



Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Facultad de Ingeniería
Centro de Investigación y Estudios de Posgrado



Modelado de la estabilidad durante la marcha basada en control vibratorio y el péndulo de Kapitza

Tesis

Para obtener el grado de Maestría en Ingeniería eléctrica con
Orientación Cibernética, Control y Robótica.

Presenta:

Ing. Roberto De Leon Hernández

Asesor:

Dr. Juan Antonio Cárdenas Galindo

Co-Asesor:

Dr. Alejandro González de Alba

San Luis Potosí, S.L.P., Septiembre 2023



UASLP
Universidad Autónoma
de San Luis Potosí



**FACULTAD DE
INGENIERÍA**

20 de julio de 2023

**ING. ROBERTO DE LEÓN HERNÁNDEZ
P R E S E N T E.**

En atención a su solicitud de Temario, presentada por los **Dres. Juan Antonio Cárdenas Galindo y Alejandro González de Alba**, Asesor y Coasesor de la Tesis que desarrollará Usted con el objeto de obtener el Grado de **Maestro en Ingeniería Eléctrica**, me es grato comunicarle que en la sesión del H. Consejo Técnico Consultivo celebrada el día 20 de julio del presente, fue aprobado el Temario propuesto:

TEMARIO:

**"Modelado de la estabilidad durante la marcha basada en control
vibratorio y péndulo de Kapitza"**

Introducción.

1. El péndulo de Kapitza y su relación con la estabilidad postural durante el caminado.
2. Modelado matemático del péndulo de uno y dos grados de libertad con base móvil.
3. Método de promediación aplicado al control vibratorio.
4. Análisis de resultados y simulaciones.

Conclusiones.

Referencias.

"MODOS ET CUNCTARUM RERUM MENSURAS AUDEBO"

A T E N T A M E N T E

**DR. EMILIO JORGÉ GONZÁLEZ GALVÁN
DIRECTOR.**



www.uaslp.mx

Copia. Archivo.
*etn.

Av. Manuel Nava 8
Zona Universitaria • CP 78290
San Luis Potosí, S.L.P.
tel. (444) 826 2330 al39
fax (444) 826 2336

"UASLP, más de un siglo educando con autonomía"

Resumen

Los movimientos del cuerpo humano durante el proceso de mantenerse erguido se han estimado a partir de varias mediciones del movimiento de los segmentos corporales. Este movimiento del centro de masa de todo el cuerpo se ha comparado con los movimientos del centro de masa a partir de un modelo simple de péndulo invertido de pie. Las primeras investigaciones que describen el comportamiento de un péndulo compuesto de uno, dos o tres eslabones que se pueda estabilizar en posición invertida por medio de pequeñas oscilaciones en su pivote, fueron realizadas por Stephenson [9] en 1908, lo cual dio un gran paso para que más adelante, investigadores como P. Kapitza, explicaran de manera teórica y experimental el comportamiento de este tipo de péndulo. Durante esa época era conocido que la estabilidad del péndulo en posición invertida dependía de hacer oscilar su base a altas frecuencias y baja amplitud [4].

Para determinar lo anterior, Kapitza aplicó aproximaciones sucesivas para obtener un "potencial efectivo" el cual captura el efecto promedio del movimiento de la base, dicho análisis es un ejemplo de lo que más tarde se le conocería como Teoría de promediación para la estabilización oscilatoria. Existen varios ejemplos de este tipo de control por oscilaciones en la naturaleza, en criaturas como los insectos voladores, las aves y los peces, los cuales pueden moverse de manera efectiva y eficiente por medio de sistemas que se caracterizan por el uso de control oscilatorio para generar movimiento. Para determinar las condiciones de estabilidad que hacen que el punto de equilibrio invertido se vuelva estable, se utilizará el método de promediación, el cual es una herramienta matemática utilizada principalmente para encontrar una solución aproximada de ecuaciones diferenciales no lineales.

A través de dicho método, se puede obtener un modelo lo suficientemente simple y preciso que puede ser útil para tomar decisiones sobre la estabilidad del equilibrio para el sistema general. Hay varios teoremas sobre la relación entre el promedio y el sistema general [5].

Abstract

The movements of the human body during the process of maintaining an upright position have been estimated from various measurements of body segment motion. This movement of the center of mass of the entire body has been compared to the movements of the center of mass based on a simple model of an inverted pendulum while standing. The initial research describing the behavior of a pendulum composed of one, two, or three links that can be stabilized in an inverted position through small oscillations at its pivot point was conducted by Stephenson [9] in 1908. This laid the foundation for later researchers like P. Kapitza to explain the behavior of this type of pendulum both theoretically and experimentally. During that time, it was known that the stability of the inverted pendulum depended on oscillating its base at high frequencies and low amplitudes [4].

To determine the aforementioned, Kapitza applied successive approximations to obtain an "effective potential" that captures the average effect of base movement. This analysis is an example of what would later be known as the Averaging Theory for oscillatory stabilization. There are several examples of such oscillatory control in nature, seen in creatures like flying insects, birds, and fish, which can move effectively and efficiently through systems characterized by the use of oscillatory control to generate motion. To determine the stability conditions that make the inverted equilibrium point stable, the averaging method will be used, which is a mathematical tool primarily used to find an approximate solution to nonlinear differential equations.

Through this method, a simple and accurate model can be obtained that may be useful for making decisions about equilibrium stability for the overall system. There are several theorems concerning the relationship between the average and the overall system [5].

Agradecimientos

Quiero agradecer primeramente a Dios por bendecirme para llegar hasta donde he llegado.

A mi familia, por todo el apoyo incondicional, la educación y confianza que me han brindado a lo largo de mi vida.

A mis asesores, el Dr. Antonio Cárdenas Galindo y al Dr. Alejandro González de Alba por aceptarme para realizar este tema de tesis. Les agradezco también la paciencia y la disponibilidad que tuvieron para la realización de mis actividades.

Al Centro de investigación y Estudios de posgrado (CIEP) por darme la oportunidad de estudiar una maestría. A todos mis profesores durante este trayecto que me brindaron educación de calidad y me ayudaron a crecer como persona. En especial al Dr. Miguel Lastras por su apoyo para la conclusión de este trabajo, al Dr. Cesar Méndez y al Dr. Ricardo Álvarez por su apoyo durante el trabajo de tesis.

Al Consejo Nacional De Ciencia y Tecnología por el apoyo económico brindado durante mis estudios.

A mi comité de sinodales por sus sugerencias para el enriquecimiento de este trabajo.

Para mis compañeros y colegas del CIEP que ayudaron a enriquecer mi formación educativa.

Contenido

Resumen.....	3
Abstract	4
Agradecimientos	5
Contenido	6
Índice de figuras	8
Índice de tablas	10
Introducción	11
Justificación	12
Hipótesis.....	13
Objetivos específicos.....	13
Alcance	13
Organización de la tesis.....	13
1. El péndulo de Kapitza y su relación con la estabilidad postural durante el caminado	16
1.1. Introducción a la biomecánica	16
1.2. Sistema masa-resorte-amortiguador como modelo para balanceo del cuerpo humano	18
1.3. Estabilización de la postura al caminar	19
1.4. Análisis y modelado del movimiento humano al caminar	19
1.5. Péndulo de Kapitza.....	20
1.6. Antecedentes del control vibratorio aplicado a sistemas biomecánicos.....	23
2. Modelado matemático del péndulo de uno y dos grados de libertad con base móvil.....	25
2.1. Modelado péndulo de un grado de libertad	27
2.2. Modelado péndulo de dos grados de libertad	30
2.3. Conclusiones del capítulo.....	33
3. Método de promediación aplicado al control vibratorio.....	34
3.1. Control vibratorio de sistemas mecánicos	34
3.2. Método de promediación de sistemas mecánicos	36
3.3. Estabilidad de sistemas utilizando la matriz de Hurwitz	38
3.4. Criterio Lienard-Chipart (LC)	40
3.5. Análisis de estabilidad péndulo de un grado de libertad	41
3.6. Análisis de estabilidad péndulo de dos grados de libertad	48
4. Análisis de resultados y simulaciones	54
4.1 Parámetros antropomórficos del cuerpo humano	54

4.2.	Resultados y simulaciones del péndulo de un grado de libertad	56
4.3.	Análisis del costo energético del péndulo de un grado de libertad.....	65
4.4.	Resultados y simulaciones del péndulo de dos grados de libertad	71
4.5.	Análisis del costo energético del péndulo de dos grados de libertad.....	79
4.6.	Conclusión del capítulo	93
Conclusiones		95
Referencias.....		98

Índice de figuras

Figura 1.1. Ángulos entre segmentos al cargar un objeto [3].	16
Figura 1.2. Caminado humano bajo distintas condiciones. Humano sano (izquierda) y humano con enfermedad motriz, como la enfermedad de Parkinson (derecha) [8].	17
Figura 1.3. Sistemas masa-resorte-amortiguador. (a) Modelo Poynting-Thomson (b) Representación de un péndulo invertido [7].	18
Figura 1.4. Movimiento caminado cicloidal [22].	20
Figura 1.5. Distribución de la masa humana [2].	21
Figura 1.6. Demostración experimental: (a) el alambre deformado hacia abajo; (b) el alambre vertical estabilizado; (c) movimiento inclinado cerca de la inestabilidad de "caída" de baja frecuencia; y (d) movimiento cerca de la inestabilidad dinámica de alta frecuencia [26].	22
Figura 1.7. Demostración de la estabilización del péndulo de Kapitza. [2]	23
Figura 1.8. Ilustración grafica del análisis de estabilización de un colibrí por medio de control vibratorio [14].	24
Figura 2.1. Modelo esquemático del péndulo de dos grados de libertad con base móvil.	26
Figura 2.2. Modelo péndulo de un grado de libertad.	27
Figura 3.1. Relación entre los parámetros de rigidez (k_1) y la frecuencia de las oscilaciones en la base (ω).	44
Figura 3.2. Energía cinética y elástica péndulo de un grado de libertad con $A = 0.1m$ y $\omega = 0 \text{ rad/s}$ y $\alpha = 0.8$.	46
Figura 3.3. Posición angular q_1 correspondiente a la Figura 3.2.	46
Figura 3.4. Energía cinética y elástica péndulo de un grado de libertad con $A = 0.1m$ y $\omega = 30 \text{ rad/s}$.	47
Figura 3.5. Posición angular q_1 correspondiente al caso de la Figura 3.4.	47
Figura 4.1. Representación aproximada del cuerpo humano [38].	55
Figura 4.2. Posición angular q_1 para diferentes valores de α con $\omega = 0$.	56
Figura 4.3. Posición angular q_1 para diferentes valores de α y ω (Kapitza).	57
Figura 4.4. Posición angular q_1 para diferentes valores de α y ω ($x_k = 0.01\pi$, $y_k = 0.12$).	59
Figura 4.5. Posición angular q_1 para diferentes valores de α y ω ($x_k = 0.5y_k$).	61
Figura 4.6. Posición angular q_1 para diferentes valores de α y ω ($x_k > y_k$).	62
Figura 4.7. Posición en el plano X-Y del péndulo de un grado de libertad con $\omega = 9 \text{ rad/s}$ y $\alpha = 0.8$.	63
Figura 4.8. Posición angular correspondiente del péndulo de un grado de libertad sin oscilaciones $\omega = 0$.	64
Figura 4.9. Posición en el plano X-Y del péndulo de un grado de libertad sin oscilaciones $\omega = 0$.	64
Figura 4.10. Evolución de la energía total para el péndulo de un grado de libertad con $\alpha = 0$ y distintos valores de ω .	66
Figura 4.11. Evolución de la energía total para el péndulo de un grado de libertad con $\alpha = 0.2$ y distintos valores de ω .	67
Figura 4.12. Energía total de un péndulo de un grado de libertad sometido a oscilaciones verticales a diferentes valores de frecuencia (ω) y de rigidez (α).	68
Figura 4.13. Posición angular correspondiente del péndulo de un grado de libertad sin oscilaciones $\omega = 60 \text{ rad/s}$ y $\alpha = 0.8$ (únicamente movimiento vertical).	69
Figura 4.14. Posición en el plano X-Y del péndulo de un grado de libertad con $\omega = 60 \text{ rad/s}$ y $\alpha = 0.8$.	70
Figura 4.15. Posición en el plano x-y del péndulo de dos grados de libertad sujeto a movimiento cicloidal en su base.	71
Figura 4.16. Posición angular q_1 del péndulo de dos grados de libertad para diferentes valores de α y ω (Sólo movimiento vertical).	72
Figura 4.17. Posición angular q_1 del péndulo de dos grados de libertad para diferentes valores de α y ω (Sólo movimiento vertical).	73
Figura 4.18. Posición angular q_1 del péndulo de dos grados de libertad para diferentes valores de α y ω (Sólo movimiento vertical).	74

Figura 4.19. Posición angular q_1 del péndulo de dos grados de libertad para diferentes valores de α y $20 \leq \omega \leq 40$.	75
Figura 4.20. Posición angular del péndulo de dos grados de libertad para $\alpha = 0.6$ y $\omega = 40 \text{ rad/s}$.	76
Figura 4.21. Posición del péndulo de dos grados de libertad en el plano x-y para $\alpha = 0.6$ y $\omega = 40 \text{ rad/s}$.	77
Figura 4.22. Posición angular del péndulo de dos grados de libertad para $\alpha = 0.6$ y $\omega = 40 \text{ rad/s}$, con $x_t = d_1 - d_1 \cos(\omega t)$ y $y_t = 0$.	78
Figura 4.23. Posición del péndulo de dos grados de libertad en el plano x-y para $\alpha = 0.6$ y $\omega = 40 \text{ rad/s}$ con $x_t = d_1 \cos(\omega t)$ y $y_t = 0$.	78
Figura 4.24. Energía total de un péndulo de un grado de libertad sometido a oscilaciones horizontales $x_t = d_1 \cos(\omega t)$ a diferentes valores de frecuencia (ω) y de rigidez (α).	81
Figura 4.25. Energía total de un péndulo de dos grados de libertad sometido a $y_t = h_1 \cos(\omega t)$ a diferentes valores de frecuencia (ω) y de rigidez (α).	82
Figura 4.26. Energía total de un péndulo de dos grados de libertad sometido a $y_t = h_1 \cos(\omega t)$ con $h_1 = 0.1 \text{ m}$ y diferentes valores de frecuencia (ω) y de rigidez (α).	83
Figura 4.27. Posición del péndulo de dos grados de libertad en el plano x-y para $\alpha = 0.8$ y $\omega = 40 \text{ rad/s}$ con $x_t = d_1 \cos(\omega t)$ y $y_t = 0$.	84
Figura 4.28. Posición angular del péndulo de dos grados de libertad para $\alpha = 0.8$ y $\omega = 40 \text{ rad/s}$, para el caso de una oscilación vertical en la base del péndulo de dos grados de libertad.	85
Figura 4.29. Energía total de un péndulo de dos grados de libertad sometido a $x_t = d_1 \cos(\omega t)$ con $d_1 = 0.1 \text{ m}$ y diferentes valores de frecuencia (ω) y de rigidez (α).	86
Figura 4.30. Posición angular del péndulo de dos grados de libertad para $\alpha = 0.8$ y $\omega = 40 \text{ rad/s}$, para el caso de una oscilación horizontal en la base del péndulo de dos grados de libertad.	87
Figura 4.31. Posición angular del péndulo de dos grados de libertad para $\alpha = 0.8$ y $\omega = 60 \text{ rad/s}$, para el caso de una oscilación horizontal en la base del péndulo de dos grados de libertad.	87
Figura 4.32. Posición angular del péndulo de dos grados de libertad para $\alpha = 0.8$ y $\omega = 40 \text{ rad/s}$, para el caso de una oscilación horizontal en la base del péndulo de dos grados de libertad.	88
Figura 4.33. Posición del péndulo de dos grados de libertad en el plano x-y para $\alpha = 0.8$ y $\omega = 40 \text{ rad/s}$ con $x_t = d_1 \cos(\omega t)$ y $y_t = 0$.	89
Figura 4.34. Posición del péndulo de dos grados de libertad en el plano x-y para $\alpha = 0.8$ y $\omega = 40 \text{ rad/s}$ con $x_t = d_1 \cos(\omega t)$ y $y_t = h_1 \cos(\omega t)$.	90
Figura 4.35. Posición angular del péndulo de dos grados de libertad para $\alpha = 0.8$ y $\omega = 40 \text{ rad/s}$, para el caso donde la base del péndulo de dos grados de libertad está sujeta ambas oscilaciones (vertical y horizontal).	91
Figura 4.36. Energía total de un péndulo de dos grados de libertad sometido a $y_t = h_1 \cos(\omega t)$ con $h_1 = 0.1 \text{ m}$ y $x_t = d_1 \cos(\omega t)$ con $d_1 = 0.1 \text{ m}$ con diferentes valores de frecuencia (ω) y de rigidez (α).	93

Índice de tablas

<i>Tabla 3.1. Condiciones de estabilidad para polinomios de diferente orden según el criterio Lienard-Chipard [15].</i>	40
<i>Tabla 3.2. Parámetros utilizados para obtener la relación mostrada en la Figura 3.1.</i>	44
<i>Tabla 4.1. Dimensiones empleadas para las simulaciones basadas en el cuerpo humano [13].</i>	55
<i>Tabla 4.2. Parámetros de rigidez y amortiguamiento asociados a los elementos musco-elásticos del cuerpo humano [7].</i>	56

Introducción

Para comprender mejor como prevenir las caídas de seres humanos, el modelado matemático de la postura ha sido un hecho importante en las ciencias de la salud y la ingeniería de rehabilitación. El modelado escalable de la postura y la marcha incluye el uso de un modelo de péndulo invertido que podría personalizarse para tener en cuenta el aumento de la complejidad.

Los estudios han sido numerosos, para comprender cuáles son los factores físicos y fisiológicos que permiten la estabilización de un péndulo invertido inherentemente inestable, el modelo más básico consiste en un elemento de masa puntual que gira alrededor de un punto de pivote, que generalmente representa el centro de rotación en los tobillos.

La masa se desestabiliza por la fuerza de la gravedad, y normalmente se supone que un elemento de resorte alrededor del tobillo actúa contra la gravedad para estabilizar el sistema. Este modelo simple se ha utilizado ampliamente durante las últimas décadas, ya que puede abordar muchas cuestiones de estabilidad [13].

De particular interés ha sido la estimación de la rigidez mínima necesaria para estabilizar el sistema y encontrar la frecuencia natural asociada del sistema capaz de iniciar la locomoción.

Curiosamente, la estabilización dinámica no ha recibido mucha atención en biomecánica, a pesar de tener el potencial de mejorar la estabilidad en una variedad de tareas. El enfoque más simple para la estabilización dinámica de un péndulo invertido fue propuesto por el físico ruso Pyotr Kapitza en 1951, proporcionando la primera observación de que un péndulo invertido podría estabilizarse excitando la base con una oscilación vertical rápida en la misma dirección de la línea de acción de la gravedad. Al caminar, existe un movimiento continuo hacia arriba y hacia abajo del centro de masa que podría proporcionar una contribución sustancial a la estabilidad, a pesar de ser de frecuencia moderada.

Este trabajo proporciona un resumen de la estabilización dinámica para péndulo invertido de uno y dos grados de libertad de rotación, cuando la gravedad es una fuerza desestabilizadora y se aplica una vibración externa en la base en uno o dos grados de libertad de traslación.

Se destaca el efecto sobre la estabilidad postural de cada componente físico, como la rigidez articular, el amortiguamiento articular, el momento de inercia con respecto a las articulaciones y la inercia de traslación con respecto a la vibración de la base. El presente compendio puede arrojar luz sobre nuevos enfoques para aprovechar la estabilización dinámica inercial para mejorar la estabilidad postural y de la marcha.

Desde un enfoque centrado en la dinámica de péndulos invertidos de uno y dos grados de libertad, esta tesis tiene como objetivo principal explorar cómo factores físicos como la rigidez articular, el amortiguamiento y los patrones de movimiento afectan la estabilidad postural y el acto de caminar. En este análisis, se considerará la aplicación de un control

vibratorio al sistema. La elección de este enfoque se basa en la observación de que el análisis por control vibratorio ha demostrado ser valioso para diversos sistemas biológicos.

Además, se buscará determinar cuál es la relación entre la energía elástica con los parámetros de movimiento en péndulos con base móvil, esto para explorar cómo factores como la rigidez de las articulaciones y los patrones de movimiento influyen en la cantidad de energía elástica requerida para mantener el sistema estable. Esta energía elástica se almacena durante las deformaciones y se libera cuando el sistema retorna a su posición de equilibrio.

Y al determinar los parámetros anteriores, identificar si es que los parámetros obtenidos a partir de las condiciones de estabilidad mediante el método de promediación son adecuados para aplicaciones en el cuerpo humano. Esta comprensión puede tener aplicaciones en áreas como la biomecánica y la ingeniería, ofreciendo perspectivas valiosas para mejorar la estabilidad y el movimiento humanos.

Justificación

La justificación para este trabajo surge de la necesidad de abordar una cuestión crítica en las ciencias de la salud y la ingeniería de rehabilitación: la prevención de caídas. La importancia de comprender y prevenir las caídas es innegable, ya que estas pueden tener consecuencias graves en la salud y la calidad de vida de las personas. En este sentido, el modelado matemático de la postura y la marcha se presenta como una herramienta fundamental para desarrollar estrategias efectivas de prevención.

El uso de modelos matemáticos, como el modelo de péndulo invertido, abre la puerta a personalizaciones que pueden considerar la complejidad creciente de las situaciones reales. La estabilización de un péndulo invertido inherentemente inestable, que a menudo se asemeja a la postura humana, se ha explorado ampliamente. Sin embargo, la estabilización dinámica, a pesar de su potencial para mejorar la estabilidad en diversas tareas, ha recibido menos atención en el ámbito de la biomecánica.

Uno de estos modelos es la propuesta de aplicar una oscilación vertical en la base para estabilizar un péndulo invertido, inspirada en el trabajo del físico Pyotr Kapitza, introduce un enfoque innovador que podría tener aplicaciones valiosas en la mejora de la estabilidad durante la marcha y otras actividades, por lo que se buscará complementar este análisis de oscilación vertical con el análisis cuando se agregan más ejes de movimiento a la base del péndulo de uno y dos grados de libertad.

La importancia de este estudio radica en su enfoque en la estabilización dinámica de péndulos invertidos de uno y dos grados de libertad de rotación. El trabajo busca proporcionar una perspectiva detallada sobre cómo diferentes componentes físicos, como la rigidez articular, el amortiguamiento articular y el patrón de caminado, influyen no solo la estabilidad postural y de la marcha, sino también la cantidad de energía elástica requerida en las articulaciones. La comprensión profunda de estos efectos podría tener implicaciones de gran alcance para el desarrollo de enfoques innovadores que aprovechen la estabilización dinámica inercial, tanto para optimizar la estabilidad en el movimiento

humano como para reducir la carga energética en las articulaciones, lo que podría ser especialmente relevante para aplicaciones de rehabilitación y mejora de la calidad de vida.

En resumen, este estudio se justifica por su contribución al campo de la prevención de caídas y la mejora de la estabilidad postural y de la marcha. Al abordar la estabilización dinámica a través de modelos matemáticos, se espera obtener conocimientos valiosos que puedan traducirse en intervenciones prácticas y estrategias de rehabilitación efectivas.

Hipótesis

Al aplicar movimientos oscilatorios a la base de un péndulo de uno o dos grados de libertad, se pueden identificar los valores de amplitud y frecuencia que permiten que este péndulo se mantenga dentro de los rangos de estabilidad típicos para un ser humano durante la marcha.

Objetivos específicos

- Determinar los parámetros de amplitud y frecuencia de las oscilaciones aplicadas a la base del péndulo que sean capaces de mantener el sistema en posición invertida.
- Encontrar la contribución energética de las oscilaciones horizontales y verticales en la base móvil del péndulo.
- Aplicar métodos asintóticos para la resolución de sistemas variantes en el tiempo.

Alcance

Con este trabajo de tesis se buscará determinar las condiciones de estabilidad para un péndulo de uno y dos grados de libertad por medio del control vibratorio y aplicación del método de promediación para analizar este sistema no lineal variante en el tiempo.

Sentar bases para desarrollar teorías de estabilidad y la relación del movimiento oscilatorio producido al caminar para la correcta postura.

Organización de la tesis

La organización de la tesis es la siguiente:

- **Capítulo 1. Revisión del estado del arte sobre el péndulo de Kapitza y su relación con la estabilidad postural durante el caminado, control en lazo abierto.**

En esta sección, se llevará a cabo una la revisión del estado del arte acerca del péndulo de Kapitza y su interacción con la estabilidad postural durante el proceso del caminado humano, centrándose específicamente en su aplicación en sistemas de control en lazo abierto. En esta revisión se adentrará en los avances más recientes y las investigaciones clave en este ámbito, con el objetivo de comprender en profundidad cómo el péndulo de Kapitza se ha convertido en un componente crucial en el análisis de la estabilidad postural en el contexto del caminado. Se

explorarán las diferentes perspectivas y enfoques adoptados por diversos investigadores para abordar este fenómeno, resaltando las contribuciones más significativas que han mostrado los desafíos y las oportunidades que ofrece el uso del péndulo de Kapitza y el control vibratorio en los sistemas biológicos.

- **Capítulo 2. Modelado matemático del péndulo de uno y dos grados de libertad con base móvil.**

En esta sección, se emprenderá un detallado recorrido a través del modelado matemático del péndulo de uno y dos grados de libertad, centrándose específicamente en la consideración de una base móvil. Esta exploración tiene como objetivo fundamental comprender en profundidad cómo estos modelos matemáticos han evolucionado para abordar la complejidad de un péndulo sujeto a oscilaciones en su base. Se examinarán las ecuaciones fundamentales que rigen el comportamiento de estos sistemas, desglosando cómo se han incorporado las oscilaciones en la base y cómo estas afectan las propiedades dinámicas de los péndulos. Además, se analizarán las diferencias y similitudes entre los modelos de uno y dos grados de libertad, destacando cómo la inclusión de una base móvil agrega un nivel adicional de complejidad en la descripción matemática. En última instancia, esta revisión del modelado matemático del péndulo con base móvil busca brindar una comprensión sólida de cómo estos modelos capturan la dinámica realista de los sistemas físicos y cómo son fundamentales para comprender el comportamiento de los péndulos en condiciones de oscilación.

- **Capítulo 3. Método de promediación aplicado al control vibratorio.**

En esta sección, se brindará información detallada del método de promediación aplicado al control vibratorio. El enfoque de promediación, con su base en el análisis matemático y la teoría de sistemas, se ha establecido como una herramienta fundamental para abordar la estabilización de sistemas dinámicos bajo oscilaciones. A través de esta revisión, se desglosará cómo el método de promediación ha sido aplicado en el contexto del control vibratorio, específicamente en la estabilización de sistemas afectados por vibraciones periódicas. Se explorarán las bases teóricas del método, analizando cómo se descompone la dinámica de los sistemas en términos de componentes de alta y baja frecuencia. En última instancia, esta sección busca proporcionar una comprensión sólida de cómo el método de promediación se ha convertido en un recurso valioso para la estabilización de sistemas afectados por vibraciones, y cómo su aplicación se extiende a diversas áreas de la ingeniería y la investigación en control.

- **Capítulo 4. Resultados y simulaciones.**

En esta sección, se hablará acerca de los resultados y simulaciones obtenidos a través del enfoque de análisis que se trabajará durante este documento. Aquí, se presentarán de manera detallada los hallazgos clave derivados de la aplicación de las técnicas de promediación y simulaciones a sistemas dinámicos específicos. Estos resultados proporcionarán una visión profunda de cómo la promediación y las simulaciones trabajan en conjunto para desentrañar las complejidades de la dinámica de sistemas variables en el tiempo. Se describirán los cambios observados en la estabilidad y el comportamiento de los sistemas bajo diferentes condiciones

de entrada, frecuencias y parámetros. A través de gráficos, tablas y representaciones visuales, se ilustrarán las relaciones entre estos factores y cómo influyen en la estabilidad general de los sistemas. Además, se presentarán comparaciones entre los resultados obtenidos a través de la promediación y las simulaciones, demostrando la coherencia y validez de los enfoques utilizados. Estos hallazgos se contextualizarán en relación con la literatura existente, destacando contribuciones originales y divergencias con investigaciones anteriores. Además, se analizará como es que la energía elástica se ve afectada por los parámetros encontrados durante el análisis de estabilidad y como esto podría llegar a dar aspectos clave en el análisis del costo energético en una persona al caminar y con esto poder aportar este conocimiento a elementos de rehabilitación o de apoyo que permitan que el esfuerzo realizado por la persona sea mucho menor.

– **Capítulo 5. Conclusiones y trabajo futuro.**

En esta sección, se consolidarán los descubrimientos y análisis realizados a lo largo de este estudio en un contexto más amplio y reflexivo. Las conclusiones extraídas de las investigaciones presentadas se presentarán de manera concisa y precisa, resaltando los logros y avances alcanzados en la comprensión de los sistemas estudiados. Se examinará cómo los resultados obtenidos respaldan o refutan las hipótesis planteadas inicialmente, y cómo estos contribuyen a la resolución de problemas o cuestiones específicas dentro del campo de estudio. Además, de reflexionar sobre las implicaciones más amplias de los resultados en relación con el conocimiento actual y cómo podrían influir en investigaciones futuras.

En cuanto al trabajo futuro, exploraremos las áreas que quedan por investigar y desarrollar a partir de los hallazgos presentados en este estudio. Identificaremos las lagunas en nuestro conocimiento y las limitaciones de los métodos y enfoques utilizados, sugiriendo posibles direcciones para la investigación subsiguiente.

1

Revisión del estado del arte

1. El péndulo de Kapitza y su relación con la estabilidad postural durante el caminado

1.1. Introducción a la biomecánica

La biomecánica es el término con el cual se le conoce a la disciplina que combina los principios de la biología y la ingeniería para analizar, describir y evaluar los movimientos del cuerpo humano y su interacción con el entorno, por lo cual puede abarcar una amplia variedad de movimientos físicos. [37]

Esta ciencia ha tenido un impacto significativo en la comprensión de la salud humana y ha experimentado una notable evolución a lo largo de los años.

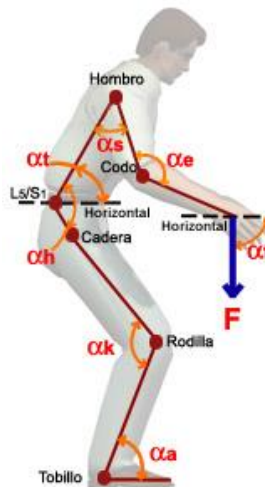


Figura 1.1. Ángulos entre segmentos al cargar un objeto [3].

Además, se enfoca en analizar y cuantificar los movimientos y las fuerzas que actúan sobre el cuerpo humano utilizando herramientas y técnicas avanzadas, como la captura de movimiento y la modelización computacional, los investigadores pueden examinar cómo se

mueven y funcionan las diferentes partes del cuerpo en diversas actividades, desde caminar y correr hasta realizar tareas específicas en el lugar de trabajo.

Uno de los aspectos clave de la biomecánica es su aplicación en el ámbito de la salud. Los profesionales de la salud y los científicos han utilizado los principios biomecánicos para comprender las lesiones y enfermedades relacionadas con el movimiento, así como para desarrollar intervenciones terapéuticas y preventivas efectivas [42]



Figura 1.2. Caminado humano bajo distintas condiciones. Humano sano (izquierda) y humano con enfermedad motriz, como la enfermedad de Parkinson (derecha) [8].

La biomecánica ha contribuido al desarrollo de prótesis y dispositivos médicos, como las prótesis de extremidades y las sillas de ruedas, mejorando la movilidad y la calidad de vida de las personas con discapacidades físicas. Además, ha sido fundamental en el diseño y la evaluación de técnicas de rehabilitación y terapias físicas, permitiendo una recuperación más rápida y efectiva de lesiones musculoesqueléticas.

La evolución de la biomecánica a lo largo de los años ha sido impresionante. En sus primeras etapas, la biomecánica se basaba principalmente en observaciones cualitativas y mediciones simples. Sin embargo, con los avances tecnológicos, se ha vuelto posible realizar análisis más sofisticados y precisos [37].

La introducción de sistemas de captura de movimiento basados en sensores y cámaras ha permitido una medición más precisa de los movimientos del cuerpo humano. Estos sistemas pueden rastrear y registrar en tiempo real la posición y la orientación de las articulaciones y los segmentos del cuerpo, lo que brinda información detallada sobre la biomecánica del movimiento humano.

Además, la modelización computacional se ha convertido en una herramienta fundamental en la biomecánica. Los modelos computacionales pueden simular y predecir el comportamiento del cuerpo humano en diferentes escenarios, lo que facilita el estudio de situaciones difíciles de reproducir en el laboratorio o en el campo.

La biomecánica también ha experimentado un crecimiento en el ámbito de la biomecánica molecular y celular. Los avances en la biología molecular y la genética han permitido un mayor entendimiento de los mecanismos que subyacen a los procesos biomecánicos a nivel celular y molecular.

Además, la biomecánica ha evolucionado hacia una disciplina multidisciplinaria, donde se integran conocimientos de diversas áreas como la física, la ingeniería, la anatomía, la fisiología y la medicina. Esta colaboración interdisciplinaria ha permitido un enfoque más holístico en el estudio de la biomecánica y ha facilitado la transferencia de conocimientos y tecnologías entre diferentes campos.

En conclusión, la biomecánica ha tenido un impacto significativo en la comprensión de la salud humana y ha experimentado una evolución notable en los últimos años. Desde su aplicación en la rehabilitación y la terapia física hasta su contribución al diseño de dispositivos médicos y la mejora del rendimiento deportivo, la biomecánica continúa desempeñando un papel crucial en el avance de la salud y el bienestar humanos. Con el constante desarrollo de tecnologías y la colaboración interdisciplinaria, se espera que la biomecánica siga desempeñando un papel crucial en la investigación y aplicación de soluciones innovadoras para mejorar la calidad de vida de las personas.

1.2. Sistema masa-resorte-amortiguador como modelo para balanceo del cuerpo humano

En estudios anteriores se ha encontrado que es posible hacer una representación del modelo para el movimiento del cuerpo humano dividiéndolo en segmentos, por ejemplo, un segmento de tobillo-rodilla, rodilla-cadera y cadera-cabeza.

De acuerdo con Piovesan [7] en un modelo fisiológicamente exacto, los tendones actúan como impedancias amortiguadoras que estabilizan las fuerzas generadas entre los elementos generadores de fuerza (músculos) y el entorno. Esta representación se puede observar en la Figura 1.3.

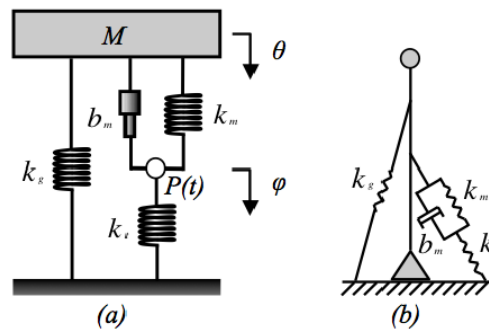


Figura 1.3. Sistemas masa-resorte-amortiguador. (a) Modelo Poynting-Thomson (b) Representación de un péndulo invertido [7].

Donde:

$k_g = -mgh$: Es la energía potencial modelada como una rigidez negativa.

k_t , k_m y b_m : Son los parámetros de rigidez y amortiguamiento del tendón y el musculo.

1.3. Estabilización de la postura al caminar

Existen sistemas mecánicos en dónde la existencia de fuerzas inerciales puede ser perjudiciales para su correcto control, pero en otros casos, como en el péndulo de Kapitza, el cual tiene la característica de estabilizarse cuando se hace oscilar verticalmente su base. En Quintanilla et al. [8] se postula que el comportamiento descrito del péndulo de Kapitza, visto desde la regulación de la rigidez del miembro inferior, es una estrategia generalizada empleada al caminar, y la oscilación de la pelvis ayuda al torso a mantenerse erguido.

Una característica clave de la enfermedad de Parkinson es la reducción en la longitud de los pasos y un patrón de caminar lento con pasos en los que los pies apenas se levantan del suelo. Además, las personas con esta enfermedad tienden a inclinar su torso hacia adelante en relación con la cadera. Usando videos públicos y programas de acceso libre que estudian el movimiento, podemos comparar el caminar de una persona sana con el de alguien que tiene Parkinson. Esto nos permite investigar cómo los cambios no lineales en la postura debido a la enfermedad pueden afectar la estabilidad al caminar.

Utilizando lo descrito en la sección 3, se propone un control de la regulación de la rigidez de los músculos (impedancias) alrededor de las juntas (cadera, rodillas o tobillo) permitiendo por medio de una rigidez equivalente, mantener la postura correcta dada por la rigidez ideal, lo anterior reduce la energía metabólica debida a la contracción que es necesaria para mantener la rigidez adecuada, por lo que en este trabajo se buscará determinar los criterios de estabilidad que mantengan al péndulo en su posición invertida para su futura implementación [8].

1.4. Análisis y modelado del movimiento humano al caminar

El proceso de modelar el caminar humano surge como un estudio de gran complejidad, en virtud de la multitud de puntos de conexión desde los cuales este fenómeno puede ser examinado. El análisis del caminar se despliega en una vastedad de dimensiones, en gran parte moldeado por el minucioso escrutinio de las trayectorias que son trazadas por los puntos de interés tales como el tobillo, la rodilla y la cadera durante todo el acto del caminar.

Esta intrincada red de interconexiones dentro del cuerpo humano revela un panorama multidimensional que requiere un enfoque integral y detallado para lograr una comprensión plena.

A medida que se explora cómo es que estos puntos de unión interactúan y se adaptan a diferentes condiciones y variaciones en el movimiento, se abre la puerta hacia una percepción más profunda de la biomecánica del caminar humano y, por extensión, hacia una base sólida para la mejora de terapias, la tecnología de asistencia y la comprensión de la salud musculoesquelética.

El análisis detallado de estas trayectorias del caminado humano no solo proporciona información esencial para diseñar prótesis y sistemas de rehabilitación que sean altamente

eficaces y personalizados, sino que también brinda detalles sobre características que hacen que el caminar humano sea tan único y adaptable en diversos entornos y circunstancias.

Es a través de esta minuciosa exploración que se puede ser capaz de desbloquear el potencial para avanzar en una serie de disciplinas, desde la medicina hasta la ingeniería biomecánica, aportando soluciones innovadoras y optimizando la calidad de vida de las personas.

En esencia, el modelado del caminar humano es un ejercicio fascinante y esencialmente interdisciplinario que resulta desafiante para descifrar los misterios de movimiento del cuerpo humano, con resultados que pueden influir en la forma en las que se interactúa con la tecnología, como se rehabilitan lesiones y la comprensión de los principios fundamentales que gobiernan la biomecánica única del ser humano [11].

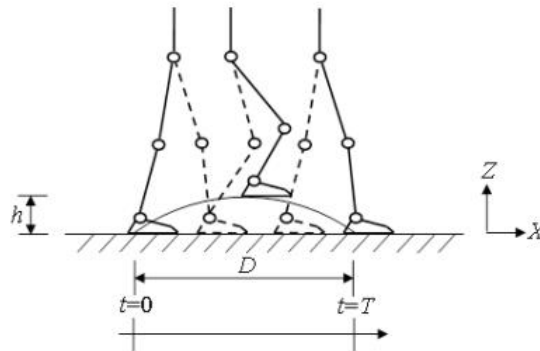


Figura 1.4. Movimiento caminado cicloidal [22].

1.5. Péndulo de Kapitza

Es como se le conoce al sistema mecánico de péndulo rígido invertido que exhibe un movimiento caótico, es decir, que una de las principales características de este sistema es que cuando su punto de suspensión se le somete a una vibración a alta frecuencia a través de su punto pivote en dirección vertical, se logra una estabilidad dinámica, la cual permite que el péndulo permanezca invertido [2].

Esta característica ha sido estudiada en el campo de la dinámica no lineal y ha atraído a numerosos investigadores. Uno de los pioneros en abordar este análisis y realizar experimentos al respecto fue P. Kapitza. Él observó que, debido a las vibraciones en el pivote, el péndulo permanecía vertical [4]. Estos movimientos verticales y angulares son extremadamente pequeños que son casi imperceptibles para el ojo humano, lo que tiene un impacto significativo en su comportamiento y aplicabilidad.

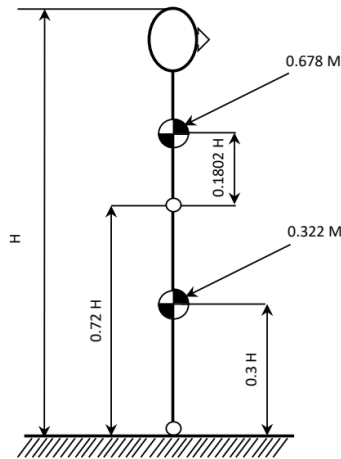


Figura 1.5. Distribución de la masa humana [2].

La definición de este tipo de péndulo a la cual llegó Kapitza, es un tipo de sistema no lineal caracterizado por un movimiento sinusoidal del punto de pivote del péndulo. Esta excitación periódica lo distingue de los péndulos lineales tradicionales. La fuerza periódica crea un comportamiento dinámico rico, que da lugar a diversos fenómenos interesantes, como el movimiento caótico y las bifurcaciones.

Existen varios tipos de péndulos, definidos por sus grados de libertad:

1. Péndulo de un grado de libertad

El péndulo de Kapitza de un grado de libertad consta de una sola varilla rígida suspendida de un punto de pivote. El punto de pivote experimenta oscilaciones verticales periódicas con una frecuencia y amplitud específicas. Esto crea un movimiento oscilatorio en el péndulo, lo que resulta en un comportamiento dinámico rico. Este tipo de péndulo es conocido por exhibir un movimiento caótico, donde pequeños cambios en las condiciones iniciales pueden llevar a resultados drásticamente diferentes.

2. Péndulo de dos grados de libertad

El péndulo de Kapitza de dos grados de libertad implica dos varillas sólidas acopladas, como se muestra en la Figura 1.5, pero a su vez ambos sujetos a oscilaciones verticales de manera periódica en el punto pivote de la primera varilla. Este sistema exhibe una dinámica más compleja en comparación con el péndulo de Kapitza de un grado de libertad. El acoplamiento entre los dos péndulos da lugar a un comportamiento caótico adicional y una mayor variedad de patrones de movimiento.

Otro aspecto importante que este péndulo presenta es que puede ser implementado para diversos estudios e investigaciones con los que se describen en los párrafos siguientes.

1. Investigación de Dinámica Caótica:

El péndulo sometido a oscilaciones en su base es un sistema ideal para estudiar la dinámica caótica debido a su sensibilidad a las condiciones iniciales y el comportamiento complejo que exhibe. Los investigadores en dinámica no lineal utilizan el péndulo de Kapitza para explorar la teoría del caos, los atractores y diversas bifurcaciones. [26]

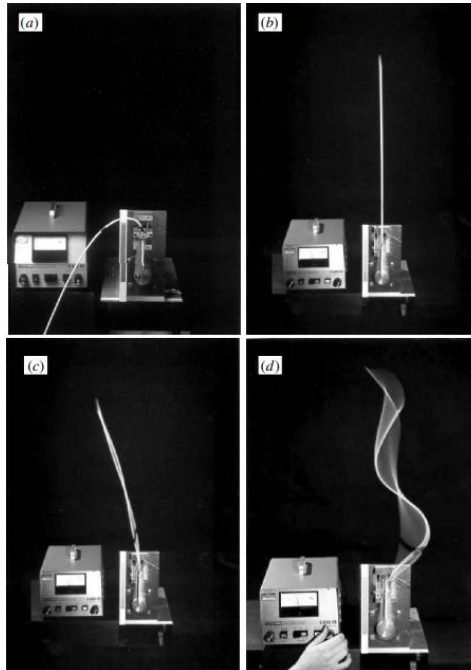


Figura 1.6. Demostración experimental: (a) el alambre deformado hacia abajo; (b) el alambre vertical estabilizado; (c) movimiento inclinado cerca de la inestabilidad de "caída" de baja frecuencia; y (d) movimiento cerca de la inestabilidad dinámica de alta frecuencia [26].

2. Aplicaciones en Ingeniería:

El péndulo de Kapitza se ha utilizado en ingeniería, especialmente en sistemas de aislamiento de vibraciones. Su comportamiento caótico le permite disipar energía y reducir las vibraciones de manera eficiente. Se ha utilizado en ciertos sistemas mecánicos para mitigar vibraciones no deseadas de manera controlada.

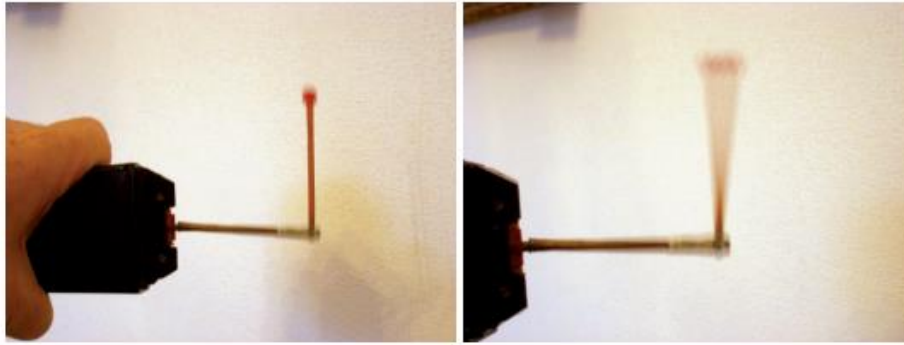


Figura 1.7. Demostración de la estabilización del péndulo de Kapitza. [2]

En conclusión, el péndulo de Kapitza es un sistema mecánico notable que exhibe un movimiento caótico y ha sido ampliamente estudiado en la dinámica no lineal. El péndulo de Kapitza individual y el péndulo de Kapitza doble ofrecen conocimientos únicos sobre el comportamiento complejo y son herramientas valiosas para comprender los sistemas caóticos. Desde la investigación en física fundamental hasta aplicaciones de ingeniería, el péndulo de Kapitza continúa cautivando a investigadores y educadores por igual, proporcionando conocimientos valiosos sobre la dinámica no lineal y sus diversas aplicaciones.

1.6. Antecedentes del control vibratorio aplicado a sistemas biomecánicos

Existen insectos voladores cuyos movimientos corporales provocan cambios en la cinemática efectiva de sus alas y, por lo tanto, influyen en la fuerza aerodinámica y la producción de torsión. Dentro de la literatura existen trabajos donde se ha descubierto que las alas de estas aves e insectos al aletear producen una amortiguación aerodinámica considerable mediante un mecanismo pasivo que ellos llaman "contra torque de aleteo" o "flapping countertorque" en inglés, esto durante los giros rápidos alrededor de su eje vertical [14].

En otras palabras, estos giros rápidos pueden ser cambios bruscos en la dirección o en el rumbo del insecto mientras vuela. La amortiguación aerodinámica es un fenómeno importante que puede influir en la estabilidad y maniobrabilidad del vuelo de los insectos y otros objetos voladores.

Dentro de las investigaciones encontradas en la literatura, se amplía el estudio para incluir la amortiguación aerodinámica que se produce durante las traducciones y rotaciones del cuerpo con respecto a sus seis ejes principales: balanceo, cabeceo, guiñada, hacia adelante/atrás, lateral y vertical [14]. Además, han desarrollado modelos analíticos utilizando un modelo aerodinámico cuasi estático y análisis de elementos de pala, incorporando los cambios efectivos en la cinemática de las alas causados por el movimiento

del cuerpo. Se encontró que la amortiguación aerodinámica en todos estos casos depende linealmente de las velocidades de translación y rotación del cuerpo, y aumenta con la amplitud y frecuencia del movimiento del ala.

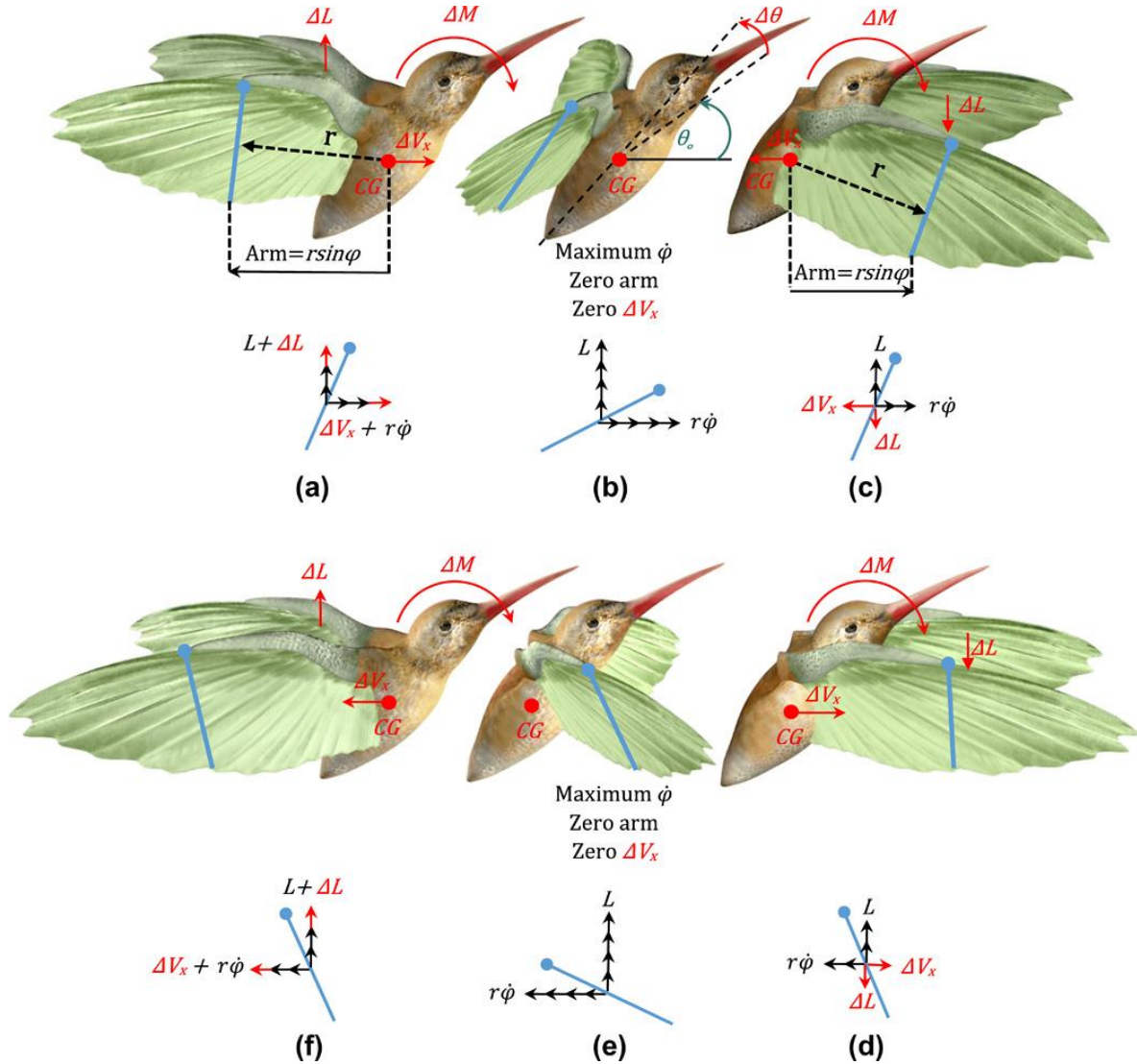


Figura 1.8. Ilustración gráfica del análisis de estabilización de un colibrí por medio de control vibratorio [14].

A partir de estos modelos analíticos, se calcularon las derivadas de estabilidad asociadas a la dinámica de vuelo linealizada en el vuelo estacionario y se derivó un modelo dinámico completo de 6 grados de libertad (6-DOF). El modelo se utilizó para estimar la dinámica de vuelo y la estabilidad de cuatro especies diferentes de insectos voladores como estudios de caso.

El modelo analítico desarrollado en este trabajo es importante para estudiar la dinámica de vuelo y la estabilidad pasiva de los animales voladores, así como para desarrollar micro vehículos aéreos con alas batientes (MAVs) con vuelo estable y maniobrable, que se logra a través de la estabilidad dinámica pasiva y el control activo de vuelo [14].

2

2. Modelado matemático del péndulo de uno y dos grados de libertad con base móvil

Para determinar las ecuaciones que describen la dinámica del sistema, se hizo uso del método de Euler-Lagrange, el cual sirve para describir un sistema a través de dicha metodología se deben estudiar las energías cinética (K) y potencial del péndulo (U)

$$L = T - U \quad (2.1)$$

Este método se puede aplicar a sistemas con fuerzas conservativas y no conservativas. En el caso de fuerzas conservativas las ecuaciones de Euler-Lagrange quedan de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial q_i} = 0 \quad (2.2)$$

Donde q_i es la i – esima coordenada generalizada.

En la Figura 2.1 se muestra el modelo esquemático del péndulo invertido sujeto a desplazamiento tanto en dirección horizontal como vertical propuesto para representar el análisis de la postura al caminar.

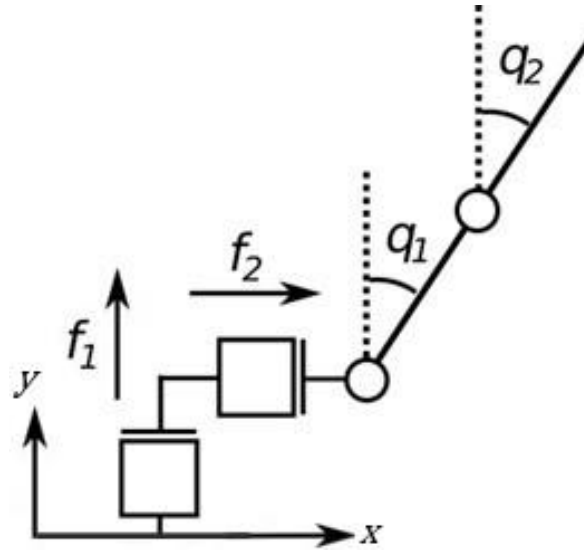


Figura 2.1. Modelo esquemático del péndulo de dos grados de libertad con base móvil.

Donde:

f_1 y f_2 son las expresiones de las oscilaciones verticales y horizontales respectivamente. Ambas oscilaciones tienen frecuencia ω .

Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para un sistema de n-eslabones, en un caso general, puede ser descrito de la siguiente manera:

$$\Gamma = M(\ddot{q}) + C(\dot{q}, q) + G(q) \quad (2.3)$$

Donde:

$M(\ddot{q})$: Matriz de inercia, $C(\dot{q}, q)$: Matriz de Coriolis $G(q)$: Vector de gravedad.

En una representación general, los términos viscoelásticos que representan la rigidez y amortiguamiento de las juntas se agregan al sistema empleando las matrices B y K . Entonces el sistema puede ser escrito como:

$$\Gamma = M(\ddot{q}) + (C(\dot{q}, q) + B)\dot{q} + G(q) + Kq \quad (2.4)$$

2.1. Modelado péndulo de un grado de libertad

Uno de los modelos más simples que explican la oscilación vertical debida a la marcha se puede expresar como un sistema de segundo orden de un solo grado de libertad. El cuerpo se modela como un péndulo invertido donde toda la masa m se concentra en el centro de gravedad.

El radio de giro l_i , en la Figura 2.2, representa la distancia desde el punto de pivote en el tobillo y el centro de gravedad.

El ángulo de rotación del péndulo alrededor del tobillo es q_1 que es 0 cuando el eslabón está en posición vertical. Si la persona camina, esto equivaldría en esta representación a que el péndulo esté sujeto a una oscilación vertical impulsora f en su base, las ecuaciones de movimiento se muestran más adelante.

Para comprender mejor el análisis de estabilidad por medio del sistema promediado se realizará el análisis del sistema con un solo eslabón, por lo que se determinará primero su modelo matemático.

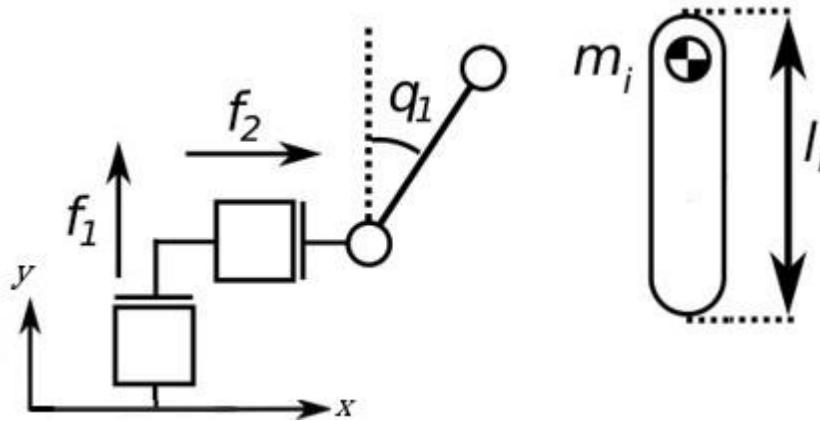


Figura 2.2. Modelo péndulo de un grado de libertad.

Como se menciona anteriormente, para obtener las ecuaciones de movimiento que describen el sistema del péndulo, se utilizó la metodología de Euler Lagrange, por lo que es necesario documentar las coordenadas de la posición del centro de masa.

A partir de la Figura 2.2, las coordenadas de la posición del centro de masa son:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k + l_1 \sin q_1 \\ y_k + l_1 \cos q_1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Donde:

$$x_k = D \cos(\omega t) \quad (2.6)$$

$$y_k = A \cos(\omega t) \quad (2.7)$$

Que corresponden a las ecuaciones de movimiento de una cicloide.

Derivando el vector de posición (3) para obtener las velocidades asociadas al eslabón y así poder utilizar las ecuaciones de Euler Lagrange, se tiene lo siguiente:

$$v = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_k + l_1 \dot{q}_1 \cos q_1 \\ \dot{y}_k - l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Entonces, la energía cinética se calcula como:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (m_i v_i^2) \quad (2.9)$$

Donde n es el número de eslabones.

Para este caso donde $n = 1$, la energía cinética se escribe como:

$$T = \frac{1}{2} m_1 [l_1^2 \dot{q}_1^2 + \dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + 2l_1 \dot{q}_1 \dot{x}_k \cos q_1 - 2l_1 \dot{q}_1 \dot{y}_k \sin \theta] \quad (2.10)$$

Posteriormente se procede a calcular la energía potencial del sistema, la cual se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$U = g \sum_{i=1}^n \left(m_i y_i + \frac{1}{2} k_i q_i^2 \right) \quad (2.11)$$

Además, como se puede observar en (2.11), se agrega la contribución de la energía elástica para tener una mejor comprensión del comportamiento del sistema.

Por lo tanto, la energía potencial para el péndulo de un grado de libertad se describe como:

$$U = m_1 g [y_k + l_1 \cos q_1] + \frac{1}{2} k_1 q_1^2 \quad (2.12)$$

Ya que se han calculado las energías cinética y potencial, se desarrolla el Lagrangiano como se definió anteriormente:

$$L = T - U$$

Además, agregando la energía disipativa del sistema para un grado de libertad, queda la siguiente expresión:

$$D = \frac{1}{2} b_1 \dot{q}_1^2 \quad (2.13)$$

Euler-Lagrange (2.2), donde: q_1 es la coordenada generalizada. Sustituyendo las ecuaciones (2.10) y (2.12) en (2.1), se encuentra la ecuación que describe el sistema de péndulo sujeto a oscilaciones en su base.

Por lo tanto, con $\Gamma=0$ queda definida de la siguiente manera:

$$M(\ddot{q}) + (C(\dot{q}, q) + B)\dot{q} + G(q) + Kq + H\ddot{u}(t) = 0$$

Donde:

$$M = m_1 l_1^2 \quad (2.14)$$

$$C = 0 \quad (2.15)$$

$$G = -m_1 g l_1 \sin(q_1) \quad (2.16)$$

$$H = [m_1 l_1 \cos(q_1) \quad -m_1 l_1 \sin(q_1)] \quad (2.17)$$

$$K = k_1 \quad (2.18)$$

$$B = b_1 \quad (2.19)$$

$$\ddot{u} = [\ddot{x}_k \quad \ddot{y}_k]^T \quad (2.20)$$

2.2. Modelado péndulo de dos grados de libertad

A partir de la representación mostrada en la Figura 2.1, se muestra a continuación el procedimiento para obtener el modelo matemático para el péndulo de dos grados de libertad.

Al igual que en el péndulo de un grado de libertad, se deben obtener las energía cinética y potencial del sistema, por lo que es necesario escribir el vector de posición del centro de masa de ambos segmentos del péndulo, los cuales se muestran en (2.21). Cabe destacar que el ángulo q_2 se mide con respecto al marco de coordenadas global.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_k + l_1 \sin q_1 \\ y_k + l_1 \cos q_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_k + l_1 \sin q_1 + l_2 \sin q_2 \\ y_k + l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Donde y_k y x_k corresponden a las posiciones vertical y horizontal dadas por las oscilaciones Aplicadas a la base móvil del péndulo (f_1 y f_2).

A continuación, debido a que para el cálculo de la energía cinética se requiere del vector de velocidad, se derivan los vectores de posición (2.21) y se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_k + l_1 \dot{q}_1 \cos q_1 \\ \dot{y}_k - l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 \end{bmatrix} \\ v_2 &= \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_k + l_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + l_2 \dot{q}_2 \cos q_2 \\ \dot{y}_k - l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 - l_2 \dot{q}_2 \sin q_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Una vez conociendo los vectores de velocidad, la energía cinética total del sistema está dada por la suma de la energía cinética de cada segmento del péndulo, es decir:

$$T_{total} = T_1 + T_2$$

$$\begin{aligned} T_{total} &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_k^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}_k^2 \\ &\quad + (m_1 + m_2)l_1 \dot{q}_1 \dot{x}_k \cos q_1 - (m_1 + m_2)l_1 \dot{q}_1 \dot{y}_k \sin q_1 \\ &\quad + m_2 l_2 \dot{q}_2 \dot{x}_k \cos q_2 - m_2 l_2 \dot{q}_2 \dot{y}_k \sin q_2 + m_2 m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Por otro lado, el procedimiento para calcular la energía potencial del sistema, esta descrito a continuación:

$$U_{total} = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (q_2 - q_1)^2$$

Donde, k_i corresponde a los elementos elásticos.

$$U_{total} = m_1 g (y_k + l_1 \cos q_1) + m_2 g (y_k + l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2) + \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (q_2 - q_1)^2 \quad (2.24)$$

Entonces el Lagrangiano, definido como la diferencia entre energía cinética y potencial para este sistema del péndulo de dos grados de libertad es:

$$L = T_{total} - U_{total}$$

$$L = \left[\frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_k^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{y}_k^2 + (m_1 + m_2) l_1 \dot{q}_1 \dot{x}_k \cos q_1 - (m_1 + m_2) l_1 \dot{q}_1 \dot{y}_k \sin q_1 + m_2 l_2 \dot{q}_2 \dot{x}_k \cos q_2 - m_2 l_2 \dot{q}_2 \dot{y}_k \sin q_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) \right] - \left[m_1 g (y_k + l_1 \cos q_1) + m_2 g (y_k + l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2) + \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (q_2 - q_1)^2 \right] \quad (2.25)$$

Considerando la energía de disipación en ambos segmentos, se tiene lo siguiente:

$$D = \frac{1}{2} b_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} b_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2 \quad (2.26)$$

Empleando la metodología de Euler-Lagrange dada por la ecuación (2.2) y asumiendo que no existen fuerzas actuando en el sistema, se obtienen las ecuaciones que describen la dinámica del péndulo de dos grados de libertad sometido a oscilaciones en su base móvil o punto pivote para la coordenada generalizada q_1 , las cuales se muestran a continuación:

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) \ddot{q}_2 + (m_1 + m_2) l_1 \ddot{x}_k \cos q_1 - (m_1 + m_2) l_1 \ddot{y}_k \sin q_1 - m_2 l_1 l_2 \dot{q}_2^2 \sin(q_1 - q_2) - g(m_1 + m_2) l_1 \sin q_1 + (k_1 + k_2) q_1 + (b_1 + b_2) \dot{q}_1 - k_2 q_2 - b_2 \dot{q}_2 = 0 \quad (2.27)$$

Para el caso del segundo segmento del péndulo se sigue el mismo desarrollo que en el caso anterior, por lo tanto, las ecuaciones que describen la dinámica del doble péndulo invertido sometido a oscilaciones en su punto pivote es la siguiente:

$$\begin{aligned} m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{q}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_2 \ddot{x}_k \cos q_1 - m_2 l_2 \ddot{y}_k \sin q_1 \\ - m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1^2 \sin(q_1 - q_2) - g m_2 l_2 \sin q_1 + k_2(q_2 - q_1) \\ + b_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Reorganizando las ecuaciones (2.27) y (2.28) en forma matricial se tiene:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{G} = \boldsymbol{\tau} \quad (2.29)$$

Donde:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 l_2 \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_2 \\ -m_2 l_1 l_2 \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1 \cos q_1 & -(m_1 + m_2)l_1 \sin q_1 \\ m_2 l_2 \cos q_2 & -m_2 l_2 \sin q_2 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -g(m_1 + m_2)l_1 \sin q_1 \\ -g m_2 l_2 \sin q_2 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} -(k_1 + k_2)q_1 - (b_1 + b_2)\dot{q}_1 + k_2 q_2 + b_2 \dot{q}_2 \\ -k_2(q_2 - q_1) - b_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Donde los vectores relacionados a las coordenadas generalizadas y a las entradas que actúan sobre la base móvil del péndulo de dos grados de libertad son los siguientes respectivamente.

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2]^T$$

$$\mathbf{u} = [x_k \quad y_k]^T$$

2.3. Conclusiones del capítulo

En este capítulo, se ha abordado el modelado matemático de péndulos de uno y dos grados de libertad, a través de explorar a detalle los fundamentos teóricos y las ecuaciones de movimiento asociadas con estos sistemas físicos.

Una de las principales contribuciones de este capítulo ha sido la propuesta de modelar el comportamiento de los péndulos de uno y dos grados de libertad, considerando las interacciones entre las masas y las fuerzas involucradas y agregando las fuerzas inducidas por las oscilaciones en la base de ambos péndulos. Este enfoque ha permitido obtener una representación más precisa de las trayectorias resultantes cuando se hace oscilar su base.

Es importante tener en cuenta que este modelo matemático presenta ciertas limitaciones, como la idealización de las condiciones iniciales y los eslabones de ambos péndulos cuentan con masas despreciable. En futuras investigaciones, es recomendable incluir estas limitaciones y explorar la inclusión de factores más realistas y acertadas a los parámetros del cuerpo humano. Además, sería interesante extender este estudio a otros sistemas físicos relacionados, como péndulos acoplados o sistemas con múltiples grados de libertad.

El próximo capítulo, se centrará en análisis de los modelos desarrollados por medio del método de promediación, del cual también se hará mención en el comienzo del siguiente capítulo para así más adelante realizar la validación numérica de los modelos desarrollados, utilizando métodos numéricos resueltos con lenguaje Python.

3

3. Método de promediación aplicado al control vibratorio

El análisis de la estabilidad de los sistemas mecánicos es un tema clásico en la mecánica y la dinámica. A lo largo de la historia, varios investigadores han contribuido a esta área, como Lagrange, Maxwell, Thomson, Tait y Lyapunov [39]. Estos estudios sentaron las bases de la teoría moderna de estabilidad. En el presente, los principios de invariancia son utilizados para establecer la estabilidad de los sistemas dinámicos de manera más flexible. La teoría de estabilidad es fundamental en los sistemas dinámicos y la teoría de control. Se utilizan enfoques lineales y no lineales, como la linealización y los criterios de estabilidad de Lyapunov. El análisis de la estabilidad se aplica especialmente en sistemas mecánicos sujetos a disipación.

3.1. Control vibratorio de sistemas mecánicos

Dentro de los sistemas mecánicos, existen aquellos que tienen menos actuadores que grados de libertad, (sistemas subactuados). Este tipo de sistemas se encuentra en robótica móvil y en la naturaleza, donde criaturas como insectos voladores, aves y peces pueden moverse de manera efectiva y eficiente a pesar de ser subactuados, es decir, sistemas con menos actuadores que grados de libertad.

La principal característica de estos sistemas es que utilizan este movimiento como un control oscilatorio.

Una de las razones por las que el control oscilatorio es común, es que a menudo no se puede estabilizar los sistemas mecánicos subactuados utilizando técnicas convencionales como lo son, por ejemplo, la retroalimentación de estado, por lo que en los últimos años se ha llevado a cabo el desarrollo de métodos de síntesis de control variable en el tiempo, es decir se ha explorado el uso del control vibratorio para este tipo de sistemas subactuados [34].

El objetivo del controlador es seguir trayectorias deseadas que varían lentamente tanto en los grados de libertad actuados como en los no actuados en promedio. El enfoque se basa en la observación de que, en sistemas subactuados con una estructura adecuada, las coordenadas actuadas junto con las velocidades generalizadas correspondientes pueden considerarse como entradas generalizadas para las coordenadas no actuadas.

La ley de control consta de dos términos. El primero es una retroalimentación del error de seguimiento de la trayectoria en las coordenadas actuadas. El segundo término, basado en el concepto de control vibratorio, impone entradas periódicas de alta frecuencia que se modulan por el error de seguimiento en las coordenadas no actuadas.

Una vez definida la estructura del controlador, es necesario determinar valores adecuados para los parámetros de control. Esto requiere asegurarse de que las trayectorias deseadas de variación lenta sean factibles para la dinámica de los grados de libertad no actuados, promediados en el tiempo.

El resultado es un conjunto de condiciones tanto para la estructura del sistema como para la trayectoria deseada. Basándose en resultados anteriores para el control oscilatorio, se propone una técnica para diseñar una retroalimentación no lineal, con forzamiento periódico de alta frecuencia, para controlar una clase de sistemas mecánicos subactuados con deriva.

Las vibraciones dentro de estos sistemas tienen un papel muy importante dentro de la rama de la ingeniería, ya que estas en ocasiones pueden generar efectos no deseados y en ocasiones perjudiciales, pero en otros casos los efectos de someter sistemas mecánicos no lineales a vibraciones a alta frecuencia generan diversos efectos que pueden ser favorables a dichos sistemas.

Este concepto de control por vibraciones fue motivado por el sistema de péndulo invertido sometido a oscilaciones a alta frecuencia en su punto de soporte o pivote, las cuales generan que este se estabilice en su punto de equilibrio inestable (posición invertida), cuya primera demostración práctica fue desarrollada por Stephenson [9] y más adelante Kapitza [4], implementó las condiciones de estabilidad.

Más adelante, Bogoliubov [40] obtuvo las condiciones de estabilidad del péndulo de Kapitza aplicando métodos asintóticos, la cual proporciona herramientas útiles para analizar sistemas de control vibratorio.

Estos métodos de síntesis de control variable en el tiempo se han desarrollado para analizar los sistemas de control vibratorio, como lo es la teoría del promedio, la cual proporciona una herramienta útil.

Este trabajo presenta un enfoque de diseño de control oscilatorio que permite el seguimiento aproximado de trayectorias de referencia para una clase de sistemas mecánicos subactuados.

Además, se discute la selección de los parámetros de control y se establecen condiciones para asegurar la factibilidad de las trayectorias deseadas. El enfoque propuesto se desarrolla tanto para sistemas mecánicos de un grado de libertad como para sistemas de 2 grados de libertad con una y múltiples entradas.

En resumen, este enfoque de control vibratorio se centra en lograr la estabilización de sistemas al alterar su respuesta de estabilidad mediante la introducción de vibraciones de alta frecuencia. Esta técnica de control mediante vibraciones, especialmente efectiva en sistemas considerados "suaves", como el péndulo de Kapitza, el cual se ha estado describiendo durante este trabajo, fue desarrollado por Meerkov [6].

Su método de aplicar vibraciones para modificar la dinámica de sistemas como el péndulo de Kapitza destaca la innovación y la versatilidad de esta estrategia en el control de sistemas complejos. Este enfoque no solo abre nuevas perspectivas para la estabilidad de sistemas dinámicos, sino que también resalta la importancia de considerar soluciones fuera de lo convencional para abordar desafíos en la ingeniería moderna y aplicada a sistemas biológicos.

3.2. Método de promediación de sistemas mecánicos

El análisis de estabilidad de sistemas de control vibratorio está estrechamente relacionado a la teoría de promediación, ya que como este tipo de sistemas son no lineales-variantes en el tiempo, no se puede recurrir a aplicar técnicas convencionales de análisis de sistemas invariantes en el tiempo.

Por lo tanto, en la teoría de promediación clásica, es posible “transformar” un sistema variante en el tiempo en un sistema invariante, como el de la ecuación (3.1), donde se hace una separación de lo variable con lo invariable en el tiempo.

Posteriormente, la matriz linealizada del sistema promediado se asumirá que deberá ser Hurwitz y con esto encontrar los valores de los parámetros necesarios para cumplir esta condición. se podrán aplicar las técnicas convencionales de análisis de estabilidad, como, por ejemplo, por medio de los valores propios del sistema.

$$\dot{x} = f(x) + \frac{1}{\epsilon} g\left(\frac{t}{\epsilon}, x\right) \quad (3.1)$$

Para que este método se pueda aplicar, se debe considerar que la frecuencia de operación del sistema vibratorio sea mayor a una frecuencia ω_0 la cual depende de los parámetros físicos y las amplitudes de entrada del sistema analizado [10].

Si esta frecuencia ω_0 cumple con esta característica mencionada en el párrafo anterior, entonces se dice que el teorema garantiza que, si existe un equilibrio hiperbólicamente estable en el sistema dinámico promediado, entonces existirá un correspondiente equilibrio hiperbólicamente estable en el sistema dinámico original [10].

Cuando se logran ajustar los valores de los parámetros del sistema, es posible alcanzar:

$$x(t) - \bar{x}(t) = 0$$

En esta situación, el análisis de la estabilidad del sistema en función del tiempo variante se simplifica y se basa en el análisis de la estabilidad del sistema que es invariante en el tiempo o promediado. Este último está formulado de manera más simple que el sistema original que cambia en el tiempo.

Bullo (2004) ofrece un conjunto de herramientas que simplifican el cálculo del sistema promediado. Estas herramientas involucran caracterizar los flujos de ciertos campos vectoriales que dependen del tiempo, utilizando la fórmula de variación de constantes. Esto proporciona un enfoque práctico para comprender y evaluar la estabilidad del sistema promediado, lo que a su vez contribuye a un análisis más claro y manejable de sistemas que cambian con el tiempo.

Como apoyo para determinar el sistema se definen los siguientes parámetros:

$$k_i = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t v_i(\tau) d\tau dt \quad (3.2)$$

Donde $i \in \{1, \dots, m\}$, m es la cantidad de entradas en el sistema.

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_0^t v_i(\tau) d\tau \right) \left(\int_0^t v_j(\tau) d\tau \right) dt \quad (3.3)$$

Y

$$\mu_{ij} = \frac{1}{2} (\Lambda_{ij} - k_i k_j) \quad (3.4)$$

Además, definiendo el "producto simétrico" entre 2 campos vectoriales $Y_i(x)$ y $Y_j(x)$ como:

$$\langle Y_i : Y_j \rangle(x) = \langle Y_j : Y_i \rangle(x) = [Y_j(x), [Z(x), Y_i(x)]] \quad (3.5)$$

Donde $[\cdot, \cdot]$ denota el **corchete de Lie** del campo vectorial [34], que se obtiene de la siguiente manera:

$$[Z, Y_i] = \frac{\partial Z}{\partial x} Y_i - \frac{\partial Y_i}{\partial x} Z \quad (3.6)$$

El corchete de Lie es un concepto fundamental en la teoría de grupos y álgebras de Lie, que son áreas de las matemáticas ampliamente utilizadas en la física y en diversas ramas de la ciencia.

En resumen, el corchete de Lie representa una operación algebraica que mide la "falta de conmutatividad" entre dos elementos en un álgebra de Lie. Un álgebra de Lie es una estructura algebraica que combina una multiplicación (llamada corchete de Lie) con una operación adicional llamada "conmutador" o "corchete" que satisface ciertas propiedades.

Para dos elementos x e y en un álgebra de Lie, el corchete de Lie se denota comúnmente como $[x, y]$. Matemáticamente, se calcula como la diferencia entre el producto de x e y y el producto de y y x :

$$[x, y] = xy - yx$$

Si el resultado de este corchete es cero, entonces x e y se dice que conmutan, lo que significa que su orden en la multiplicación no afecta el resultado. Si el resultado no es cero, entonces $\{x\}$ e $\{y\}$ no conmutan, lo que indica la existencia de una especie de "torsión" o "giro" en la estructura algebraica, y esto es un aspecto clave en muchas teorías físicas y matemáticas.

En física, el corchete de Lie tiene aplicaciones en teoría de grupos, teoría de simetría, mecánica cuántica, teoría de campos y muchas otras áreas. En resumen, es una herramienta poderosa para estudiar cómo los elementos de un álgebra interactúan entre sí y cómo esta interacción afecta diversas propiedades y comportamientos en matemáticas y en el mundo físico.

Una vez que se obtuvo lo anterior, el sistema promediado se obtiene de la siguiente manera:

$$\dot{\bar{x}} = Z(\bar{x}) - \sum_{i,j=1}^m \mu_{ij} \langle Y_i; Y_j \rangle (\bar{x}) \quad (3.7)$$

3.3. Estabilidad de sistemas utilizando la matriz de Hurwitz

El análisis de la estabilidad de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias es aplicado a varios campos de estudio dentro de los modelos matemáticos aplicados a ciertas ciencias exactas y en la teoría de control, ya que dentro de esta área es de suma importancia determinar las condiciones necesarias y suficientes que aseguren que la solución de este problema, bajo ciertas condiciones iniciales, se mantenga cercando o tienda a su posición de equilibrio.

Considérese el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales dado por:

$$\dot{x} = Ax \quad (3.8)$$

Por medio del polinomio característico de este sistema lineal (30) se pueden determinar las propiedades asociadas a todo el sistema, así como también su desarrollo. Cuando todos los valores propios de esta matriz A tienen parte real negativa, sus soluciones convergerán al origen conforme $t \rightarrow \infty$, a lo cual se le conoce como estabilidad asintótica del sistema [4].

La **matriz Hurwitz** es una matriz cuya principal característica es que todos sus valores propios tienen parte real negativa, por lo que dicha matriz puede ser aplicada a uno de los problemas fundamentales de la teoría de control: **determinar la estabilidad de un sistema**.

especto a la estabilidad del punto de equilibrio de un sistema no lineal autónomo, se puede realizar un análisis a través de la exploración del sistema linealizado vinculado a dicho punto de equilibrio. Este enfoque se conoce como **método indirecto de Lyapunov**, que es una estrategia ampliamente reconocida para abordar problemas de estabilidad en sistemas dinámicos no lineales.

Teorema 1[5]: Considérese que $x = 0$ es un punto de equilibrio para el sistema no lineal (3.8), la matriz linealizada:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x)|_{x=0} \quad (3.9)$$

Entonces:

- El origen es asintóticamente estable si la parte real de los valores propios de A son negativos.
- El origen es inestable si la parte real de uno o más de los eigenvalores de A son positivos.

En resumen, este teorema brinda una conexión de gran importancia entre la matriz linealizada A y el análisis de la estabilidad de los sistemas no lineales, como el que se analiza en este documento.

Los valores propios inherentes al sistema linealizado dado por la matriz A sirven de discernimiento para determinar si el punto de equilibrio se halla en un estado asintóticamente estable o inclinado hacia la inestabilidad.

En esencia, estos valores propios se manifiestan como ventanas al comportamiento interno del sistema, lo cual permite captar los matices de su dinámica en la proximidad del punto de equilibrio.

Como resultado, este enfoque aporta una herramienta sumamente valiosa para determinar dichos valores de estabilidad para sistemas complejos en torno a su posición de equilibrio.

La capacidad de anticipar y comprender cómo estas entidades reaccionan en relación con los pequeños cambios en su configuración inicial no solo refuerza nuestra apreciación de los sistemas dinámicos, sino que también desencadena una poderosa herramienta predictiva. En última instancia, la aplicación de este teorema permite analizar de manera más profunda y precisa el entorno en el que se desenvuelven estos sistemas, abriendo puertas para un mejor diseño y control en campos de estudio.

3.4. Criterio Lienard-Chipart (LC)

Este criterio se posiciona como una herramienta matemática fundamental, desempeñando un papel auxiliar crucial en la identificación de las condiciones de estabilidad asociadas al polinomio de Hurwitz.

Su aplicación se extiende de manera significativa al dominio de la dinámica, encontrando su utilidad en la comprensión y el análisis de sistemas caracterizados por ecuaciones diferenciales. En esencia, este criterio proporciona un marco teórico esencial para evaluar y establecer la estabilidad en sistemas que poseen un comportamiento dinámico, enriqueciendo la comprensión de su comportamiento y sus propiedades fundamentales.

Una condición necesaria para que un polinomio con coeficientes reales tenga todas sus raíces con parte real negativa, es que todos sus coeficientes tengan el mismo signo.

Según el teorema LC, el sistema que tiene el polinomio característico $P(\lambda) = C_n + C_{n-1}\lambda + \dots + \lambda^n = 0$ es estable si se cumplen cualquiera de los siguientes cuatro conjuntos de condiciones [15]:

1. *Los coeficientes pares y los determinantes de Hurwitz de orden par son positivos.*
2. *Los coeficientes pares y los determinantes de Hurwitz de orden impar son positivos.*
3. *Los coeficientes impares y los determinantes de Hurwitz de orden par son positivos.*
4. *Los coeficientes impares y los determinantes de Hurwitz de orden impar son positivos.*

Las condiciones de estabilidad dadas por este criterio se muestran a manera de resumen en la Tabla 3.1.

Orden n	Condiciones de estabilidad
1	C_1
2	C_1, C_2
3	C_1, H_2 , C_2
4	C_1, H_3 , C_3, C_4
5	$C_1, H_2 , C_3, H_4 , C_5$
6	$C_1, H_3 , C_3, H_5 , C_5, C_6$
7	$C_1, H_2 , C_3, H_4 , C_5, H_6 , C_7$

Tabla 3.1. Condiciones de estabilidad para polinomios de diferente orden según el criterio Lienard-Chipart [15].

Con esta consideración en mente, procederemos a emplear esta herramienta para llevar a cabo el análisis de estabilidad en los casos de los péndulos de uno y dos grados de libertad, lo cual será abordado en las siguientes secciones.

3.5. Análisis de estabilidad péndulo de un grado de libertad

Para determinar la estabilidad del sistema del péndulo de un grado de libertad aplicando el método de promediación primero se debe pasar el modelo matemático dado por ecuaciones de segundo orden a un sistema de ecuaciones de primer orden, para ello se propone el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned}x_1 &= q_1, & x_2 &= \dot{q}_1 \\ \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= \ddot{q}_1\end{aligned}$$

Entonces el sistema anterior queda representado de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{g \sin x_1}{l_1} - \frac{x_2}{m_1 l_1^2} \\ \frac{\omega a}{l_1} \sin x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega a}{l_1} \sin x_1 \end{bmatrix} \omega \cos(\omega t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega d_1}{l_1} \cos x_1 \end{bmatrix} \omega \sin(\omega t) \quad (3.10)$$

Donde:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{g \sin x_1}{l_1} - \frac{x_2}{m_1 l_1^2} \\ \frac{\omega a}{l_1} \sin x_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega a}{l_1} \sin x_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega d_1}{l_1} \cos x_1 \end{bmatrix}$$

Considerando que las entradas $v_1(t) = \cos(\omega t)$ y $v_2(t) = \sin(\omega t)$ son periódicas de valor medio cero, entonces a partir de las ecuaciones (3.3) y (3.4), se obtienen los valores siguientes para los parámetros κ_i y μ_{ij} :

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= 1 \text{ y } \kappa_2 = 0 \\ \mu_{11} = \mu_{22} &= \frac{1}{4} \text{ y } \mu_{12} = \mu_{21} = 0\end{aligned}$$

Usando el teorema de promediación propuesto por Bullo [1], el sistema promediado para el péndulo de un solo eslabón queda de la siguiente manera:

$$\left[\begin{array}{c} \bar{x}_2 \\ -\frac{0.5\omega^2 a^2 \sin(x_1) \cos(x_1)}{l_1^2} + \frac{0.5\omega^2 d_1^2 \sin(x_1) \cos(x_1)}{l_1^2} + \frac{g \sin(x_1)}{l_1} + \frac{-b_1 x_2 - k_1 x_1}{l_1^2 m_1} \end{array} \right] \quad (3.11)$$

Donde, $\bar{x} = (\bar{x}_3, \bar{x}_4)^T$ es el vector de estado para el sistema promediado. El origen (0,0) es el punto de equilibrio del sistema original y del sistema promediado.

Teniendo esto en cuenta, se linealiza el sistema de la ecuación (3.11) alrededor del origen y se obtiene el siguiente sistema lineal e invariante en el tiempo:

$$\dot{\bar{x}} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{0.5\omega^2 m_1 (-a^2 + d_1^2) + g l_1 m_1 - k_1}{m_1 l_1^2} & -\frac{b_1}{m_1 l_1^2} \end{array} \right] \quad (3.12)$$

El objetivo de obtener el sistema promediado representado por la ecuación (3.12), es determinar los parámetros de los que depende la estabilidad del sistema de péndulo invertido, los cuales están en función principalmente de los parámetros viscoelásticos y de los parámetros que describen el movimiento de la cicloide.

Para ello, primero se determina el polinomio característico de la matriz del sistema de la ecuación (3.12), el cual es el siguiente:

$$\lambda_1^2 + \frac{\lambda_1 b_1}{l_1^2 m_1} + \frac{0.5\omega^2 m_1 (a^2 - d_1^2) - g l_1 m_1 + k_1}{m_1 l_1^2} = 0 \quad (3.13)$$

Dado este polinomio con coeficientes reales, se define la matriz Hurwitz asociada a este polinomio de la siguiente forma, tal como se describe en la sección 3.3

$$H_m = \left[\begin{array}{cc} \frac{b_1}{l_1^2 m_1} & 1 \\ 0 & \frac{0.5\omega^2 m_1 (a^2 - d_1^2) - g l_1 m_1 + k_1}{l_1^2 m_1} \end{array} \right] \quad (3.14)$$

A partir de la matriz Hurwitz dada por la ecuación (3.14), las condiciones que determinan la estabilidad del sistema promediado dado por (3.12) se determinarán de acuerdo con el criterio Lienard-Chipart descrito en la sección 3.4, el cual debe cumplir lo siguiente:

$$h_1 > 0$$

$$h_2 > 0$$

Por lo tanto, las condiciones que determinan si la matriz H_m dada por (3.14) es Hurwitz y por ende si el sistema promediado de la ecuación (3.12) es estable, son las siguientes:

$$\frac{b_1}{l_1^2 m_1} > 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{0.5\omega^2 m_1 (a^2 - d_1^2) - gl_1 m_1 + k_1}{l_1^2 m_1} > 0 \quad (3.16)$$

Dado que los términos presentes en la ecuación (3.15) son intrínsecamente parámetros propios del sistema, y por lo tanto siempre poseen valores positivos, esta condición se cumple de manera invariable. Con esta certeza en mente, se procede con la siguiente condición en el análisis.

A partir de la segunda condición de estabilidad dada por la ecuación (3.16), se pueden obtener varias consideraciones en cuanto a los parámetros de entrada del sistema, por ejemplo, la frecuencia mínima necesaria para estabilizar al sistema se describe en la ecuación (3.17).

$$\omega^2 > \frac{2(gl_1 m_1 - k_1)}{m_1 (a^2 - d_1^2)} \quad (3.17)$$

En esta ecuación se puede notar que, si lo que se busca es encontrar una frecuencia de oscilación tenga un impacto que permita que la constante de rigidez sea pequeña o nula se debe tener la siguiente consideración con respecto a las amplitudes de las respectivas oscilaciones en la base:

$$a > d_1 \quad (3.18)$$

Esto únicamente si se cumple la siguiente condición:

$$gl_1m_1 \geq k_1 \quad (3.19)$$

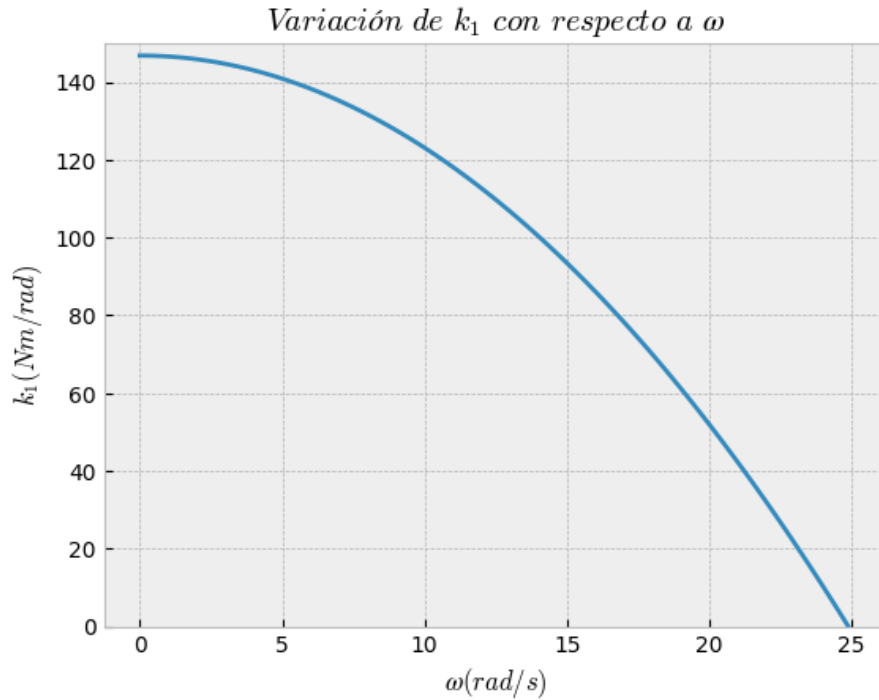


Figura 3.1. Relación entre los parámetros de rigidez (k_1) y la frecuencia de las oscilaciones en la base (ω).

Para comprender mejor como es que se relaciona la constante de rigidez que emula la contribución de los músculos a mantener el torso en posición vertical, en la figura 3.1 se puede observar cómo es que se cuándo la constante de rigidez es igual o mayor al producto de la masa, longitud del eslabón del péndulo y la gravedad (m_1gl_1), en este caso igual a aproximadamente $145 \frac{Nm}{rad}$, no se necesita de que existan oscilaciones en la base para mantener el péndulo en posición vertical, es decir $\omega = 0$.

Por otro lado, existen un rango de frecuencias ω la cuales logran mantener el péndulo en su posición invertida sin necesidad de un elemento de rigidez ($k_1 = 0$), las cuales, según lo que se puede observar en la figura 3.1, ω debe ser equivalente a $\omega > 25 \frac{rad}{seg}$.

Dichos resultados se obtuvieron utilizando los parámetros de la cicloide dados en la Tabla 3.2.

Parámetro	Valor
a_1	0.1 m
d_1	0.09 m

Tabla 3.2. Parámetros utilizados para obtener la relación mostrada en la Figura 3.1.

Un análisis más detallado sobre las repercusiones de cada una de estas consideraciones al comportamiento de la dinámica del sistema en el capítulo siguiente.

Para tener una idea de cuál es el aporte energético de este movimiento oscilatorio, a continuación, se mostrarán varias gráficas en donde se podrá observar cómo cambia la energía elástica necesaria para mantener al péndulo de un grado de libertad en su posición de estabilidad $q_1 = 0$.

Debido a lo anterior primero se estudiarán varios casos, en donde se determinará una relación β , la cual es dada por la siguiente expresión:

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_k} \quad (3.20)$$

Donde ω_k , es la frecuencia de Kapitza, es decir la frecuencia mínima a la cual el péndulo se mantiene estable ($q_1 = 0^\circ$), sin necesidad de que exista rigidez en el eslabón ($\alpha = 0$) y ω es la frecuencia a la cual se desea realizar el análisis del consumo energético.

Para realizar lo anterior, se propone el análisis de casos generales, es decir, implementando únicamente un movimiento periódico senoidal en el eje x y otro en eje y, los cuales no se aplicarán de manera simultánea, además de que no necesariamente se debe tratar de un movimiento cicloidal, esto para poder encontrar cuál es el impacto de la frecuencia en el consumo energético del sistema.

Los resultados que se obtuvieron a partir de utilizar las siguientes señales $x_k = D \sin(\omega t)$ y $y_k = A \cos(\omega t)$, se describirán a continuación.

En la Figura 3.2 se puede observar que, al no aplicar ninguna oscilación a la base del péndulo, y además de que la energía elástica no es suficiente para mantener al péndulo en su posición vertical, se puede observar que la energía cinética es muy pequeña y que se requiere de una energía elástica grande para que el péndulo tenga el comportamiento de la Figura 3.3

Al aumentar la frecuencia de la oscilación en la base del péndulo con las características anteriormente descritas, la energía cinética aumenta y la energía elástica disminuye como se puede observar en la Figura 3.4.

Además de que se requiere una menor energía elástica que en el caso de la Figura 3.2, se puede observar en la Figura 3.5 que con esta frecuencia el péndulo se mantiene vertical, es decir se obtiene el comportamiento deseado

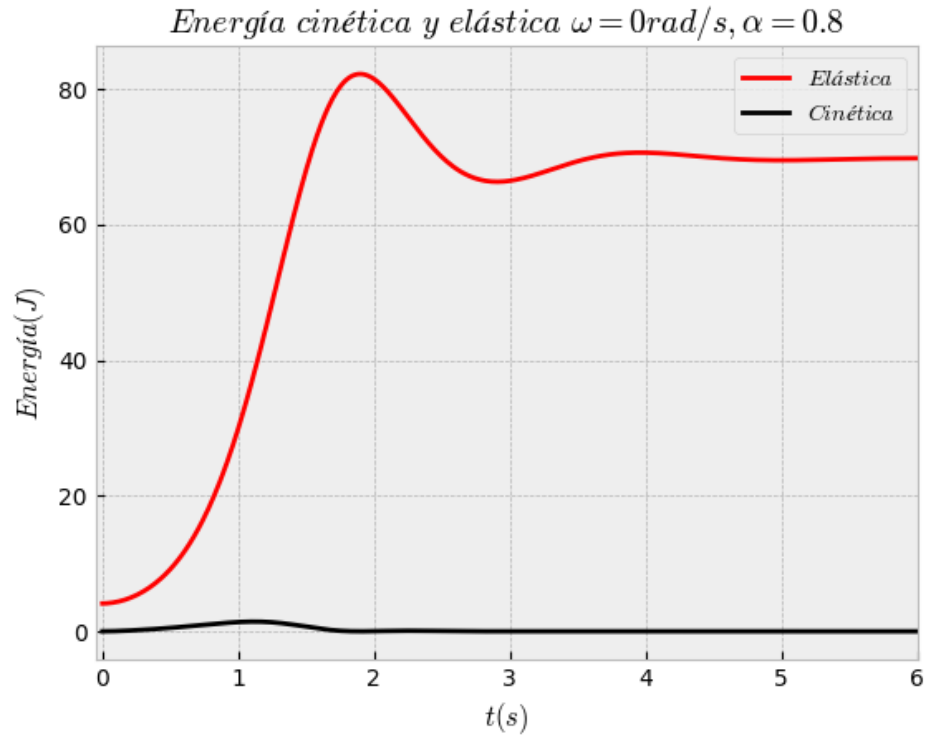


Figura 3.2. Energía cinética y elástica péndulo de un grado de libertad con $A = 0.1 \text{ m}$ y $\omega = 0 \text{ rad/s}$ y $\alpha = 0.8$.

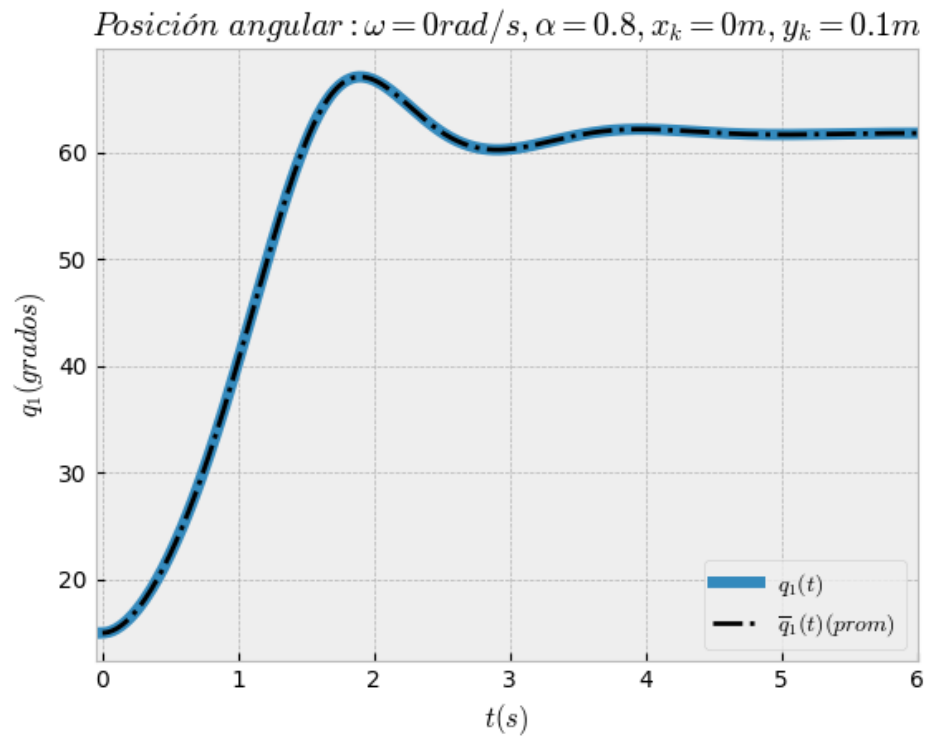


Figura 3.3. Posición angular q_1 correspondiente a la Figura 3.2.

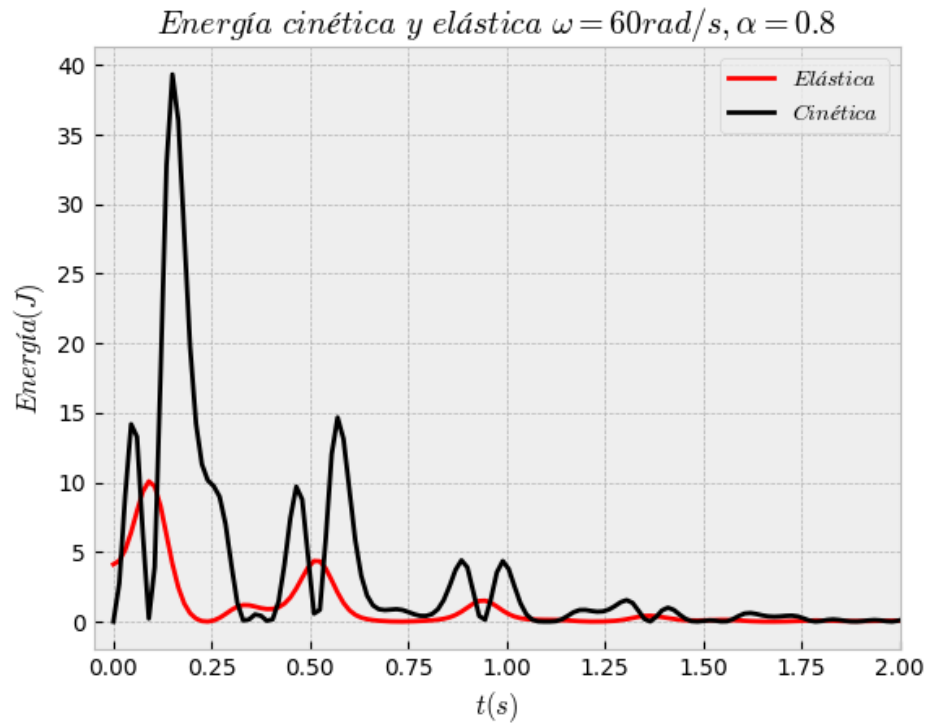


Figura 3.4. Energía cinética y elástica péndulo de un grado de libertad con $A = 0.1\text{m}$ y $\omega = 30\text{rad/s}$.

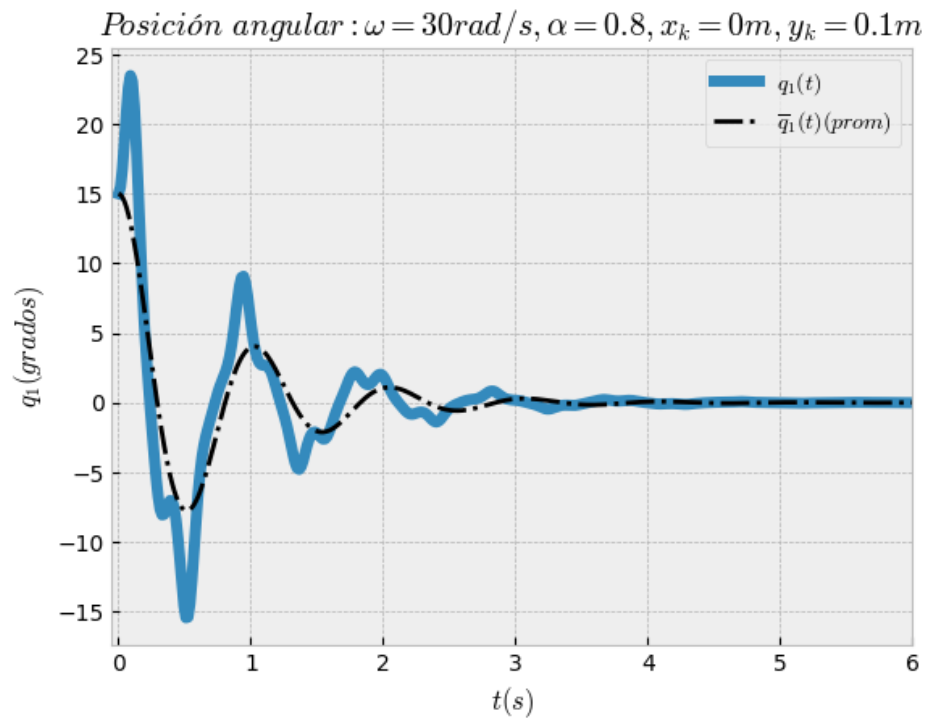


Figura 3.5. Posición angular q_1 correspondiente al caso de la Figura 3.4.

3.6. Análisis de estabilidad péndulo de dos grados de libertad

Para el caso del péndulo de dos grados de libertad dado por las ecuaciones (2.27) y (2.28) al igual que en el caso del péndulo de un solo eslabón, el realizar el análisis de estabilidad por medio de las herramientas no lineales teóricas comunes tiene una dificultad mayor.

Además, al momento de que el sistema está siendo sometido a una excitación a alta frecuencia, los métodos de integración numérica pueden llegar a consumir un mayor tiempo debido a que son necesarios periodos pequeños de muestreo.

Para eliminar los términos no autónomos (dependientes del tiempo) en las ecuaciones (2.27) y (2.28) se emplean técnicas de promediación, en donde, los términos “rápidos” están desacoplados de los términos “lentos”.

De acuerdo con el análisis de promediación para sistemas mecánicos desarrollado por Bullo [1] se tiene lo siguiente:

$$Z(x) = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M(q)^{-1}G(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Y la fuerza periódica que actúa sobre el sistema, es:

$$Y(x) \omega = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M(q)^{-1}G(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Al igual que en el procedimiento para el péndulo de un grado de libertad, para poder determinar la estabilidad del sistema del péndulo de un grado de libertad aplicando el método de promediación, el modelo dado por ecuaciones diferenciales de segundo orden, primero se deberá pasar un sistema de ecuaciones de primer orden, para ello se propone el siguiente cambio de variables:

$$x_1 = q_1, \quad x_2 = q_2$$

$$x_3 = \dot{q}_1, \quad x_4 = \dot{q}_2$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{q}_1, \quad \dot{x}_4 = \ddot{q}_2$$

Posteriormente para seguir el procedimiento necesario para determinar el modelo promediado para el péndulo de dos grados de libertad, se sustituyen las ecuaciones (2.29) a (2.34) en las ecuaciones (3.21) y (3.22), con lo cual se obtienen los siguientes vectores:

$$Z(x) = \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_4} \\ \frac{1}{((m_1 + m_2)l_1 - m_2 l_1 \cos^2(x_1 - x_3))} (\alpha) \\ \frac{1}{\left(l_2 - \frac{m_2 l_2}{(m_1 + m_2)} \cos^2(x_1 - x_3)\right)} (\beta) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \alpha = & -m_2 l_1 \sin(x_1 - x_3) \cos(x_1 - x_3) x_2^2 - m_2 l_2 \sin(x_1 - x_3) x_4^2 + g(m_1 + m_2) \sin(x_1) \\ & - m_2 g \sin(x_3) \cos(x_1 - x_3) - \frac{(k_1 + k_2)}{l_1} x_1 - \frac{(b_1 + b_2)}{l_1} x_2 + \frac{k_2}{l_1} x_3 + \frac{b_2}{l_1} x_4 \\ & + \frac{k_2}{l_2} (x_3 - x_1) \cos(x_1 - x_3) + \frac{b_2}{l_2} (x_4 - x_2) \cos(x_1 - x_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta = & l_1 \sin(x_1 - x_3) x_2^2 + \frac{m_2 l_2}{(m_1 + m_2)} \sin(x_1 - x_3) \cos(x_1 - x_3) x_4^2 + g \sin(x_3) \\ & - g \sin(x_1) \cos(x_1 - x_3) + \frac{(k_1 + k_2)}{l_1 (m_1 + m_2)} \cos(x_1 - x_3) x_1 \\ & + \frac{(b_1 + b_2)}{l_1 (m_1 + m_2)} \cos(x_1 - x_3) x_2 - \frac{k_2}{l_1 (m_1 + m_2)} \cos(x_1 - x_3) x_3 \\ & + \frac{b_2}{l_1 (m_1 + m_2)} \cos(x_1 - x_3) x_4 - \frac{k_2}{m_2 l_2} (x_3 - x_1) - \frac{b_2}{m_2 l_2} (x_4 - x_2) \end{aligned}$$

Por otro lado, el vector de entrada correspondiente a la oscilación horizontal esta dado por:

$$Y_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m_2 \cos(x_1 - x_3) \cos(x_3) - (m_1 + m_2) \cos(x_1)}{((m_1 + m_2)l_1 - m_2 l_1 \cos^2(x_1 - x_3))} \\ \frac{\cos(x_1 - x_3) \cos(x_1) - \cos(x_3)}{\left(l_2 - \frac{m_2 l_2}{(m_1 + m_2)} \cos^2(x_1 - x_3)\right)} \end{bmatrix} \omega \sin(\omega t) \quad (3.24)$$

Y el vector asociado al movimiento de entrada dado por la oscilación vertical, es el siguiente:

$$Y_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-m_2 \cos(x_1 - x_3) \sin(x_3) + (m_1 + m_2) \sin(x_1)}{((m_1 + m_2)l_1 - m_2 l_1 \cos^2(x_1 - x_3))} \\ \frac{-\cos(x_1 - x_3) \sin(x_1) + \sin(x_3)}{\left(l_2 - \frac{m_2 l_2}{(m_1 + m_2)} \cos^2(x_1 - x_3)\right)} \end{bmatrix} \omega \cos(\omega t) \quad (3.25)$$

Utilizando los vectores (3.23), (2.24) y (2.25) se continua con el procedimiento para obtener la dinámica promediada del sistema de doble péndulo (2.29), para ello, al utilizar la metodología descrita en la sección 3.2 se realiza lo siguiente:

Considerando que las entradas $v_1(t) = \cos(\omega t)$ y $v_2(t) = \sin(\omega t)$ son periódicas de valor medio cero, entonces a partir de la ecuación (Λ, μ) , se obtienen los valores siguientes para los parámetros κ_i y μ_{ij} :

Ahora al considerar el caso del péndulo de dos grados de libertad, al considerar las entradas $v_1(t) = \cos(\omega t)$ y $v_2(t) = \sin(\omega t)$, ambas periódicas y con valor medio cero, surge la oportunidad de derivar los parámetros κ_i y μ_{ij} a partir de la ecuación (Λ, μ) . Cabe mencionar que estos parámetros de entrada son los mismos que los empleados para el análisis del péndulo de un grado de libertad por lo que adquieren relevancia en el análisis de las interacciones y dinámicas del sistema.

Por lo tanto, los parámetros auxiliares κ_i y μ_{ij} para el péndulo de dos grados de libertad son:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 1 \text{ y } \kappa_2 = 0 \\ \mu_{11} &= \mu_{22} = \frac{1}{4} \text{ y } \mu_{12} = \mu_{21} = 0 \end{aligned}$$

Una vez que teniendo estos valores, el siguiente paso implica la aplicación de la fórmula del teorema. En este proceso, se requerirá el uso del corchete de Lie junto con los otros parámetros involucrados. Posteriormente el sistema promediado específico para el péndulo de dos grados de libertad se linealiza en torno al origen. Vale la pena señalar que el origen representa un punto de equilibrio tanto en el sistema original como en el sistema promediado.

Por lo tanto, se obtiene el siguiente sistema lineal e invariante en el tiempo dado por la siguiente matriz:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_{p1} & x_{p3} & x_{p5} & x_{p7} \\ x_{p2} & x_{p4} & x_{p6} & x_{p8} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Donde:

$$x_{p1} = \frac{0.5\omega^2 d_1^2 l_2 m_1^2 + 0.5\omega^2 d_1^2 l_2 m_1 m_2 - 0.5\omega^2 h^2 l_1 m_2 (m_1 + m_2)}{l_1^2 l_2 m_1^2} \quad (3.27)$$

$$\frac{-0.5\omega^2 h^2 l_2 (m_1 + m_2)^2 - k_2 l_1 m_1 + l_2 m_1 (g l_1 (m_1 + m_2) - k_1 - k_2)}{l_1^2 l_2 m_1^2}$$

$$x_{p2} = \frac{0.5\omega^2 h^2 l_1 m_2 (m_1 + m_2)^2 + 0.5\omega^2 h^2 l_2 m_2 (m_1 + m_2)^2 + k_2 l_1 m_1 (m_1 + m_2)}{l_1 l_2^2 m_1^2 m_2} \quad (3.28)$$

$$+ \frac{l_2 m_1 m_2 (-0.5\omega^2 d_1^2 (m_1 + m_2) - g l_1 (m_1 + m_2) + k_1 + k_2)}{l_1 l_2^2 m_1^2 m_2}$$

$$x_{p3} = \frac{0.5\omega^2 h^2 l_1 m_2 (m_1 + m_2) + 0.5\omega^2 h^2 l_2 m_2 (m_1 + m_2)}{l_1^2 l_2 m_1^2} \quad (3.29)$$

$$+ \frac{k_2 l_2 m_1 + l_1 m_1 (-g l_2 m_2 + k_2)}{l_1^2 l_2 m_1^2}$$

$$x_{p4} = \frac{-0.5\omega^2 h^2 l_1 m_2 (m_1 + m_2)^2 - 0.5\omega^2 h^2 l_2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{l_1 l_2^2 m_1^2 m_2} \quad (3.30)$$

$$+ \frac{-k_2 l_2 m_1 m_2 + l_1 m_1 (m_1 + m_2) (g l_2 m_2 - k_2)}{l_1 l_2^2 m_1^2 m_2}$$

$$x_{p5} = \frac{-b_2 l_1 + l_2(-b_1 - b_2)}{l_1^2 l_2 m_1} \quad (3.31)$$

$$x_{p6} = \frac{b_2 l_1(m_1 + m_2) + l_2 m_2(b_1 + b_2)}{l_1 l_2^2 m_1 m_2} \quad (3.32)$$

$$x_{p7} = \frac{b_2(l_1 + l_2)}{l_1^2 l_2 m_1} \quad (3.33)$$

$$x_{p8} = \frac{b_2(-l_1(m_1 + m_2) - l_2 m_2)}{l_1 l_2^2 m_1 m_2} \quad (3.34)$$

Al igual que en el caso del péndulo de un solo eslabón, se utiliza el sistema promediado para obtener las condiciones que mantienen al péndulo en su posición vertical o invertida, en función de los parámetros propios de las entradas de oscilación en la base y de la rigidez en las juntas de este sistema.

Para ello, primero se determina el polinomio característico de la matriz del sistema de la ecuación (3.26), el cual es el siguiente:

$$\lambda_1^4 + a_1 \lambda_1^3 + a_2 \lambda_1^2 + a_3 \lambda_1 + a_4 = 0 \quad (3.35)$$

Donde:

$$a_1 = \frac{b_1}{l_1^2 m_1} + \frac{b_2}{l_2^2 m_2} + \frac{b_2}{l_2^2 m_1} + \frac{2 b_2}{l_1 l_2 m_1} + \frac{b_2}{l_1^2 m_1} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} a_2 = & -\frac{0.5\omega^2 d_1^2}{l_1^2} - \frac{0.5\omega^2 d_1^2 m_2}{l_1^2 m_1} + \frac{0.5\omega^2 h^2}{l_2^2} + \frac{\omega^2 h^2 m_2}{l_2^2 m_1} + \frac{0.5\omega^2 h^2 m_2^2}{l_2^2 m_1^2} + \frac{\omega^2 h^2 m_2}{l_1 l_2 m_1} \\ & + \frac{\omega^2 h^2 m_2^2}{l_1 l_2 m_1^2} + \frac{0.5\omega^2 h^2}{l_1^2} + \frac{\omega^2 h^2 m_2}{l_1^2 m_1} + \frac{0.5\omega^2 h^2 m_2^2}{l_1^2 m_1^2} + \frac{b_1 b_2}{l_1^2 l_2^2 m_1 m_2} - \frac{g}{l_2} \\ & - \frac{g m_2}{l_2 m_1} - \frac{g}{l_1} - \frac{g m_2}{l_1 m_1} + \frac{k_1}{l_1^2 m_1} + \frac{k_2}{l_2^2 m_2} + \frac{k_2}{l_2^2 m_1} + \frac{2 k_2}{l_1 l_2 m_1} + \frac{k_2}{l_1^2 m_1} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$a_3 = \frac{0.5\omega^2 b_1 h^2}{l_1^2 l_2^2 m_1} + \frac{0.5\omega^2 b_1 h^2 m_2}{l_1^2 l_2^2 m_1^2} - \frac{0.5\omega^2 b_2 d_1^2}{l_1^2 l_2^2 m_2} - \frac{0.5\omega^2 b_2 d_1^2}{l_1^2 l_2^2 m_1} + \frac{0.5\omega^2 b_2 h^2}{l_1^2 l_2^2 m_2} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{0.5\omega^2 b_2 h^2}{l_1^2 l_2^2 m_1} - \frac{b_1 g}{l_1^2 l_2 m_1} + \frac{b_1 k_2}{l_1^2 l_2^2 m_1 m_2} - \frac{b_2 g}{l_1 l_2^2 m_2} - \frac{b_2 g}{l_1 l_2^2 m_1} - \frac{b_2 g}{l_1^2 l_2 m_1} + \frac{b_2 k_1}{l_1^2 l_2^2 m_1 m_2} \\
a_4 = & - \frac{0.25\omega^4 d_1^2 h^2}{l_1^2 l_2^2} - \frac{0.5\omega^4 d_1^2 h^2 m_2}{l_1^2 l_2^2 m_1} - \frac{0.25\omega^4 d_1^2 h^2 m_2^2}{l_1^2 l_2^2 m_1^2} + \frac{0.25\omega^4 h^4}{l_1^2 l_2^2} + \frac{0.5\omega^4 h^4 m_2}{l_1^2 l_2^2 m_1} \\
& + \frac{0.25\omega^4 h^4 m_2^2}{l_1^2 l_2^2 m_1^2} + \frac{0.5\omega^2 d_1^2 g}{l_1^2 l_2} + \frac{0.5\omega^2 d_1^2 g m_2}{l_1^2 l_2 m_1} - \frac{0.5\omega^2 d_1^2 k_2}{l_1^2 l_2 m_2} - \frac{0.5\omega^2 d_1^2 k_2}{l_1^2 l_2 m_1} - \frac{0.5\omega^2 g h^2}{l_1 l_2^2} \\
& - \frac{\omega^2 g h^2 m_2}{l_1 l_2^2 m_1} - \frac{0.5\omega^2 g h^2 m_2^2}{l_1 l_2^2 m_1^2} - \frac{0.5\omega^2 g h^2}{l_1^2 l_2} - \frac{\omega^2 g h^2 m_2}{l_1^2 l_2 m_1} - \frac{0.5\omega^2 g h^2 m_2^2}{l_1^2 l_2 m_1^2} \\
& + \frac{0.5\omega^2 h^2 k_1}{l_1^2 l_2^2 m_1} + \frac{0.5\omega^2 h^2 k_1 m_2}{l_1^2 l_2^2 m_1^2} + \frac{0.5\omega^2 h^2 k_2}{l_1^2 l_2^2 m_2} + \frac{0.5\omega^2 h^2 k_2}{l_1^2 l_2^2 m_1} + \frac{g^2}{l_1 l_2} + \frac{g^2 m_2}{l_1 l_2 m_1} \\
& - \frac{g k_1}{l_1^2 l_2 m_1} - \frac{g k_2}{l_1 l_2^2 m_2} - \frac{g k_2}{l_1 l_2^2 m_1} - \frac{g k_2}{l_1^2 l_2 m_1} + \frac{k_1 k_2}{l_1^2 l_2^2 m_1 m_2}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Dado este polinomio con coeficientes reales, se define la matriz Hurwitz asociada a este polinomio de la siguiente forma, tal como se describe en la sección 3.3:

$$H_m = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

A partir de la matriz Hurwitz dada por la ecuación (3.40), las condiciones que determinan la estabilidad del sistema promediado (3.26) se determinarán de acuerdo con el criterio Lienard-Chipart (LC) descrito en la sección 3.4, el cual debe cumplir lo siguiente:

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \quad |H_3| > 0$$

Por lo tanto, las condiciones que determinan si la matriz H_m dada por (3.40) es Hurwitz y por ende si el sistema promediado de la ecuación (3.26) es estable, se describen en los párrafos siguientes.

Al igual que en caso del péndulo de un grado de libertad, las primeras dos condiciones dependen intrínsecamente de los parámetros de amortiguamiento, por lo que estas condiciones serán positivas. Para las otras dos condiciones se realizaron numéricamente debido a que son ecuaciones complejas de despejar. Los resultados se mostrarán en el siguiente capítulo.

4

4. Análisis de resultados y simulaciones

Con el fin de validar las estrategias de control por vibraciones y de observar el comportamiento de los péndulos de uno y dos eslabones sujetos a diferentes condiciones de vibración en su base y a su vez diferentes constantes de rigidez y amortiguamiento.

Para ello, una vez definido el modelo dinámico de ambos péndulos, se procedió a realizar la simulación numérica de las variables angulares q_1 y q_2 tomando en consideración que el torque aplicado a cada junta es cero ($\Gamma = 0$), esto con el fin de conocer cuál es el efecto estabilizador dado por las oscilaciones en la base del péndulo (junta 1).

Además de esta consideración, se estudiarán varios casos complementarios para conocer si el efecto inercial dado por estas oscilaciones permite al sistema reducir la energía aplicada por los elementos de rigidez (y a su vez reducir el valor de estas constantes) en el sistema.

Por lo tanto, para realizar simulaciones del sistema, este se expresará como una agrupación de ecuaciones diferenciales no lineales, como se describió en la ecuación (3.23).

Para resolver los sistemas de ecuaciones por métodos numéricos y realizar los gráficos que se muestran en las subsecciones siguientes se hizo uso de *Google Colab*, el cual es una herramienta gratuita proporcionada por Google que permite escribir y ejecutar código en Python directamente en el navegador web, sin necesidad de configurar un entorno de desarrollo local a partir de la versión de *Python 3.6*.

4.1 Parámetros antropomórficos del cuerpo humano

Como se ha mencionado anteriormente, el cuerpo humano durante el proceso de mantenerse de pie por lo general ha sido modelado por medio de un péndulo invertido de dos segmentos, en donde el primer segmento del péndulo es considerado como el segmento de las piernas, mientras que el segundo es considerado como el conjunto que abarca los segmentos del tronco, cabeza y brazos.

Además, la primera junta corresponde a la junta del tobillo, por su parte la segunda junta es definida como la junta de la cadera, esto debido a su localización.

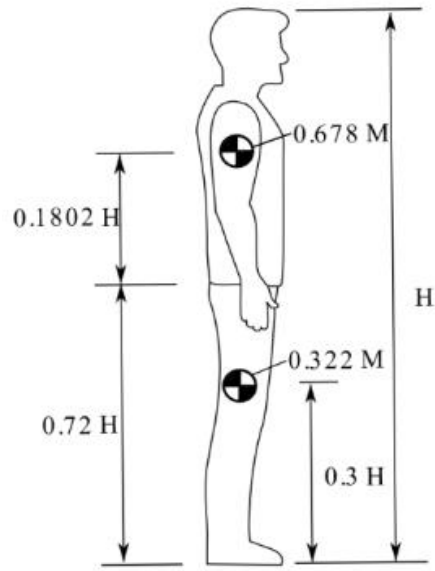


Figura 4.1. Representación aproximada del cuerpo humano [38].

Para tener una mejor simulación, lo más cercana posible a lo que se obtendría con el cuerpo humano, se debe considerar los criterios descritos en los dos párrafos anteriores, así como también los valores de los parámetros dados en la Tabla 4.1.

Dichos parámetros corresponden a la definición de las longitudes, masas puntuales, centros de masa, que están basados en los datos de Winter [13]. Para estas simulaciones se considerará un sujeto de 70 kg con una altura de 1.75m.

Además, como en este caso se considerarán los parámetros de rigidez y amortiguamiento relacionados a los músculos que actúan en las piernas y torso

Los parámetros antropomórficos utilizados para la simulación de ambos casos de análisis se muestran en la Tabla 4.1 y los parámetros de rigidez y amortiguamiento asociados a los músculos y tendones del cuerpo humano se muestran en la Tabla 4.2.

Parámetro	Valor
M_h	70 kg
H_h	1.75 m
m_1	$0.322 M_h$
m_2	$0.678 M_h$
l_1	$0.53 H_h$
l_2	$0.1802 H_h$

Tabla 4.1. Dimensiones empleadas para las simulaciones basadas en el cuerpo humano [13].

Parámetro	Valor
k_1	1050 Nm/rad
k_2	450 Nm/rad
b_1	$0.1 k_1$
b_2	$0.1 k_2$

Tabla 4.2. Parámetros de rigidez y amortiguamiento asociados a los elementos musco-elásticos del cuerpo humano [7].

4.2. Resultados y simulaciones del péndulo de un grado de libertad

Como ya se ha mencionado, dentro de la literatura está demostrado que un péndulo se puede estabilizar (mantenerse en posición tal que su masa este por encima de su base o pivote) por medio de hacer oscilar verticalmente su base, con respecto a la ecuación (3.11) independientemente de su número de eslabones o segmentos.

Sin embargo, también está demostrado que este péndulo no mantiene esta estabilidad a cualquier frecuencia ni amplitud. El conjunto de criterios que dan lugar a los valores frecuencia y amplitud que estabilizan el péndulo en términos de su frecuencia fueron determinados por Achenson [21]. por medio del análisis del péndulo compuesto por masas puntuales

Resultados

Se analizaron diferentes casos para determinar los parámetros de frecuencia y amplitud que determinan la estabilidad del sistema establecido anteriormente, dependiendo de las condiciones iniciales, constantes viscoelásticas y de amortiguamiento, así como también el tipo de oscilación en la base del péndulo (horizontal, vertical o ambas).

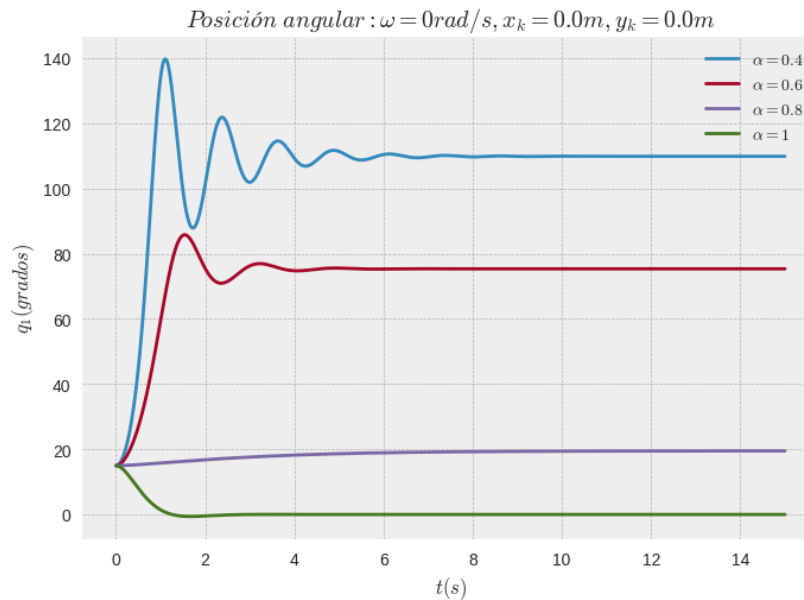


Figura 4.2. Posición angular q_1 para diferentes valores de α con $\omega = 0$.

El primer caso de estudio es el que se puede observar en la Figura 4.2 donde se realiza la comparación entre cuatro casos de constantes de rigidez, con frecuencia $\omega = 0 \text{ rad/s}$, y como es que estas influyen en el comportamiento de la salida q_1 . Esto servirá para poder entender más a detalle los casos que se explicarán a continuación, ya que es importante observar en una sola imagen que únicamente con la rigidez no se puede mantener al péndulo en su invertida ($q_1 = 0^\circ$), salvo en un caso ideal $\alpha = 1$.

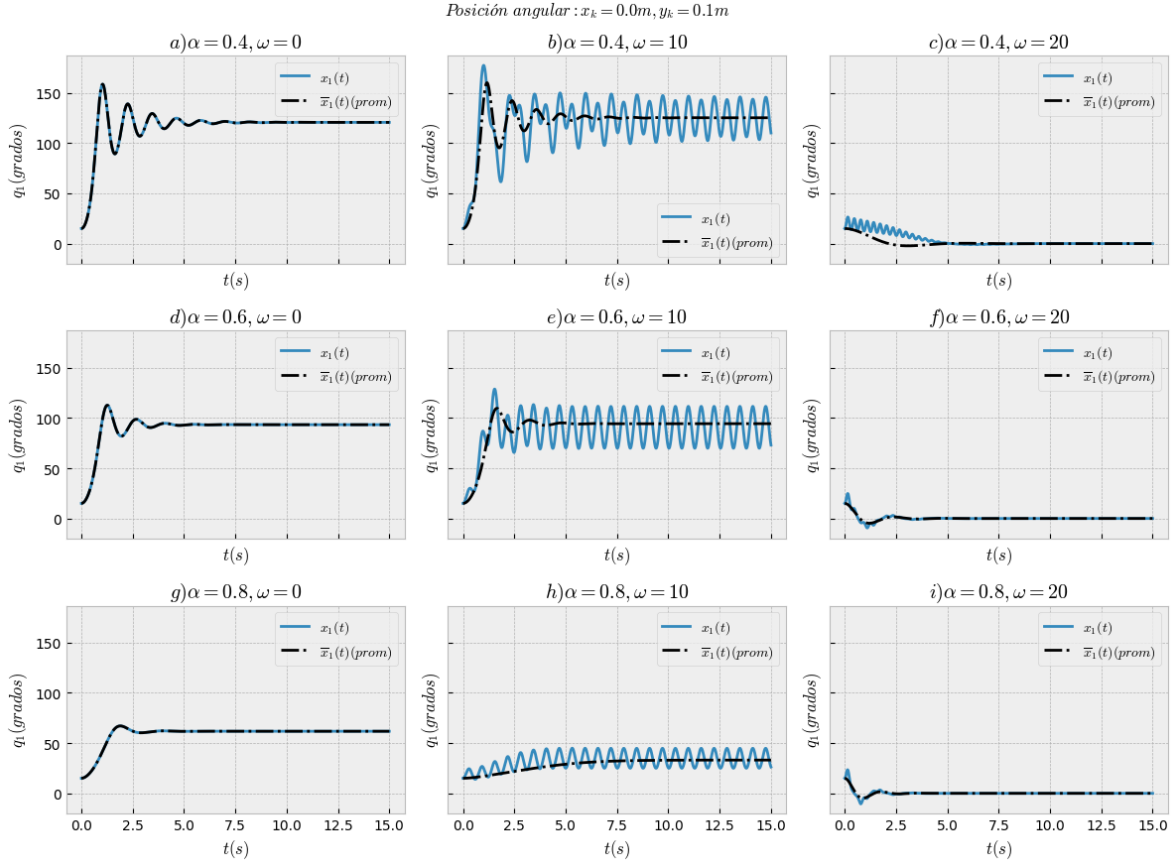


Figura 4.3. Posición angular q_1 para diferentes valores de α y ω (Kapitza).

En la Figura 4.3 se presentan nueve combinaciones diferentes de los valores α y ω , los cuales corresponden a un factor proporcional a la rigidez del segmento y a la frecuencia de las oscilaciones en la base del péndulo de un grado de libertad respectivamente. En esta figura se resalta cómo estas variables influyen en el ajuste del valor original al promediado. Además, se observa que a medida que la frecuencia ω aumenta, el valor de α puede disminuir.

Al observar la imagen, se puede notar que algunas combinaciones tienen valores altos tanto para α como para ω . En estos casos, el valor original se ajustará más al promediado, lo que indica una mayor influencia de las mediciones individuales en el resultado final. Esto puede

ser útil en situaciones en las que se busca una precisión y exactitud del sistema promediado con respecto del sistema original.

Por otro lado, se observan combinaciones con valores bajos para α y ω . En estas situaciones, el valor del ángulo q_1 del sistema original será distinto al sistema dado por el promediado. Esto puede ser útil en casos donde sólo se busca conocer un valor aproximado de donde se encuentra el centro de masa del eslabón del péndulo.

Además, existen varios casos interesantes, como el que se muestra en el inciso a), en tiene el caso donde el péndulo no se encuentra oscilando, en donde se puede observar que, dado a que su factor alfa es pequeño, este no es capaz de mantenerlo en $q_1 = 0^\circ$, por lo que se dice que el péndulo de un grado de libertad no es estable con esta combinación.

Posteriormente, comparando las Figura 4.3 b) y c) se puede decir que al agregar una frecuencia $\omega = 10 \text{ rad/s}$, esta únicamente hace oscilar el centro de masa alrededor del ángulo q_1 de aproximadamente 115° , por lo que con esta frecuencia y rigidez no es posible estabilizar el péndulo de un grado de libertad, en cambio, en el inciso c) se observa que con una frecuencia $\omega = 20 \text{ rad/s}$, si es posible mantener el péndulo en $q_1 = 0^\circ$, por lo que se puede decir que las oscilaciones en estos tres casos descritos si tienen un aporte en cuanto a la estabilidad del sistema.

Por otro lado, en los incisos d), e) y f) se observa un comportamiento similar al descrito en los párrafos anteriores, a excepción de que entre el inciso d) y e) la frecuencia $\omega = 10 \text{ rad/s}$ si tiene un aporte en cuanto a disminuir el ángulo $q_1 = 75^\circ$ a $q_1 = 70^\circ$ con una rigidez al 60%, por lo que se puede comprobar que existe una relación entre α y ω con respecto a determinar la mínima frecuencia capaz de mantener el péndulo en $q_1 = 0^\circ$.

Por último, en los tres incisos restantes g), h) e i) se observa que al tener una constante de rigidez al 80% permite acercar el péndulo a su posición vertical sin necesidad de una frecuencia de oscilación ω , colocando en péndulo en $q_1 = 25^\circ$, además al agregar oscilaciones a una frecuencia $\omega = 10 \text{ rad/s}$, el péndulo se logra colocar en la posición de $q_1 = 0^\circ$ gracias al aporte en la dinámica del sistema dado por estas oscilaciones. En el inciso i) se puede observar que, para estos parámetros dados, al aumentar la frecuencia $\omega = 20 \text{ rad/s}$, se puede hacer que este llegue a $q_1 = 0^\circ$ en un menor tiempo.

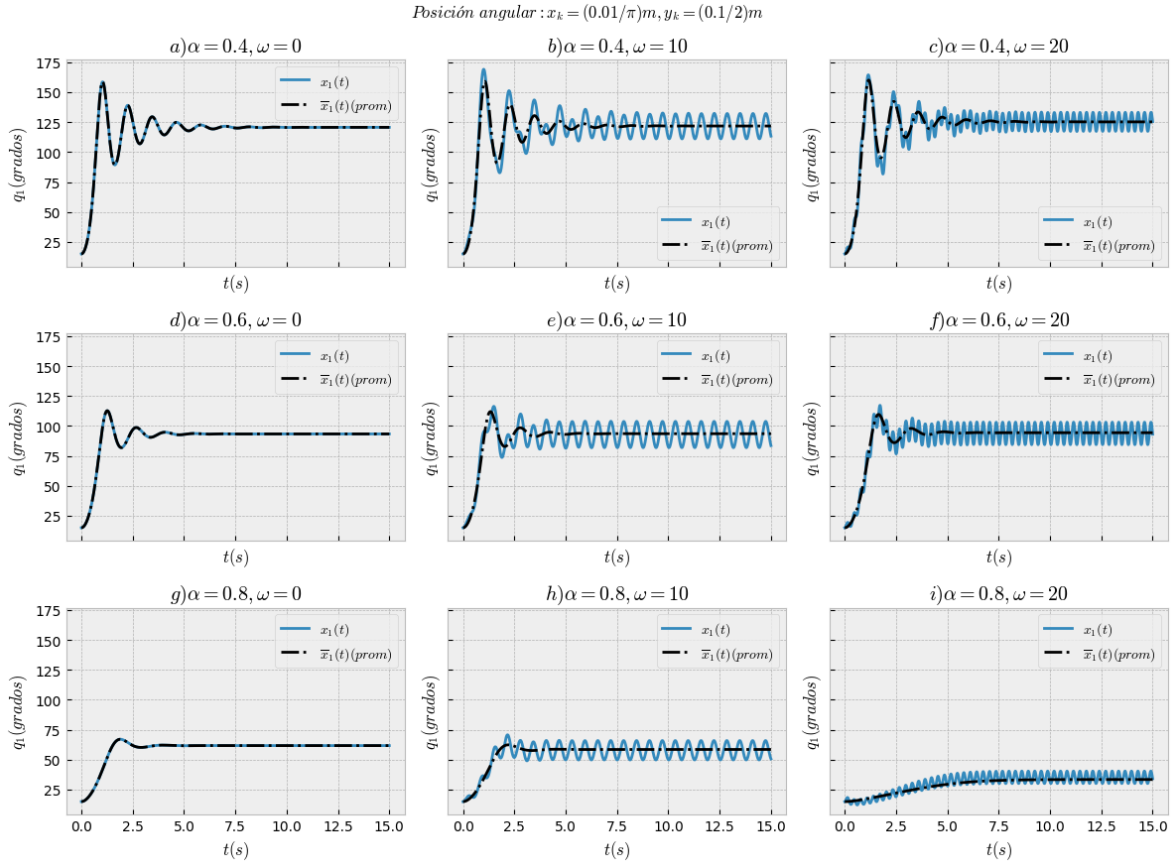


Figura 4.4. Posición angular q_1 para diferentes valores de α y ω ($x_k = \frac{0.01}{\pi}, y_k = \frac{0.1}{2}$).

En cuanto a la Figura 4.4 también se presentan nueve combinaciones diferentes de los valores α y ω , pero ahora las oscilaciones en la entrada (punto pivote del péndulo) están dadas por una cicloide con desplazamiento en horizontal $x_k = 0.01m$ y en la vertical un desplazamiento de $y_k = 0.1m$. En esta figura se resalta cómo el modificar estos parámetros de las oscilaciones de entrada influyen en el ajuste del valor original al promediado. Además, de que afectan a cada una de las combinaciones pasadas de la Figura 4.3.

Además, se observan combinaciones con los mismos valores para α y ω que en la Figura 4.3, pero a diferencia de esa figura, en estas situaciones, el valor del ángulo q_1 del sistema original oscilará más para pequeños valores de rigidez y altos valores de frecuencia, pero con respecto al promediado, este se asemeja de la misma manera que en el caso de la Figura 4.3, por lo que también puede ser útil en casos donde sólo se busca conocer un valor aproximado de donde se encuentra el centro de masa del eslabón del péndulo.

Al igual que el caso mostrado en la Figura 4.3, existen varios casos interesantes, como el del inciso a), en tiene el caso donde el péndulo no se encuentra oscilando, en donde se puede observar que, dado a que su factor alfa es pequeño, este no es capaz de mantenerlo en $q_1 = 0^\circ$, por lo que se dice que el péndulo de un grado de libertad no es estable con esta combinación.

Posteriormente, comparando los incisos b) y c) se puede decir que al agregar una frecuencia $\omega = 10 \text{ rad/s}$, esta únicamente hace oscilar el centro de masa alrededor del ángulo q_1 de aproximadamente 115° , por lo que con esta frecuencia y rigidez no es posible estabilizar el péndulo de un grado de libertad, en cambio, en el inciso c) se observa que con una frecuencia $\omega = 20 \text{ rad/s}$, ya no es posible mantener el péndulo en $q_1 = 0^\circ$ como en la simulación de la Figura 4.3, ya que ahora al agregar la cicloide el péndulo a baja rigidez y alta frecuencia sólo oscila a mayor velocidad, por lo que se puede decir que las oscilaciones en estos tres casos descritos no tienen un aporte en cuanto a la estabilidad del sistema para una rigidez pequeña.

Por otro lado, en los incisos d), e) y f) se observa un comportamiento similar al descrito en los párrafos anteriores, a excepción de que entre el inciso d) y e) la frecuencia $\omega = 10 \text{ rad/s}$ ya no tiene un aporte en cuanto a ayudar a disminuir el ángulo como en el caso de la simulación anterior con una rigidez al 60%, ahora es hasta el inciso f) en donde se muestra una pequeña disminución del ángulo $q_1 = 75^\circ$ a $q_1 = 70^\circ$ pero ahora a una frecuencia $\omega = 20 \text{ rad/s}$, por lo que se puede comprobar que existe una relación entre α , ω y ahora también los parámetros asociados a la amplitud horizontal y vertical de la cicloide, x_k y y_k respectivamente, con respecto a determinar la mínima frecuencia capaz de mantener el péndulo en $q_1 = 0^\circ$.

Por último, en los tres incisos restantes g), h) e i) se observa que al tener una constante de rigidez al 80% permite acercar el péndulo a su posición vertical sin necesidad de una frecuencia de oscilación ω , colocando en péndulo en $q_1 = 25^\circ$, además al agregar oscilaciones a una frecuencia $\omega = 10 \text{ rad/s}$, el péndulo se logra colocar en la posición de $q_1 = 0^\circ$ gracias al aporte en la dinámica del sistema dado por estas oscilaciones. En el inciso i) se puede observar que, para estos parámetros dados, al aumentar la frecuencia $\omega = 20 \text{ rad/s}$, se puede hacer que este llegue a $q_1 = 0^\circ$ en un menor tiempo, lo cual también ocurrió en la simulación de la Figura 4.3.

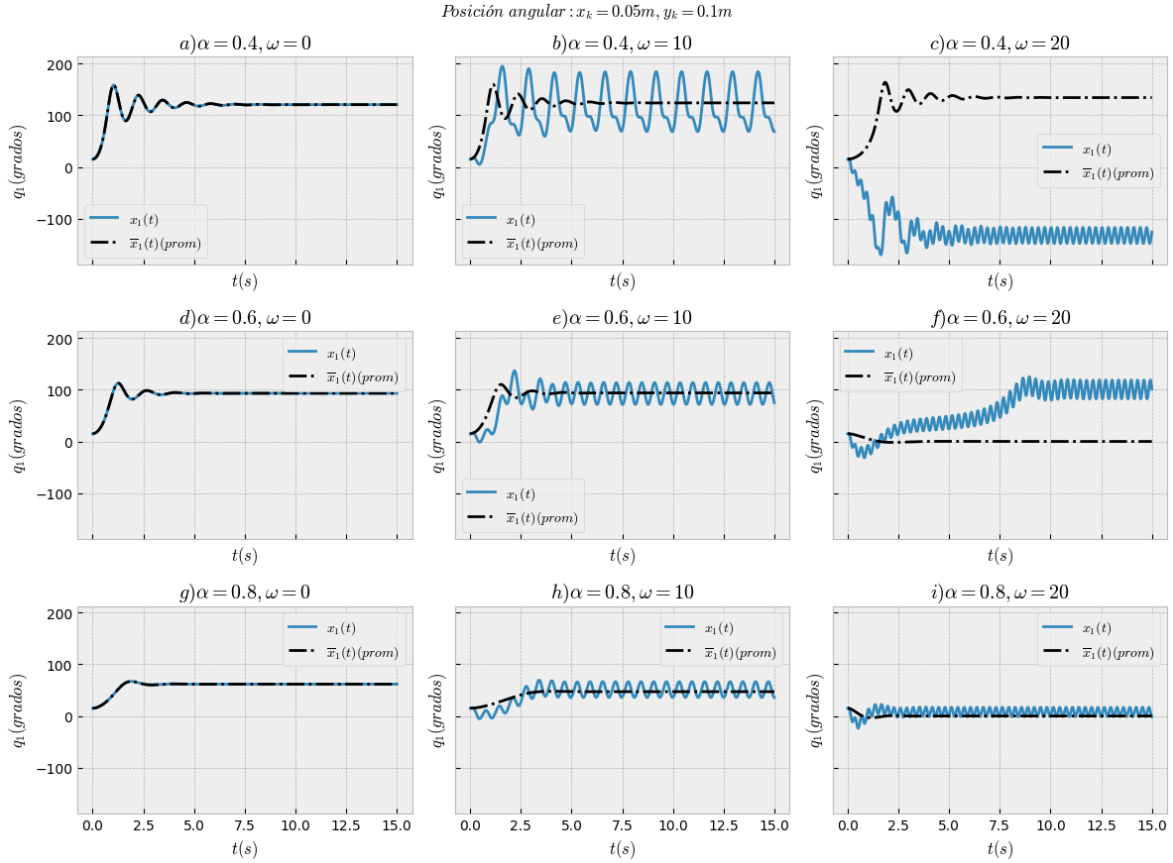


Figura 4.5. Posición angular q_1 para diferentes valores de α y ω ($x_k = 0.5y_k$).

En la Figura 4.5, se presentan resultados similares a los observados en las figuras anteriores. En esta figura, se muestran las mismas combinaciones de los valores α y ω , y nuevamente se utilizan oscilaciones en la entrada del péndulo, pero esta vez se implementan con un desplazamiento horizontal de $x_k = 0.05m$ y un desplazamiento vertical de $y_k = 0.1m$.

Al igual que en las figuras anteriores, se puede apreciar cómo modificar estos parámetros de las amplitudes de entrada influye en el ajuste del valor original al promediado. Además, se observa que estos parámetros también afectan a las combinaciones pasadas de las figuras anteriores, lo que indica una relación consistente entre α, ω y los parámetros asociados a las oscilaciones de entrada.

Se pueden identificar casos interesantes en la Figura 4.5. Por ejemplo, en el inciso a), se muestra el caso en el que el péndulo no oscila y además, debido a un factor α muy pequeño, se puede observar su falta de estabilidad. En los incisos b) y c), se puede observar que agregar una frecuencia $\omega = 10rad/s$ provoca oscilaciones del centro de masa alrededor de un ángulo q_1 específico. Estos casos resaltan la influencia de la frecuencia en el comportamiento del péndulo.

En los incisos d), e) y f), se observan comportamientos similares a los descritos anteriormente, donde la combinación de ciertos valores de α , ω y los valores de amplitud horizontal y vertical de las oscilaciones de entrada afectan el ángulo q_1 y el comportamiento general del péndulo, además de que en el caso de la frecuencia $\omega = 20 \text{ rad/s}$, el sistema promediado no corresponde al sistema original. Por último, en los incisos g), h) e i), se evidencia que una mayor rigidez permite un acercamiento más rápido del péndulo a la posición vertical deseada, y la adición de oscilaciones a una determinada frecuencia facilita el ajuste hacia $q_1 = 0^\circ$.

En resumen, la Figura 4.5 muestra resultados coherentes con las observaciones anteriores, destacando cómo la modificación de los parámetros de las oscilaciones de entrada, junto con los valores de α y ω , influye en el comportamiento y la estabilidad del péndulo. Estos hallazgos son consistentes con la comprensión teórica y contribuyen al entendimiento de la dinámica de sistemas de péndulos con diferentes configuraciones.

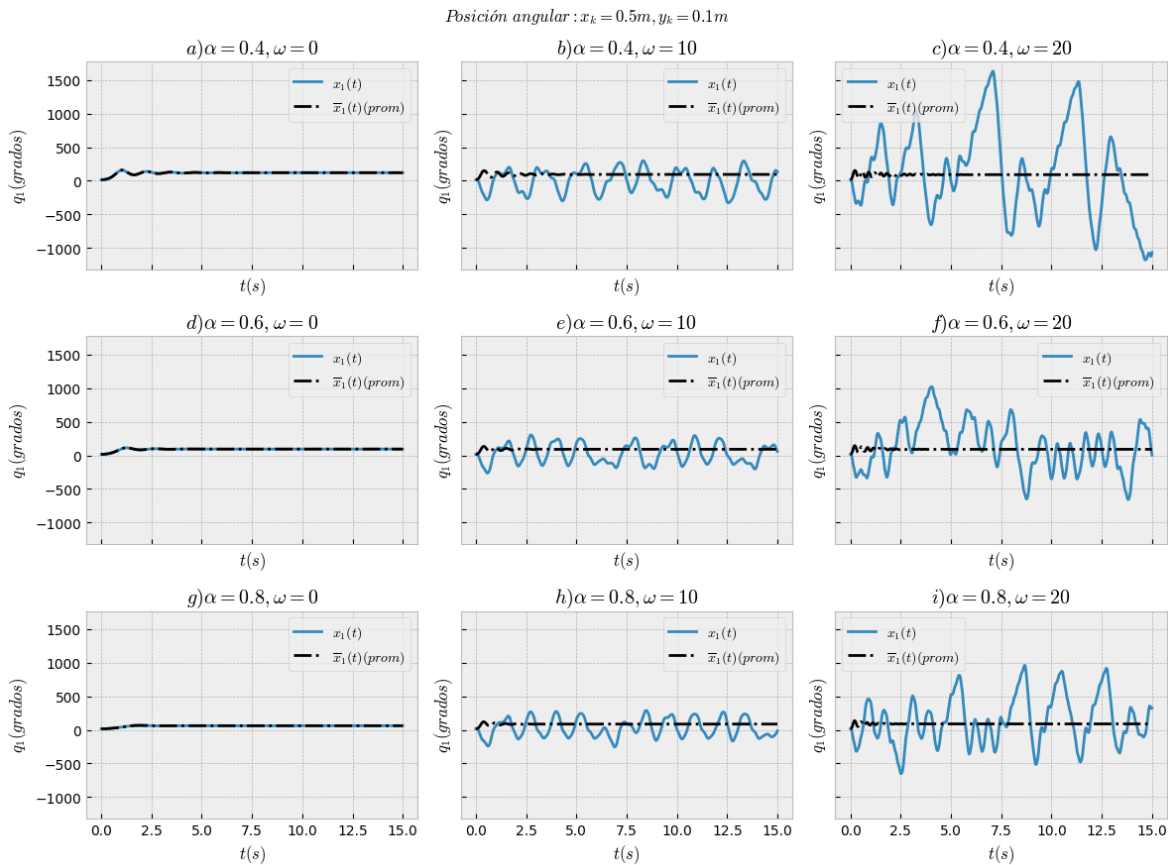


Figura 4.6. Posición angular q_1 para diferentes valores de α y ω ($x_k > y_k$).

En la Figura 4.6, se exploran combinaciones adicionales de los valores α y ω para analizar el comportamiento del sistema del péndulo. En este caso, se emplean oscilaciones en la

entrada del péndulo con un desplazamiento horizontal de $x_k = 0.2m$ y un desplazamiento vertical de $y_k = 0.1m$, es decir, la amplitud horizontal es mayor a la amplitud vertical.

Al igual que en las figuras anteriores, se observa cómo la modificación de estos parámetros de las oscilaciones de entrada tiene un impacto en el ajuste del valor original al promediado.

Resulta interesante destacar todos los casos particulares de la Figura 4.6. En el inciso a), d) y g) se representan los casos en donde no se presentan oscilaciones, por lo tanto, la respuesta de los sistemas original y promediado dependerán únicamente del valor de la rigidez en el eslabón.

Por otro lado, en las gráficas mostradas en los demás incisos se puede observar que ningún resultado del sistema promediado corresponde al sistema original, esto debido a que, como se describió analíticamente en la sección 3.5, la amplitud de la oscilación horizontal x_k debe ser menor a la amplitud de la oscilación vertical y_k , es decir $x_k < y_k$.

Entonces, se puede decir que para esta Figura 4.6, ningún caso es estable ($q_1 = 0$), además de que no cumple con las características correspondientes para que la respuesta del sistema promediado se acerque a la respuesta del sistema original

En resumen, las respuestas mostradas en cada una de las gráficas de las Figura 4.2 a Figura 4.7 se puede comprobar de manera numérica cómo es que estos parámetros de rigidez y frecuencia de las oscilaciones influyen en el ajuste del valor original al promediado, además de cómo es que a su vez influyen en la estabilidad del sistema y el tiempo en que la respuesta llega al estado estacionario.

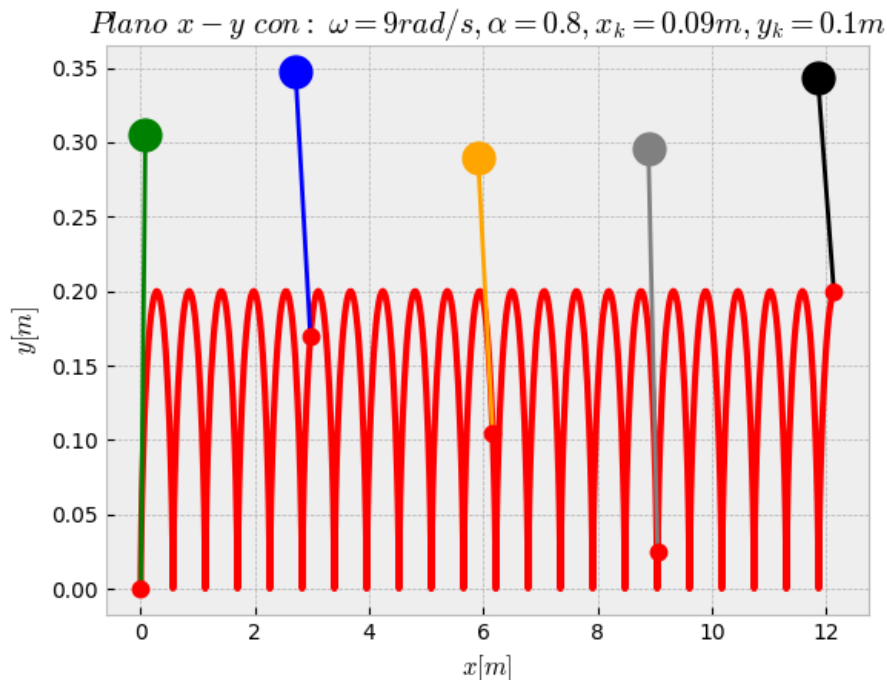


Figura 4.7. Posición en el plano X-Y del péndulo de un grado de libertad con $\omega = 9 \text{ rad/s}$ y $\alpha = 0.8$.

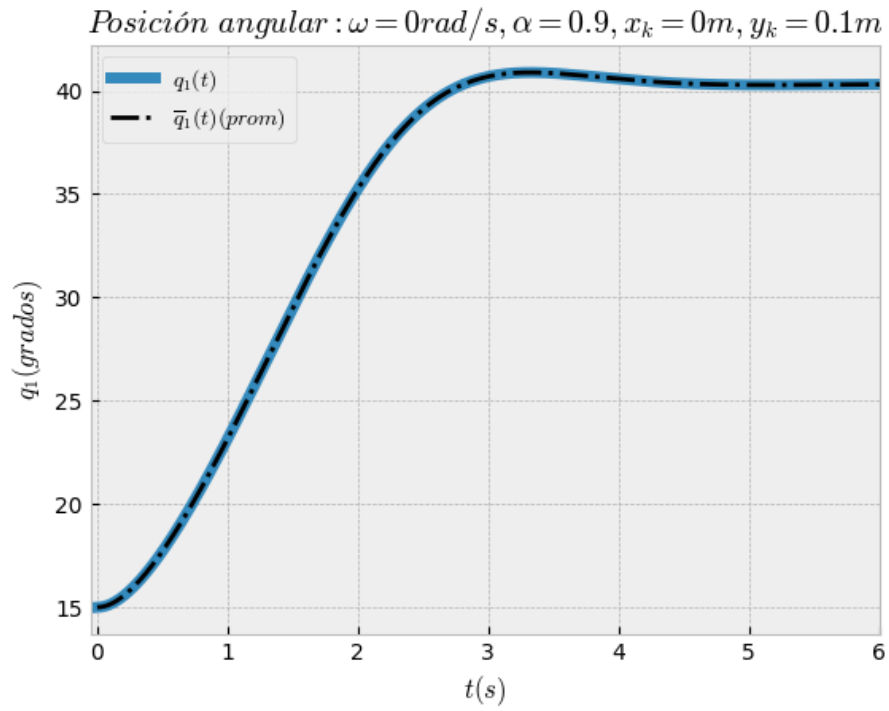


Figura 4.8. Posición angular correspondiente del péndulo de un grado de libertad sin oscilaciones $\omega = 0$.

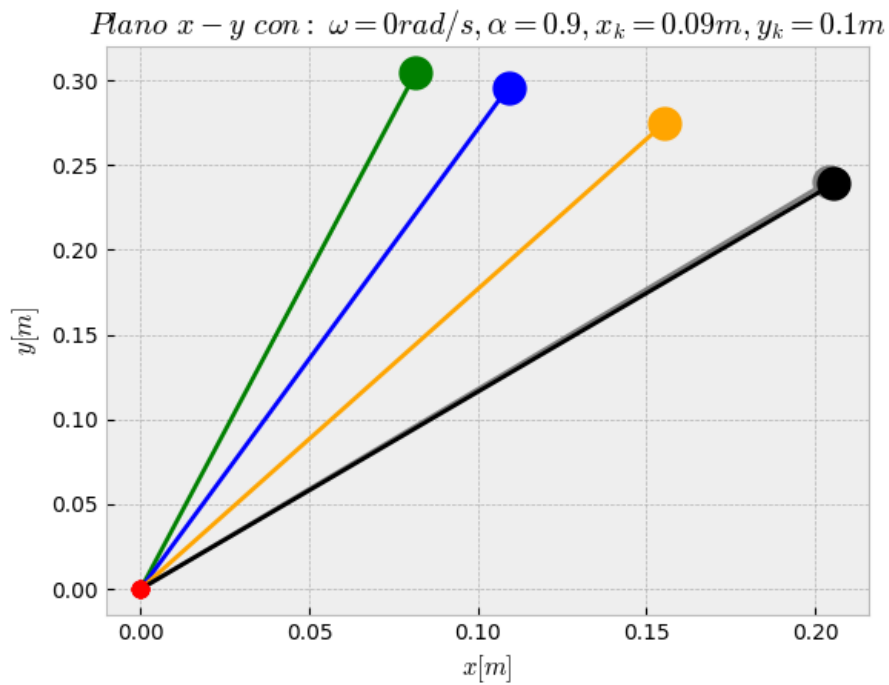


Figura 4.9. Posición en el plano X-Y del péndulo de un grado de libertad sin oscilaciones $\omega = 0$.

4.3. Análisis del costo energético del péndulo de un grado de libertad

En esta sección se hará un análisis del costo energético para un péndulo de un grado de libertad, ya que esto es un paso esencial para comprender a fondo las implicaciones y limitaciones energéticas de este sistema dinámico.

En esta etapa, se busca hacer un análisis por medio de varios casos en donde se analizará de forma gráfica, lo que permitirá determinar cómo es que la energía elástica fluye a través del péndulo, cómo se distribuye y cómo se relaciona con sus diversas formas de movimiento dadas por la frecuencia de oscilación.

Al explorar el costo energético, no sólo se profundiza en el análisis de la posición angular y condiciones de estabilidad del sistema, sino que también se busca la eficiencia y la estabilidad de su funcionamiento, es decir una buena relación entre frecuencia de oscilación contra la rigidez dada por una representación de los músculos.

Para este análisis, se realizarán los cálculos de energías cinética y elástica para diferentes valores de rigidez y frecuencia de oscilación, esto para comprender de mejor manera cómo las características cinéticas y potenciales del péndulo se entrelazan en la narrativa energética completa.

Por lo que la ecuación que permite la posibilidad de calcular y evaluar la cantidad de energía elástica almacenada en un sistema, es decir, la energía que se acumula debido a la deformación y elasticidad de elementos como resortes o materiales elásticos se puede representar de la siguiente manera:

$$E_e = \frac{1}{2\Delta T} \int_0^{\Delta T} k_1 q_1(t)^2 dt \quad (4.1)$$

La ecuación que permite calcular y determinar la magnitud de la energía cinética, es decir, la energía asociada al movimiento y velocidad del centro de masa del péndulo de un grado de libertad durante un intervalo de tiempo se puede expresar de la siguiente manera:

$$E_c = \frac{1}{2\Delta T} \int_0^{\Delta T} m_1 l_1^2 \dot{q}_1(t)^2 dt \quad (4.2)$$

Una vez que se tienen éstas dos ecuaciones se calcula la energía total del sistema, el cual se determina a partir de realizar la suma de la energía cinética y energía elástica.

$$E = E_c + E_e \quad (4.3)$$

Con el objetivo de facilitar la comprensión de la evolución de la energía total del sistema en función de variaciones en la rigidez (α) y el incremento en la frecuencia de oscilación (ω), se ha adoptado un enfoque visual más accesible. En este sentido, se optó por calcular el valor promedio de energía para cada nivel de frecuencia. Esta metodología permite obtener una perspectiva general del comportamiento de la energía, evitando la necesidad de analizar minuciosamente cada punto de la gráfica. En esencia, este enfoque simplificado mantiene la integridad informativa mientras brinda una visualización más amigable y fácilmente interpretable de cómo se relacionan estos factores en el sistema.

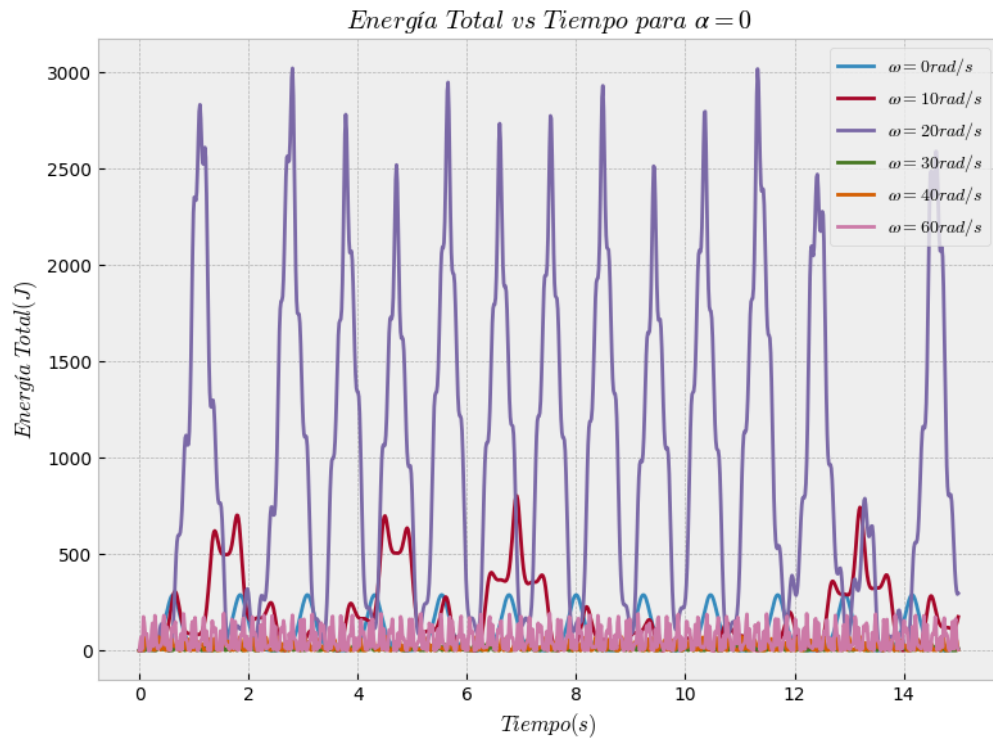


Figura 4.10. Evolución de la energía total para el péndulo de un grado de libertad con $\alpha = 0$ y distintos valores de ω .

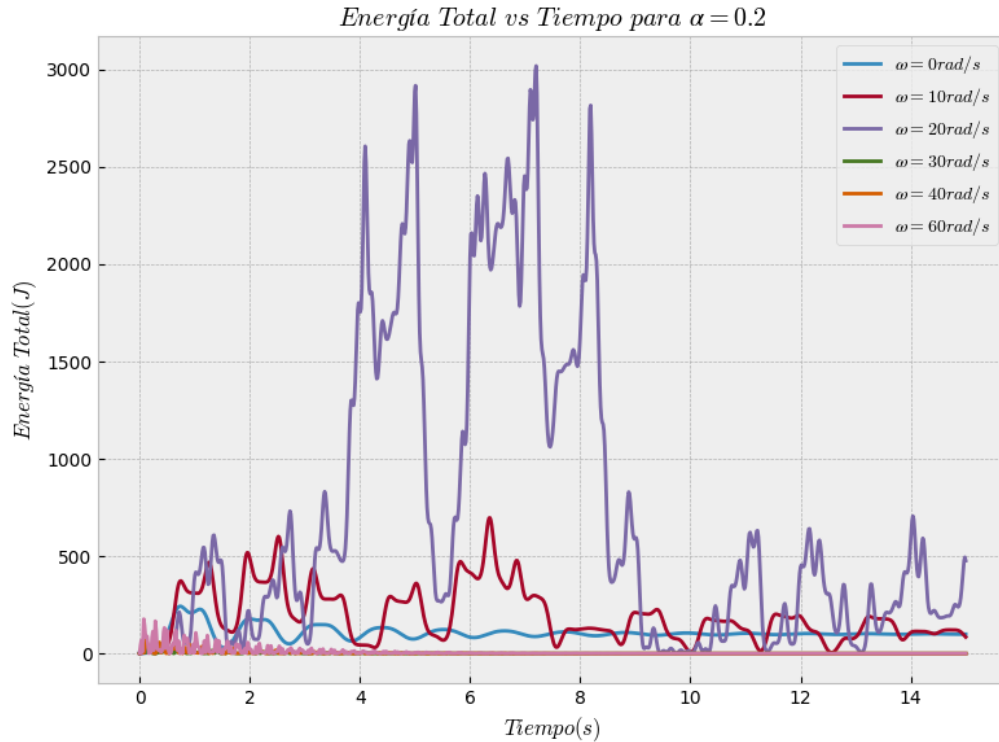


Figura 4.11. Evolución de la energía total para el péndulo de un grado de libertad con $\alpha = 0.2$ y distintos valores de ω .

En la Figura 4.10 y Figura 4.11, se muestra la Energía Total en función del tiempo para un valor fijo de α y diferentes valores de frecuencia en un péndulo de un grado de libertad amortiguado y sometido a oscilaciones verticales en su base. Este tipo de péndulo, como se explicó anteriormente, permite que el sistema mecánico que combina un péndulo simple con un elemento de rigidez sometidos a oscilaciones en su punto pivote se mantengan en posición vertical.

En ambas figuras, cada curva corresponde a una frecuencia diferente de oscilación (ω), el eje horizontal representa el tiempo en segundos, mientras que el eje vertical muestra la Energía Total en el péndulo. La Energía Total es una combinación de la Energía Cinética (debido al movimiento) y la Energía Potencial (debido a la altura y a la constante de rigidez).

Para cada frecuencia, la Energía Total oscila de manera amortiguada debido al factor de amortiguamiento presente en el sistema. A medida que pasa el tiempo, la energía mecánica se disipa gradualmente debido a la presencia del amortiguamiento, y las oscilaciones se reducen en amplitud.

Se observa en ambos casos de α que, a frecuencias más altas, el sistema disipa energía más rápidamente, lo que resulta en oscilaciones amortiguadas más rápidas.

En general, se muestra cómo la energía total del péndulo de un grado de libertad sujeto a oscilaciones en su base varía con el tiempo para diferentes frecuencias y la energía del sistema se va haciendo menor en ambos casos al aumentar la frecuencia de oscilación, la única diferencia entre estos dos casos es que, en uno al contar con energía elástica, la

energía total del sistema decae a cero en un tiempo dado, mientras que en el otro caso se mantiene oscilando entre ciertos valores.

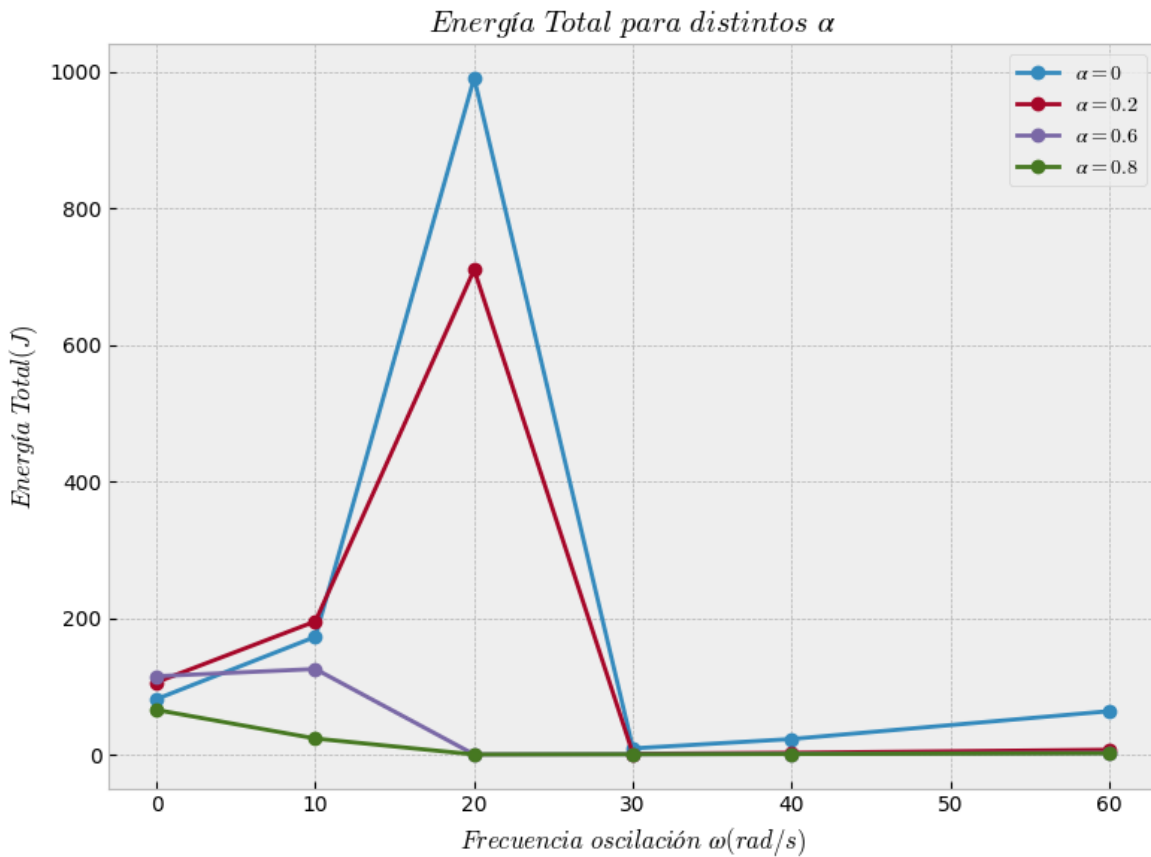


Figura 4.12. Energía total de un péndulo de un grado de libertad sometido a oscilaciones verticales a diferentes valores de frecuencia (ω) y de rigidez (α).

Una demostración más compacta de los comportamientos que se describen en la Figura 4.10 y Figura 4.11. Evolución de la energía total para el péndulo de un grado de libertad con $\alpha = 0.2$ y distintos valores de ω . Figura 4.11, se puede observar en la Figura 4.12, en dónde se muestra la energía total promedio del sistema de péndulo de un grado de libertad oscilante en función de la frecuencia angular de la oscilación (ω). Este sistema se caracteriza por tener una masa, un elemento de rigidez y una amortiguación, y está siendo excitado externamente con diferentes frecuencias angulares (ω) y diferentes niveles de rigidez y amortiguamiento (α).

El eje horizontal del gráfico representa la frecuencia angular de la oscilación (ω) en radianes por segundo. El eje vertical representa la energía total promedio del sistema en Jules (J).

Las curvas en el gráfico están etiquetadas con los valores de alfa utilizados para cada caso. Cada curva representa cómo la energía total promedio varía con la frecuencia para un valor específico de alfa.

Como se puede observar, todas las curvas tienen una forma similar, pero difieren en su amplitud y altura. Esto se debe a la presencia de la rigidez en el sistema. Las curvas representan la relación entre la energía total promedio y la frecuencia angular de oscilación para diferentes niveles de rigidez. Cuanto más pronunciada sea la curva, más energía total promedio se acumula en el sistema a una frecuencia particular.

Cada curva tiene un punto máximo, el cual representa las frecuencias angulares en las cuales el sistema está más "resonante". La resonancia ocurre cuando la frecuencia de excitación externa se acerca a la frecuencia natural del sistema sin amortiguación. En estos puntos, la energía total promedio alcanza su valor máximo, lo que significa que el sistema absorbe más energía de la que disipa y la acumula en su interior.

A medida que aumenta el valor de la rigidez (α), el valor de frecuencia (ω) necesaria para que la energía total sea cercana o igual a cero, será menor a medida que α aumente

Si comparamos las curvas para diferentes valores de alfa, notaremos que a medida que alfa aumenta, las curvas se desplazan hacia la izquierda, es decir, hacia frecuencias más bajas. Esto significa que la resonancia ocurre a frecuencias más bajas a medida que aumenta la amortiguación. Además, las curvas también se vuelven menos pronunciadas, lo que indica que la amortiguación disminuye la acumulación de energía en el sistema.

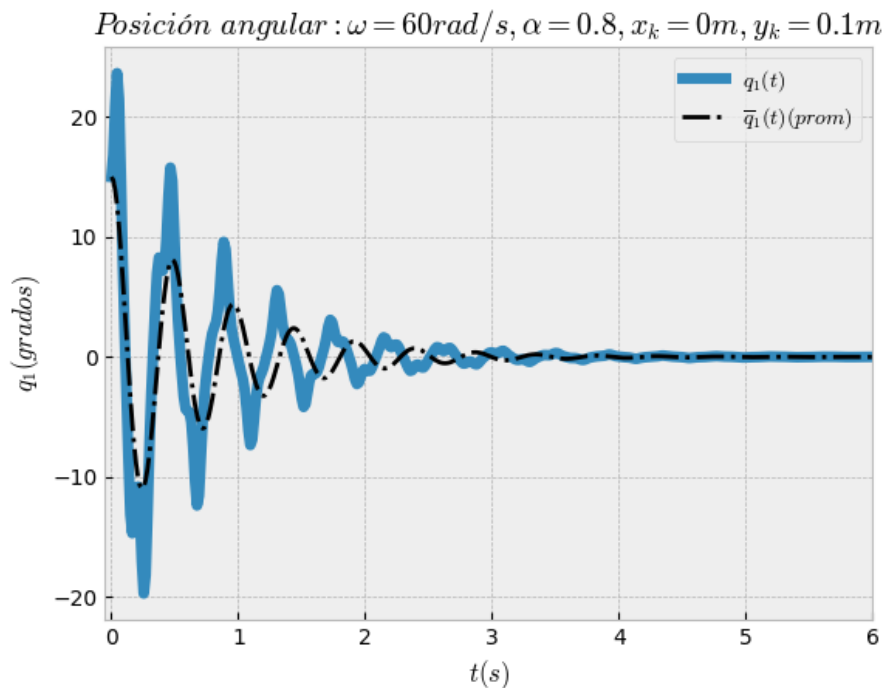


Figura 4.13. Posición angular correspondiente del péndulo de un grado de libertad sin oscilaciones $\omega = 60\text{rad/s}$ y $\alpha = 0.8$ (únicamente movimiento vertical).

En resumen, la Figura 4.12 nos muestra como la energía total promedio del sistema del péndulo de un grado de libertad varía con la frecuencia y cómo esta relación se ve afectada por la presencia de la rigidez (representada por los valores de α). Las curvas nos permiten identificar las frecuencias que provocan que el consumo energético disminuya y además de

la relación de la rigidez y cómo es que también afecta la transferencia y acumulación de energía en el sistema.

A partir de la curva de color verde ($\alpha = 0.8$) de la Figura 4.12, se toma la frecuencia más grande $\omega = 60 \text{ rad/s}$ para conocer cómo es que se comporta la posición angular del péndulo de un grado de libertad bajo estas condiciones.

Esta posición angular se muestra en la Figura 4.16, donde además se muestra la curva correspondiente al sistema promediado dado por la curva punteada de color negro ($\bar{q}_1$).

Además, en la Figura 4.17 se muestra el comportamiento del péndulo de un grado de libertad en el plano, para observar más a detalle cuál es su comportamiento a estas condiciones.

El comportamiento descrito en estas dos figuras es muy similar para todas las frecuencias mayores a 30 rad/s con una rigidez de 0.8, ya que según lo analizado matemáticamente en el capítulo 3, sección 3.5 se tiene un valor mínimo de frecuencia para cada valor de rigidez α , lo que hace que el péndulo tienda a su posición vertical mostrada en la Figura 4.17.

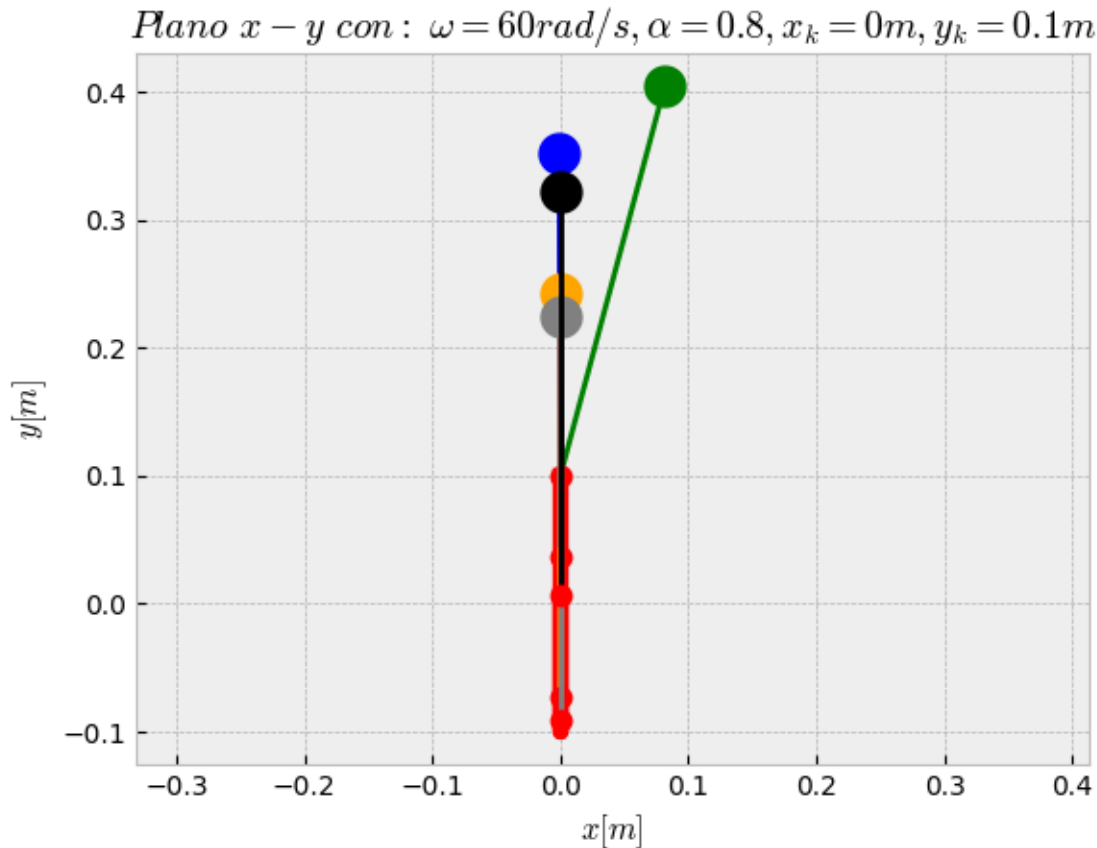


Figura 4.14. Posición en el plano X-Y del péndulo de un grado de libertad con $\omega = 60 \text{ rad/s}$ y $\alpha = 0.8$.

4.4. Resultados y simulaciones del péndulo de dos grados de libertad

Partiendo de que el péndulo doble es capaz de mantenerse en posición invertida bajo estos conceptos, en este trabajo se busca modificar la oscilación de entrada para hacer que además de que el péndulo oscile verticalmente a cierta frecuencia, este se vaya desplazando en la horizontal para observar cómo se modifican los criterios que determinan la estabilidad del péndulo.

Además, como este péndulo está basado en la composición antropomórfica, se consideran que estos parámetros de frecuencia y amplitud deben estar dentro de los rangos realizables para el ser humano, así como también se deben considerar los parámetros viscoelásticos que se han identificado dentro de la literatura, los cuales se supone que permanecen constantes durante el movimiento. Los casos que se mostraran a continuación son para $x(t) = d_1 \cos(\omega t)$, $y(t) = h_1 \cos(\omega t)$.

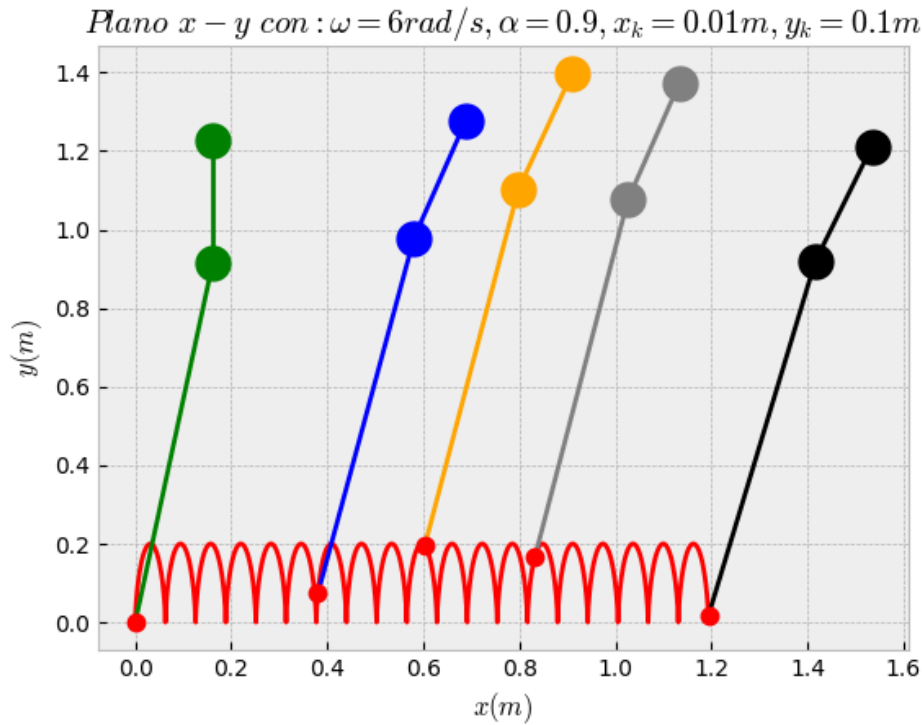


Figura 4.15. Posición en el plano $x-y$ del péndulo de dos grados de libertad sujeto a movimiento cicloidal en su base.

Dentro de las diferentes combinaciones de parámetros de frecuencia, amplitud de oscilaciones y rigidez que permiten mantener al péndulo en su posición de estabilidad (vertical hacia arriba) se muestran varios casos, como el de la Figura 4.15 donde se puede observar cómo es el comportamiento en el espacio del péndulo con un movimiento de cicloide inducido su base con $\omega = 6 \text{ rad/s}$ y $\alpha = 0.9$.

En dicha figura se puede observar que los valores angulares q_1 y q_2 del segmento correspondiente a las piernas y torso respectivamente se mantienen dentro del rango de estabilidad establecido.

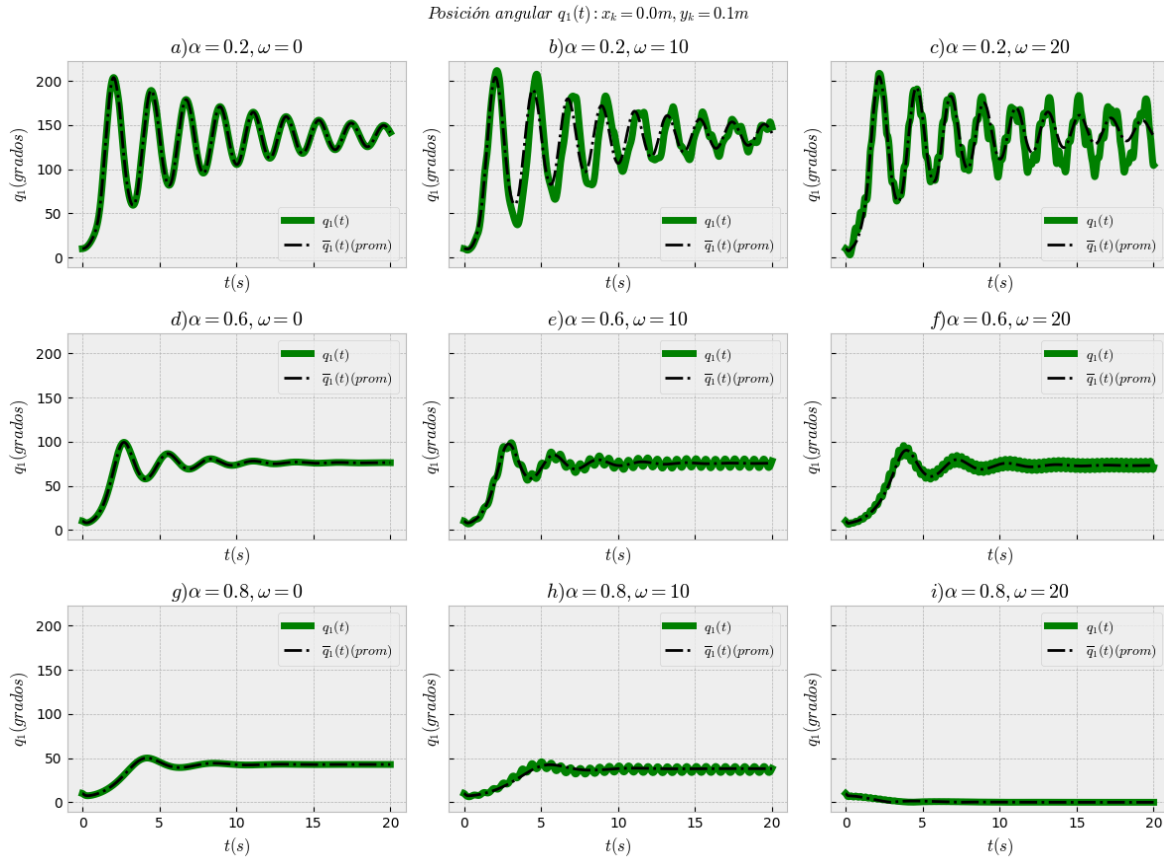


Figura 4.16. Posición angular q_1 del péndulo de dos grados de libertad para diferentes valores de α y ω (Sólo movimiento vertical).

En la Figura 4.16 se presentan resultados similares a los obtenidos y analizados en figuras anteriores, las cuales estaban relacionadas al péndulo de un grado de libertad, pero esta vez se enfoca en el ángulo del primer eslabón (q_1) del péndulo de dos grados de libertad. Se muestran diferentes combinaciones de los valores de α (amortiguación) y ω (frecuencia de oscilación externa), utilizando únicamente oscilaciones con un desplazamiento vertical de $y_k = 0.1m$ y sin desplazamiento horizontal, es decir $x_k = 0m$, en la base del péndulo

Al igual que en los casos mencionados anteriormente en el péndulo de un grado de libertad, se puede observar cómo la modificación de estos parámetros de amplitudes de entrada afecta la correspondencia entre los valores originales y los valores promediados. Además, se nota que estos parámetros también influyen en las combinaciones mostradas en las figuras previas, lo que sugiere una relación consistente entre α, ω y los parámetros asociados a las oscilaciones de entrada.

Cuando se analizan los casos específicos de la Figura 4.16, se pueden identificar situaciones interesantes. Por ejemplo, en el inciso a) se muestra el caso en el que el péndulo no oscila y debido a un valor muy pequeño de α , se evidencia que no logra llegar a la posición deseada ($q_1 = 0^\circ$). En los incisos b) y c), al agregar una frecuencia de oscilación $\omega = 10 \text{ rad/s}$, se observan oscilaciones del centro de masa del primer eslabón alrededor de un ángulo q_1 específico cercano al que se obtuvo en el inciso a). Estos casos resaltan la influencia de la frecuencia en el comportamiento del péndulo y además que es necesaria una frecuencia mayor a $\omega = 30 \text{ rad/s}$ para lograr el comportamiento deseado.

En los siguientes incisos d), e) y f), se observan comportamientos similares a los descritos anteriormente, donde la combinación de ciertos valores de α, ω en la entrada del péndulo afectan el ángulo q_1 y el comportamiento general del péndulo. Por ejemplo, en el caso de la frecuencia $\omega = 20 \text{ rad/s}$, se nota que el sistema promediado ya no corresponde al sistema original. Por último, en los incisos g), h) e i), se evidencia que una mayor rigidez (α) permite que el péndulo se acerque más rápido a la posición vertical deseada, y la adición de oscilaciones a una determinada frecuencia facilita el ajuste hacia $q_1 = 0^\circ$.

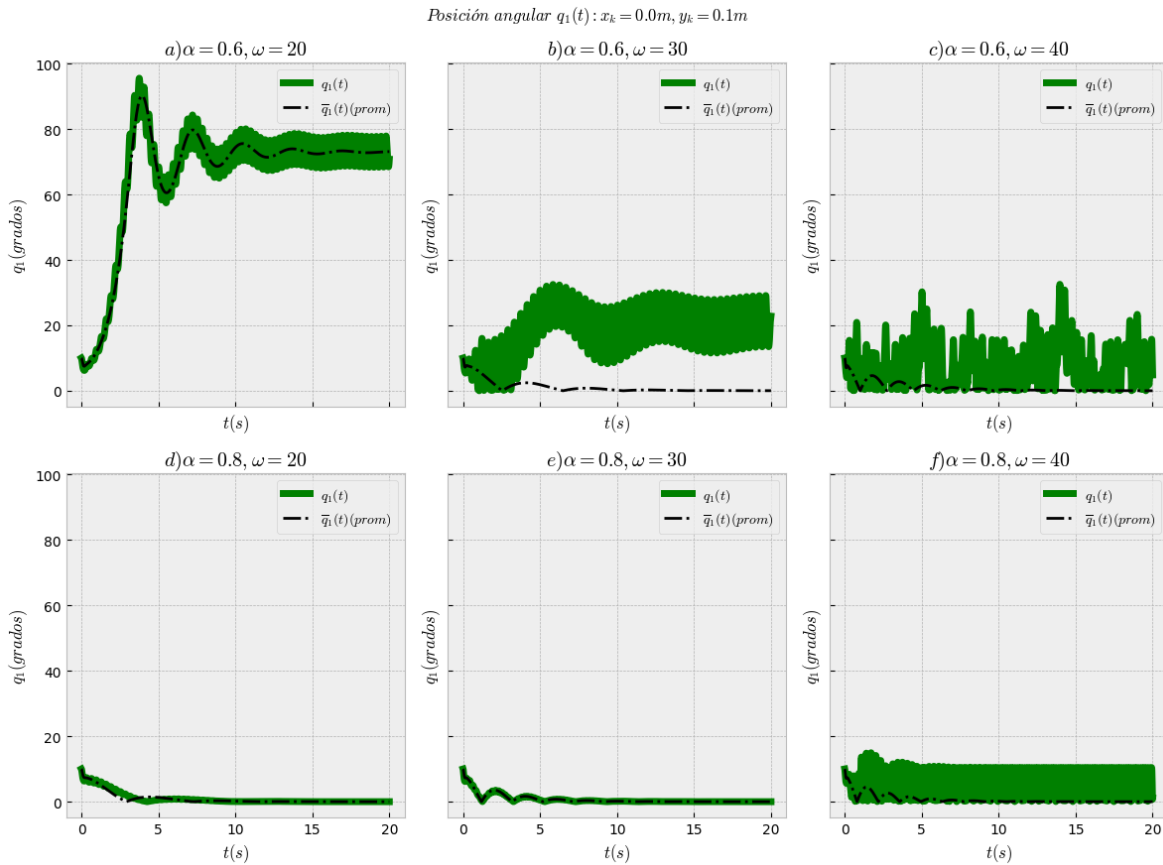


Figura 4.17. Posición angular q_1 del péndulo de dos grados de libertad para diferentes valores de α y ω (Sólo movimiento vertical).

En resumen, la Figura 4.16 muestra resultados coherentes con las observaciones anteriores, resaltando cómo la modificación de los parámetros de las oscilaciones de entrada, junto con los valores de α y ω , influyen en el comportamiento y estabilidad del péndulo. Estos hallazgos son consistentes con la comprensión teórica y contribuyen al entendimiento de la dinámica de sistemas de péndulos con diferentes configuraciones.

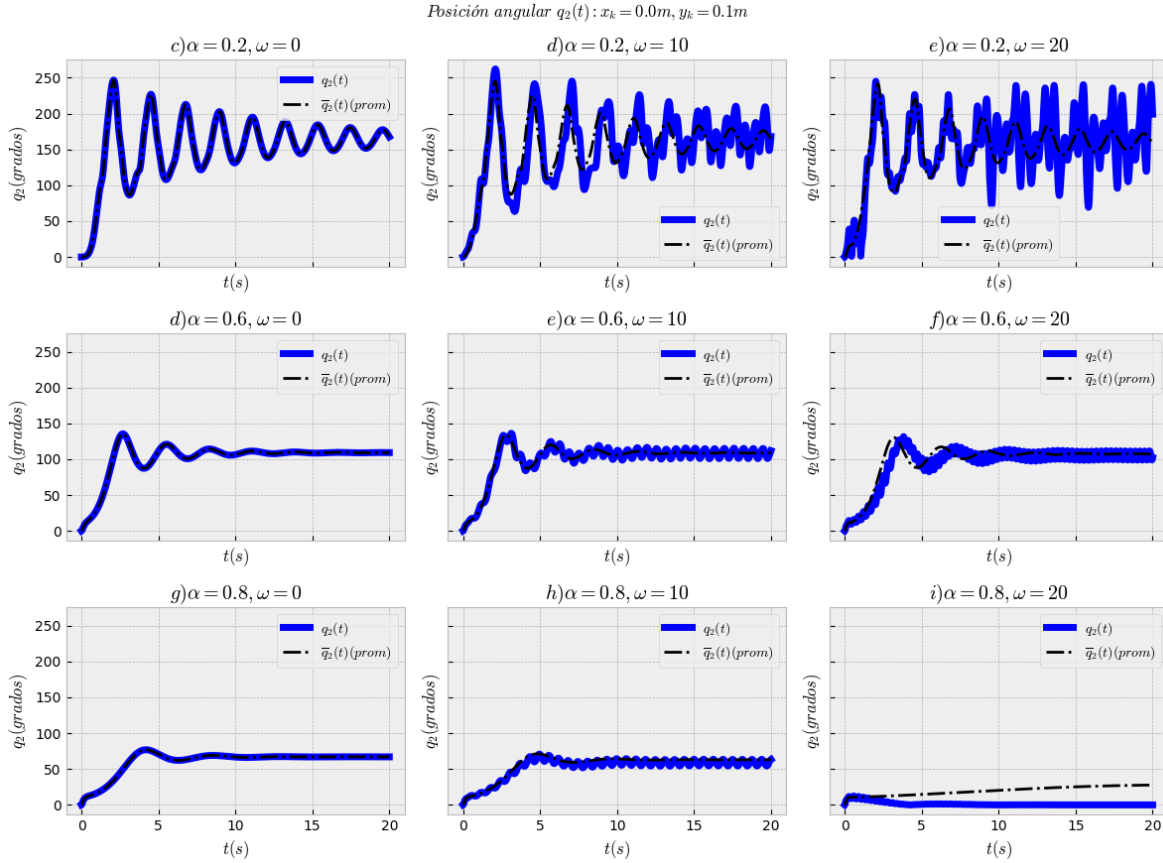


Figura 4.18. Posición angular q_1 del péndulo de dos grados de libertad para diferentes valores de α y ω (Sólo movimiento vertical).

En la Figura 4.18, ahora se presentan resultados adicionales enfocados en el ángulo del segundo eslabón del péndulo de dos grados de libertad. Al igual que en figuras anteriores, se exploran diferentes combinaciones de los valores de α (amortiguación) y ω (frecuencia de oscilación externa), utilizando oscilaciones en la entrada del péndulo con un desplazamiento horizontal de $x_k = 0.05m$ y un desplazamiento vertical de $y_k = 0.1m$.

Los resultados obtenidos revelan cómo la variación de estos parámetros afecta la relación entre los valores originales y los valores promediados del ángulo del segundo eslabón del péndulo. Se nota que diferentes combinaciones de α y ω generan comportamientos distintos en la respuesta del sistema.

En el inciso a) se observa un caso donde el péndulo no oscila debido a un valor muy pequeño de α , lo que resulta en una falta de estabilidad del sistema en el segundo eslabón. En los incisos b) y c), al aumentar la frecuencia a $\omega = 10 \text{ rad/s}$, se evidencia la ocurrencia de oscilaciones del ángulo q_2 alrededor de un valor específico. Esto resalta la influencia directa de la frecuencia en el comportamiento del segundo eslabón.

Los incisos d), e) y f) también presentan comportamientos diferentes, donde la combinación de ciertos valores de α , ω , y las amplitudes de las oscilaciones de entrada influyen en el ángulo q_2 y el comportamiento general del péndulo. Además, en el inciso f), con una frecuencia $\omega = 20 \text{ rad/s}$, se nota una discrepancia entre el sistema original y el sistema promediado.

Finalmente, los incisos g), h) e i) destacan cómo una mayor rigidez (α) facilita que el péndulo alcance más rápidamente la posición vertical deseada, y cómo agregar oscilaciones a una frecuencia específica contribuye al ajuste del ángulo q_2 hacia el valor deseado.

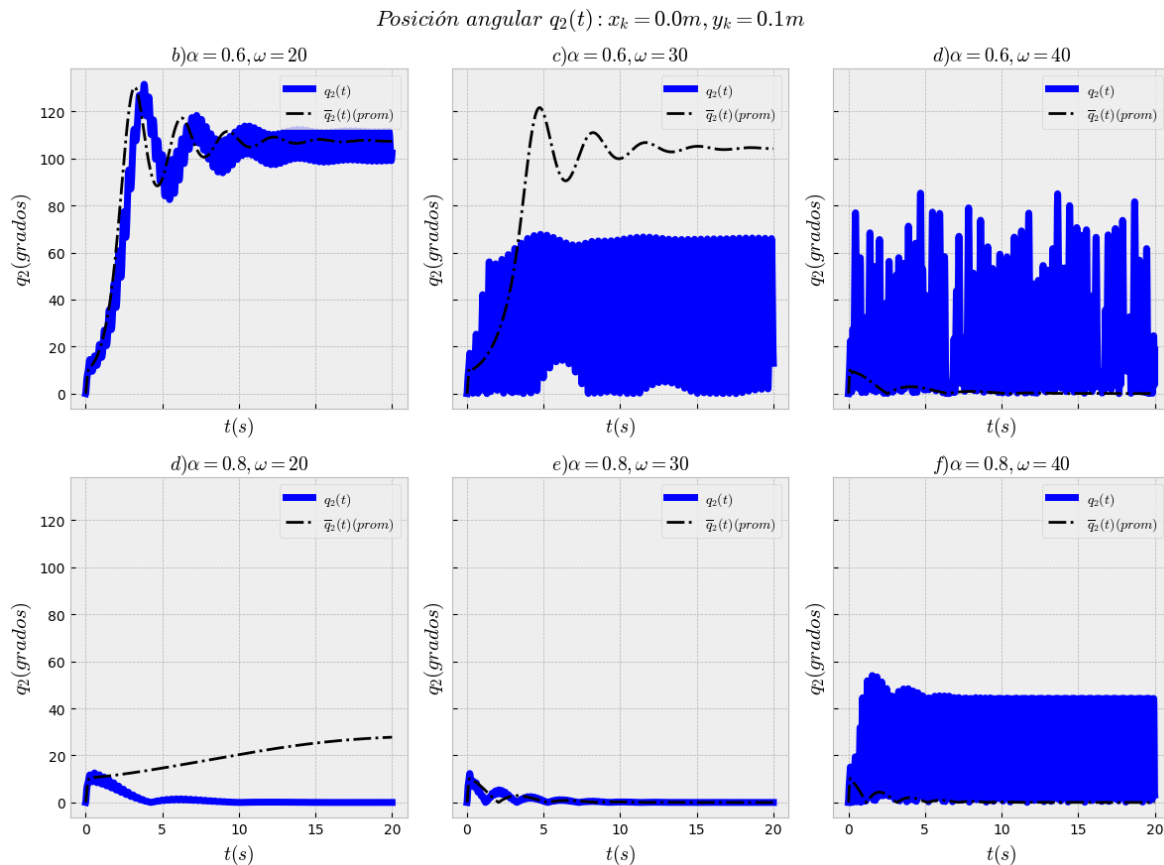


Figura 4.19. Posición angular q_1 del péndulo de dos grados de libertad para diferentes valores de α y $20 \leq \omega \leq 40$.

En conclusión, la Figura 4.18 proporciona una visión detallada de cómo la variación de los parámetros de las oscilaciones de entrada, así como los valores de α y ω , influyen en el comportamiento y la estabilidad del segundo eslabón del péndulo de dos grados de libertad.

Estos hallazgos son fundamentales para comprender la dinámica de sistemas complejos como los péndulos y ofrecen información valiosa para el diseño y control de dispositivos como micro vehículos aéreos con alas batientes.

Para hacer un análisis más detallado, se tomó de la Figura 4.17 y Figura 4.18, el caso particular de $\omega = 40 \text{ rad/s}$ y $\alpha = 0.6$, lo cual se muestra en la Figura 4.20.

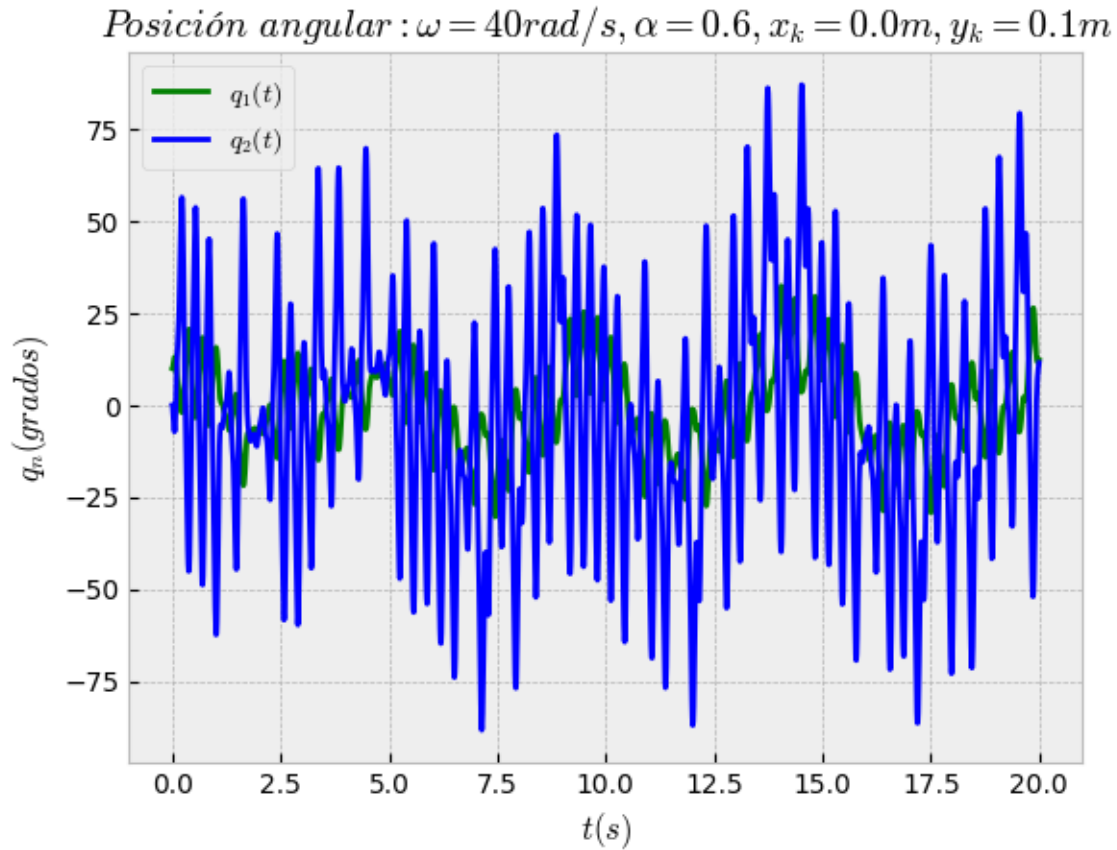


Figura 4.20. Posición angular del péndulo de dos grados de libertad para $\alpha = 0.6$ y $\omega = 40 \text{ rad/s}$.

En esta Figura 4.20 se puede observar el comportamiento del péndulo con una rigidez al 60% del valor necesario para mantener el péndulo en su posición vertical ($q_1 = 0^\circ$, $q_2 = 0^\circ$), por lo que para estos valores rigidez y frecuencia para únicamente oscilaciones verticales, se puede decir que estas oscilaciones tienen un impacto en la estabilidad del péndulo, esto dependiendo de la tolerancia que se tenga al momento de elegir el intervalo de los ángulos de la posición de los segmentos del péndulo.

Un ejemplo de cómo se observarían los ángulos que se muestran en la Figura 4.20 en el plano de coordenadas x-y se muestra en la Figura 4.21. En dicha figura se observa que a pesar de que en la Figura 4.20 pareciera que estos eslabones tienen una gran variación con respecto del origen, no es así.

La secuencia de movimiento comienza con el péndulo de color verde, continua al color azul, posteriormente al naranja, el cual es la representación a la mitad del tiempo de simulación (10 segundos), seguido del representado por el color gris y por último el color negro el cual es la representación a los 20 segundos de simulación.

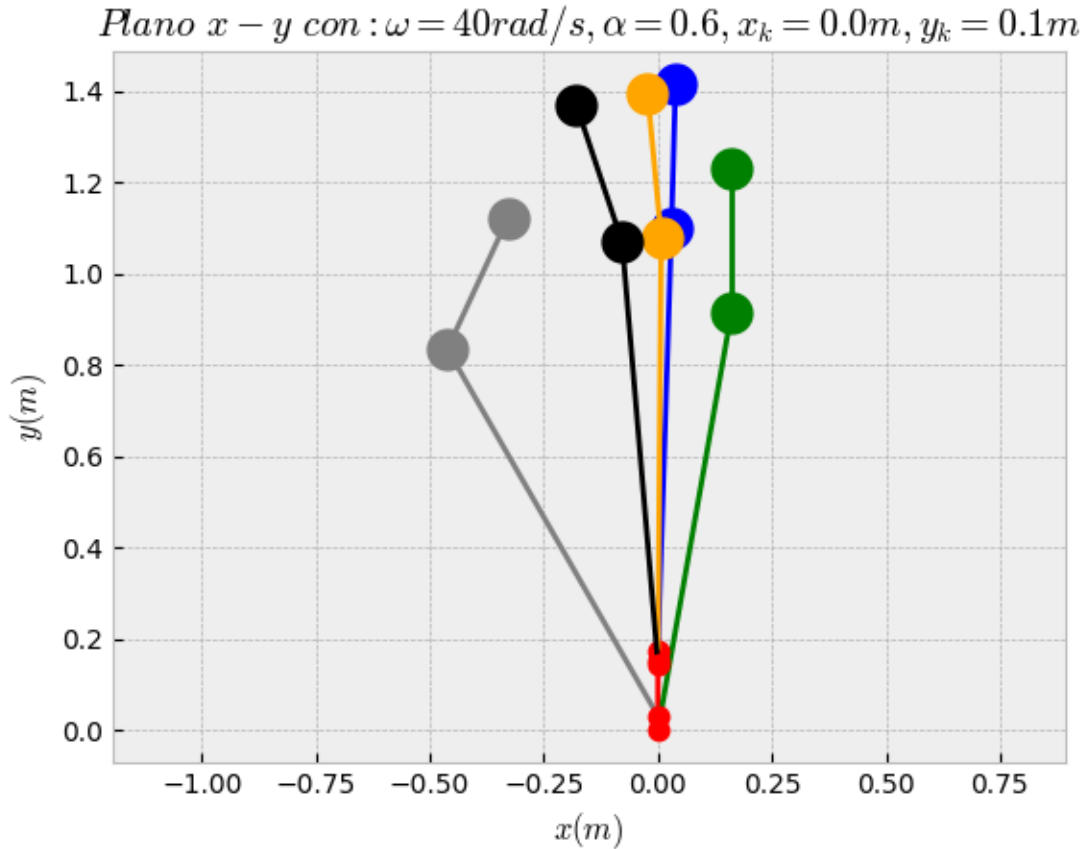


Figura 4.21. Posición del péndulo de dos grados de libertad en el plano $x-y$ para $\alpha = 0.6$ y $\omega = 40\text{rad/s}$.

Ahora se buscará analizar otro caso particular del comportamiento del péndulo, ahora solo sometiendo el péndulo de dos grados de libertad a un movimiento horizontal en su base, tal como se muestra en la Figura 4.23, en donde al igual que en la Figura 4.21, la secuencia de movimiento comienza con el color verde, seguido del azul, naranja y por último el color gris y negro.

Aquí se puede observar un comportamiento distinto al del péndulo de dos grados de libertad con oscilaciones verticales, ya que como se puede observar en la Figura 4.22 la posición angular parte de los valores propuestos de las condiciones iniciales cercanas al origen y el ángulo del primer segmento del péndulo comienza a oscilar dentro de un valor promedio de $q_1 = 75^\circ$ y el segundo segmento oscila alrededor de $q_2 = 120^\circ$.

Lo anterior se debe a que cuando las oscilaciones son de manera horizontal, el péndulo tiende a tomar un valor fuera del origen (0,0) hacia otro valor determinado. Este comportamiento fue analizado más a detalle en la literatura.

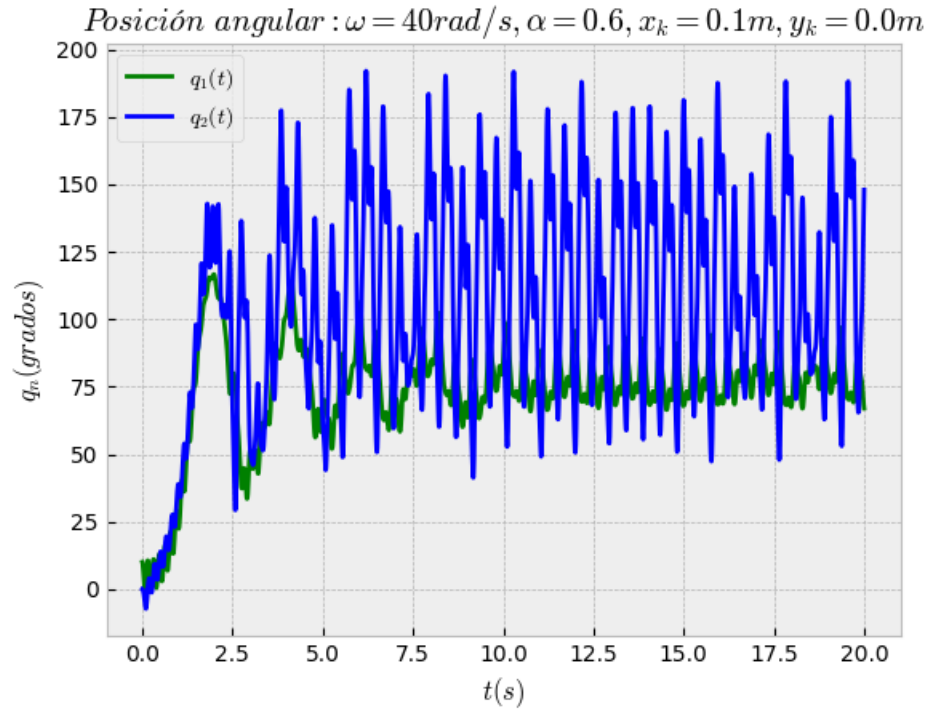


Figura 4.22. Posición angular del péndulo de dos grados de libertad para $\alpha = 0.6$ y $\omega = 40\text{rad/s}$, con $x(t) = d_1 - d_1 \cos(\omega t)$ y $y(t) = 0$

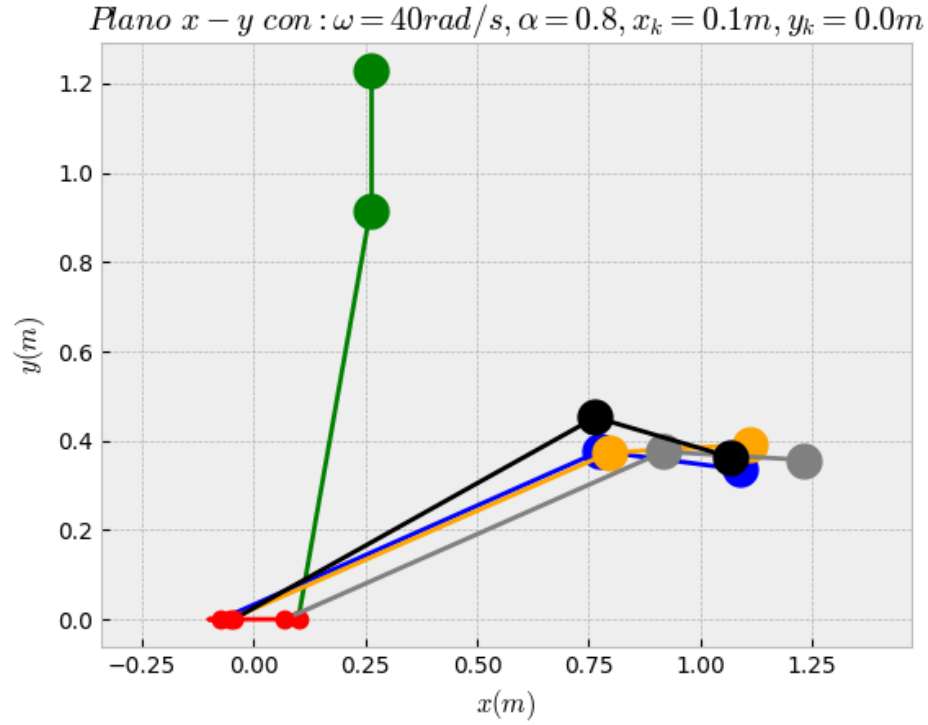


Figura 4.23. Posición del péndulo de dos grados de libertad en el plano $x-y$ para $\alpha = 0.6$ y $\omega = 40\text{rad/s}$ con $x(t) = d_1 \cos(\omega t)$ y $y(t) = 0$.

4.5. Análisis del costo energético del péndulo de dos grados de libertad

En esta sección se analiza el costo energético del péndulo de dos grados de libertad para cada uno de los casos que se analizaron en la sección 4.4 y para otros casos que servirán de ejemplo para entender mejor la aportación de dichas oscilaciones al sistema del péndulo de dos grados de libertad.

Las ecuaciones empleadas en esta sección tienen similitudes con las utilizadas para calcular la energía total del péndulo de un grado de libertad. Sin embargo, en esta ocasión, se busca determinar la energía total para un péndulo de dos grados de libertad. Esta aproximación resulta crucial para alcanzar una comprensión profunda de las ramificaciones y restricciones relacionadas con las cuestiones energéticas inherentes a este sistema dinámico en función de los parámetros de rigidez y frecuencia de las oscilaciones.

En esta etapa, se realizará un análisis detallado a través de diversas situaciones, permitiéndonos examinar cómo la energía fluye y se distribuye en el péndulo de dos grados de libertad, con atención a sus múltiples modos de movimiento que son influenciados por la frecuencia de oscilación. Al explorar el costo energético, no solo profundizamos en la evaluación de las posiciones angulares y las condiciones de estabilidad del sistema, sino que también aspiramos a determinar la eficiencia y solidez en su funcionamiento, estableciendo un equilibrio entre la frecuencia de oscilación y la rigidez.

Para llevar a cabo este análisis, se ejecutan cálculos precisos de las energías cinética y elástica, abarcando una variedad de valores para la rigidez y la frecuencia de oscilación. Esta exploración busca comprender cómo los aspectos cinéticos y potenciales del péndulo se entrelazan dentro del panorama energético en su conjunto. En este contexto, la ecuación que posibilita el cálculo y la evaluación de la energía elástica almacenada en el sistema, es decir, la energía que se acumula debido a la deformación y elasticidad de componentes como resortes o materiales elásticos se puede expresar de la siguiente manera:

$$E_{e2} = \frac{1}{2\Delta T} \int_0^{\Delta T} k_1 q_1(t)^2 + k_2 q_2(t)^2 dt \quad (4.4)$$

Donde, k_1 y k_2 corresponden a las constantes de rigidez de cada eslabón del péndulo de dos grados de libertad.

La posición angular de cada eslabón está dada por $q_1(t)$ y $q_2(t)$, Δt es la diferencia entre el tiempo inicial y tiempo final.

La ecuación que permite calcular y determinar la magnitud de la energía cinética, es decir, la energía asociada al movimiento y velocidad del centro de masa del péndulo de un grado de libertad durante un intervalo de tiempo se puede expresar de la siguiente manera:

$$E_{c2} = \frac{1}{2\Delta T} \int_0^{\Delta T} m_1 l_1^2 \dot{q}_1(t)^2 + m_2 l_2^2 \dot{q}_2(t)^2 dt \quad (4.5)$$

Donde, m_1 y m_2 corresponden a las masas de cada eslabón del péndulo de dos grados de libertad. La velocidad angular de cada eslabón está dada por $\dot{q}_1(t)$ y $\dot{q}_2(t)$.

Una vez que se tienen estas dos ecuaciones se la energía total del sistema se obtiene realizando la suma de la energía cinética y energía elástica.

$$E = E_{c2} + E_{k2} \quad (4.6)$$

Con el objetivo de facilitar la comprensión de la evolución de la energía total del sistema en función de variaciones en la rigidez (α) y el incremento en la frecuencia de oscilación (ω), se ha adoptado un enfoque visual más accesible. En este sentido, se optó por calcular el valor promedio de energía para cada nivel de frecuencia. Esta metodología permite obtener una perspectiva general del comportamiento de la energía, evitando la necesidad de analizar minuciosamente cada punto de la gráfica. En esencia, este enfoque simplificado mantiene la integridad informativa mientras brinda una visualización más amigable y fácilmente interpretable de cómo se relacionan estos factores en el sistema.

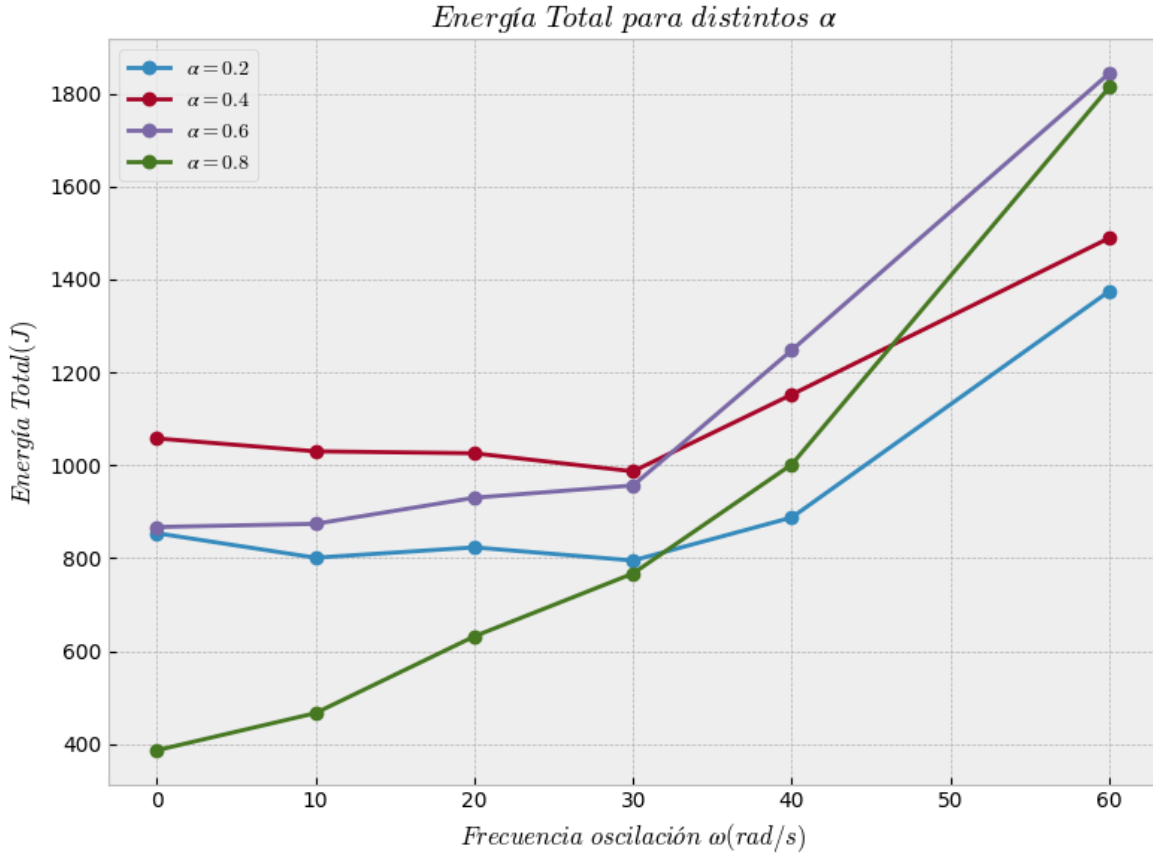


Figura 4.24. Energía total de un péndulo de un grado de libertad sometido a oscilaciones horizontales $x(t) = d_1 \cos(\omega t)$ a diferentes valores de frecuencia (ω) y de rigidez (α).

La Figura 4.24 muestra una representación visual de las interacciones energéticas de un sistema de péndulo de un grado de libertad frente a diferentes frecuencias angulares de oscilación (ω). Este sistema, como ya se ha descrito en secciones anteriores, está compuesto por un par de masas puntuales, un elemento de rigidez y una amortiguación en cada junta, y es excitado externamente con variadas frecuencias angulares y niveles de rigidez y amortiguamiento (α).

Como en la Figura 4.12, el eje horizontal presenta las frecuencias angulares de oscilación en radianes por segundo (ω), mientras que el eje vertical refleja la energía total promedio del sistema en Jules (J).

Cada curva etiquetada con diferentes valores de α muestra como la energía total promedio se comporta frente a las frecuencias angulares para un valor específico de rigidez. Si bien todas las curvas comparten una forma similar, su amplitud y altura varían debido a la influencia de la rigidez en el sistema. Estas curvas nos brindan información sobre la relación entre la energía total promedio y la frecuencia angular de oscilación para distintos niveles de rigidez. Curvas más pronunciadas indican una mayor acumulación de energía en el sistema en cierta frecuencia específica.

En todas las curvas de energía promedio independientemente del valor de rigidez, se puede observar que sometiendo al sistema a oscilaciones externas mayores de 40 rad/s, la energía total promedio decae con mayor rapidez dependiendo de la rigidez con que cuente el sistema. Por ejemplo, en la frecuencia de 40 rad/s, las cuatro curvas tienen casi el mismo valor de energía total, pero a 60 rad/s, el sistema tiene una energía mucho menor para los casos donde α es mayor que los casos donde la rigidez es menor.

En resumen, la Figura 4.24 nos proporciona un panorama visual sobre como varía la energía total promedio del sistema del péndulo de dos grados de libertad en función de la frecuencia angular. También destaca como la rigidez (representada por los valores de α) influye en estas relaciones energéticas y cómo se disminuye la frecuencia necesaria para tener un bajo costo energético.

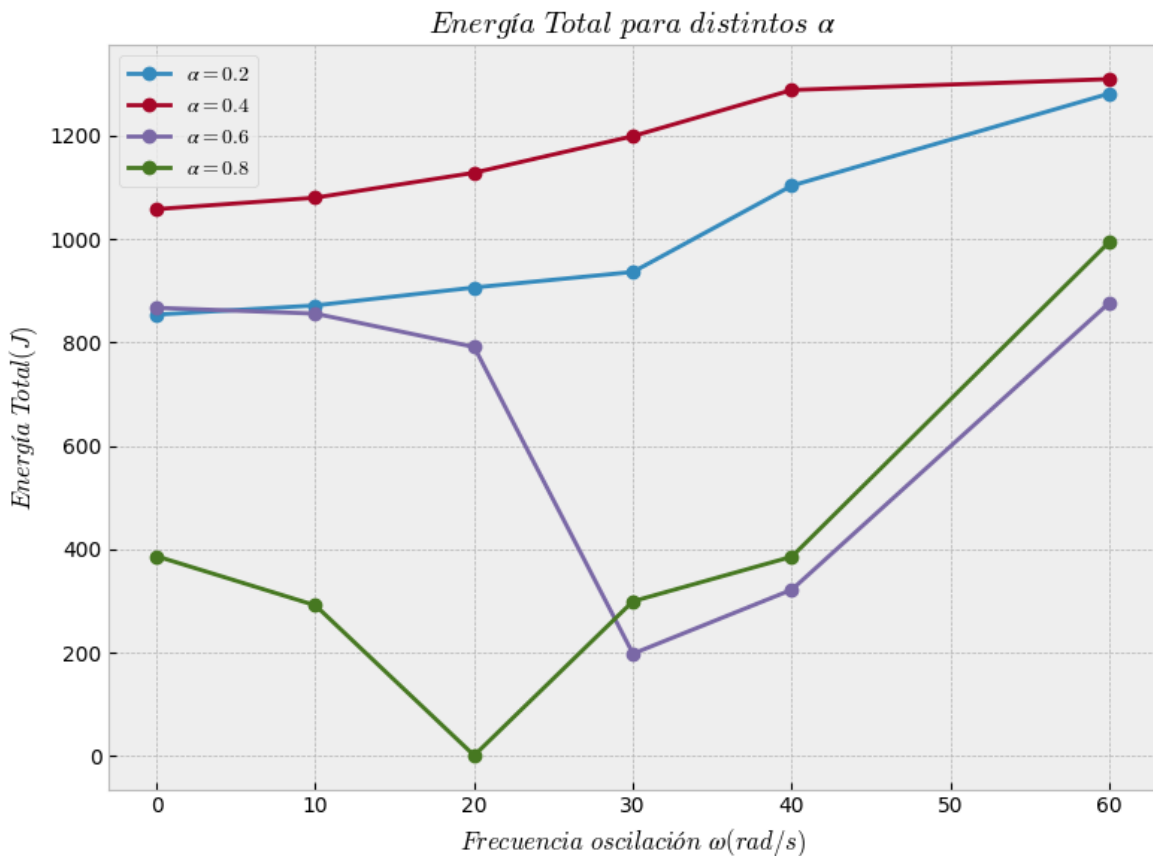


Figura 4.25. Energía total de un péndulo de dos grados de libertad sometido a $y(t) = h_1 \cos(\omega t)$ a diferentes valores de frecuencia (ω) y de rigidez (α).

En la Figura 4.25, se muestra el comportamiento de la energía total para el péndulo de dos grados de libertad sometido a diferentes valores de rigidez y frecuencia de oscilación, modificando el valor de la amplitud de las oscilaciones.

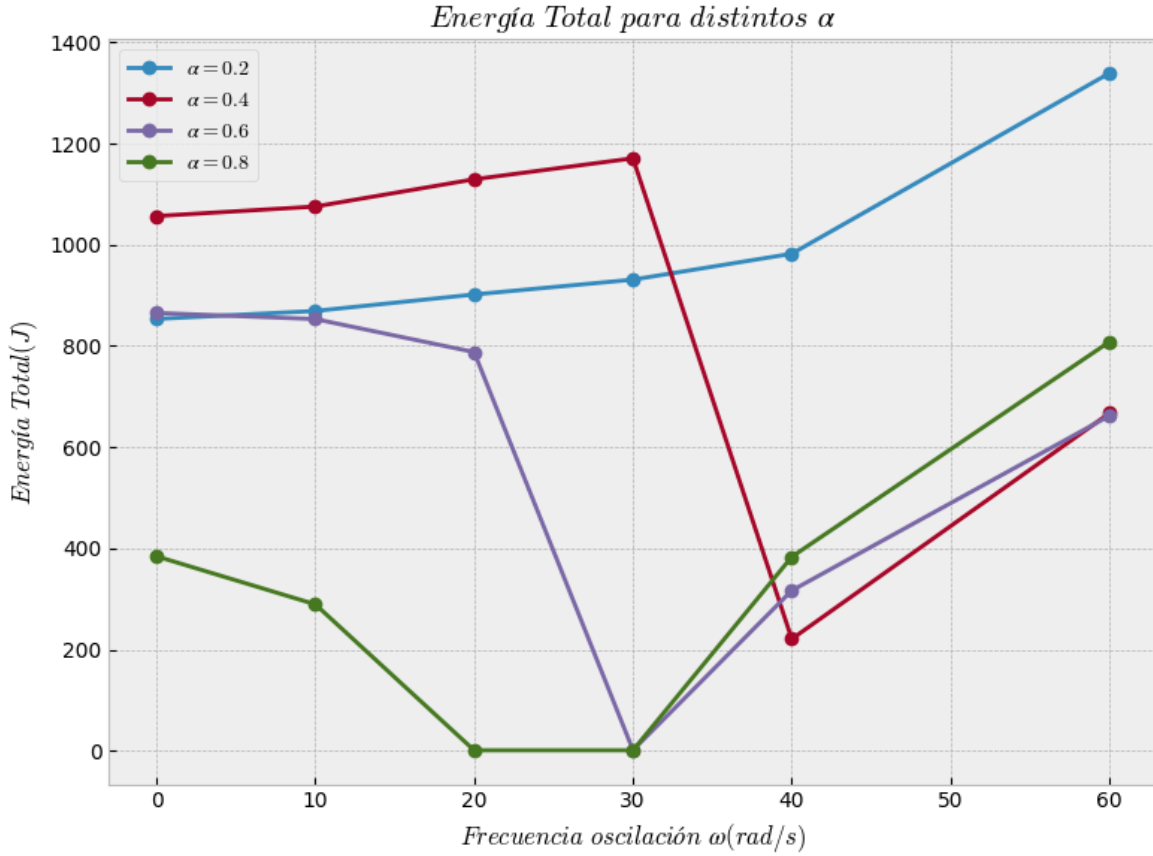


Figura 4.26. Energía total de un péndulo de dos grados de libertad sometido a $y(t) = h_1 \cos(\omega t)$ con $h_1 = 0.1m$ y diferentes valores de frecuencia (ω) y de rigidez (α).

Cuando la base del péndulo es sometida exclusivamente a oscilaciones verticales, las cuales están representadas por la función $y(t) = h_1 \cos(\omega t)$ con $h_1 = 0.1m$, se puede examinar el comportamiento del péndulo en el plano x-y, a través de este análisis se realiza para el caso específico de una oscilación con una frecuencia de $\omega = 40 \text{ rad/s}$ con una rigidez de $\alpha = 0.8$.

Este escenario particular se corresponde con la curva de color verde que se muestra en la Figura 4.26. En dicha figura, podemos observar cómo esta curva de tonalidad verde ($\alpha = 0.8$) exhibe un patrón decreciente a medida que aumenta la frecuencia de la oscilación. Destaca el intervalo comprendido entre 10 y 30 rad/s, ya que presenta un rendimiento destacado en cuanto a la energía total promedio necesaria para mantener el péndulo en las proximidades de su posición vertical (0,0).

Es importante señalar que, tal como se mencionó en párrafos anteriores, el caso ilustrado en la Figura 4.27 se encuentra en el límite en lo que respecta a la posición angular. Dicha posición se ilustra con claridad en la Figura 4.28. En esta última figura, se pueden apreciar los límites angulares de los segmentos, los cuales están dentro del rango de: $-10^\circ \leq q_1 \leq 10^\circ$ y $-40^\circ \leq q_2 \leq 40^\circ$. Estos valores están cercanos a la posición vertical deseada.

Otro caso que merece atención y que se presenta en la Figura 4.26 es el de la curva de color morado. Esta curva exhibe un comportamiento similar al de la curva verde ($\alpha = 0.8$), con la diferencia de que esta presenta una aportación energética en un intervalo menor de frecuencias de oscilación, por lo que en algunos casos sería irrealizable debido a que no en todos los sistemas se podrían obtener frecuencias de dicha magnitud.

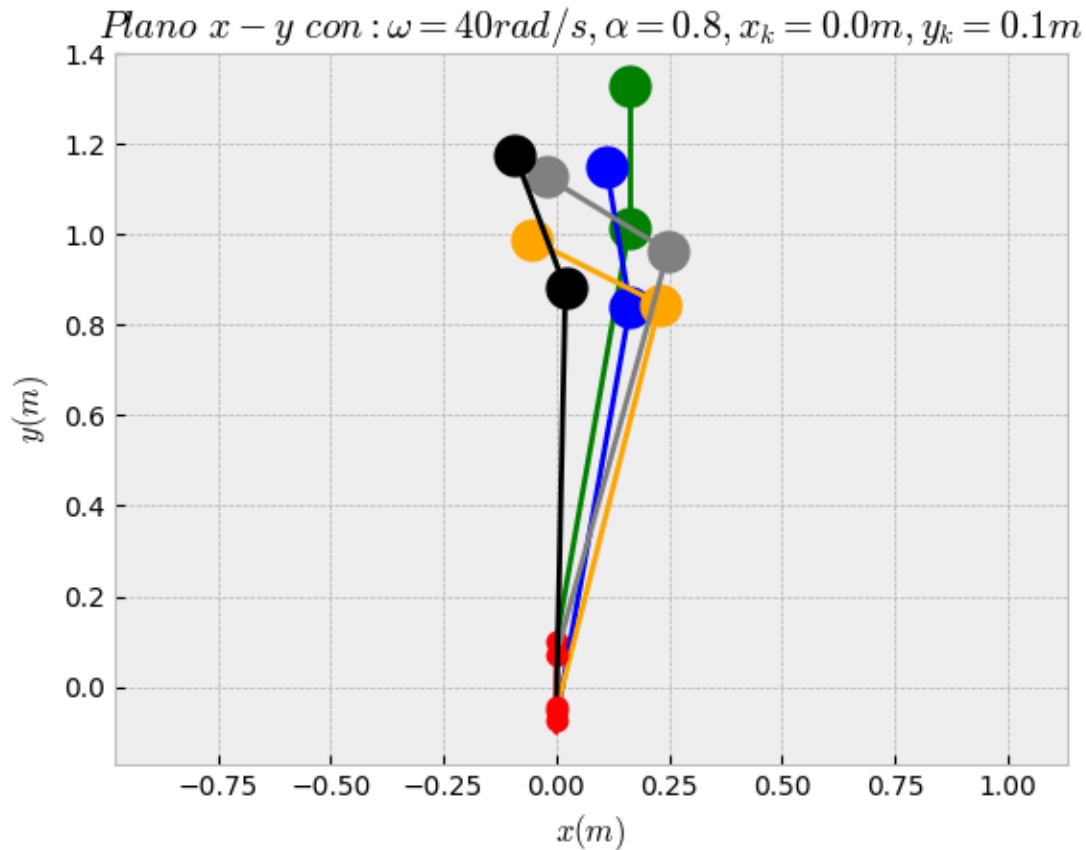


Figura 4.27. Posición del péndulo de dos grados de libertad en el plano $x-y$ para $\alpha = 0.8$ y $\omega = 40\text{rad/s}$ con $x(t) = d_1 \cos(\omega t)$ y $y(t) = 0$.

En resumen, el análisis del comportamiento del péndulo bajo oscilaciones verticales proporciona información esencial sobre su dinámica. Los resultados muestran cómo las variaciones en la frecuencia y la rigidez influyen en su comportamiento. Además, se destacan los rangos angulares en los que el péndulo se mantiene cerca de su posición vertical, lo que es crucial para la comprensión de su estabilidad.

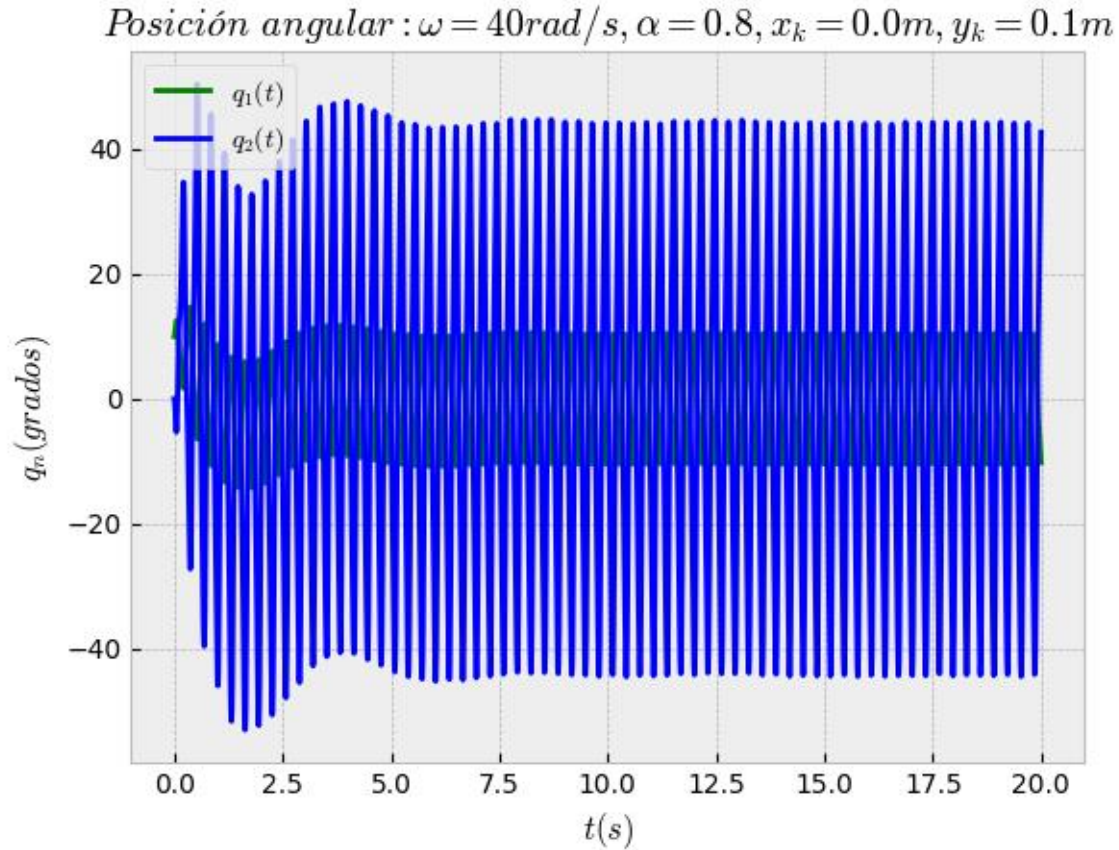


Figura 4.28. Posición angular del péndulo de dos grados de libertad para $\alpha = 0.8$ y $\omega = 40\text{rad/s}$, para el caso de una oscilación vertical en la base del péndulo de dos grados de libertad.

Ahora, cuando la base del péndulo experimenta oscilaciones exclusivamente horizontales, representadas por la función $x(t) = d_1 \cos(\omega t)$ con $d_1 = 0.1\text{m}$, es posible analizar el comportamiento del péndulo en el plano x-y utilizando la Figura 4.33. Este análisis se enfoca en casos distintos, específicamente, al igual que en el análisis al péndulo sometido a oscilaciones verticales, considerando una frecuencia de $\omega = 40\text{ rad/s}$ y una rigidez de $\alpha = 0.8$.

Dichos parámetros definen un escenario que se refleja en la curva de tonalidad verde en la Figura 4.29. Al estudiar esta curva, se puede notar cómo la variación de estos parámetros influye en el comportamiento del sistema. Para este caso, ahora se destacan los casos con menor rigidez ($\alpha = 0.0.2$ y 0.4) ya que estas, dentro de un intervalo específico de entre 0 y 40 rad/s, demuestran una eficiente gestión de la energía total promedio, pero no en cuanto a mantener el péndulo cercano a su posición vertical (0,0).

Es fundamental observar que, tal como se mencionó previamente, el caso representado en la Figura 4.30 aborda un punto límite en términos de la posición angular. Este aspecto es visualizado con detalle en la Figura 4.30, donde se presentan los límites angulares de los segmentos: $60^\circ \leq q_1 \leq 70^\circ$ y $70^\circ \leq q_2 \leq 105^\circ$.

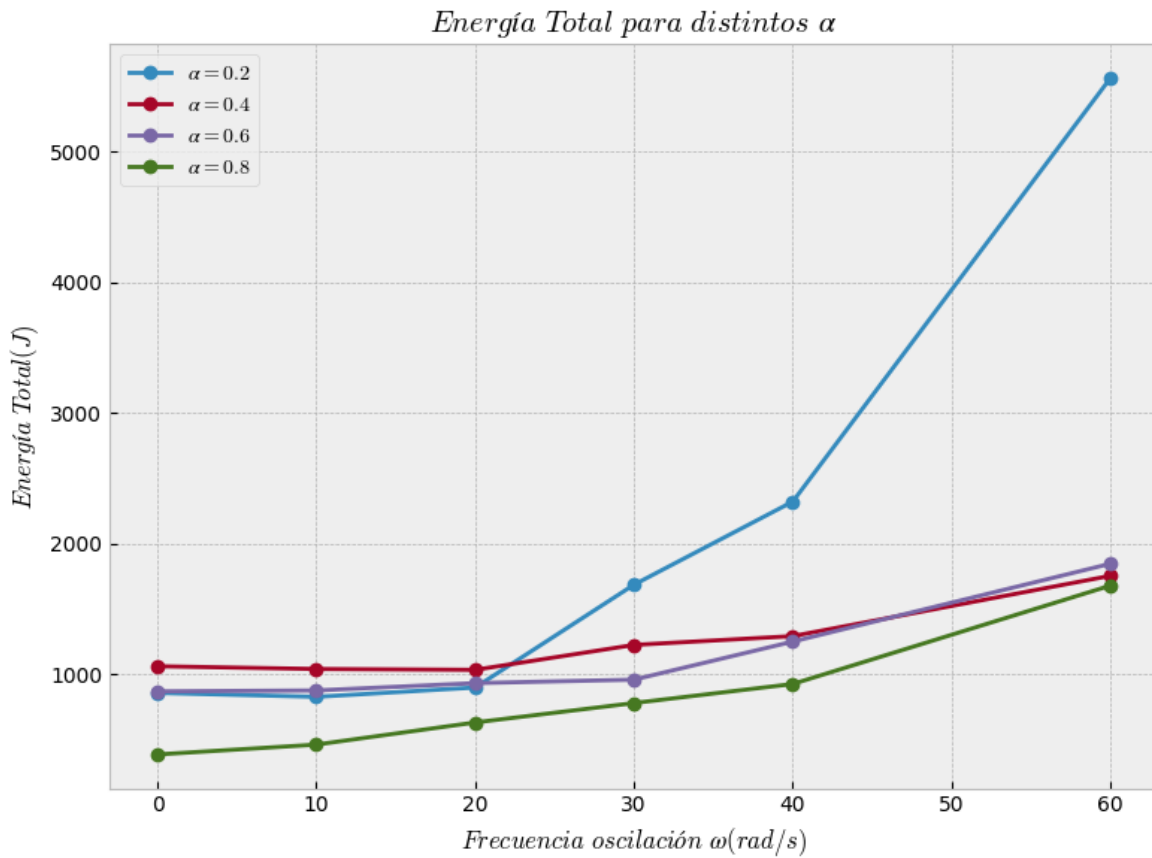


Figura 4.29. Energía total de un péndulo de dos grados de libertad sometido a $x(t) = d_1 \cos(\omega t)$ con $d_1 = 0.1m$ y diferentes valores de frecuencia (ω) y de rigidez (α).

Otros casos interesantes que surgen a partir de analizar las curvas mostradas en la Figura 4.29, son por ejemplo, el caso de la curva verde ($\alpha = 0.8$) donde, conforme se aumenta el valor de la frecuencia, el sistema cada vez se saldrá más de su zona de estabilidad, esto se puede observar en la Figura 4.31, donde el intervalo de la posición angular se altera considerablemente.

A su vez si ahora, se mantiene la frecuencia de oscilación de $\omega = 60 \text{ rad/s}$, pero se modifica la rigidez a $\alpha = 0.2$, entonces según la curva azul de la Figura 4.29, el sistema requerirá de una gran cantidad de energía elástica para mantener el péndulo de dos grados de libertad dentro de los límites de estabilidad. El comportamiento de la posición angular para este caso se muestra en la Figura 4.32.

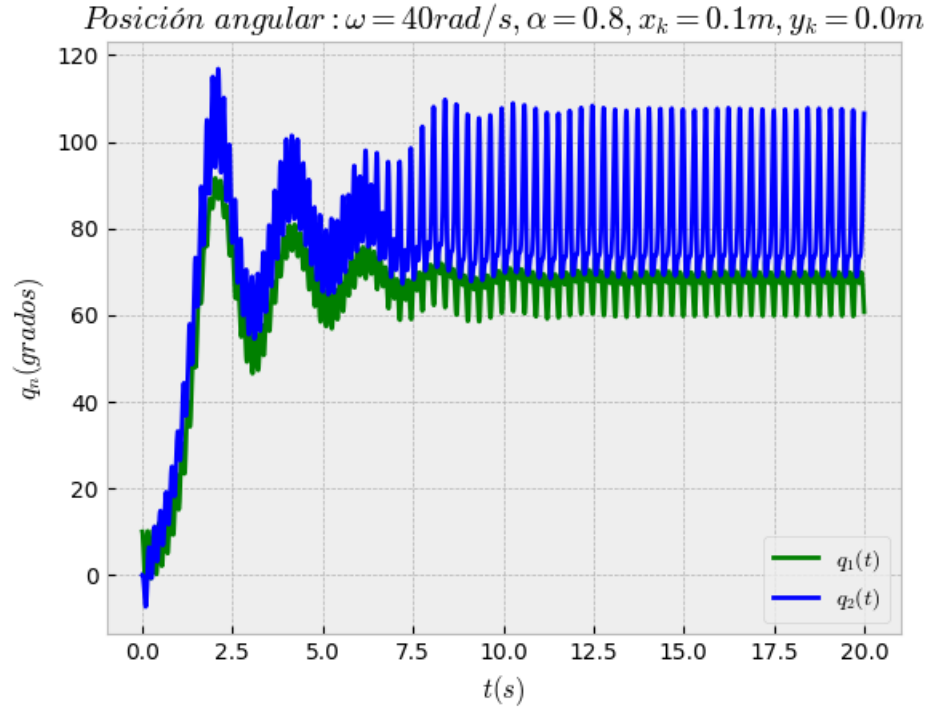


Figura 4.30. Posición angular del péndulo de dos grados de libertad para $\alpha = 0.8$ y $\omega = 40\text{rad/s}$, para el caso de una oscilación horizontal en la base del péndulo de dos grados de libertad.

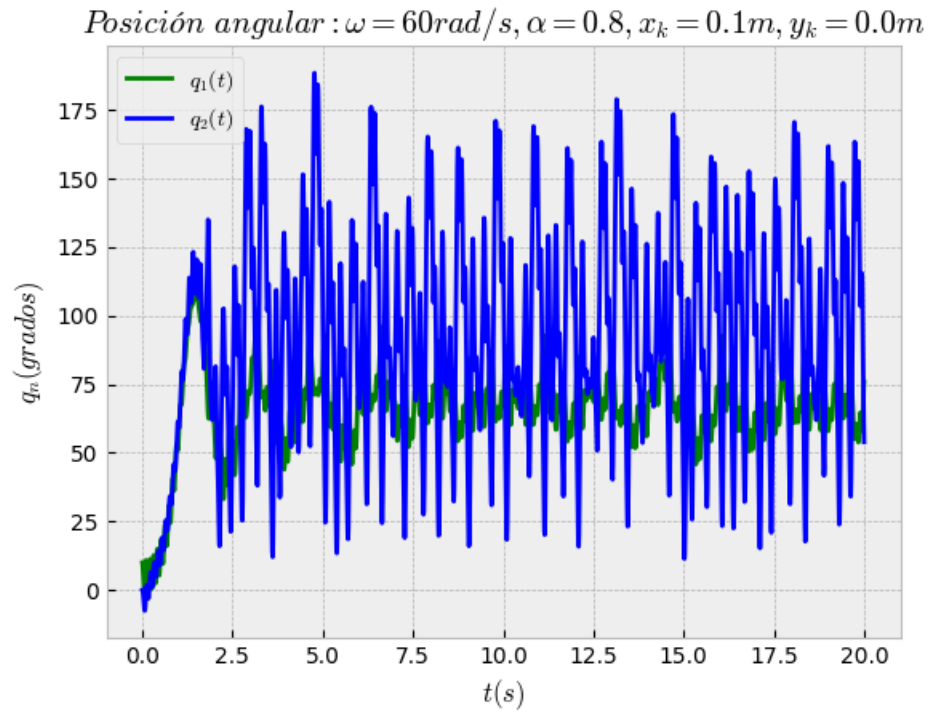


Figura 4.31. Posición angular del péndulo de dos grados de libertad para $\alpha = 0.8$ y $\omega = 60\text{rad/s}$, para el caso de una oscilación horizontal en la base del péndulo de dos grados de libertad.

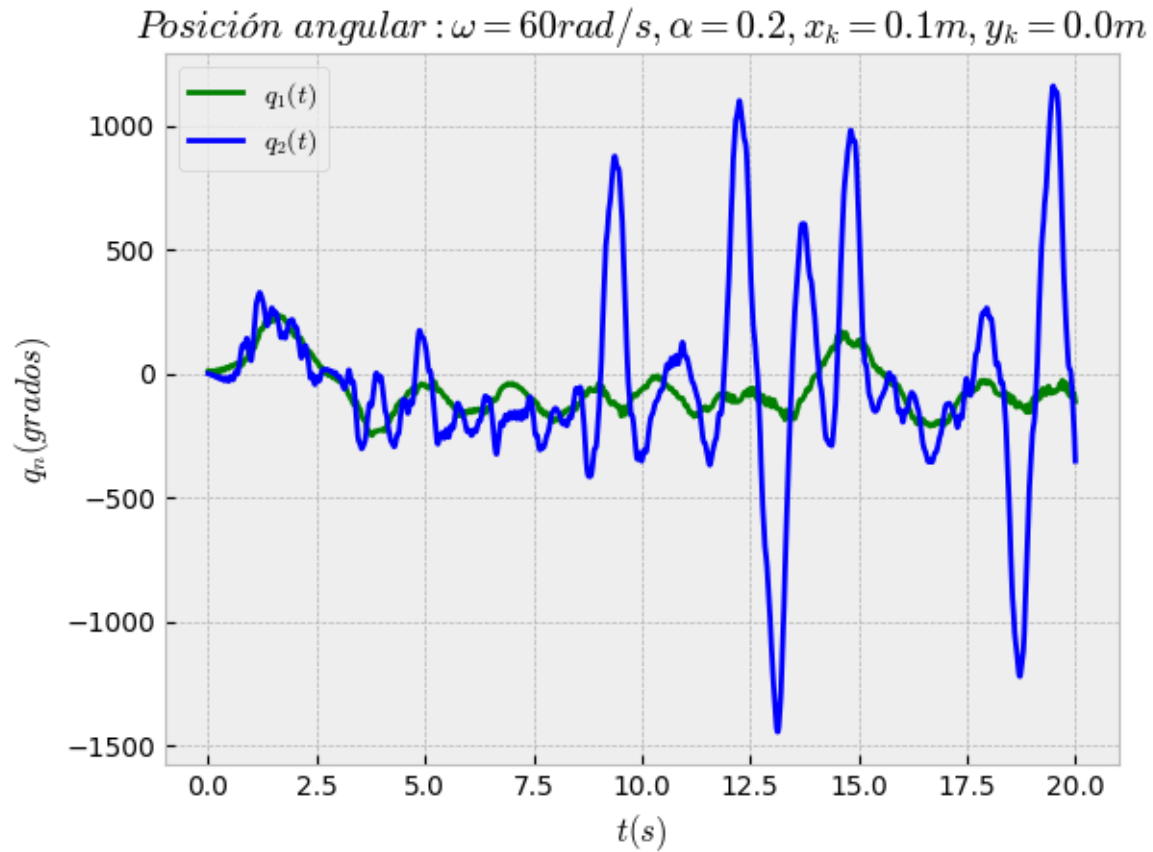


Figura 4.32. Posición angular del péndulo de dos grados de libertad para $\alpha = 0.8$ y $\omega = 40\text{rad/s}$, para el caso de una oscilación horizontal en la base del péndulo de dos grados de libertad.

En resumen, el examen del péndulo bajo oscilaciones verticales proporciona información crucial sobre su dinámica. La variación en la frecuencia y rigidez ofrece perspectivas enriquecedoras en cuanto a su comportamiento. Los rangos angulares que mantienen el péndulo cerca de la posición vertical demuestran su relevancia para la estabilidad general del sistema.

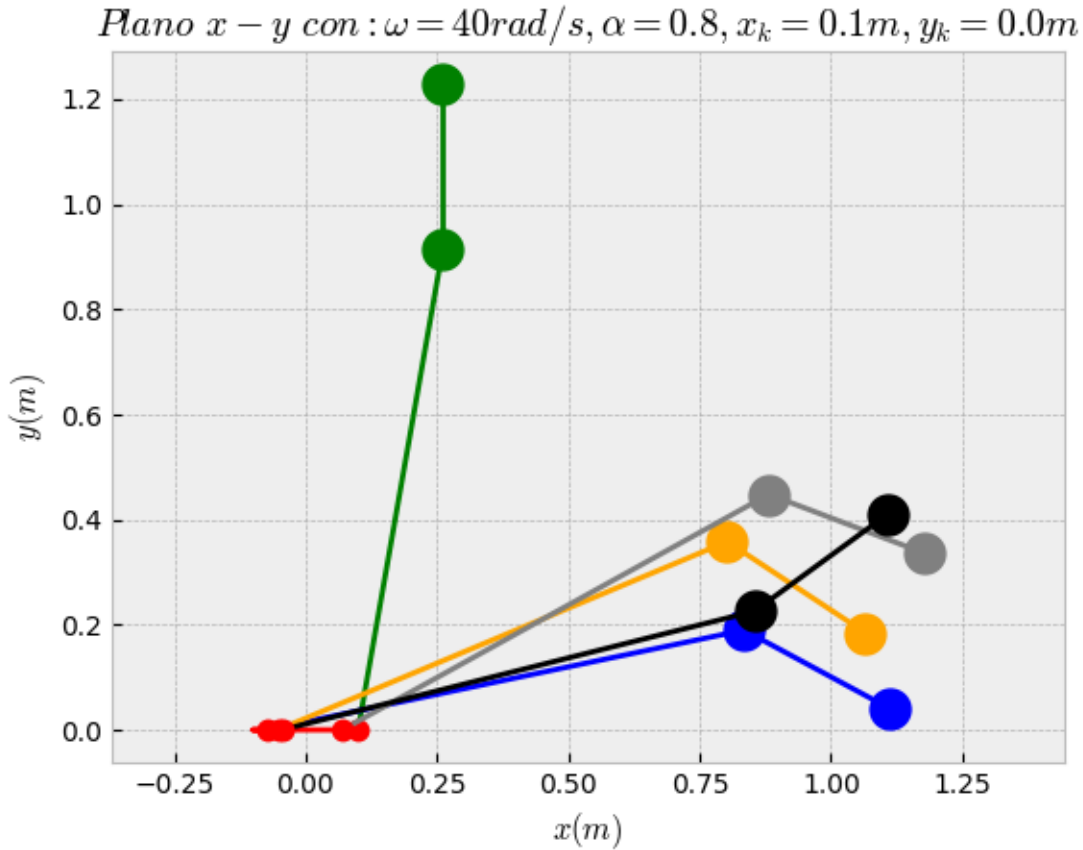


Figura 4.33. Posición del péndulo de dos grados de libertad en el plano x-y para $\alpha = 0.8$ y $\omega = 40 \text{ rad/s}$ con $x(t) = d_1 \cos(\omega t)$ y $y(t) = 0$.

Y por último se muestran las gráficas de energía total promedio para el caso en donde se tienen ambas oscilaciones.

Cuando la base del péndulo se somete a la combinación de oscilaciones verticales y horizontales, se desencadena un escenario dinámico similar a los que se han ido presentando. Este fenómeno, caracterizado por las funciones $x(t) = d_1 \cos(\omega t)$, para la horizontal y $y(t) = h_1 \cos(\omega t)$ para el caso vertical.

La segunda aporta una dimensión completamente nueva al comportamiento del péndulo en el plano x-y. Para ilustrar este efecto, consideremos el caso en que la frecuencia de oscilación es $\omega = 40 \text{ rad/s}$ con $\alpha = 0.8$. Dicho comportamiento en el plano x-y se puede observar en la Figura 4.34.

El análisis correspondiente de la energía elástica total para este caso con oscilaciones horizontales y verticales aplicadas a la base del péndulo se realiza a continuación.

En la Figura 4.36 se pueden observar 4 casos de relación energía total vs frecuencia de oscilación, los 4 casos asemejan su comportamiento en el intervalo de 0 a 20 rad/s, posteriormente en el caso con menor rigidez ($\alpha = 0.2$) la energía comienza a mostrar un aumento con pendiente significativamente grande.

Los siguientes tres casos se mantienen similares, pero ahora, a diferencia de los casos anteriores, a consideración de un análisis visual, se puede determinar que el caso de $\alpha = 0.4$, presenta un mejor comportamiento que los casos restantes, esto debido a que no muestra un aumento significativo sino hasta pasar de los 40rad/s, y en los casos de $\alpha = 0.6$ y $\alpha = 0.8$, muestran un crecimiento, no muy grande, pero lo muestran desde la frecuencia de 30rad/s.

Este análisis revela un patrón peculiar a medida que la frecuencia de oscilación se incrementa, el sistema se volverá más inestable y como consecuencia se incrementará la energía total, por lo que para este caso en particular se recomendaría solo aplicar frecuencias por debajo de los 30 rad/s para obtener un valor óptimo en cuanto a posición angular como energía total.

Es importante destacar que la Figura 4.36 es para el caso específico donde $h_1 = d_1 = 0.1m$ estos valores se escogieron debido a que en los análisis energéticos individuales estos valores presentaron comportamientos cercanos a lo deseado, además de que es con lo que se ha estado trabajando desde el análisis de estabilidad y promediación en el capítulo 3 por lo que para otros valores de amplitud esta gráfica puede variar significativamente.

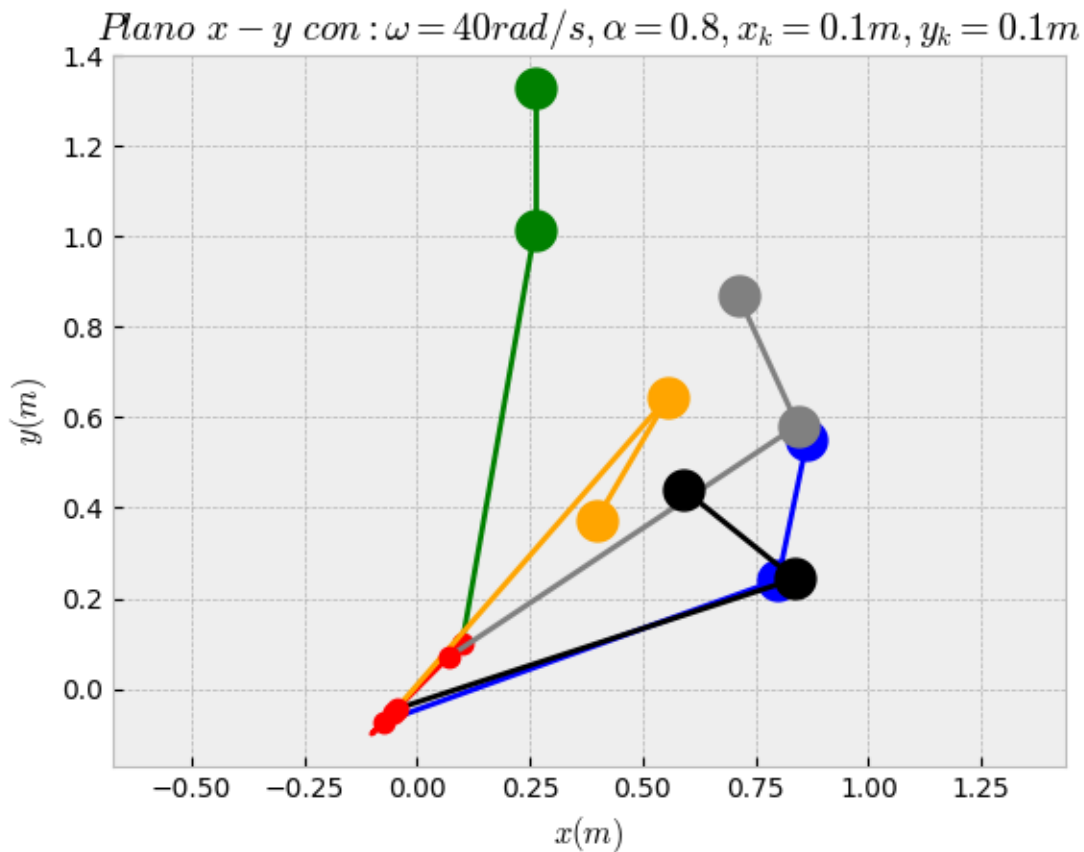


Figura 4.34. Posición del péndulo de dos grados de libertad en el plano $x-y$ para $\alpha = 0.8$ y $\omega = 40\text{rad/s}$ con $x(t) = d_1 \cos(\omega t)$ y $y(t) = h_1 \cos(\omega t)$.

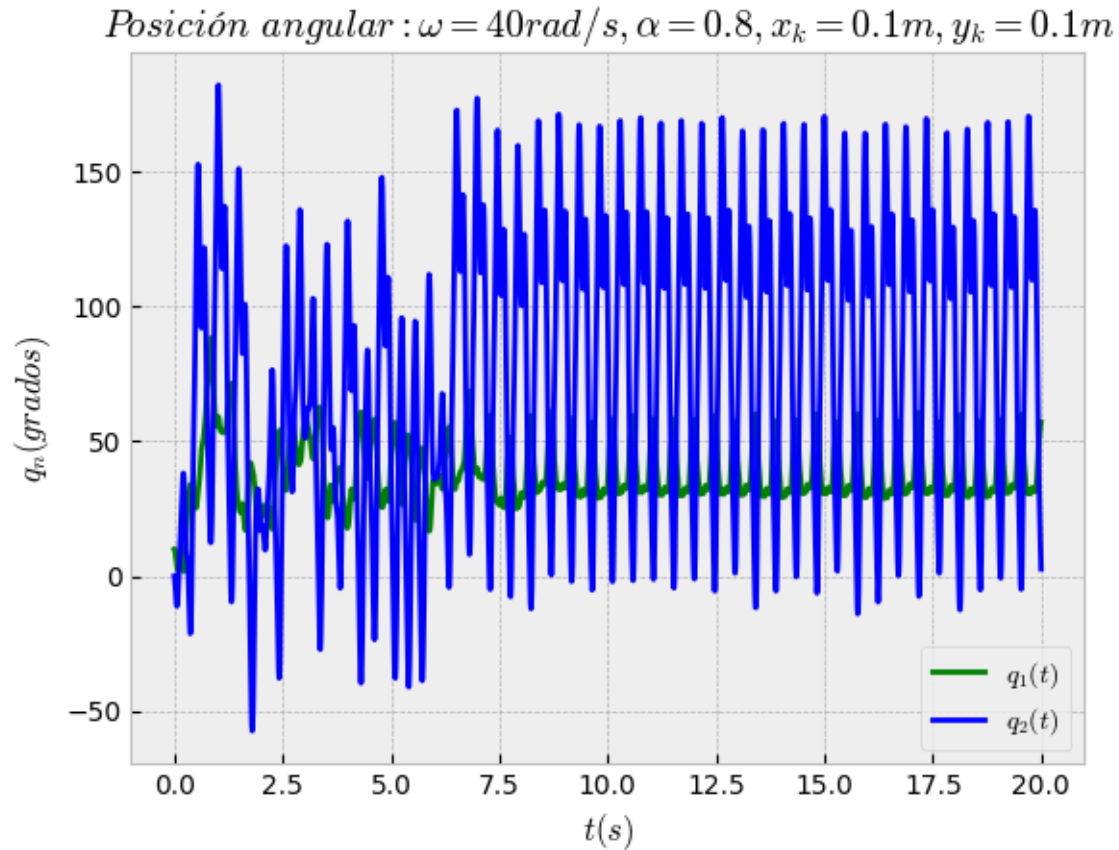


Figura 4.35. Posición angular del péndulo de dos grados de libertad para $\alpha = 0.8$ y $\omega = 40\text{rad/s}$, para el caso donde la base del péndulo de dos grados de libertad está sujeta ambas oscilaciones (vertical y horizontal).

Con relación a posición angular, como se menciona previamente, el caso representado en la Figura 4.27 se encuentra en un límite específico. Esta situación cobra mayor claridad en la Figura 4.28, donde se establecen los ángulos límite de los segmentos: $-10^\circ \leq q_1 \leq 10^\circ$ y $-40^\circ \leq q_2 \leq 40^\circ$. Estos valores, estrechamente alineados con la posición vertical, subrayan la importancia de mantener una posición estable en el sistema.

No obstante, en este contexto multifacético, otro caso llamativo merece atención y se presenta en la Figura 4.26 en forma de una curva de color morado. Esta curva exhibe un comportamiento similar al de la curva verde ($\alpha = 0.8$), lo que sugiere una consistencia en la respuesta del sistema a la combinación de oscilaciones verticales y horizontales.

En resumen, la incorporación de oscilaciones verticales y horizontales a la base del péndulo genera un panorama dinámico de gran complejidad. Esta dualidad de movimientos aporta una dimensión adicional a su comportamiento en el plano x-y, creando patrones de movimiento que desafían la intuición. Mediante la variación de factores como la frecuencia y la rigidez, se puede explorar una gama de comportamientos intrigantes que enriquecen nuestra comprensión de la dinámica de este sistema.

Cuando la base del péndulo se ve afectada solamente por oscilaciones verticales, las cuales están definidas por la función $y(t) = h_1 \cos(\omega t)$ con $h_1 = 0.1m$, se desencadena un interesante comportamiento en el plano x-y. Esta dinámica puede ser visualizada a través de la Figura 4.27, específicamente cuando se considera una frecuencia de oscilación $\omega = 40 \text{ rad/s}$ y una constante de rigidez $\alpha = 0.8$.

Este caso particular se refleja con claridad en la curva de color verde que se exhibe en la Figura 4.26. En dicha representación gráfica, es posible notar cómo la mencionada curva verde ($\alpha = 0.8$) presenta un patrón decreciente al aumentar la frecuencia de oscilación. Uno de los aspectos más notorios es el intervalo comprendido entre 10 y 30 rad/s, ya que durante este tramo se manifiesta un rendimiento sobresaliente en términos de la energía total promedio requerida para mantener el péndulo en proximidades de su posición vertical (0,0).

Es pertinente recordar que, como se señaló en párrafos anteriores, el caso retratado en la Figura 4.27 aborda un punto límite con relación a la posición angular. Este aspecto cobra mayor claridad en la Figura 4.28, donde se presentan con precisión los ángulos límite de los segmentos: $-10^\circ \leq q_1 \leq 10^\circ$ y $-40^\circ \leq q_2 \leq 40^\circ$. Estos valores se mantienen en cercanía a la posición vertical, lo que subraya la relevancia de la estabilidad en este contexto.

Otra situación destacable y que se representa en la Figura 4.26 es la curva de color morado, la cual exhibe un patrón de comportamiento similar al de la curva verde ($\alpha = 0.8$).

Resumiendo, al considerar oscilaciones verticales exclusivas en la base del péndulo, se desencadena una serie de patrones y dinámicas de gran interés. La variación en la frecuencia y rigidez del sistema ofrece una visión más detallada de cómo interactúan estos factores para influir en el comportamiento general. Además, la representación gráfica de los ángulos límite y la relación con la posición vertical subrayan la importancia de la estabilidad en esta configuración.

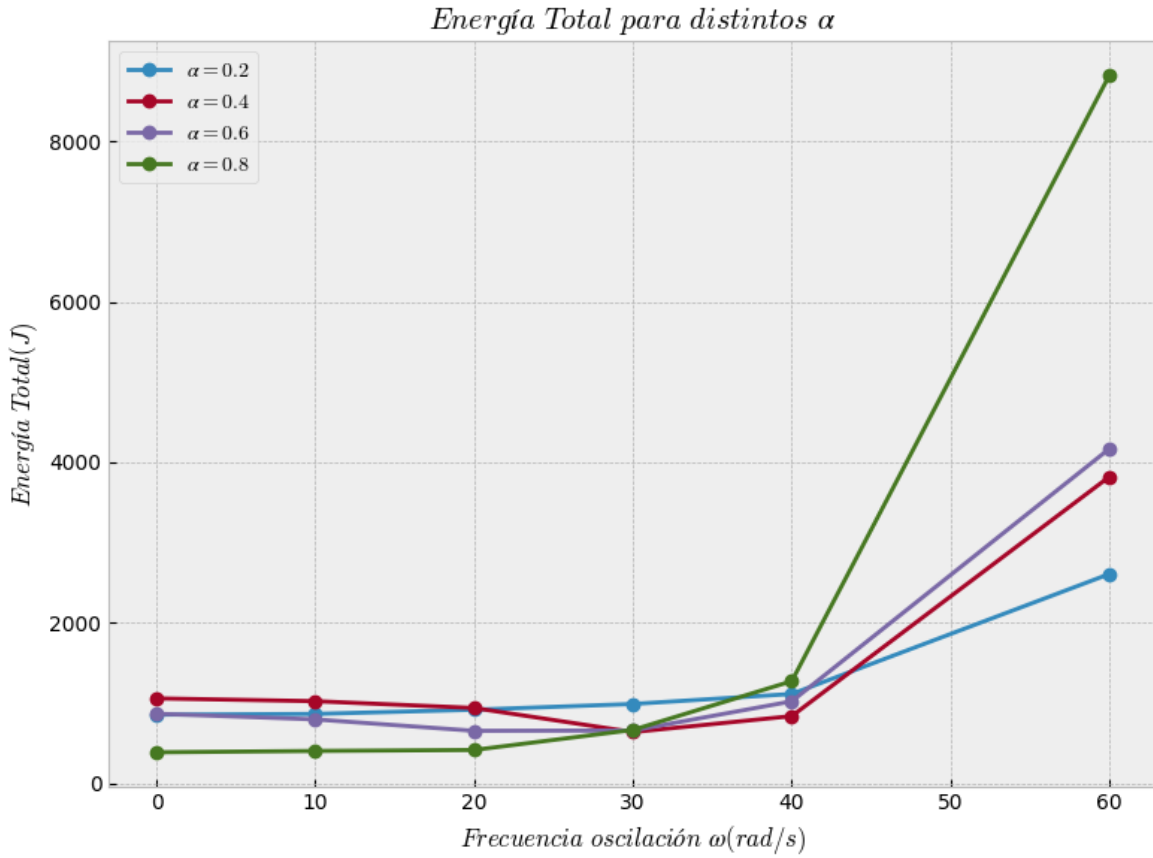


Figura 4.36. Energía total de un péndulo de dos grados de libertad sometido a $y(t) = h_1 \cos(\omega t)$ con $h_1 = 0.1m$ y $d(t) = d_1 \cos(\omega t)$ con $d_1 = 0.1m$ con diferentes valores de frecuencia (ω) y de rigidez (α).

4.6. Conclusión del capítulo

En resumen, este capítulo ha validado numéricamente los modelos de péndulos de un grado de libertad y dos grados de libertad a través de simulaciones computacionales. Se ha demostrado la capacidad de nuestros modelos para capturar y predecir el comportamiento de los péndulos sometidos a diferentes condiciones de oscilación en la base y como es que estos influyen en el sistema, por lo que estos resultados proporcionan una base sólida para investigaciones posteriores y amplían nuestro conocimiento cómo estas oscilaciones en la base y variaciones en los parámetros afectan el comportamiento dinámico de estos sistemas.

Estos resultados han demostrado que existen condiciones que hacen que ambos tipos de péndulos se mantenga en posición vertical. Al variar la dirección de las oscilaciones en la base, ya sea horizontal, vertical o combinada, se han observado cambios significativos en los patrones de movimiento y las trayectorias de los péndulos. Esto respalda la utilidad y la efectividad de los modelos matemáticos empleados en nuestras simulaciones.

Además, se ha investigado el efecto de variar los parámetros de entrada, como la frecuencia de las oscilaciones en la base y la constante de rigidez de los eslabones del péndulo. Estos cambios han revelado relaciones complejas entre los parámetros y el comportamiento resultante de los péndulos.

Este trabajo de tesis proporciona información valiosa para comprender cómo diferentes factores afectan la respuesta dinámica de los sistemas de péndulos de uno y dos grados de libertad.

Además, hemos investigado el impacto energético al variar los parámetros de frecuencia de las oscilaciones en la base y la constante de rigidez de los eslabones en los péndulos. Ya que las simulaciones han revelado la relación entre los parámetros de rigidez y la entrada oscilatoria del sistema con el comportamiento dinámico resultante. Esto proporcionan una comprensión más profunda de como los cambios en los parámetros afectan la energía necesaria para obtener una salida estable de los péndulos, lo cual es relevante para el estudio de este tipo de sistemas.

Sin embargo, es importante destacar que, si bien estas simulaciones han brindado resultados favorables en cuanto a obtener las condiciones de frecuencia y rigidez que mantienen al péndulo de uno y dos grados de libertad en su posición de equilibrio, existen limitaciones en nuestros modelos y suposiciones. Algunas de estas limitaciones incluyen que algunas de las frecuencias aquí encontradas no son realizables para el cuerpo humano, así como también algunas de las trayectorias implementadas no son tan exactas a lo que en realidad son las trayectorias del caminado humano. Para futuras investigaciones, se recomienda considerar estos factores adicionales y refinar los modelos para una representación aún más precisa de los fenómenos observados.

Además, para trabajos posteriores, se recomienda enfocarse en la comparación de nuestros resultados numéricos con experimentos reales, con el objetivo de validar aún más la precisión de nuestros modelos y profundizar en la comprensión de los fenómenos físicos involucrados en los péndulos. Además, explorar otras posibles aplicaciones de nuestros modelos en campos como la ingeniería estructural, la mecánica de materiales y otros campos relacionados.

Es importante tener en cuenta que las simulaciones mostradas en este documento se basan en ciertas suposiciones y simplificaciones, como la ausencia de fuerzas de amortiguamiento y la consideración de condiciones ideales. Para investigaciones futuras, se recomienda incorporar factores adicionales, como la resistencia del aire y otros efectos de amortiguamiento, para obtener una representación más realista de los sistemas de péndulos.

En resumen, a través de la validación numérica de los péndulos de uno y dos grados de libertad con simulaciones que incluyen oscilaciones en la base, se ha demostrado la capacidad de nuestros modelos para predecir el comportamiento dinámico de estos sistemas. Estos hallazgos contribuyen al conocimiento existente sobre la dinámica de los péndulos y ofrecen información valiosa para aplicaciones en campos como la ingeniería estructural, la robótica y la física experimental.

Conclusiones

En este trabajo de tesis se hace mención del procedimiento para obtener los términos de los que depende la frecuencia natural del péndulo, esto como punto de partida, pero se buscó determinar los parámetros de los cuales dependa la frecuencia natural del péndulo de Kapitza, tomando consideraciones como las constantes de rigidez relacionada con la gravedad, la rigidez de Kapitza, y la rigidez propia de las juntas.

Además, con base en lo anterior se agregó una comprobación por medio de una simulación para cada uno de los casos mencionados anteriormente. El control vibratorio es el tipo de control más utilizado en la estrategia de control de lazo abierto, ya que es una muy buena alternativa a la estabilización por retroalimentación, ya que este no necesita de medir los estados del sistema, además de que se ha visto en muchas aplicaciones importantes, como, por ejemplo, en la estabilización de vigas, en plasmas, en reactores químicos, etcétera, por lo que puede resultar muy bien visto como una opción de análisis de sistemas no lineales

En el marco del presente trabajo de tesis, se ha llevado a cabo un exhaustivo análisis del sistema de péndulo de dos grados de libertad, explorando sus variados aspectos dinámicos y comportamientos energéticos. Sin embargo, a medida que profundizamos en los resultados y los parámetros involucrados, se vuelve claro que este sistema en particular no es realizable para el cuerpo humano en términos de las frecuencias, amplitudes verticales y horizontales que han emergido a lo largo de esta investigación.

En lo que respecta al análisis del péndulo de un grado de libertad, un estudio exhaustivo del comportamiento de su posición angular bajo distintas condiciones de entrada, es decir, diversas formas de oscilación en su punto de pivote, ha arrojado resultados interesantes.

Se ha encontrado que, al considerar el caso de un movimiento puramente vertical, el péndulo exhibe la capacidad de converger hacia valores angulares que dentro de la literatura se han establecido como estables. Además, esta convergencia se da a una frecuencia que es relativamente realizable dentro del rango de movimientos típicos en el caminar de un cuerpo humano.

Sin embargo, las dificultades emergen cuando se expande el análisis hacia otros tipos de movimientos en el punto pivote del péndulo. Al explorar más a fondo la estabilidad del sistema, se destaca un hallazgo crítico: para que el sistema se mantenga estable, la amplitud de la función asociada al movimiento vertical debe superar a la amplitud de la función relacionada con el movimiento horizontal. Esta condición se vuelve problemática cuando se trata de la aplicabilidad de estos resultados en el contexto de los movimientos naturales y biomecánicos del cuerpo humano.

Es fundamental subrayar que ésta última condición, aunque da indicios sobre los principios de estabilidad en un sistema de péndulo, enfrenta una limitación significativa al considerar la biomecánica humana. La premisa de que la amplitud del movimiento vertical debe ser mayor que la del movimiento horizontal presenta una discrepancia crucial con los patrones de movimiento y oscilación inherentes al cuerpo humano. En el contexto de la locomoción humana, el rango de movimiento vertical es naturalmente más restringido que el horizontal, dado que los sistemas musculoesqueléticos están adaptados para este tipo de movilidad.

Esta discrepancia es un recordatorio importante de cómo los principios físicos, aunque puedan ser fundamentales en la teoría, a menudo deben ser interpretados y aplicados considerando las complejidades y limitaciones del cuerpo humano. Aunque el péndulo de un grado de libertad puede servir como un modelo valioso para comprender ciertos conceptos de la física, la relación entre los movimientos verticales y horizontales debe abordarse con una perspectiva más amplia, considerando las capacidades y restricciones biológicas de nuestro sistema locomotor.

En resumen, este análisis detallado del péndulo de un grado de libertad ha ilustrado cómo los resultados teóricos pueden chocar con las realidades biomecánicas. Aunque el sistema pueda comportarse de manera predecible en un entorno puramente teórico, su aplicabilidad a los movimientos humanos reales exige una evaluación más profunda y contextualizada de las implicaciones físicas y biológicas.

En cuanto al péndulo de dos grados de libertad, con sus eslabones interconectados, representa un modelo intrigante y desafiante de estudio en el ámbito de la mecánica y la dinámica. Sin embargo, al evaluar los valores específicos de frecuencia, amplitud vertical y amplitud horizontal que han sido determinados, surge una conclusión ineludible: este sistema excede los rangos y limitaciones de las capacidades humanas en términos de movimiento y control.

En primer lugar, se ha constatado que las frecuencias de oscilación requeridas para mantener la estabilidad y el funcionamiento coherente del péndulo de dos grados de libertad superan con creces los umbrales biológicos. Las frecuencias en cuestión, tal como se han derivado en este trabajo, se sitúan en un rango que va más allá de las respuestas fisiológicas del cuerpo humano. La capacidad del ser humano para mantener ritmos tan acelerados de movimiento, como los necesarios para el sistema de péndulo analizado, resulta limitada por las restricciones biomecánicas y neurosensoriales del organismo.

Asimismo, las amplitudes verticales y horizontales que surgen como parte integral de las soluciones del sistema también suscitan cuestiones relacionadas con su aplicabilidad al cuerpo humano. La magnitud de estas amplitudes, que puede ser considerable en función de las condiciones específicas, excede los rangos de movimiento que los sistemas musculoesqueléticos humanos pueden acomodar sin incurrir en riesgos para la salud y el bienestar. Los límites anatómicos y las capacidades físicas restringen las posibilidades de ejecutar movimientos con tales amplitudes sin poner en peligro la integridad física.

En última instancia, a través de un riguroso análisis y cálculos basados en las propiedades del sistema de péndulo de dos grados de libertad, se ha evidenciado que los valores de frecuencia y amplitud involucrados en sus oscilaciones exceden las posibilidades humanas en términos de movimiento y control. Aunque este modelo puede servir como una herramienta invaluable para comprender los principios de la dinámica, la física y la mecánica, se ha demostrado que su aplicación directa al cuerpo humano no es viable dentro de las limitaciones del sistema biológico y fisiológico.

Este trabajo contribuye a una apreciación más profunda de cómo las teorías y modelos de la física pueden contrastarse con las capacidades reales del cuerpo humano. Si bien el péndulo de dos grados de libertad puede ser una maravilla de la teoría, también recuerda la importancia de considerar las limitaciones biológicas en la aplicación de dichos conceptos en el mundo real.

La interacción entre los parámetros de rigidez y frecuencia revela un panorama interesante en el análisis de la energía elástica. Estos parámetros son clave en la evolución de la energía elástica, influenciando tanto su incremento como su disminución según el tipo de oscilación: vertical, horizontal o una combinación de ambas. Además, se destaca cómo la dinámica de esta energía elástica evoluciona, influenciada por factores adicionales como la amplitud de las oscilaciones y la modificación de los valores de rigidez. Es relevante mencionar que este análisis energético debe ser complementado con parámetros suplementarios para establecer un vínculo más cercano entre el modelo de energía y el gasto energético real del cuerpo humano durante el proceso de caminar.

En resumen, este trabajo de tesis se centra en la estabilización dinámica de péndulos invertidos de uno y dos grados de libertad, destacando cómo factores físicos como la rigidez articular, el amortiguamiento y el patrón de caminado influyen en la estabilidad postural y de la marcha. Aunque el análisis por control vibratorio ha sido una herramienta valiosa, se ha identificado que los parámetros derivados de las condiciones de estabilidad del método de promediación no son viables en términos de aplicabilidad al cuerpo humano. A pesar de esto, se ha revelado que estos parámetros aún afectan la energía elástica necesaria para mantener el péndulo en posición invertida o cerca del origen. Este vínculo entre movimiento y costo energético subraya la importancia de comprender cómo las oscilaciones en la base influyen en la demanda energética del cuerpo humano.

Para avanzar, es esencial un análisis más profundo de las trayectorias de las articulaciones del cuerpo humano y la exploración de enfoques complementarios para evaluar la influencia de las oscilaciones. Aunque este trabajo ha proporcionado una apreciación profunda de cómo la teoría y la práctica pueden divergir, las conclusiones establecen una base sólida para investigaciones futuras que exploren las complejas interacciones entre movimiento, estabilidad y energía en el contexto de la biomecánica humana. En última instancia, este estudio contribuye a una apreciación más completa de cómo los principios físicos pueden aplicarse en el mundo real, incluso en presencia de desafíos biológicos y fisiológicos.

Referencias

- [1] Bullo, F., 2002. "Averaging and vibrational control of mechanical systems". SIAM Journal on Control and Optimization 41(2), pp.542– 562.
- [2] Butikov, E., 2011. "An improved criterion for kapitza's pendulum stability". Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical v.44, p.295202.
- [3] Hong, K., Lee, K., Lee, K., 1998. "Vibrational control of underactuated mechanical systems: control design through the averaging analysis". American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No.98CH36207).
- [4] Kapitza, P., 1951. "Pendulum with an oscillating pivot". Sov.phys.Uspekhi 44, pp.7–20.
- [5] S Khalil, H., 2002. "Nonlinear systems" 3rd ed., Prentice Hall.
- [6] Meerkov, S., 1980. "Principle of vibrational control: Theory and applications". IEEE Transactions on Automatic Control. 25(4), 755– 762.
- [7] Piovesan, D., Kennett, C., Chavez-Romero, R., Panza, M., Cardenas, A., 2015. "Stiffness boundary conditions for critical damping in balance recovery". doi:10.1115/IMECE2015-50564.
- [8] Quintanilla, J., Pérez, M., Balderas, R., González, A., Cardenas, A., Piovesan, D., 2021. "Inertial stabilization of upright posture while walking" , pp.849–852.
- [9] Stephenson, A., 1908. "On a new type of dynamical stability". Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society 52, pp.1–10.
- [10] Tahmasian, S., Jafari, F., Woolsey, C., 2016. "On vibrational stabilization of a horizontal pendulum". Proceedings of the ASME 2016 Dynamic Systems and Control Conference 2.
- [11] A. D. Kuo, J. M. Donelan, and A. Ruina, "Energetic consequences of walking like an inverted pendulum: step-to-step transitions," Exercise and sport sciences reviews, vol. 33, no. 2, pp. 88–97, 2005.
- [12] J. Carpentier, M. Benallegue, and J.-P. Laumond, "On the centre of mass motion in human walking," International Journal of Automation and Computing, vol. 14, no. 5, pp. 542–551, 2017.
- [13] D. A. Winter, Biomechanics and motor control of human movement, 4th ed. John Wiley & Sons, Inc, 2009.
- [14] Cheng, B., & Deng, X. (2011). Translational and Rotational Damping of Flapping Flight and Its Dynamics and Stability at Hovering. IEEE Transactions on Robotics, 27(5), 849–864. doi:10.1109/tro.2011.2156170
- [15] Mat Daud, Auni. (2021). A Note on Lienard-Chipart Criteria and its Application to Epidemic Models. Mathematics and Statistics. 9. 41-45. 10.13189/ms.2021.090107..
- [16] Breniere, Y.; Do, M. When and how does steady state gait movement induced from upright posture begin? Journal of Biomechanics 1986, 19, 1035–1040. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0021-9290\(86\)90120-X](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0021-9290(86)90120-X).

- [17] R. Siegwart and I. R. Nourbakhsh, *Introduction to Autonomous Mobile Robots*. Bradford Book, 2004.
- [18] Ramachandran, R.; Nosonovsky, M. Vibro-levitation and inverted pendulum: Parametric resonance in vibrating droplets and soft materials. *Soft Matter* 2014, 10, 4633–4639. <https://doi.org/10.1039/c4sm00265b>.
- [19] Butikov, E.I. An improved criterion for Kapitza's pendulum stability. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 2011, 44. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/29/295202>.
- [20] Loram, I.D.; Lakie, M. Human balancing of an inverted pendulum: position control by small, ballistic-like, throw and catch movements. *The Journal of Physiology* 2002, 540, 1111–1124, [<https://physoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1113/jphysiol.2001.0130213> <https://doi.org/https://doi.org/10.1113/jphysiol.2001.013077>].
- [21] Acheson, D. J. (1993). A Pendulum Theorem. *Proceedings: Mathematical and Physical Sciences*, 443(1917), 239–245. <http://www.jstor.org/stable/52390>
- [22] P. G. Morasso and V. Sanguineti, "Ankle Muscle Stiffness Alone Cannot Stabilize Balance During Quiet Standing," *Journal of Neurophysiology*, vol. 88, no. 4, pp. 2157–2162, oct 2002.
- [23] I. D. Loram, M. Lakie, I. Di Giulio, and C. N. Maganaris, "The Consequences of Short-Range Stiffness and Fluctuating Muscle Activity for Proprioception of Postural Joint Rotations: The Relevance to Human Standing," *Journal of Neurophysiology*, vol. 102, no. 1, pp. 460–474, jul 2009.
- [24] A. Cerda-Lugo, A. Gonzalez, A. Cardenas, and D. Piovesan, "Modeling the neuro-mechanics of human balance when recovering from a fall: a continuous-time approach," *BioMed Eng Online*, vol. 67, no. 19, pp. doi.org/10.1186/s12 938–020–00 811–1, 2020.
- [25] R. Ramachandran and M. Nosonovsky, "Vibro-levitation and inverted pendulum: parametric resonance in vibrating droplets and soft materials." *Soft matter*, vol. 10(26), pp. 4633–9, 2014.
- [26] T. Mullin, A. Champneys, W. Fraser, J. Galan, and D. Acheson, "The 'indian wire trick' via parametric excitation: A comparison between theory and experiment," *Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 459, pp. 539–546, 03 2003.
- [27] S. M. Morton and A. J. Bastian, "Relative contributions of balance and voluntary leg-coordination deficits to cerebellar gait ataxia," *Journal of Neurophysiology*, vol. 89, no. 4, pp. 1844–1856, 2003.
- [28] L. Bianchi, D. Angelini, and F. Lacquaniti, "Individual characteristics of human walking mechanics," *Pflugers Archiv* , vol. 436, no. 3, pp. 343–356, 1998.
- [29] R. Bortoletto, E. Pagello, and D. Piovesan, "Effects of reserve actuators on optimization solutions: From muscle force to joint stiffness," in *2015 IEEE International Conference on Rehabilitation Robotics (ICORR)*, 2015, pp. 973–978.

- [30] P. Kumar, A. Kumar, and V. Racic, "Modeling of longitudinal human walking force using self-sustained oscillator," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, p. 1850080, 11 2017S. Hayati *et al.*, "The Rocky 7 rover: a Mars sciencecraft prototype," in *Proceedings of International Conference on Robotics and Automation*, 1997, vol. 3, pp. 2458–2464 vol.3.
- [31] M. Tomas-Rodriguez and S. Banks, *Linear, time-varying approximations to nonlinear dynamical systems. With applications in control and optimization*. Springer, 01 2010, vol. 400H. Hacot, S. Dubowsky, and P. Bidaud, "Analysis and Simulation of a Rocker-Bogie Exploration Rover," *Courses Lect. Cent. Mech. Sci.*, pp. 95–102, 1998.
- [32] K. Nishikawa, A. Biewener, P. Aerts, A. N. Ahn, H. Chiel, M. Daley, T. Daniel, R. Full, M. Hale, T. Hedrick, A. Lappin, T. Nichols, R. Quinn, R. Satterlie, and B. Szymik, "Neuromechanics: an integrative approach for understanding motor control." *Integrative and comparative biology*, vol. 47 1, pp. 16–54, 2007
- [33] J. Laczko, R. A. Scheidt, L. S. Simo, and D. Piovesan, "Inter-joint coordination deficits revealed in the decomposition of endpoint jerk during goal-directed arm movement after stroke," *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, vol. 25, no. 7, pp. 798–810, 2017
- [34] Ahmed. Z., Tahmasian. S., Woolsey, C. (2020). "Vibrational Control of a 2-Link Mechanism". 10.1115/DSCC2020-3257.
- [35] Levi, M. 1999 Geometry and physics of averaging with applications. *Physica D* 132, 150-164.
- [36] Vasilkov, V., Chubinsky, K. and Yakimova, K. [2007] "The Stephenson–Kapitza pendulum: Area of the attraction of the upper positions of the balance," *Technische Mechanik* 27(1), 61–66.
- [37] Cifuentes, C., Martínez, F., Romero, E. (2010). "Análisis teórico y computacional de la marcha normal y patológica: Una revisión". *Revista Med.* 18. 182. 10.18359/rmed.1311.
- [38] Ochoa, O., Mendez, E., & González, A. H. (2022). Stability Limits of an Anthropometric Kapitza's Pendulum. 2022 XXIV Robotics Mexican Congress (COMRob). <https://doi.org/10.1109/comrob57154.2022.9962260>
- [39] Lyapunov, A.M. (1892) *The General Problem of the Stability of Motion*. Kharkov Mathematical Society, Kharkov.
- [40] Bogoliubov, N., & Mitropolsky, Y. A. (1961). *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations*. Gordon & Breach.
- [41] Zajac, F. E., Neptune, R. R., & Kautz, S. A. (2003). Biomechanics and muscle coordination of human walking. *Gait & Posture*, 17(1), 1–17. doi:10.1016/s0966-6362(02)00069-3
- [42] Delisa, J.A. (1998). *Gait analysis in the science of rehabilitation*.

A. Anexos

Para el caso del péndulo de un grado de libertad la energía cinética está dada de la siguiente manera:

$$T = \frac{1}{2}(m v^2)$$

$$T = \frac{1}{2}m[(l\dot{q}_1 \cos q_1)^2 + (\dot{y}_k - l\dot{q}_1 \sin q_1)^2] \quad (0.1)$$

$$T = \frac{1}{2}m[l^2\dot{q}_1^2 + \dot{y}_k^2 - 2l\dot{q}_1\dot{y}_k \sin q_1] \quad (0.2)$$

Posteriormente la energía potencial del sistema se calcula de la siguiente manera:

$$U = mgy + \frac{1}{2}kq_1^2$$
$$U = mg(y_k + l \cos \theta) + \frac{1}{2}kq_1^2 \quad (0.3)$$

Una vez que se han determinado la energía cinética y potencial del sistema, se escribe el Lagrangiano, el cual, como se mencionó anteriormente, se describe como la diferencia entre energía cinética y potencial.

$$L = \frac{1}{2}m[l^2\dot{q}_1^2 + \dot{y}_k^2 - 2l\dot{q}_1\dot{y}_k \sin q_1] - \left[mg(y_k + l \cos q_1) + \frac{1}{2}kq_1^2 \right]$$
$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_k^2 - ml\dot{q}_1\dot{y}_k \sin q_1 - mg(y_k + l \cos q_1) - \frac{1}{2}kq_1^2 \quad (0.4)$$

Además se considera la energía de disipación la cual es calculada como:

$$D = \frac{1}{2}[b\dot{q}_1^2] \quad (0.5)$$

Empleando la metodología de Euler-Lagrange dada por la ecuación (2.2) se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = ml^2\dot{q}_1 - ml\dot{y}_k \sin q_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = ml^2 \ddot{q}_1 - ml \ddot{y}_k \sin q_1 - ml \dot{q}_1 \dot{y}_k \cos q_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -ml \dot{q}_1 \dot{y}_k \cos q_1 + mgl \sin q_1 - kq_1$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{\partial D}{\partial q_1} \\ &= ml^2 \ddot{q}_1 - ml \ddot{y}_k \sin q_1 - ml \dot{q}_1 \dot{y}_k \cos q_1 + ml \dot{q}_1 \dot{y}_k \cos q_1 - mgl \sin q_1 + kq_1 + b\dot{q}_1 \end{aligned} \quad (0.6)$$

Por lo tanto, la ecuación que describe la dinámica del péndulo invertido sometido a oscilaciones verticales en su pivote es la siguiente:

$$ml^2 \ddot{q}_1 - ml (g + \ddot{y}_k) \sin q_1 + kq_1 + b\dot{q}_1 = 0 \quad (0.7)$$

Péndulo de dos grados de libertad

Al igual que en el péndulo de un grado de libertad, se deben obtener la energía cinética y potencial del sistema, por lo que es necesario escribir el vector de posición del centro de masa de ambos segmentos del péndulo, los cuales se describen en las ecuaciones (2.21) y (2.22).

Conociendo esto, la energía cinética total del sistema está dada por la suma de la energía cinética de cada eslabón del péndulo.

$$T_{total} = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} (m_1 v_1^2)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 [(\dot{x}_k + l_1 \dot{q}_1 \cos q_1)^2 + (\dot{y}_k - l_1 \dot{q}_1 \sin q_1)^2]$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 [l_1^2 \dot{q}_1^2 + \dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + 2l_1 \dot{q}_1 \dot{x}_k \cos q_1 - 2l_1 \dot{q}_1 \dot{y}_k \sin q_1] \quad (0.8)$$

La energía cinética correspondiente al segundo eslabón del péndulo se obtiene a continuación.

$$T_2 = \frac{1}{2}(m_2 v_2^2)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2 \left[(\dot{x}_k + l_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + l_2 \dot{q}_2 \cos q_2)^2 + (\dot{y}_k - l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 - l_2 \dot{q}_2 \sin q_2)^2 \right]$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2 [l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_2^2 \dot{q}_2^2 + \dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + 2l_1 \dot{q}_1 \dot{x}_k \cos q_1 - 2l_1 \dot{q}_1 \dot{y}_k \sin q_1 + 2l_2 \dot{q}_2 \dot{x}_k \cos q_2 - 2l_2 \dot{q}_2 \dot{y}_k \sin q_2 + 2l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_1 \cos q_2 + 2l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_1 \sin q_2]$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2 [l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_2^2 \dot{q}_2^2 + \dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + 2l_1 \dot{q}_1 \dot{x}_k \cos q_1 - 2l_1 \dot{q}_1 \dot{y}_k \sin q_1 + 2l_2 \dot{q}_2 \dot{x}_k \cos q_2 - 2l_2 \dot{q}_2 \dot{y}_k \sin q_2 + 2l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2)] \quad (0.9)$$

Por lo tanto, la energía cinética total del sistema es:

$$T_{total} = T_1 + T_2$$

$$T_{total} = \left[\frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_k^2 + \frac{1}{2}m_1 \dot{y}_k^2 + m_1 l_1 \dot{q}_1 \dot{x}_k \cos q_1 - m_1 l_1 \dot{q}_1 \dot{y}_k \sin q_1 \right] + \left[\frac{1}{2}m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{x}_k^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{y}_k^2 + m_2 l_1 \dot{q}_1 \dot{x}_k \cos q_1 - m_2 l_1 \dot{q}_1 \dot{y}_k \sin q_1 + m_2 l_2 \dot{q}_2 \dot{x}_k \cos q_2 - m_2 l_2 \dot{q}_2 \dot{y}_k \sin q_2 + m_2 m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) \right]$$

$$T_{total} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_k^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}_k^2 + (m_1 + m_2)l_1 \dot{q}_1 \dot{x}_k \cos q_1 - (m_1 + m_2)l_1 \dot{q}_1 \dot{y}_k \sin q_1 + m_2 l_2 \dot{q}_2 \dot{x}_k \cos q_2 - m_2 l_2 \dot{q}_2 \dot{y}_k \sin q_2 + m_2 m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) \quad (0.10)$$

En cuanto a la energía potencial del sistema, el procedimiento para calcularla es el siguiente:

$$U_{total} = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \frac{1}{2}(k_1 q_1^2 + k_2 q_2^2)$$

Donde, k_i corresponde a los elementos elásticos.

$$U_{total} = m_1 g (y_k + l_1 \cos q_1) + m_2 g (y_k + l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2) + \frac{1}{2}(k_1 q_1^2 + k_2 q_2^2) \quad (0.11)$$

Entonces el Lagrangiano, definido como la diferencia entre energía cinética y potencial, está dado por:

$$L = T_{total} - U_{total}$$

$$L = \left[\frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_k^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}_k^2 \right. \\ \left. + (m_1 + m_2)l_1 \dot{q}_1 \dot{x}_k \cos q_1 - (m_1 + m_2)l_1 \dot{q}_1 \dot{y}_k \sin q_1 + m_2 l_2 \dot{q}_2 \dot{x}_k \cos q_2 \right. \\ \left. - m_2 l_2 \dot{q}_2 \dot{y}_k \sin q_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) \right] \quad (0.12) \\ - \left[m_1 g(y_k + l_1 \cos q_1) + m_2 g(y_k + l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(k_1 q_1^2 + k_2 q_2^2) \right]$$

Considerando la energía de disipación en ambos segmentos, se tiene lo siguiente:

$$D = \frac{1}{2}[b_1 \dot{q}_1^2 + b_2 \dot{q}_2^2] \quad (0.13)$$

Empleando la metodología de Euler-Lagrange dada por la ecuación (2.2) **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** y asumiendo que no existen fuerzas actuando en el sistema, se obtiene lo siguiente para la coordenada generalizada q_1

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{\partial D}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{q}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) \dot{q}_2 + (m_1 + m_2)l_1 \dot{x}_k \cos q_1 \\ - (m_1 + m_2)l_1 \dot{y}_k \sin q_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) \ddot{q}_2 + (m_1 + m_2)l_1 \ddot{x}_k \cos q_1 \\ - (m_1 + m_2)l_1 \ddot{y}_k \sin q_1 - (m_1 + m_2)l_1 \dot{q}_1 \dot{x}_k \sin q_1 - (m_1 + m_2)l_1 \dot{q}_1 \dot{y}_k \cos q_1 \\ - m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \sin(q_1 - q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -(m_1 + m_2)l_1 \dot{q}_1 \dot{x}_k \sin q_1 - (m_1 + m_2)l_1 \dot{q}_1 \dot{y}_k \cos q_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) \dot{q}_2 \\ + (m_1 + m_2)l_1 \dot{x}_k \cos q_1 - (m_1 + m_2)l_1 \dot{y}_k \sin q_1$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{\partial D}{\partial q_1} \\
= (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) \ddot{q}_2 + (m_1 + m_2) l_1 \ddot{x}_k \cos q_1 \\
- (m_1 + m_2) l_1 \ddot{y}_k \sin q_1 - (m_1 + m_2) l_1 \dot{q}_1 \dot{x}_k \sin q_1 - (m_1 + m_2) l_1 \dot{q}_1 \dot{y}_k \sin q_1 \\
- m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \cos(q_1 - q_2) \\
- [-(m_1 + m_2) l_1 \dot{q}_1 \dot{x}_k \sin q_1 \\
- (m_1 + m_2) l_1 \dot{q}_1 \dot{y}_k \sin q_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) \dot{q}_2 + (m_1 + m_2) l_1 \dot{x}_k \cos q_1 \\
- (m_1 + m_2) l_1 \dot{y}_k \sin q_1] + k q_1 + b \dot{q}_1
\end{aligned}$$

Para el caso del segundo segmento del péndulo se tiene el siguiente desarrollo.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} + \frac{\partial D}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2 l_2^2 \dot{q}_2 + m_2 l_2 \dot{x}_k \cos q_2 - m_2 l_2 \dot{y}_k \sin q_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \cos(q_1 - q_2)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) &= m_2 l_2^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) \ddot{q}_1 + m_2 l_2 \ddot{x}_k \cos q_2 - m_2 l_2 \ddot{y}_k \sin q_2 \\
&\quad - m_2 l_2 \dot{q}_2 \dot{x}_k \sin q_2 - m_2 l_2 \dot{q}_2 \dot{y}_k \cos q_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -m_2 l_2 \dot{q}_2 \dot{x}_k \sin q_2 - m_2 l_2 \dot{q}_2 \dot{y}_k \cos q_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_1 - q_2) + m_2 g l_2 \sin q_2$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} + \frac{\partial D}{\partial q_2} \\
= m_2 l_2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) \ddot{q}_1 + m_2 l_2 \ddot{x}_k \cos q_2 - m_2 l_2 \ddot{y}_k \sin q_2 \\
- m_2 l_2 \dot{q}_2 \dot{x}_k \sin q_2 - m_2 l_2 \dot{q}_2 \dot{y}_k \cos q_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \cos(q_1 - q_2) \\
- [-m_2 l_2 \dot{q}_2 \dot{x}_k \sin q_2 - m_2 l_2 \dot{q}_2 \dot{y}_k \cos q_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
+ m_2 g l_2 \sin q_2] + k_1 q_1 + k_2 q_2 + b_1 \dot{q}_1 + b_2 \dot{q}_2
\end{aligned}$$