\omega)) \\
 I_1 &= e^{h\sigma} k (-\sigma \sin(h\omega) - \omega \cos(h\omega)) \\
 R_2 &= k e^{h\sigma} (-\cos(h\omega)) \\
 I_2 &= k e^{h\sigma} (\sin(h\omega)).
 \end{aligned}$$

Obtenemos:

$$R_1 I_2 - R_2 I_1 = e^{2h\sigma} k^2 (\omega (-\sin^2(h\omega) - \cos^2(h\omega))) = -\omega e^{h\sigma} k^2,$$

por lo tanto

$$\text{DM} = \text{sgn} \left(-\frac{R_0^2 + I_0^2}{\omega e^{h\sigma} k^2} \right). \quad (3.21)$$

Dado que $\omega e^{h\sigma} k^2 > 0$ para todo $k, \omega, h, \sigma \in \mathbb{R}_+$ tenemos que DM es invariante en el plano (k_p, k_i) . La observación anterior concluye la demostración. ■

Hasta este punto se ha demostrado que la curva $\mathcal{T}$ tiene una dirección en su movimiento invariante conforme el valor de σ incrementa. Por otro lado, cabe recordar que la región de estabilidad $\mathcal{D}(0)$ es también acotada por la línea singular dada por:

$$k_i = k_p \sigma + \frac{e^{-h\sigma}}{k} \sigma (1 - T\sigma).$$

De manera análoga al movimiento de la curva $\mathcal{T}$, la línea descrita por la ecuación anterior, también presenta un movimiento invariante con respecto a σ , como se muestra en la Figura 3.9. Dicho movimiento; sin embargo, es en el sentido opuesta al de $\mathcal{T}$. A partir de la observación anterior, junto con las Propositiones 3.2-3.4, podemos concluir la existencia de un colapso de la región de estabilidad. Nótese que dicho colapso ocurre entre la curva $\mathcal{T}$ y la línea singular definida en la ecuación anterior, por lo que al ser un punto dentro de esta última podemos asegurar que el valor de ω^* para el cual ocurre el colapso es $\omega = 0$.

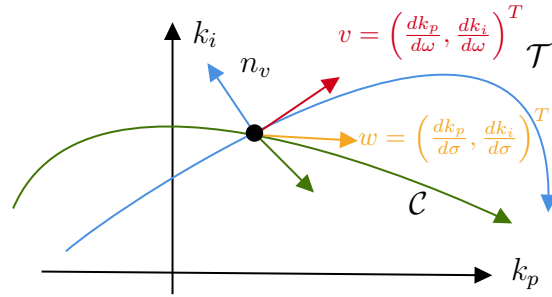


Figura 3.8: Punto en que se encuentran las curvas paramétricas $\mathcal{T}$ y $\mathcal{C}$, se busca que la proyección de la tangente a la curva $\mathcal{C}$ con la normal a la curva $\mathcal{T}$ apunte a la región a la derecha conforme nos movemos en el sentido positivo de la curva $\mathcal{T}$, de manera que el colapso pueda ocurrir.

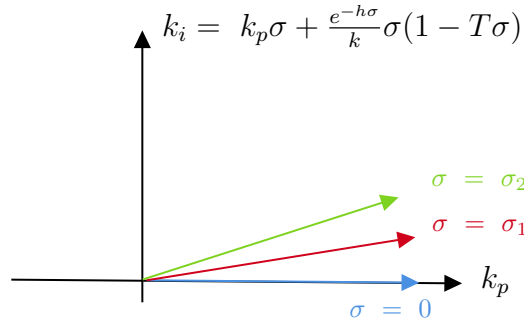


Figura 3.9: Pendiente de la curva singular k_i

3.4. Resultado principal: el máximo decaimiento exponencial

Como se mencionó al final de la sección anterior, de acuerdo con la observación realizada acerca del comportamiento de la curva de cruce de estabilidad $\mathcal{T}$ y de la recta singular asociada a $\omega = 0$, el colapso de la región de estabilidad $\mathcal{D}(0)$ debe presentarse para algún σ crítico, digamos σ_m y, justamente, cuando $\omega = 0$. Además, observemos que tres raíces entran en contacto al momento de producirse dicho colapso, pues se encuentran dos puntos correspondientes a la curva y un punto correspondiente a la recta singular, por lo que podemos suponer que el colapso no solo ocurre en $\omega = 0$, sino que este además corresponde a una triple raíz. Con lo anterior en mente, considérese el siguiente teorema:

Teorema 3.1 (Teorema del máximo decaimiento exponencial)

El máximo decaimiento exponencial global ocurre en una triple raíz real ubicada en $s = -\sigma_m$. Más aún, σ^m está dado por:

(i) Si $T > 0$ o bien $T < 0$ y $-T < h$, entonces:

$$\sigma_m := \frac{h + 4T - \sqrt{h^2 + 8T^2}}{2hT}. \quad (3.22)$$

(ii) Si $T < 0$ y $-T > h$, entonces:

$$\sigma_m := \frac{h + 4T + \sqrt{h^2 + 8T^2}}{2hT}. \quad (3.23)$$

(iii) Si $T = -h$ entonces el sistema es inestable para todo $(k_p, k_i) \in \mathbb{R}^2$.

Demostración. Si existe una triple raíz en $\omega = 0$ y $\sigma = \sigma_m$, entonces $P(s = 0, \sigma = \sigma_m, k_p, k_i) = 0$, $P'(s = 0, \sigma = \sigma_m, k_p, k_i) = 0$ y $P''(s = 0, \sigma = \sigma_m, k_p, k_i) = 0$. Esto da paso al siguiente sistema de ecuaciones:

$$P(s = 0, \sigma, k_p, k_i) = T\sigma^2 - \sigma + ke^{h\sigma}(-k_p\sigma + k_i) = 0 \quad (3.24)$$

$$P'(s = 0, \sigma, k_p, k_i) = -2T\sigma + 1 - ke^{h\sigma}(-k_p + h(-k_p\sigma + k_i)) = 0 \quad (3.25)$$

$$P''(s = 0, \sigma, k_p, k_i) = 2T + hke^{h\sigma}(-2k_p + h(-k_p\sigma + k_i)) = 0. \quad (3.26)$$

Ahora de (3.24) y (3.25) podemos encontrar los valores de k_p y k_i como:

$$k_p = -\frac{e^{-h\sigma}(1 - h\sigma - 2T\sigma + hT\sigma^2)}{k} \quad (3.27)$$

y

$$k_i = -\frac{e^{-h\sigma}\sigma^2(-h - T + hT\sigma)}{k}, \quad (3.28)$$

Sustituyendo (3.27) y (3.28) en (3.26) y resolviendo para σ se obtiene:

$$\sigma = \frac{h + 4T \pm \sqrt{h^2 + 8T^2}}{2hT}. \quad (3.29)$$

Sabemos que (3.29) representa puntos en los que ocurre una triple raíz. Consideremos ahora que $T > 0$. Por un lado nos interesan únicamente valores de $\sigma \in \mathbb{R}_+$, por lo que la siguiente desigualdad debe ser verdadera:

$$h + 4T \pm \sqrt{h^2 + 8T^2} > 0. \quad (3.30)$$

Separando ambos términos en (3.30) y elevandolos al cuadrado obtenemos:

$$h^2 + 8hT + 16T^2 > h^2 + 8T^2 \implies 8hT + 8T^2,$$

dado que h y T son ambas positivas, (3.30) es verdadero siempre que $T > 0$.

Por otro lado, (3.29) nos da dos soluciones para las cuales existe una triple raíz, sin embargo el colapso de la región estable debe corresponder al primer σ que cumpla con la condición (de lo contrario el colapso ocurre fuera de la región de estabilidad), por lo que la solución menor que corresponde a un σ positivo es:

$$\sigma = \frac{h + 4T - \sqrt{h^2 + 8T^2}}{2hT}$$

Consideremos ahora que $T < 0$, por lo que ahora el interés es:

$$\frac{h + 4T \pm \sqrt{h^2 + 8T^2}}{2hT} < 0. \quad (3.31)$$

Para simplificar el análisis consideremos $T = -T$, con $T > 0$, de modo que la desigualdad (3.31) se reescribe:

$$\frac{h - 4T \pm \sqrt{h^2 + 8T^2}}{-2hT} < 0.$$

Dada la forma del lado izquierdo de la desigualdad, podemos asociar la expresión a la solución de una ecuación de segundo orden. Para ello, consideremos la variable auxiliar z , y la siguiente ecuación:

$$az^2 + bz + c = (hT)z^2 + (h - 4T)z + 2\left(\frac{T}{h} - 1\right) = 0 \quad (3.32)$$

Sean z_1 y z_2 soluciones de (3.32), entonces, por un lado ya que $h^2 + 8T^2 > 0$, sabemos que $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}$. Por otro lado, sabemos que:

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

Ahora, si $T > h$, entonces $c > 0$, lo que significa que ambas soluciones comparten signo. Por otro lado, cuando esto ocurre $b < 0$, por lo que $z_1 + z_2 > 0$, dado que ambas comparten signo, estas deben ser positivas, y por lo tanto la menor de las soluciones positivas esta dada por:

$$\sigma = \frac{h + 4T - \sqrt{h^2 + 8T^2}}{2hT}$$

Consideremos ahora que $T < h$, esto implica que $c < 0$, y por tanto que existe una solución positiva, y otra negativa. Por una inspección directa nos damos cuenta que la solución positiva es:

$$\sigma = \frac{h + 4T + \sqrt{h^2 + 8T^2}}{2hT}.$$

Por último, si $T = h$, $c = 0$, lo que significa que al menos una de las dos soluciones es 0. Dado que para este caso $b < 0$, $-b > 0$ y por lo tanto la solución distinta de 0 es positiva. Sin embargo, el primer colapso ocurriría en $\sigma = 0$, o lo que es equivalente, no habría ningún corrimiento a la izquierda del eje imaginario para el cual el sistema pudiera ser estable, lo que significa que ningún (k_p, k_i) puede colocar raíces a la izquierda del eje imaginario. Con esto queda concluida la demostración. ■

Nota 3.3

Uno de las consecuencias importantes del resultado anterior es que permite detectar una situación no observada anteriormente en la literatura. En efecto, tal y como se puede constatar en (Yi et al., 2012), anteriormente se tenía la idea de que un controlador PI era suficiente para estabilizar cualquier sistema de primer orden con retardos, no obstante, a la luz del resultado anterior es evidente que este no es el caso, de hecho tal y como lo indica el inciso (iii) si $T = -h$ entonces el sistema será inestable para cualquier combinación de ganancias k_p y k_i . Cabe mencionar que esto abre la posibilidad a considerar otra clase de controladores.

Observemos que, si bien el resultado anterior caracteriza el punto donde se encuentra el máximo decaimiento exponencial posible, este también nos permite sintonizar el controlador que alcance dicho decaimiento:

Corolario 3.1

Para un sistema definido por (3.1)-(3.2), el máximo decaimiento es alcanzado con:

$$k_p = -\frac{e^{-h\sigma_m}(1 - h\sigma_m - 2T\sigma_m + hT\sigma_m^2)}{k} \quad (3.33)$$

y

$$k_i = -\frac{e^{-h\sigma_m}\sigma_m^2(-h - T + hT\sigma_m)}{k}, \quad (3.34)$$

donde σ_m está dado de acuerdo con el Teorema 3.1

Demostración. De sustituir el resultado del Teorema 3.1 en (3.27) y (3.28) obtenemos (3.33) y (3.34). ■

3.5. Ejemplos numéricos

La sección anterior nos permitió obtener herramientas para diseñar controladores PI que optimicen el desempeño de sistemas de primer orden con un retardo, sin importar si estos son o no estables en lazo abierto. En esta sección se muestra el resultado por medio de ejemplos numéricos tanto para el caso estable como el inestable.

3.5.1. Caso estable en lazo abierto.

Considérese el sistema de primer orden con retardo dado por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{4s + 1} e^{-s}, \quad (3.35)$$

sujeto a un controlador de tipo PI. Seleccionamos entonces tres pares diferentes (k_p, k_i) dentro del dominio de estabilidad. Primeramente obtenemos la región de estabilidad dentro del plano paramétrico para distintos valores de σ , esto es mostrado en la Figura 3.10, en donde se muestra el punto de colapso (mostrado por el círculo azul) así como un par adicional de puntos para comparar en desempeño con el caso óptimo. Además, en la Figura 3.11 se muestran las regiones de estabilidad y su evolución con respecto a σ , de manera que se pueda apreciar como se alcanza a un máximo en el punto de colapso.

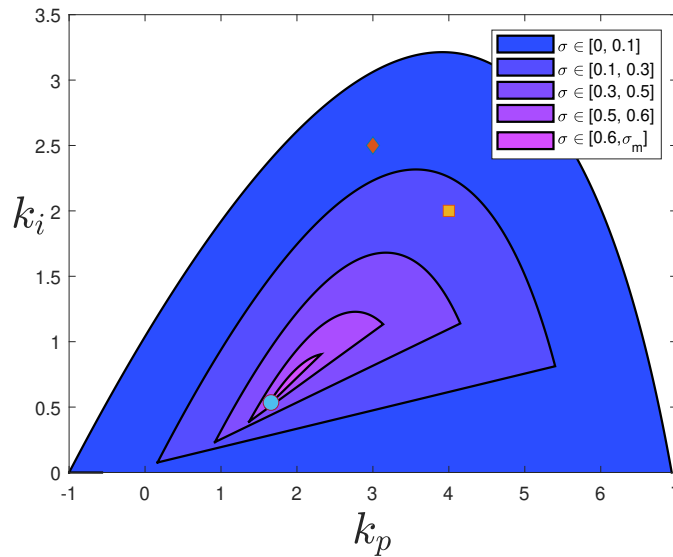


Figura 3.10: Región de estabilidad en el plano paramétrico. Se muestra el cambio en la región para diferentes valores de σ y se seleccionan 3 pares de parámetros para comparar su desempeño.

La Figura 3.12 muestra la salida del sistema considerando la referencia $r(t)$. Podemos observar que la respuesta asociada al máximo decaimiento exponencial (azul), alcanza una regulación más rápida con respecto a los otros dos pares de ganancias. Cuando hablamos de velocidad de regulación nos referimos al tiempo que le toma a la salida alcanzar a la referencia.

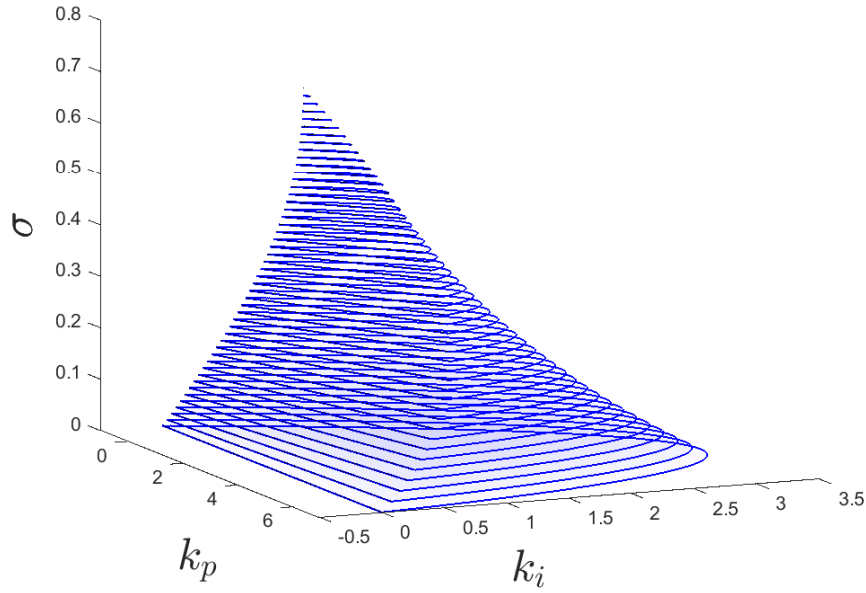


Figura 3.11: Región de estabilidad en el plano paramétrico. Se muestra la evolución con σ como una tercer dimensión, lo que permite apreciar el punto de colapso como un máximo con respecto a σ .

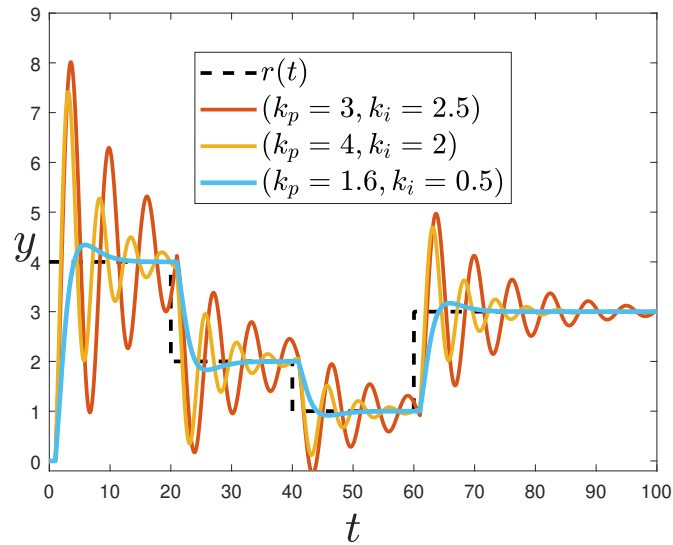


Figura 3.12: Comparación de la salida del sistema cuando se considera un diseño óptimo del controlador, haciendo uso de el Teorema 3.1, y otros puntos que se encuentran dentro del dominio de estabilidad.

3.5.2. Caso inestable en lazo abierto

Tomemos ahora el caso de un sistema inestable en lazo abierto, como es el caso del siguiente sistema:

$$G_i(s) = \frac{-5}{-2.5s + 1} e^{-0.2s}. \quad (3.36)$$

Primeramente podemos ver que $h < -T$, por lo que de acuerdo con el Teorema 3.1 se debe considerar el valor de:

$$\sigma_m = \frac{h + 4T + \sqrt{h^2 + 8T^2}}{2hT} = 2.7271$$

Por un lado, podemos comprobar el punto de colapso encontrando las regiones σ -estables hasta alcanzarlo, como se muestra en la Figuras 3.14 y 3.13. Por otro lado, haciendo uso del Corolario 3.1 podemos seleccionar las ganancias (k_p, k_i) que permitan una salida óptima del sistema, como se muestra en la Figura 3.15.

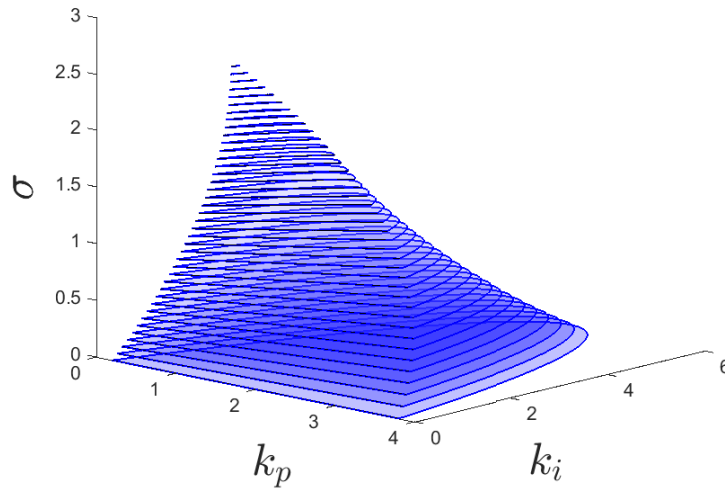


Figura 3.13: Localización del σ máximo para el caso del sistema (3.36)

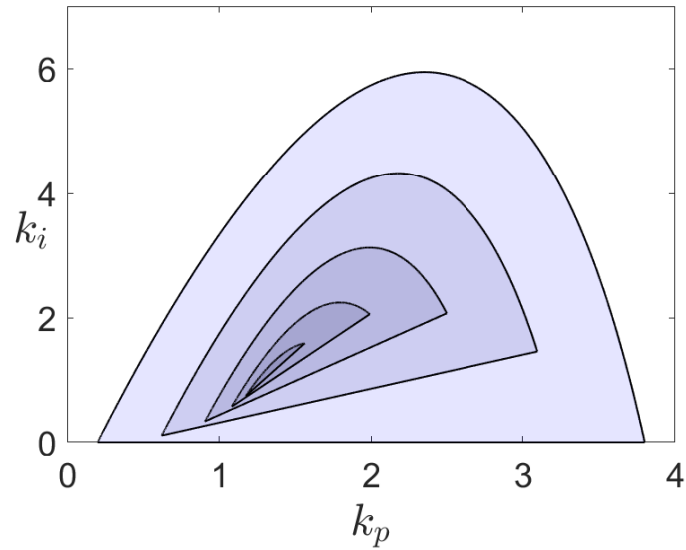


Figura 3.14: Colapso de la región de estabilidad en el plano paramétrico para un sistema inestable en lazo abierto.

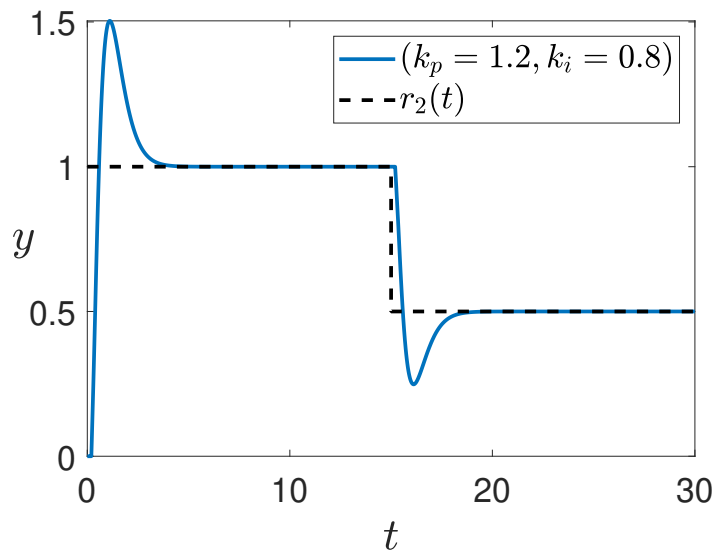


Figura 3.15: Control de la salida del sistema (3.36) mediante un PI sintonizado por medio del resultado en el Corloario 3.1

Capítulo 4

Fragilidad del controlador

En el capítulo anterior se presentaron las herramientas analíticas necesarias para diseñar controladores PI que optimizan el desempeño de sistemas de primer orden con retardo constante. En este capítulo se abordará el problema de *Fragilidad* del controlador. En efecto, es importante mencionar que dentro de los elementos más importantes para diseñar un controlador se deben considerar:

- (i) Criterios de desempeño
- (ii) Problemas de robustez
- (iii) Fragilidad

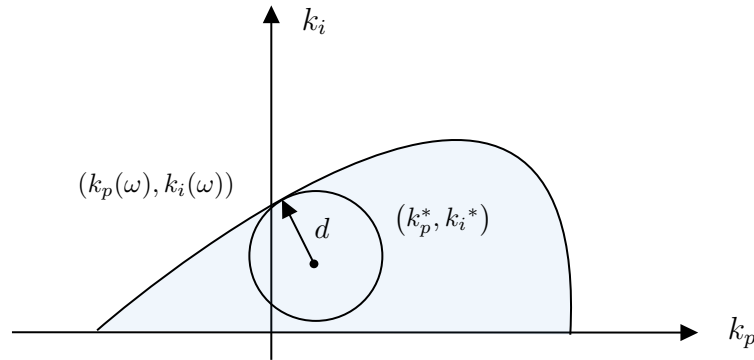


Figura 4.1: Fragilidad del controlador PI $\mathbf{k}^* := (k_p^*, k_i^*)$. La medida de la fragilidad del controlador $\mathbf{k}^*$ está dada por d .

En lo que respecta a la fragilidad, ésta se puede ver como una medida de robustez del sistema en lazo cerrado frente a incertidumbres en las ganancias de control, es decir, consiste en el cálculo de la máxima desviación d que un controlador dado $\mathbf{k}^* = [k_p^*, k_i^*]^T$ puede permitir, sin comprometer la estabilidad del sistema en lazo

cerrado. En otras palabras, el sistema permanecerá estable siempre y cuando se cumpla la siguiente desigualdad:

$$\sqrt{(k_p - k_p^*)^2 + (k_i - k_i^*)^2} < d$$

La Figura 4.1 ilustra dicho concepto.

Una de las motivaciones importante para considerar la fragilidad es que todo controlador se debe de implementar, bien sea analógicamente o digitalmente, cualquiera que sea el caso se tienen las siguientes circunstancias:

Implementación Analógica: Los parámetros del controlador se verán afectadas por las imprecisiones en los componentes (resistencias, condensadores). En otras palabras, la fragilidad del controlador se verá afectada por la tolerancia de sus componentes.

Implementación Digital: En este caso, cualquiera que sea la plataforma de implementación digital (DSPs, microcontroladores, etc.), éstas estarán sujetas a inexactitudes debidas al ancho (finito) de palabra, conversiones analógicas–digitales y digitales–analógicas, errores de truncamiento en cálculos numéricos, entre otras.

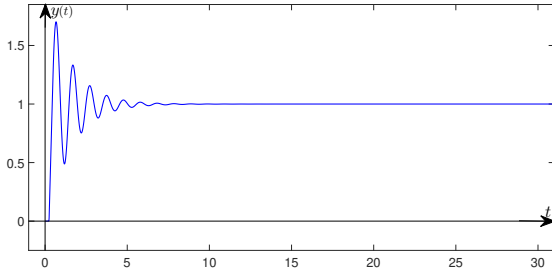
Lo anterior indica que el análisis de fragilidad, es un elemento de vital importancia a considerar en el diseño de cualquier controlador. Con la finalidad, de ilustrar la discusión anterior, se considera el siguiente ejemplo motivacional.

4.0.1. Ejemplo motivacional

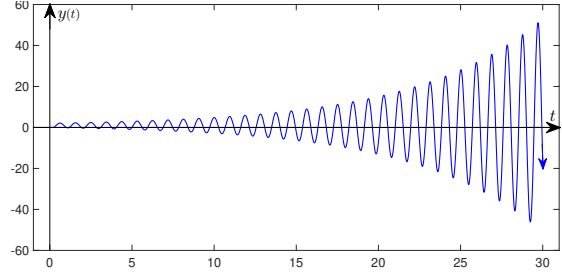
Con la finalidad de ilustrar lo crucial del estudio de la fragilidad de un controlador, consideremos la representación de primer orden de la linealización del sistema TCP/AQM propuesto por Hollot et al. (2002), el cual está dado por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{54541.32e^{-0.24s}}{1.89s + 1}. \quad (4.1)$$

Considerando un controlador PI dado por $C(s) = k \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$ con ganancias $(k, T_i) = (18 \times 10^{-5}, 2.4)$, se obtiene el sistema estable ilustrado en la Figura 4.2a. Ahora, si en lugar de considerar la ganancia proporcional anterior, se toma $k = 24 \times 10^{-5}$, se obtiene como resultado el sistema inestable ilustrado en la Figura 4.2b. Lo anterior implica que una variación suficientemente pequeña en uno de sus parámetros es suficiente para que el sistema se desestabilice. Cabe mencionar que la importancia del estudio de la fragilidad ha sido discutida anteriormente en el contexto de sistemas sin retardo (véase, por ejemplo, Keel and Bhattacharyya (1998,9); Pertti (1998)).



(a) Salida del sistema descrito por (4.1) sujeto al controlador PI óptimo en términos del decaimiento exponencial del sistema.



(b) Salida del sistema descrito por (4.1) con una desviación en las ganancias del controlador PI.

4.0.2. Computo de la fragilidad

Con la finalidad de analizar la estabilidad de un controlador dado, considérese la función $\gamma(\omega)$ definida como sigue:

$$\gamma(\omega) := \begin{cases} \sqrt{(k_p(\omega) - k_p^*)^2 + (k_i(\omega) - k_i^*)^2} & \text{si } \omega \in \mathbb{R}_+, \\ |k_i^*| & \text{si } \omega = 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

Adicionalmente, para facilitar la presentación de los resultados defínase la función vectorial $\mathbf{k} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $\mathbf{k}(\omega) := [k_p(\omega, 0), k_i(\omega, 0)]^T$, con k_p y k_i definidas como en (3.6) y (3.7), respectivamente.

Proposición 4.1 (Computo de la fragilidad del controlador)

Sea $\mathbf{k}^* := (k_p^*, k_i^*)$ un controlador PI dado que estabiliza al sistema en lazo cerrado. Entonces, la máxima desviación d del controlador $\mathbf{k}^*$ que permite mantener al estabilidad del lazo cerrado está dada por:

$$d := \min_{\omega \in \Omega_c \cup \{0\}} \{\gamma(\omega)\}, \quad (4.3)$$

en donde $\Omega_c \subset \mathbb{R}_+$ es el conjunto de soluciones de la función $f : (0, \omega_c] \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por:

$$f(\omega) := \langle \mathbf{k}(\omega) - \mathbf{k}^*, \frac{d\mathbf{k}(\omega)}{d\omega} \rangle, \quad (4.4)$$

con ω_c definida como:

$$\omega_c := \min\{\omega_0 \in \mathbb{R}_+ : T\omega_0 \cos(h\omega_0) + \sin(h\omega_0) = 0\}. \quad (4.5)$$

Demostración. Dado que partimos de que $\mathbf{k}^*$ es un controlador capaz de estabilizar el sistema, este debe pertenecer a la región de estabilidad, cuyas fronteras están definidas como se vio en los capítulos previos. La única manera entonces de que el

sistema pierda estabilidad, es si dicho controlador tiene una desviación tal que cruce con cualquiera de las fronteras de estabilidad, el objetivo es computar la distancia entre $\mathbf{k}^*$ y dichas fronteras. Más aún, esta frontera está compuesta por los puntos $\mathbf{k}(\omega) := [k_p(\omega, 0), k_i(\omega, 0)]$ y un segmento del eje k_p . Cabe mencionar que, de acuerdo con los resultados presentados previamente, los puntos $\mathbf{k}(\omega)$ son diferenciables para todo valor de $\omega \neq 0$. Para calcular la distancia entre (k_p^*, k_i^*) y $k_p(\omega, 0), k_i(\omega, 0)$ necesitamos identificar aquellos puntos en los cuales el vector $\mathbf{k} - \mathbf{k}^*$ y la tangente a la curva son ortogonales. En otras palabras, necesitamos encontrar las soluciones de:

$$f(\omega) = 0,$$

en dónde f está dada por (4.4). Finalmente, dado que la distancia al eje k_p está dada por $|k_i^*|$, la distancia mínima a la frontera está dada por (4.3) ■

Nota 4.1

El cálculo analítico de ω_c y de las soluciones de $f(\omega)$ no es trivial, sin embargo es posible encontrar sus soluciones de manera numérica.

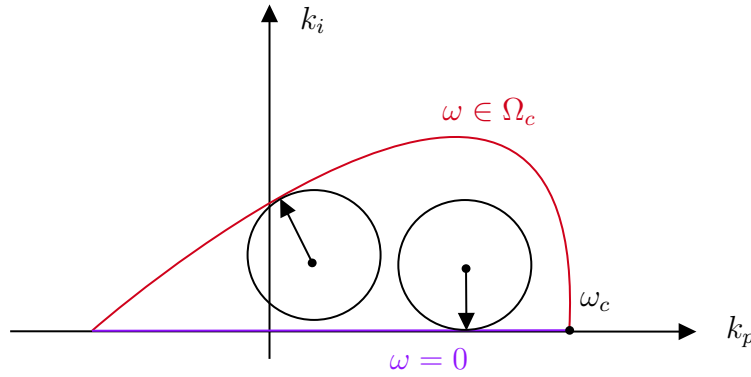


Figura 4.3: Ejemplificación de los dos casos posibles de distancia con la frontera de estabilidad.

4.0.3. σ –fragilidad

Nos referimos a σ –fragilidad, como a la máxima incertidumbre en las ganancias del controlador que se puede permitir, sin perder un cierto desempeño, es decir, la desviación mínima que provocaría que el controlador cruce la frontera de una región σ –estable dada. El estudio de esta resulta vital pues, en ocasiones, los sistemas no requieren únicamente de estabilizarse, sino que se busca tener un cierto rendimiento.

Esto puede ser por distintas circunstancias, como lo puede ser el que el controlador en cuestión sea parte de un esquema de control mayor, o bien, puede que el sistema en cuestión requiera de una cierta velocidad en su respuesta para llevar a cabo la función que de él se requiere.

Considere entonces la siguiente función $\gamma(\omega, \sigma)$:

$$\gamma(\omega, \sigma) := \begin{cases} \sqrt{(k_p(\omega, \sigma) - k_p^*)^2 + (k_i(\omega, \sigma) - k_i^*)^2} & \text{si } \omega \in \mathbb{R}_+, \sigma \geq 0, \\ \frac{|k_i^* - k_p^* \sigma - \frac{e^{-h\sigma}}{k} \sigma(1 - T\sigma)|}{\sqrt{1 + \sigma^2}} & \text{si } \omega = 0, \sigma \geq 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

Proposición 4.2 (Computo de la σ -fragilidad)

Sea $\sigma \in \mathbb{R}_+$ dado, y sea $\mathbf{k}^* := (k_p^*, k_i^*)$ un controlador PI dado que asegura la σ -estabilidad del sistema en lazo cerrado. Entonces la máxima desviación d del controlador $\mathbf{k}^*$ que permite garantizar la σ -estabilidad, está dada por:

$$d := \min_{\omega \in \Omega_c \cup \{0\}} \{\gamma(\omega, \sigma)\}, \quad (4.7)$$

En donde $\Omega_c \in \mathbb{R}_+$ es el conjunto de soluciones de la función $f : (0, \omega_c] \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por:

$$f(\omega, \sigma) := \langle \mathbf{k}(\omega, \sigma) - \mathbf{k}^*, \frac{d\mathbf{k}(\omega, \sigma)}{d\omega} \rangle, \quad (4.8)$$

con ω_c definida como:

$$\omega_c := \min\{\omega_0 \in \mathbb{R}_+ : g(\omega_0, \sigma) = 0\}, \quad (4.9)$$

en donde $g(\omega_0, \sigma)$ se define como:

$$g(\omega_0, \sigma) := e^{-h\sigma}(\sigma(T\sigma - 1) + (\sigma + T(\omega_0^2 - \sigma^2)) \cos(h\omega_0) + (1 - 2T\sigma)\omega_0 \sin(h\omega_0)). \quad (4.10)$$

Demostración. La demostración sigue el mismo procedimiento que en el caso $\sigma = 0$ para los valores de $\omega \neq 0$. Sin embargo, la intersección está dada por el punto donde la curva y la recta coinciden, es decir:

$$\min_{\omega > 0} \{k_i(\omega, \sigma) - k_p(\omega, \sigma)\sigma - \frac{e^{-h\sigma}}{k} \sigma(1 - T\sigma) = 0\},$$

De donde por manipulación algebraica se llega a (4.10). Para el caso de $\omega = 0$ con $\sigma \neq 0$ la recta se encuentra dada por:

$$k_i = k_p \sigma + \frac{e^{-h\sigma}}{k} \sigma(1 - T\sigma),$$

calculando la distancia de un punto en el plano a una recta en el mismo obtenemos:

$$\frac{|k_i^* - k_p^* \sigma - \frac{e^{-h\sigma}}{k} \sigma(1 - T\sigma)|}{\sqrt{1 + \sigma^2}}.$$

Con esta observación se concluye la demostración. ■

4.0.4. Ejemplo ilustrativo 1

A continuación se presentan algunos ejemplos que ayuden a ilustrar los conceptos presentados en este capítulo.

Consideremos el siguiente sistema, estudiado en Wang et al. (2015):

$$G(s) = \frac{e^{-0.2s}}{0.5s + 1} \quad (4.11)$$

Por un lado, haciendo uso del resultado presentado en este trabajo obtenemos las ganancias de control que nos permiten alcanzar el máximo decaimiento exponencial posible: $(k_p, k_i) = (0.9898, 2.1619)$. Computando las distancias a ambas parte de la frontera obtenemos:

$$\begin{aligned} \gamma(\omega^*) &= k_i(1.929) = 1.5798 \\ \gamma(0) &= k_i = 2.1619. \end{aligned}$$

Por otro lado, en su trabajo Wang et al. (2015) proponen el siguiente controlador: $(k_p, k_i) = (0.6013, 1.8114)$. Para este caso, computando los valores de las distancias obtenemos:

$$\begin{aligned} \gamma(\omega^*) &= k_i(1.7499) = 1.26125 \\ \gamma(0) &= k_i = 1.8114. \end{aligned}$$

Así, la siguiente tabla permite comparar ambos controladores en términos de fragilidad:

Tabla 4.1: Fragilidad de ambos controladores.

Controlador	ω^*	$[\gamma(\omega^*), \gamma(0)]$	d
Máximo decaimiento	1.929	[1.5798, 2.1619]	1.5798
Wang et al.	1.749	[1.26125, 1.8114]	1.26125

La región de estabilidad, así como la ubicación de ambos controladores, se muestran en la Figura 4.4. El ejemplo presentado ilustra una medida de comparación de robustez entre dos controladores estabilizantes de un mismo sistema. Si bien en este caso el control que proporciona en máximo decaimiento exponencial posible resulta menos frágil que el controlador con que se compara, observe que en general el controlador no es el menos frágil posible.

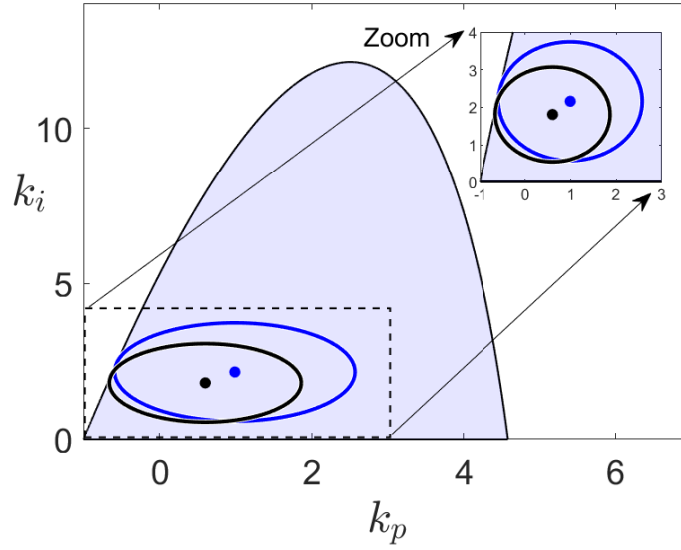


Figura 4.4: Fragilidad del controlador con máximo decaimiento exponencial del sistema (4.11) (azul) y del controlador propuesto en Wang et al. (2015) (negro).

4.0.5. Ejemplo ilustrativo 2

Consideremos nuevamente el ejemplo presentado en el Capítulo 3, donde $G(s)$ se define de la siguiente manera:

$$G(s) = \frac{1}{4s + 1} e^{-s},$$

y consideremos el problema de la σ -estabilidad con $\sigma = 0.3$. Eligiendo entonces un par de controladores σ -estabilizantes dados por $\mathbf{k}_1 = [2, 0.9]^T$ y $\mathbf{k}_2 = [3, 1.15]^T$ podemos computar sus correspondientes distancias a cada una de las fronteras de estabilidad, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 4.2: σ -fragilidad de ambos controladores.

Controlador	ω^*	$[\gamma(\omega^*), \gamma(0)]$	d
$\mathbf{k}_1$	0.618258	[0.220586, 0.329922]	0.220586
$\mathbf{k}_2$	0.973184	[0.454114, 0.282031]	0.282031

Vale la pena destacar que, a diferencia del ejemplo anterior, en este caso uno de los controladores ($\mathbf{k}_1$) tiene una distancia mínima con la $\gamma(\omega^*)$, mientras que $\mathbf{k}_2$ la tiene con la recta correspondiente a $\omega = 0$. Ambos controladores se muestran en el interior de la región σ -estable en la Figura 4.5.

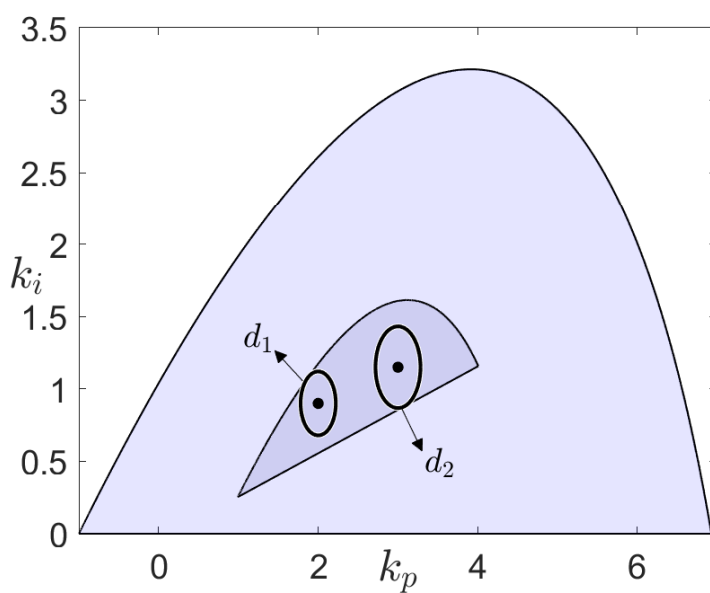


Figura 4.5: Fragilidad de ambos controladores respecto a la región σ –estable, para $\sigma = 0.3$. d_1 corresponde a la fragilidad del controlador $\mathbf{k}_1$, mientras que d_2 corresponde a la fragilidad de $\mathbf{k}_2$.

Capítulo 5

Verificación experimental

Con el objetivo de validar el método de sintonización propuesto en este trabajo, a lo largo de este capítulo se presenta la implementación de un controlador PI en una plataforma experimental. En particular se consideró el caso de un robot diferencial, cuyos motores resultan tener una dinámica como la propuesta en este trabajo. Vale la pena destacar que, sí bien el algoritmo presentado en este trabajo optimiza la respuesta en velocidad angular de los motores, y a su vez la velocidad total (lineal y angular) del robot, este no permite realizar el seguimiento de trayectorias. No obstante, como se explica más adelante, la optimización en la respuesta de la velocidad de los motores, permite realizar el seguimiento de trayectorias de un sistema multiagente.

Nota 5.1

Un sistema multiagente es un sistema compuesto por m múltiples agentes inteligentes que interactúan entre sí.

5.1. Aplicaciones a un robot diferencial

Los robots diferenciales son una clase de robots móviles terrestres sobre ruedas, cuya configuración está conformada por 2 ruedas de movimiento independiente y una rueda de movimiento libre. Por sus aplicaciones los robots diferenciales resultan de interés en la investigación de robótica móvil e ingeniería de control (Baturone, 2001). En general, existen tareas que un solo robot no puede llevar a cabo, por ello es importante tener técnicas de control que nos permitan controlar sistemas en los que dos o más robots interactúan.

Como validación experimental se hace uso de 2 robots diferenciales, como el mostrado en la Figura 5.1. Cada uno de ellos tiene motores de corriente directa (CD) cuyas dinámicas de velocidad angular están descritas como se muestra a continuación:

$$\frac{V(s)}{\Omega(s)} = G_{r1}(s) = \frac{1.0646e^{-0.084s}}{0.056s + 1}$$

$$\frac{V(s)}{\Omega(s)} = G_{l1}(s) = \frac{1.1257e^{-0.0954s}}{0.0333s + 1},$$

dónde $G_{r1}(s)$ y G_{l1} representan los motores derecho e izquierdo respectivamente del primer robot, el cual se identificará como *Robot 1*.

$$\frac{V(s)}{\Omega(s)} = G_{r2}(s) = \frac{0.9507e^{-0.01257s}}{0.0412s + 1}$$

$$\frac{V(s)}{\Omega(s)} = G_{l2}(s) = \frac{1.0339e^{-0.0947s}}{0.0626s + 1},$$

dónde $G_{r2}(s)$ y G_{l2} representan los motores derecho e izquierdo respectivamente del segundo robot, el cual se identificará como *Robot 2*.

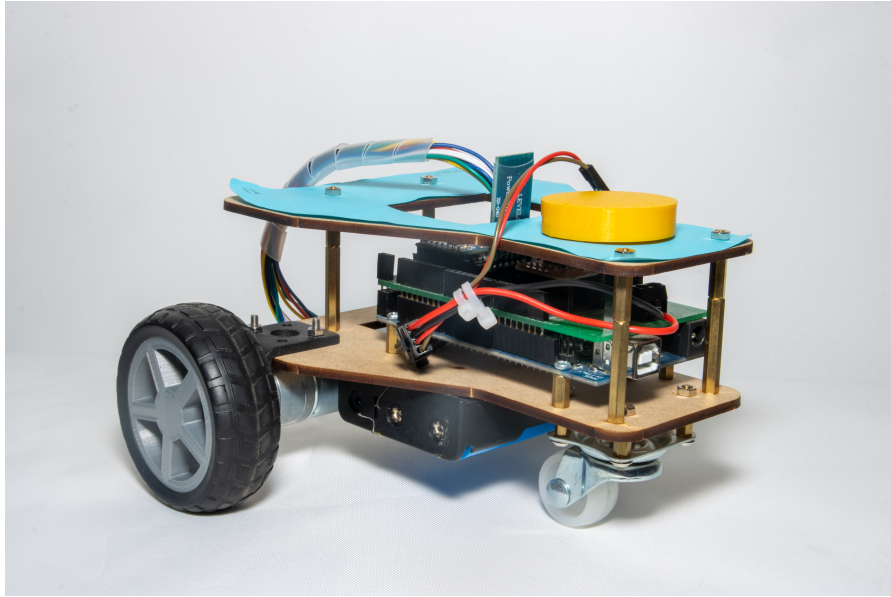
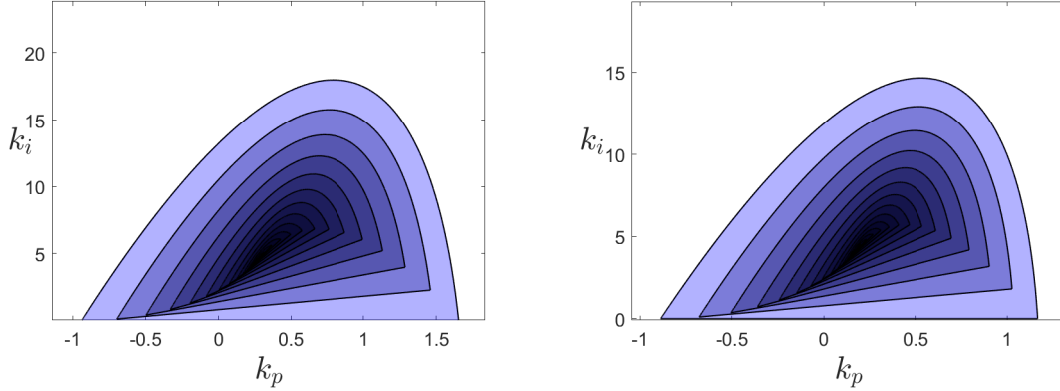


Figura 5.1: Robot diferencial formado por 2 ruedas, conectadas cada una a motores de CD, y una rueda libre.

Se considera que el retardo del sistema se debe tanto a la holgura o movimiento perdido del mecanismo causado por espacios entre sus piezas y que es existente en

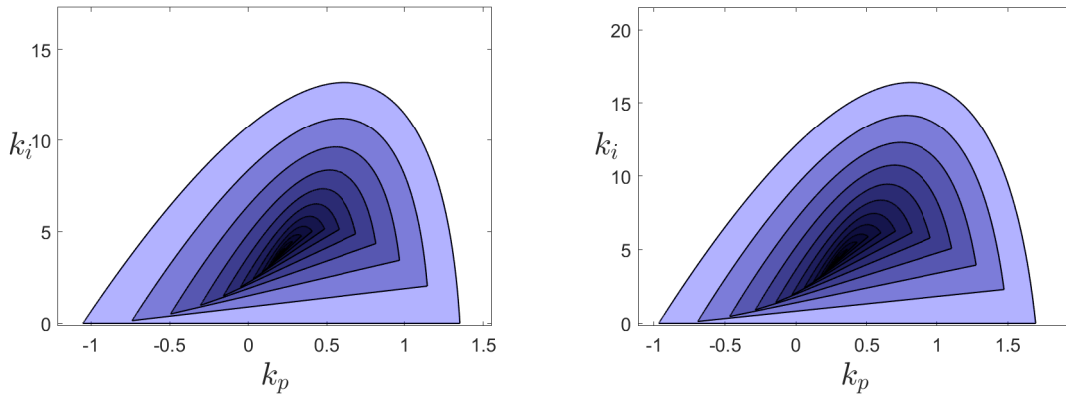
cualquier sistema de engranes, como a la inercia mecánica presente en todos los motores.

A partir de los modelos descritos se puede encontrar la región de estabilidad junto con su colapso dentro del plano de los parámetros (k_p, k_i) para cada uno de los motores. La Figura 5.2 muestra las regiones de estabilidad colapsando en el caso del Robot 1, mientras las Figura 5.3 muestra el mismo caso para el Robot 2.



(a) Región estable y colapso en el plano paramétrico del motor derecho del Robot 1 (b) Región estable y colapso en el plano paramétrico del motor izquierdo del Robot 1

Figura 5.2: Regiones de estabilidad para el Robot 1



(a) Región estable y colapso en el plano paramétrico del motor derecho del Robot 2 (b) Región estable y colapso en el plano paramétrico del motor izquierdo del Robot 2

Figura 5.3: Regiones de estabilidad para el Robot 2

Ahora consideremos, por un lado del Teorema 3.1 podemos calcular el máximo decaimiento exponencial, y haciendo uso del Corolario 3.1 se obtienen las siguientes ganancias para los 4 controladores:

Tabla 5.1: Ganancias calculadas a través del Corolario 3.1

Parámetro	Valor	Descripción
$k_{p_{r1}}$	0.2384	Ganancia proporcional motor derecho robot 1
$k_{i_{r1}}$	4.2144	Ganancia integral motor derecho robot 1
$k_{p_{l1}}$	0.1519	Ganancia proporcional motor izquierdo robot 1
$k_{i_{l1}}$	3.8731	Ganancia integral motor izquierdo robot 1
$k_{p_{r2}}$	0.1755	Ganancia proporcional motor derecho robot 2
$k_{i_{r2}}$	3.5183	Ganancia integral motor derecho robot 2
$k_{p_{l2}}$	0.2438	Ganancia proporcional motor izquierdo robot 2
$k_{i_{l2}}$	3.8528	Ganancia integral motor izquierdo robot 2

Por otro lado, con el fin de comparar la respuesta del controlador obtenido a partir del Corolario 3.1 con otro método de sintonización, se considera la sintonización conocida como λ (Veronesi and Visioli, 2020), la cual permite sintonizar un controlador del tipo PI a partir de la constante de tiempo del sistema, cuando el sistema es de la forma:

$$G(s) = \frac{ke^{-hs}}{Ts + 1}.$$

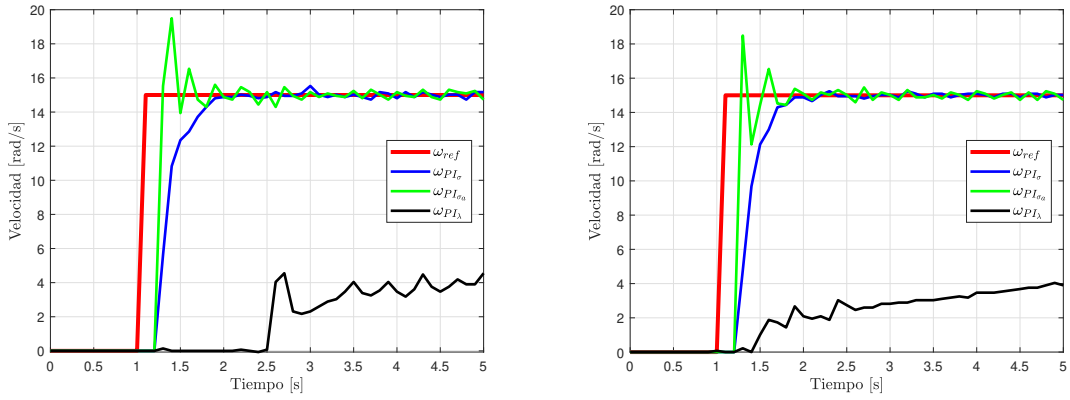
λ es entonces un parámetro que permite controlar la velocidad de respuesta del sistema. El autor Veronesi and Visioli (2020) recomienda utilizar $\lambda = 3T$ para obtener un controlador robusto. Bajo esta consideración se obtuvieron las siguientes ganancias de control:

Tabla 5.2: Ganancias calculadas a través de la sintonización tipo λ .

Parámetro	Valor	Descripción
$k_{p_{r1}}$	0.2087	Ganancia proporcional motor derecho robot 1
$k_{i_{r1}}$	0.0560	Ganancia integral motor derecho robot 1
$k_{p_{l1}}$	0.1515	Ganancia proporcional motor izquierdo robot 1
$k_{i_{l1}}$	0.0333	Ganancia integral motor izquierdo robot 1
$k_{p_{r2}}$	0.1738	Ganancia proporcional motor derecho robot 2
$k_{i_{r2}}$	0.0412	Ganancia integral motor derecho robot 2
$k_{p_{l2}}$	0.2575	Ganancia proporcional motor izquierdo robot 2
$k_{i_{l2}}$	0.0626	Ganancia integral motor izquierdo robot 2

Por último se considera también un par de ganancias arbitrarias pertenecientes a la región de estabilidad. Las Figura 5.4-5.5 muestra los resultados experimentales en las salidas controladas de velocidad de cada uno de los motores en ambos robots:

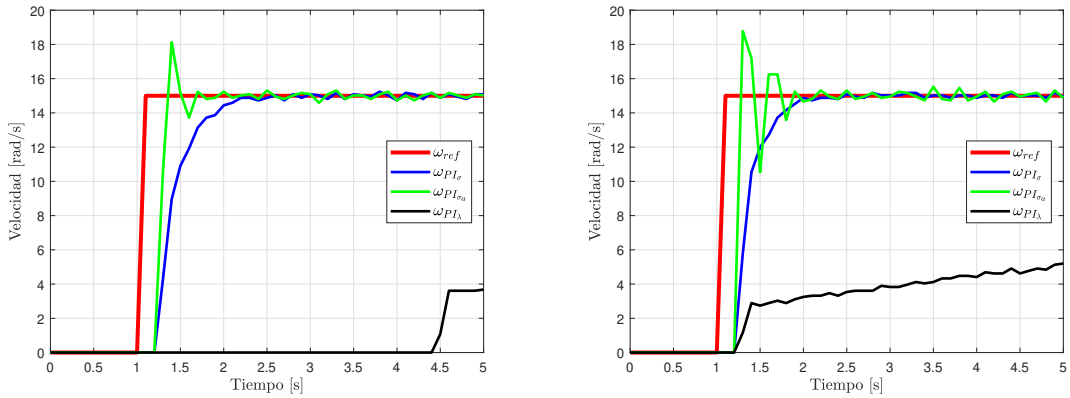
Una vez que se optimiza el control de las velocidades, este es incluido como lazo interno dentro de un esquema de control de trayectorias, como el mostrado el la



(a) Salida de velocidad angular del motor derecho en el Robot 1 para diferentes ganancias de control.

(b) Salida de velocidad angular del motor izquierdo en el Robot 1 para diferentes ganancias de control.

Figura 5.4: Salidas de velocidad controlada del Robot 1. Se muestra en azul la salida correspondiente al controlador óptimo, diseñado a partir del corolario 3.1.



(a) Salida de velocidad angular del motor derecho en el Robot 2 para diferentes ganancias de control.

(b) Salida de velocidad angular del motor izquierdo en el Robot 2 para diferentes ganancias de control.

Figura 5.5: Salidas de velocidad controlada del Robot 2. Se muestra en azul la salida correspondiente al controlador óptimo, diseñado a partir del corolario 3.1.

Figura 5.6

En este esquema se hace uso de una cámara para obtener la posición actual de cada robot, la cual se compara con la posición deseada. De esto, se obtiene una velocidad de referencia, la cual pasa por un integrador para obtener una referencia de posición de cada robot por separado. De esta última se obtiene una referencia de velocidad lineal, la cual se relaciona directamente con la velocidad angular de las ruedas del robot. Por último, por medio del controlador PI diseñado se controla

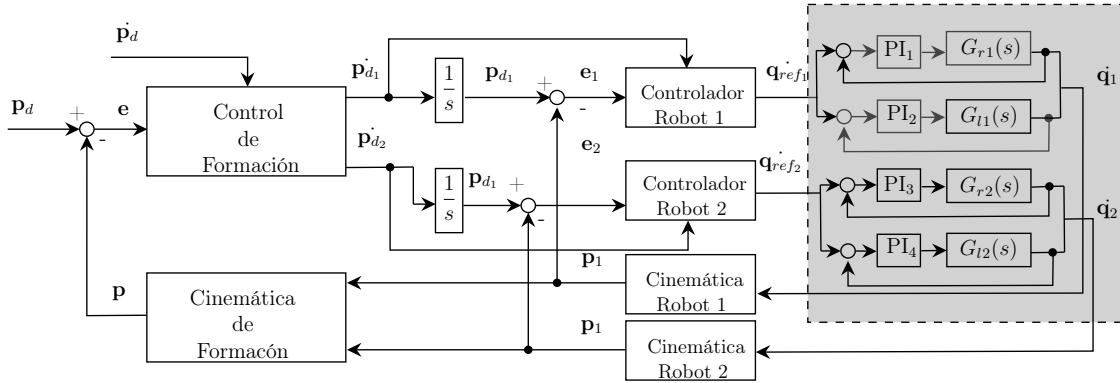


Figura 5.6: Esquema de control para el seguimiento de trayectorias de un sistema multiagente compuesto por dos robots diferenciales. En gris se muestra la contribución del controlador PI óptimo dentro del control del sistema.

dicha velocidad angular.

En las Figura 5.7 se muestra el seguimiento de una trayectoria por parte de ambos robots haciendo uso del esquema mostrado en la Figura 5.6.

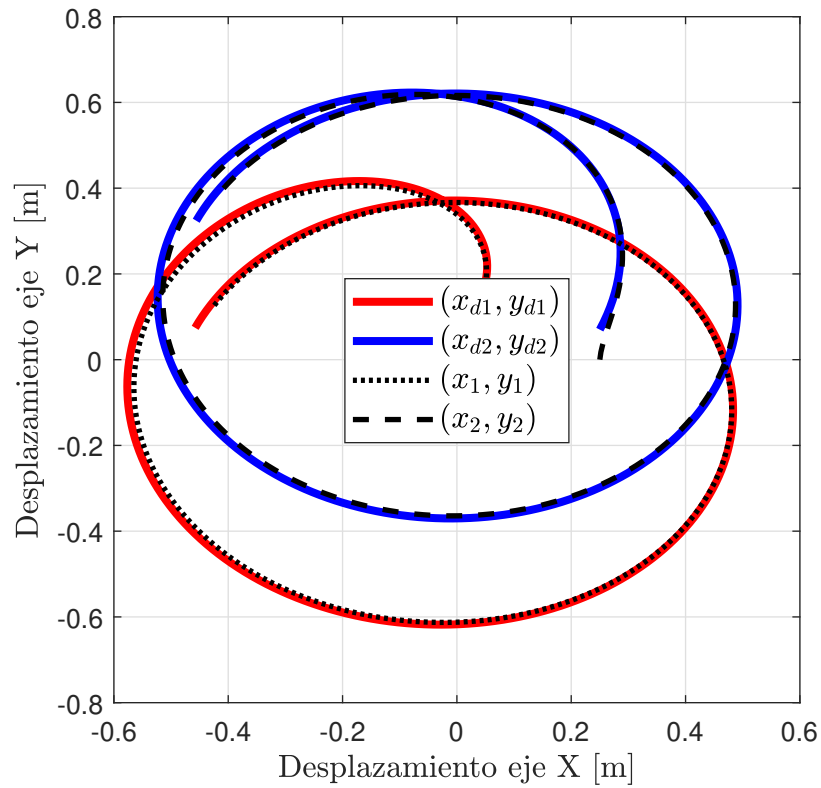


Figura 5.7: Seguimiento de trayectorias del sistema multiagente haciendo uso del sistema de control mostrado en la Figura 5.6. En rojo y azul se muestran las trayectorias a seguir por cada uno de los agentes, mientras las líneas punteadas muestran la trayectoria real del agente sometido al algoritmo de control.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo a futuro

6.0.1. Conclusiones

En este trabajo se identificó y diseño el máximo decaimiento exponencial para una clase particular de sistemas con retardos que, si bien pudiera parecer sencillo, mostró la dificultad de su análisis, misma que queda evidenciada ante la falta de resultados similares de manera previa. Además, mediante la transformada de Laplace se realizó el análisis basado en la ecuación característica del sistema sometido a un controlador clásico del tipo PI, y por ende se requirió de un análisis en variable compleja.

Se determinó también el punto exacto dentro del plano de los parámetros en donde ocurre el máximo decaimiento posible, lo cual llevó a reglas de sintonización que permitieran alcanzarlo. Cabe destacar que este resultado tiene un gran impacto en el área, pues, si bien previamente se habían encontrado resultados que permitieran, por ejemplo, realizar una colocación de polos, el algoritmo no permitía conocer hasta donde era un controlador PI capaz de colocar la raíz más a la derecha. En este sentido, otra contribución importante radica en la detección del caso particular para el cual no existe ningún controlador PI que sea capaz de estabilizar al sistema, es decir, el caso inestable en lazo abierto con $-T = h$.

El resultado fue validado mediante simulación numérica e implementación experimental, las cuales permitieron comprobar el correcto funcionamiento del controlador obtenido y, con ello, resaltar la importancia del estudio de esta clase de sistemas. Si bien este pudiese parecer sencillo, es capaz de capturar dinámicas complejas y, como se mencionó antes, su análisis no es trivial.

Adicionalmente, se realizó el análisis correspondiente a la fragilidad del controlador diseñado, el cual no es incluido en algunos de los trabajos más importantes relacionados a esta clase de sistemas. La fragilidad es un aspecto vital en el estudio de controladores, pues permite conocer en que medida el controlador es realizable.

Finalmente, el trabajo permitió mostrar la importancia de considerar el retardo del sistema en el diseño de controladores, con el fin de alcanzar la respuesta deseada, sin embargo, es importante destacar que existen casos aún más complejos que aún deben ser estudiados, como es el caso donde el retardo es variante en el tiempo.

6.0.2. Trabajo a futuro

Si bien, como se ha mencionado, existen múltiples trabajos relacionados a esta clase de sistemas, hay aún un gran número de problemáticas a resolver, algunas de las más destacables son las siguientes:

1. Un estudio de robustez del sistema, esto es, conocer cuanto pueden variar los parámetros del sistema sin comprometer su estabilidad. Esto resulta fundamental pues, el estudio de la fragilidad únicamente considera las incertidumbres en las ganancias de control, sin embargo, es claro que dichas incertidumbres pueden presentarse en cualquiera de los parámetros, incluyendo en el retardo del sistema.
2. Ampliación del resultado a casos más generales, tales como el caso donde el retardo es variante en el tiempo, los sistemas de orden superior e inclusive el caso de sistemas de orden fraccionario. Dicho estudio resulta de mucha importancia pues, si bien el sistema estudiado captura las dinámicas de una gran cantidad de sistemas, evidentemente existirán casos en donde un sistema de primer orden con retardo no sea suficiente.
3. Análisis considerando otras variantes del controlador, en particular, la aproximación de la acción integral por medio de retardos, así como la inclusión de una acción derivativa también diseñada mediante el uso de retardos intencionales.
4. Detección del controlador menos frágil dentro de la región de estabilidad, así como de una métrica que permita balancear la relación entre desempeño en términos del máximo decaimiento exponencial y fragilidad del controlador. Esto resulta de gran interés, pues no siempre se busca optimizar en términos del decaimiento exponencial, sino que se busca que el controlador sea, por ejemplo, muy robusto.

Referencias

- Baturone, A. O. (2001). Robótica: Manipuladores y robots móviles. Boixareu Editores.
- Cooke, K. L. (1963). Differential—difference equations. In International symposium on nonlinear differential equations and nonlinear mechanics, pages 155–171. Elsevier.
- da Silva, L. R., Flesch, R. C., and Normey-Rico, J. E. (2020). Controlling industrial dead-time systems: When to use a pid or an advanced controller. ISA transactions, 99:339–350.
- Delice, I. I. and Sipahi, R. (2009). Inventory dynamics models of supply chains with delays; system-level connection & stability. In Topics in Time Delay Systems, pages 349–358. Springer.
- Doyle, J. C., Francis, B. A., and Tannenbaum, A. R. (2013). Feedback control theory. Courier Corporation.
- Elsgolts, L. E. and Norkin, S. B. (1973). Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments. Elsevier.
- Golnaraghi, F. and Kuo, B. C. (2017). Automatic control systems. McGraw-Hill Education.
- Green, M. (2000). "how long does it take to stop?"methodological analysis of driver perception-brake times. Transportation human factors, 2(3):195–216.
- Gryazina, E. N. (2004). The d-decomposition theory. Automation and Remote Control, 65(12):1872–1884.
- Guel-Cortez, A. J., Méndez-Barrios, C.-F., González-Galván, E. J., Mejía-Rodríguez, G., and Félix, L. (2019). Geometrical design of fractional $pd\mu$ controllers for linear time-invariant fractional-order systems with time delay. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 233(7):815–829.
- Hernández-Diez, J.-E., Méndez-Barrios, C.-F., and Niculescu, S.-I. (2019). Practical guidelines for tuning pd and pi delay-based controllers. IFAC-PapersOnLine, 52(18):61–66.
- Hollot, C., Misra, V., Towsley, D., and Gong, W. (2002). Analysis and design of controllers for aqm routers supporting tcp flows. IEEE Transactions on Automatic Control, 47(6):945–959.
- Keel, L. and Bhattacharyya, S. (1998). Author’s reply. 43 (9): 1268.

- Keel, L. H. and Bhattacharyya, S. (1997). Robust, fragile, or optimal? IEEE transactions on automatic control, 42(8):1098–1105.
- Kharitonov, V. (2012). Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Springer Science & Business Media.
- Logemann, H. and Townley, S. (1996). The effect of small delays in the feedback loop on the stability of neutral systems. Systems & Control Letters, 27(5):267–274.
- Michiels, W., Engelborghs, K., Roose, D., and Dochain, D. (2002). Sensitivity to infinitesimal delays in neutral equations. SIAM Journal on Control and Optimization, 40(4):1134–1158.
- Michiels, W. and Niculescu, S.-I. (2007). Stability and stabilization of time-delay systems: an eigenvalue-based approach. SIAM.
- Niculescu, S.-I. (2001). Delay effects on stability: a robust control approach, volume 269. Springer Science & Business Media.
- Ogata, K. (2010). Modern control engineering. Prentice hall.
- Olfati-Saber, R. (2005). Ultrafast consensus in small-world networks. In Proceedings of the 2005, American Control Conference, 2005., pages 2371–2378. IEEE.
- Pertti, M. (1998). Comments on: Robust, fragile, or optimal. IEEE Transactions on Automatic Control, 43:1265–1267.
- Pontryagin, L. (1955). On the zeros of some elementary transcendental functions, amer. Maths. Soc. Transl., Ser., 2(1).
- Ramírez, A. and Sipahi, R. (2018a). Multiple intentional delays can facilitate fast consensus and noise reduction in a multiagent system. IEEE transactions on cybernetics, 49(4):1224–1235.
- Ramírez, A. and Sipahi, R. (2018b). Single-delay and multiple-delay proportional-retarded (pr) protocols for fast consensus in a large-scale network. IEEE Transactions on Automatic Control, 64(5):2142–2149.
- Ramírez, A., Mondié, S., Garrido, R., and Sipahi, R. (2015). Design of proportional-integral-retarded (pir) controllers for second-order lti systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 61(6):1688–1693.
- Ramírez, A., Sipahi, R., Mondié, S., and Garrido, R. (2017). An analytical approach to tuning of delay-based controllers for lti-iso systems. SIAM Journal on Control and Optimization, 55(1):397–412.
- Silva, G., Datta, A., and Bhattacharyya, S. P. (2001). Pi stabilization of first-order systems with time delay. Automatica, 37:2020–2031.
- Sipahi, R., Niculescu, S.-I., Abdallah, C. T., Michiels, W., and Gu, K. (2011). Stability and stabilization of systems with time delay. IEEE Control Systems Magazine, 31(1):38–65.
- Sterman, J. (2002). System dynamics: systems thinking and modeling for a complex world.
- Veronesi, M. and Visioli, A. (2020). On the selection of lambda in lambda tuning for pi(d) controllers. IFAC-PapersOnLine, 53(2):4599–4604. 21th IFAC World Congress.
- Wang, H., Liu, J., Yang, F., and Zhang, Y. (2015). Controller design for delay

- systems via eigenvalue assignment—on a new result in the distribution of quasi-polynomial roots. International Journal of Control, 88(12):2457–2476.
- Yi, S., Nelson, P. W., and Ulsoy, A. G. (2012). Proportional-integral control of first-order time-delay systems via eigenvalue assignment. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 21(5):1586–1594.
- Zhang, W., Branicky, M. S., and Phillips, S. M. (2001). Stability of networked control systems. IEEE control systems magazine, 21(1):84–99.