



Universidad Autónoma de San Luis Potosí  
Facultad de Ingeniería  
Centro de Investigación y Estudios de Posgrado

Control predictivo basado en modelo de sistemas electromecánicos con  
compensación de no linealidades

**TESIS**

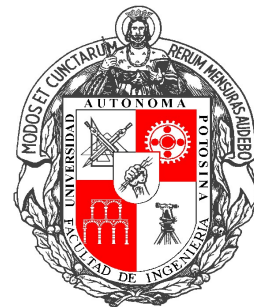
Que para obtener el grado de:  
Maestría en Ingeniería Eléctrica  
Opción: Control Automático

Presenta:  
**Ing. Jessica Elizabeth Barrios Barajas**

Asesor:  
**Dr. Ricardo Álvarez Salas**

Co-asesor:  
**Dr. César Fernando Francisco Méndez Barrios**

San Luis Potosí, S.L.P., Enero 2018





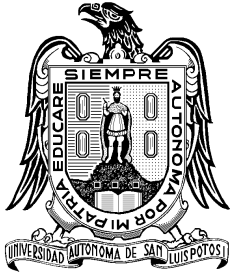
Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Facultad de Ingeniería

Centro de Investigación y Estudios de Posgrado

Maestría en Ingeniería Eléctrica

Opción: Control Automático



**Control predictivo basado en modelo de sistemas electromecánicos con  
compensación de no linealidades**

Presenta:

---

Ing. Jessica Elizabeth Barrios Barajas

Sinodales:

---

Dr. Ricardo Álvarez Salas  
Asesor

---

Dr. César Fernando Francisco Méndez Barrios  
Co-Asesor

---

Dr. Mario Arturo González García  
Revisor

---

Dr. Juan Antonio Cárdenas Galindo  
Revisor

---

Dr. Felipe Pazos Flores  
Suplente

San Luis Potosí, S.L.P., 7 de septiembre de 2017





21 de septiembre de 2017

**ING. JESSICA ELIZABETH BARRIOS BARAJAS**  
**P R E S E N T E.**

En atención a su solicitud de Temario, presentada por los **Dres. Ricardo Álvarez Salas y César Fernando Francisco Méndez Barrios**, Asesor y Co-asesor de la Tesis que desarrollará Usted, con el objeto de obtener el Grado de **Maestra en Ingeniería Eléctrica**, me es grato comunicarle que en la Sesión del H. Consejo Técnico Consultivo celebrada el día 21 de septiembre del presente, fue aprobado el Temario propuesto:

**TEMARIO:**

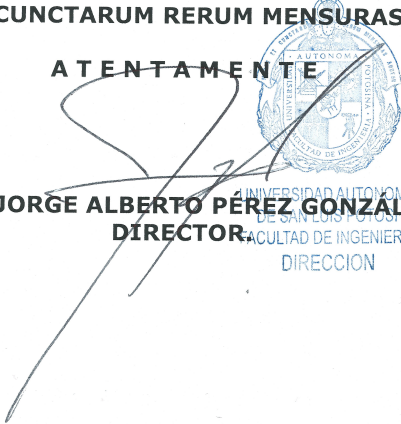
**"Control predictivo basado en modelo de sistemas  
electromecánicos con compensación de no linealidades"**

Introducción.

1. No linealidades en sistemas electromecánicos y su compensación.
  2. Control predictivo basado en modelo de sistemas electromecánicos.
  3. Resultados de simulación y experimentales.
  4. Conclusiones.
- Referencias.

**"MODOS ET CUNCTARUM RERUM MENSURAS AUDEBO"**

**ATENTAMENTE**



**M. I. JORGE ALBERTO PÉREZ GONZÁLEZ**  
**DIRECTOR**  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIRECCION



**FACULTAD DE  
INGENIERÍA**

Av. Manuel Nava 8  
Zona Universitaria • CP 78290  
San Luis Potosí, S.L.P.

Copia. Archivo.  
\*etn.



---

# *Agradecimientos*

---

*A mis padres, por la sabiduría de sus palabras y su apoyo incondicional en tiempos difíciles y no tan difíciles.*

*A mis hermanas, por dejarme ser quien soy siempre.*

*A Daniel Sting Martínez Padrón por su paciencia y amor*

*Al Dr. Ricardo Álvarez Salas, por ser parte importante en mi formación académica y por todas las facilidades brindadas para el desarrollo de este trabajo.*

*Al Dr. César Fernando Francisco Méndez Barrios, por su paciencia y por compartir sus conocimientos siempre*

*A la Dra. Maria del Carmen Rodríguez Liñan, por su apoyo en el desarrollo de esta tesis*

*A Ana Rivera, por todas las facilidades brindadas y los buenos momentos*

*A mis compañeros del posgrado Eugenio Camargo, Claudia Julio Hernández, Aarón Alviso, Alfredo Arriaga y David Nieto*

*A mis compañeros del LABCEECEM Alejandro Aganza, Jorge Almaguer, Agustín Tobías, Manuel Barrios y Jose Manuel Sandoval por su apoyo y consejos a lo largo del desarrollo de este trabajo de tesis*

*A mi comité revisor compuesto por las sugerencias y comentarios para mejorar el presente trabajo de Maestría.*

*Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por otorgarme la beca para cursar el programa de Maestría en Ingeniería Eléctrica.*



# Simbología

| Símbolo      | Descripción                                                                                       |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $BI$         | Operador del <i>backlash</i> inverso.                                                             |
| $B$          | Operador del <i>backlash</i> .                                                                    |
| $sat_v$      | Operador saturación.                                                                              |
| $ZMI$        | Operador de la zona muerta inversa.                                                               |
| $ZM$         | Operador de la zona muerta.                                                                       |
| $sat(v - c)$ | Operador saturación.                                                                              |
| $u_a$        | Señal de salida del controlador y entrada al bloque de zona muerta inversa.                       |
| $u_b$        | Señal de salida del bloque de zona muerta inversa y entrada al bloque de <i>backlash</i> inverso. |
| $u_c$        | Señal de salida del bloque de <i>backlash</i> inverso y entrada al bloque de saturación.          |
| $u_d$        | Señal de salida del bloque de saturación y entrada al bloque de <i>backlash</i> .                 |
| $u_e$        | Señal de salida del bloque de <i>backlash</i> y entrada al bloque de zona muerta.                 |
| $u_f$        | Señal de salida del bloque de zona muerta                                                         |
| $c_r$        | Parte derecha de la banda inactiva del <i>backlash</i> .                                          |
| $c_l$        | Parte izquierda de la banda inactiva del <i>backlash</i> .                                        |
| $m_l$        | Pendiente a la izquierda                                                                          |
| $m_r$        | Pendiente a la derecha                                                                            |
| $b_r$        | Parte derecha de la banda inactiva de la zona muerta.                                             |
| $b_l$        | Parte izquierda de la banda inactiva de la zona muerta.                                           |
| $\Delta u$   | Cambio en la ley de control.                                                                      |
| $N_p$        | Horizonte de predicción.                                                                          |
| $N_c$        | Horizonte de control.                                                                             |
| $Q$          | Matriz de peso para el error del MPC.                                                             |
| $S$          | Matriz de peso para ponderar el esfuerzo en la ley de control del MPC.                            |
| $K_p$        | Ganancia proporcional.                                                                            |
| $K_d$        | Ganancia derivativa.                                                                              |
| $K_i$        | Ganancia integral.                                                                                |
| $K_a$        | Ganancia 'antiwindup' para PID.                                                                   |
| $A^T$        | Transpuesta de la matriz $A$ .                                                                    |
| $A^{-1}$     | Inversa de la matriz $A$ .                                                                        |
| $\ x\ $      | Norma euclídeana del vector $x \in \mathbb{C}^n$ .                                                |
| $\dot{x}(t)$ | Derivada de $x(t)$ con respecto al tiempo $t$ , $\frac{dx}{dt}$ .                                 |
| ■            | Final de una demostración.                                                                        |



# Índice general

|                                                                             |           |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introducción</b>                                                         | <b>1</b>  |
| <b>1. No linealidades en sistemas electromecánicos y su compensación</b>    | <b>5</b>  |
| 1.1. Modelo del <i>backlash</i>                                             | 6         |
| 1.2. Modelo del <i>backlash</i> Inverso                                     | 8         |
| 1.2.1. Inversas suaves                                                      | 10        |
| 1.3. Saturación                                                             | 13        |
| 1.4. Modelo de la zona muerta                                               | 14        |
| 1.5. Modelo de la inversa de la zona muerta                                 | 15        |
| 1.6. Equivalente de saturación                                              | 16        |
| 1.6.1. Equivalente para zona muerta                                         | 17        |
| 1.6.2. Equivalente para <i>backlash</i>                                     | 19        |
| 1.6.3. Equivalente para no linealidades combinadas                          | 21        |
| <b>2. Control predictivo basado en modelo de sistemas electromecánicos</b>  | <b>25</b> |
| 2.1. Elementos del MPC                                                      | 26        |
| 2.2. Formulación del MPC                                                    | 26        |
| 2.2.1. Modelo aumentado                                                     | 27        |
| 2.2.2. Predicción                                                           | 29        |
| 2.2.3. Función de costo                                                     | 31        |
| 2.2.4. MPC sin restricciones                                                | 32        |
| 2.2.5. MPC con restricciones                                                | 33        |
| 2.3. Aplicación del equivalente en saturación al MPC                        | 39        |
| 2.4. PID con <i>anti-windup</i>                                             | 41        |
| 2.5. Aplicación del equivalente en saturación al PID con <i>anti-windup</i> | 43        |
| <b>3. Resultados de simulación y experimentales</b>                         | <b>45</b> |
| 3.1. Identificación del sistema                                             | 45        |
| 3.2. Desarrollo Controladores                                               | 46        |
| 3.2.1. Desarrollo MPC                                                       | 46        |
| 3.2.2. Desarrollo de PID con <i>anti-windup</i>                             | 47        |
| 3.3. Plataforma experimental                                                | 48        |
| 3.3.1. Plataforma digital                                                   | 49        |
| 3.3.2. Sistema Electromecánico                                              | 50        |
| 3.4. Caracterización de las no linealidades                                 | 51        |
| 3.5. Resultados en simulación                                               | 52        |
| 3.5.1. Simulación de MPC con compensación de <i>backlash</i>                | 52        |
| 3.5.2. Simulación de MPC con compensación de <i>backlash</i> y zona muerta  | 54        |

---

|                                                                                         |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.5.3. Simulación de PID con compensación de <i>backlash</i> . . . . .                  | 54        |
| 3.5.4. Simulación de PID con compensación de <i>backlash</i> y zona muerta . . .        | 55        |
| 3.6. Resultados experimentales . . . . .                                                | 58        |
| 3.6.1. MPC con compensación de <i>backlash</i> como no linealidad . . . . .             | 63        |
| 3.6.2. MPC con compensación de <i>backlash</i> y zona muerta . . . . .                  | 72        |
| 3.6.3. PID con <i>anti-windup</i> y compensación de <i>backlash</i> . . . . .           | 74        |
| 3.6.4. PID con <i>anti-windup</i> y compensación de <i>backlash</i> y zona muerta . . . | 78        |
| 3.6.5. PID con <i>anti-windup</i> vs MPC . . . . .                                      | 79        |
| <b>4. Conclusiones</b>                                                                  | <b>85</b> |
| 4.1. Trabajo futuro . . . . .                                                           | 86        |
| <b>Referencias</b>                                                                      | <b>87</b> |



# Índice de figuras

|                                                                                                                                 |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. Modelo exacto del <i>backlash</i> . . . . .                                                                                | 6  |
| 1.2. a)Representación esquemática del <i>backlash</i> b) Bloque entrada-salida. . . . .                                         | 7  |
| 1.3. Backlash. . . . .                                                                                                          | 7  |
| 1.4. Diagrama a bloques <i>backlash</i> inverso- <i>backlash</i> . . . . .                                                      | 8  |
| 1.5. Backlash inverso. . . . .                                                                                                  | 10 |
| 1.6. Diagrama de filtro <i>antichattering</i> . . . . .                                                                         | 11 |
| 1.7. Comparación Inversa exacta y filtrada. . . . .                                                                             | 12 |
| 1.8. Comparación Inversa exacta y aproximada. . . . .                                                                           | 13 |
| 1.9. Saturación. . . . .                                                                                                        | 14 |
| 1.10. Zona muerta. . . . .                                                                                                      | 15 |
| 1.11. Diagrama a bloques zona muerta inversa-zona muerta. . . . .                                                               | 15 |
| 1.12. Zona muerta inversa. . . . .                                                                                              | 16 |
| 1.13. Diagrama a bloques del equivalente en saturacion. . . . .                                                                 | 17 |
| 1.14. Diagrama a bloques de no linealidades combinadas. . . . .                                                                 | 21 |
| 1.15. Diagrama a bloques de no linealidades combinadas. . . . .                                                                 | 21 |
| 1.16. Diagrama a bloques de no linealidades combinadas. . . . .                                                                 | 22 |
| 1.17. Resultado de la interconexión del diagrama 1.13. . . . .                                                                  | 23 |
| 2.1. Estrategia de horizonte de predicción. . . . .                                                                             | 27 |
| 2.2. Ilustración de método de conjunto activo. . . . .                                                                          | 36 |
| 2.3. Esquema de control del MPC compensando no linealidades. . . . .                                                            | 39 |
| 2.4. Esquema de control del PID con <i>anti-windup</i> por cálculo regresivo. . . . .                                           | 42 |
| 2.5. Esquema de control PID con <i>anti-windup</i> y compensación mediante equivalente en saturación. . . . .                   | 43 |
| 3.1. Plataforma experimental. . . . .                                                                                           | 49 |
| 3.2. Arquitectura del sistema RIO. . . . .                                                                                      | 50 |
| 3.3. Sistema electromecánico. . . . .                                                                                           | 50 |
| 3.4. Estimación del <i>backlash</i> . . . . .                                                                                   | 51 |
| 3.5. Respuesta al escalón del MPC compensado para <i>backlash</i> en simulación. . . . .                                        | 53 |
| 3.6. Señales de control de la respuesta al escalón del MPC compensado para <i>backlash</i> en simulación. . . . .               | 53 |
| 3.7. Respuesta a escalón del MPC compensado para <i>backlash</i> y zona muerta en simulación. . . . .                           | 54 |
| 3.8. Señales de control de la respuesta al escalón del MPC compensado para <i>backlash</i> y zona muerta en simulación. . . . . | 55 |
| 3.9. Respuesta a escalón del PID con <i>anti-windup</i> compensando el <i>backlash</i> . . . . .                                | 56 |

|                                                                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.10. Señales de control de la respuesta a escalón del PID con <i>anti-windup</i> compensando el <i>backlash</i> . . . . .                    | 56 |
| 3.11. Respuesta a escalón del PID con <i>anti-windup</i> compensando el <i>backlash</i> y zona muerta. . . . .                                | 57 |
| 3.12. Señales de control de la respuesta a escalón del PID con <i>anti-windup</i> compensando el <i>backlash</i> y zona muerta. . . . .       | 57 |
| 3.13. Respuesta a escalón del MPC sin compensar. . . . .                                                                                      | 58 |
| 3.14. Respuesta a una entrada senoidal del sistema con MPC sin compensar. . . . .                                                             | 59 |
| 3.15. Señal de control MPC sin compensar. . . . .                                                                                             | 59 |
| 3.16. Referencia contra salida de la trayectoria senoidal del MPC sin compensar. . . . .                                                      | 60 |
| 3.17. Respuesta a escalón del PID con <i>anti-windup</i> sin compensar. . . . .                                                               | 61 |
| 3.18. Respuesta a una entrada senoidal del PID sin compensar. . . . .                                                                         | 61 |
| 3.19. Señal de control PID sin compensar. . . . .                                                                                             | 62 |
| 3.20. Referencia contra salida de la trayectoria senoidal del PID sin compensar. . . . .                                                      | 62 |
| 3.21. Respuesta al escalón del MPC con inversa exacta. . . . .                                                                                | 63 |
| 3.22. Señal de control MPC con inversa exacta. . . . .                                                                                        | 64 |
| 3.23. Respuesta a una entrada senoidal del MPC compensada con inversa exacta. . . . .                                                         | 64 |
| 3.24. Señal de control MPC compensada con inversa exacta. . . . .                                                                             | 65 |
| 3.25. Referencia contra salida de la trayectoria senoidal MPC con inversa excta. . . . .                                                      | 65 |
| 3.26. Respuesta al escalón del MPC con inversa filtrada. . . . .                                                                              | 66 |
| 3.27. Señal de control MPC con inversa filtrada. . . . .                                                                                      | 67 |
| 3.28. Respuesta a una entrada senoidal del MPC con inversa filtrada. . . . .                                                                  | 67 |
| 3.29. Señal de control MPC con inversa filtrada. . . . .                                                                                      | 68 |
| 3.30. Referencia contra salida de la trayectoria senoidal MPC con inversa filtrada. . . . .                                                   | 68 |
| 3.31. Respuesta al escalón del MPC con inversa aproximada. . . . .                                                                            | 69 |
| 3.32. Señal de control MPC con inversa aproximada. . . . .                                                                                    | 69 |
| 3.33. Respuesta a una entrada senoidal del MPC con compensacion de inversa aproximada. . . . .                                                | 70 |
| 3.34. Señal de control MPC con compensacion de inversa aproximada. . . . .                                                                    | 70 |
| 3.35. Referencia contra salida de la trayectoria senoidal MPC con compensacion de inversa aproximada. . . . .                                 | 71 |
| 3.36. Comparación de la respuesta al escalón de las tras versiones de la compensación inversa. . . . .                                        | 72 |
| 3.37. Respuesta al escalón del MPC con con compensación de <i>backlash</i> y zona muerta. . . . .                                             | 73 |
| 3.38. Señal de control MPC con compensación de <i>backlash</i> y zona muerta. . . . .                                                         | 73 |
| 3.39. Respuesta a una entrada senoidal del MPC con compensación de no linealidades combinadas. . . . .                                        | 74 |
| 3.40. Señal de control MPC con compensación de no linealidades combinadas. . . . .                                                            | 74 |
| 3.41. Referencia contra salida de la trayectoria senoidal MPC con compensación de no linealidades combinadas. . . . .                         | 75 |
| 3.42. Comparación del error de seguimiento de compensación de <i>backlash</i> y compensación <i>backlash</i> -zona muerta combinados. . . . . | 75 |

|                                                                                                                                                   |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.43. Respuesta al escalón del PID con <i>anti-windup</i> con compensación de <i>backlash</i> .                                                   | 76 |
| 3.44. Señal de control PID con <i>anti-windup</i> con compensación de <i>backlash</i> . . . . .                                                   | 76 |
| 3.45. Respuesta a una entrada senoidal del PID con <i>anti-windup</i> . . . . .                                                                   | 77 |
| 3.46. Señal de control del PID con <i>anti-windup</i> compensado mediante inversa aproximada. . . . .                                             | 77 |
| 3.47. Referencia contra salida de la trayectoria senoidal PID con <i>anti-windup</i> compensado mediante inversa aproximada. . . . .              | 78 |
| 3.48. Respuesta al escalón del PID con <i>anti-windup</i> compensado para <i>backlash</i> y zona muerta. . . . .                                  | 79 |
| 3.49. Señal de control PID con <i>anti-windup</i> compensado para <i>backlash</i> y zona muerta.                                                  | 79 |
| 3.50. Respuesta a una entrada senoidal del PID con <i>anti-windup</i> compensado para <i>backlash</i> y zona muerta. . . . .                      | 80 |
| 3.51. Señal de control PID con <i>anti-windup</i> compensado para <i>backlash</i> y zona muerta.                                                  | 80 |
| 3.52. Referencia contra salida de la trayectoria senoidal PID con <i>anti-windup</i> compensado para <i>backlash</i> y zona muerta. . . . .       | 81 |
| 3.53. Respuesta escalón MPC-PID. . . . .                                                                                                          | 81 |
| 3.54. Comparación del error de seguimiento. . . . .                                                                                               | 82 |
| 3.55. Compensación de la respuesta al escalón entre PID con <i>anti-windup</i> y MPC, ambos compensados de <i>backlash</i> y zona muerta. . . . . | 83 |
| 3.56. Compensación de la respuesta al escalón entre PID con <i>anti-windup</i> y MPC, ambos compensados de <i>backlash</i> y zona muerta. . . . . | 84 |



# Índice de tablas

|                                                                                                                                     |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. Tabla de parámetros de ejemplo equivalente en saturación . . . . .                                                             | 22 |
| 3.1. Parámetros estimados . . . . .                                                                                                 | 52 |
| 3.2. Ganancias PID para simulación. . . . .                                                                                         | 55 |
| 3.3. Ganancias PID. . . . .                                                                                                         | 60 |
| 3.4. Parámetros de desempeño. . . . .                                                                                               | 71 |
| 3.5. Parámetros de desempeño entre MPC y PID. . . . .                                                                               | 82 |
| 3.6. Parámetros de respuesta al escalón de MPC Y PID con <i>anti-windup</i> compen-<br>sando <i>backlash</i> y zona muerta. . . . . | 83 |



# Introducción

## Antecedentes

El *backlash*, es una no linealidad dinámica, lo cual quiere decir que tiene memoria. En general, este fenómeno surge debido a una imperfección en los elementos del sistema. Un ejemplo de ello, es un motor acoplado a una carga por medio de un sistema de transmisión. En los elementos mecánicos se da el fenómeno del *backlash*, debido a que los dientes del engrane no encajan perfectamente, es decir, existe espacio entre ellos. Por tanto, al existir un movimiento contrario en el actuador ocurre una pérdida momentánea de contacto entre el motor y la transmisión [1], a este instante se le conoce como banda inactiva del *backlash*. Para resolver este problema existen principalmente dos clases de soluciones: mecánicas y por software.

Un ejemplo de compensación mecánica se puede encontrar en [2], donde se usa un control bilateral 4-CH, el cual transmite la información de la fuerza y la posición entre un robot maestro y uno esclavo. Otra de las soluciones mecánicas que se pueden encontrar en la literatura es en [3], en donde se presenta una metodología de control mecánica inspirada por las capacidades de flexión y extensión que se presenta en los humanos. Una opción alternativa es usar engranes precisos o elementos *anti-backlash*. Sin embargo, este tipo de soluciones mecánicas tienen ciertas limitaciones tales como:

- Alto costo de ensamblaje.
- Ajuste y mantenimiento.
- Restricciones físicas como la dimensión.
- Comportamiento inconsistente debido a la abrasión.

En las soluciones por software se tienen principalmente las basadas en el control adaptable como por ejemplo la presentada en [4] donde un controlador PID adaptativo se diseñó para evitar ciclos límite en el sistema. Otro tipo de metodología es el uso de redes neuronales abordadas en [5], en este trabajo se presenta un controlador óptimo basado en un observador con redes neuronales. En [1] se propone un método de control con compensación de *backlash* basado en un modelo de dos masas donde el *backlash* se toma como una perturbación de par, por lo que se construye un observador de perturbaciones para estimar y compensar la misma.

En [6] se propone una compensación del *backlash* empleando una inversa por la derecha, asumiendo que matemáticamente al realizar la composición con la inversa por la derecha y el *backlash* se tiene como resultado la identidad. Este método de acuerdo con [7] es una acción fuerte en la banda inactiva del *backlash*, esto quiere decir que la banda se debe recorrer lo mas

rápido posible, de esta manera puede volver a la acción de control inicial, mientras que una acción débil implica que el ancho de banda se reduce en el instante que la banda está abierta.

Considerando una combinación de saturación y *backlash* en [8] se demuestra que la inversa en serie con la saturación y el *backlash* da como resultado otra saturación, basado en este resultado en [9] se propone un control predictivo basado en modelo (MPC por sus siglas en inglés) el cual está sujeto a restricciones convexas basadas en la saturación antes mencionada. En [10] se propone también un control predictivo considerando una inversa de la no linealidad, sin embargo sus restricciones están dadas por desigualdades integrales mixtas. En [11] se propone un control predictivo no suave para sistemas de transmisión mecánicos con *backlash* donde la no linealidad se considera como parte del modelo para construir el controlador, por lo que se introduce un control predictivo no suave.

Por otro lado, la zona muerta como no linealidad se ha abordado ampliamente en distintos trabajos. En particular, en [12] propone una clase especial de control adaptable, otro trabajo que hace una compensación de la zona muerta se reporta en [13] donde se presenta un esquema de control adaptable difuso para sistemas no lineales sujeto a una entrada con zona muerta. En [6] se propuso el uso de la no linealidad inversa para la cancelación de la zona muerta, este método a su vez se aplica en [14] con un control difuso adaptable robusto con una compensación mediante una inversa suave para un motor de imanes permanentes de corriente directa. También en [15] se usa un controlador adaptable con inversa de la no linealidad para sistemas con zona muerta entre dos bloques dinámicos.

## Planteamiento del problema

Las características no lineales y no suaves tales como la zona muerta, *backlash* e histéresis son comunes en actuadores, como lo son las conexiones mecánicas, servoválvulas hidráulicas, servomotores eléctricos y sensores. Además es muy común que aparezcan en sistemas biomédicos [16].

Desde 1940, en los primeros días de la teoría de control clásico el *backlash* como no linealidad ha sido reconocido como uno de los factores que limitan severamente el desempeño de los sistemas en lazo cerrado. Éste puede causar retardos, oscilaciones e imprecisión. Esta no linealidad, también llamada juego mecánico, genera una discontinuidad en el movimiento cuando el actuador cambia de dirección. En consecuencia, la operación del actuador será diferente a la de la señal generada por el controlador [10]. Hoy en día este tipo de no linealidades se presentan en sistemas tales como robots industriales, CNC, prensas, entre otros.

Mientras que la zona muerta es también un tipo de no linealidad dura, sin embargo a diferencia del *backlash* ésta no tiene memoria, es decir es estática; se caracteriza por ser insensible a pequeños cambios en la señal de entrada. La zona muerta está presente en muchos sistemas



mecatrónicos como actuadores inteligentes y motores [14].

En este trabajo se aborda el control predictivo basado en modelo (MPC). El MPC tiene sus raíces en el control óptimo. El concepto básico del MPC es usar el modelo dinámico para predecir el comportamiento del sistema, y optimizar la una función de costo, la cual permite estimar errores futuros, esfuerzos de control u otros objetivos. Las características de mayor importancia que le han dado el éxito en diversas aplicaciones son [17]:

- Se aplica naturalmente a sistemas multivariable.
- Puede tomar en cuenta las limitaciones del actuador.
- Permite operar cerca de las zonas restringidas.

## Objetivo

El proposito general de este trabajo es diseñar e implementar esquemas de control predictivo basado en modelo para un sistema electromecánico, que presenta dos no linealidades que son el *backlash* y la zona muerta. Para eliminar los efectos indeseables que se dan debido a los fenómenos no lineales ya mencionados, se propone la compensación de los mismos mediante la aplicación del equivalente en saturación, que hace uso de la inversa en conjunto con la saturación natural que se da el sistema y la propia no linealidad.

## Aportaciones de la Tesis

Partiendo del trabajo reportado en la literatura [8] se presenta una validación de la compensación de no linealidades en un sistema electromecánico, utilizando el MPC con restricciones basadas en el teorema propuesto en [18].

Se desarrolla también un controlador PID con *anti-windup* y compensación de no linealidades, ésto con la finalidad de una comparación de parámetros de desempeño entre el PID con *anti-windup* y el MPC.

Adicionalmente, se evalúa la efectividad de dos metodologías para la inversa de la no linealidad con la finalidad de disminuir o eliminar el fenómeno que se da comunmente en este tipo de funciones que involucran inversas de funciones no continuas, el castaño el cual es mas comúnmente conocido como *chattering*. También, se validó el uso del equivalente en saturación, originalmente propuesto en [8], para compensar dos linealidades en el sistema: el *backlash* y la zona muerta.

## Organización de la Tesis

El presente documento está constituido por los siguientes capítulos:

En el Capítulo 1 se abordan dos no linealidades el *backlash* y la zona muerta. En cuanto al primero se consideran su modelo de histéresis y la inversa del mismo. Para el segundo caso se presenta su modelo general y su respectiva inversa. Se da también una breve explicación de las dinámicas físicas reales de estos fenómenos no lineales. Además se introduce el método de compensación conocido como equivalente en saturación.

En el Capítulo 2 se presenta el desarrollo del controlador predictivo basado en modelo, con y sin restricciones. Para este último, se expone un algoritmo de optimización para encontrar la solución al problema con restricciones. Así mismo, se presenta el esquema de control complementado con el compensador de no linealidades descritos en el Capítulo 1. Se introduce también, la metodología de control PID con *anti-windup*, con la finalidad de comparar ambas técnicas. Para finalizar, se desarrolla el MPC y PID con *anti-windup* para su aplicación.

En el Capítulo 3 se desarrollan el controlador predictivo y el PID con *anti-windup* para el sistema identificado. Se introduce la plataforma experimental, así como los parámetros aproximados para el modelado de las no linealidades. Se presentan por último, los resultados en simulación, y los resultados experimentales. De estos últimos, se hace una comparación entre las diferentes técnicas usadas para incluir la inversa, y los controladores. Finalmente en el último apartado se presentan las conclusiones.

# No linealidades en sistemas electromecánicos y su compensación

---

## Índice

|                                                    |           |
|----------------------------------------------------|-----------|
| <b>1.1. Modelo del <i>backlash</i></b>             | <b>6</b>  |
| <b>1.2. Modelo del <i>backlash</i> Inverso</b>     | <b>8</b>  |
| 1.2.1. Inversas suaves                             | 10        |
| <b>1.3. Saturación</b>                             | <b>13</b> |
| <b>1.4. Modelo de la zona muerta</b>               | <b>14</b> |
| <b>1.5. Modelo de la inversa de la zona muerta</b> | <b>15</b> |
| <b>1.6. Equivalente de saturación</b>              | <b>16</b> |
| 1.6.1. Equivalente para zona muerta                | 17        |
| 1.6.2. Equivalente para <i>backlash</i>            | 19        |
| 1.6.3. Equivalente para no linealidades combinadas | 21        |

---

Las imperfecciones en los componentes de los sistemas se encuentran entre los factores que limitan el desempeño de los controladores en lazo cerrado, especialmente aquellos sistemas que utilizan actuadores y sensores. A menudo, una de las imperfecciones altamente críticas son aquellas que tienen comportamientos no lineales, las cuales, pueden llegar a variar de componente a componente. Sin embargo, elementos sin imperfecciones son costosos y su mantenimiento requiere de personal especializado [6].

Algunas de las no linealidades más comunes son las llamadas duras, ésto debido a sus discontinuidades, ejemplos de éstas son: zona muerta, *backlash* y la histéresis. Éstas se dan en una gran variedad de elementos mecánicos, hidráulicos, neumáticos, magnéticos, piezoeléctricos, etc. Son comúnmente usadas en representación de fenómenos más complejos como la viscosidad, elasticidad, fricción, etc [19].

### 1.1. Modelo del *backlash*

En la literatura existen varios modelos del *backlash*, por ejemplo, el modelo físico no lineal, también llamado exacto que describe el comportamiento de la no linealidad como un sistema de dos masas unidas por ejes acoplados mediante una banda con un ángulo de  $2c$ . Como se puede apreciar en la figura 1.1; otra de las descripciones del *backlash* es el modelo de resonancia de dos masas que es una simplificación del modelo exacto, en éste se considera un solo eje con una perturbación sobre él, la cual representa al *backlash* utilizado en [1]. Existe también el modelo de zona muerta el cual simplifica el modelo a una función estática (sin memoria), escalar, no lineal la cual ha sido estudiado en [20] donde se diseña un control no lineal  $H_\infty$  para regulación considerando el modelo de zona muerta. Otro estudio hecho mediante el modelo de zona muerta es el desarrollado en [21] con un controlador difuso tipo-2 para regulación de carga.

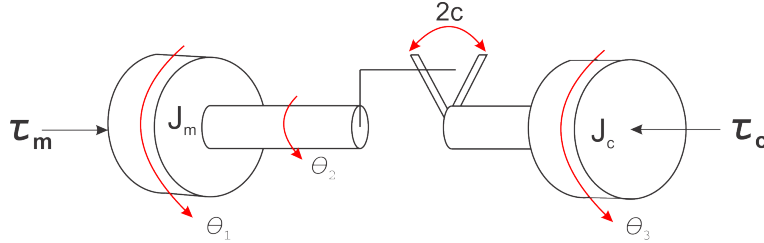


Figura 1.1: Modelo exacto del *backlash*.

Para fines de esta investigación se considera el modelo de histéresis, el cual se encuentra documentado en [6]. Es posible explicar físicamente este modelo paso a paso mediante la figura 1.2, donde un objeto en forma de  $L$  es conducido por un objeto en forma de  $U$  con un margen de contacto de  $c_l - c_r$ . La entrada  $u_d$  es la posición del objeto en forma de  $L$ , mientras que  $u_e$  representa la posición de objeto en  $U$ , la cual se considerará como salida. Ambos objetos se asumen sin inercia y solo la posición es de interés.

Considérese la posición en la figura 1.2 a)  $u_d = 0$  y  $u_e = c_r$  y suponiendo que  $u_e$  comienza a desplazarse hacia la derecha. Cuando  $u_d$  alcanza  $u_e = c_r = u_d$  se hace contacto entre los objetos y  $u_d$  sigue a  $u_e$  esto se describe por la línea recta de pendiente positiva en la caracterización, si en algún punto  $u_d$  se detiene y comienza a desplazarse hacia la izquierda,  $u_d$  se quedará estático y podría decirse que recuerda su posición. El movimiento durante este periodo es representado por una recta horizontal con longitud  $c_r + c_l$ . Al final de este segmento el contacto vuelve a establecerse por el lado izquierdo del objeto en forma de  $U$ . Entonces comienza a trasladarse a la derecha en conjunto con  $u_d$  lo cual se traduce en la caracterización como una línea con pendiente negativa. Si de nuevo en algún punto se detiene y se recorre a la derecha,  $u_e$  se detendrá y permanecerá así hasta atravesar todo el segmento  $c_r + c_l$ , entonces el desplazamiento es horizontal.

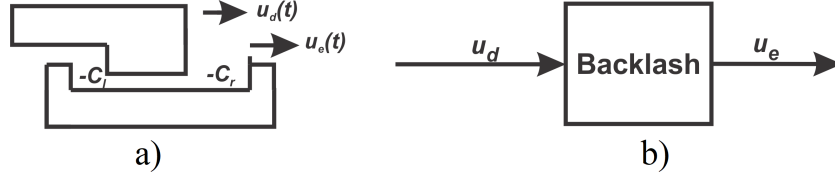


Figura 1.2: a) Representación esquemática del *backlash* b) Bloque entrada-salida.

En lo sucesivo se denotará  $B(\cdot)$  al operador que describe al *backlash*. La caracterización del *backlash*  $u_e(t) = B(m_l, m_r, c_r, c_l; u_d(t))$  es descrita por dos líneas rectas conectadas por segmentos de línea horizontales.

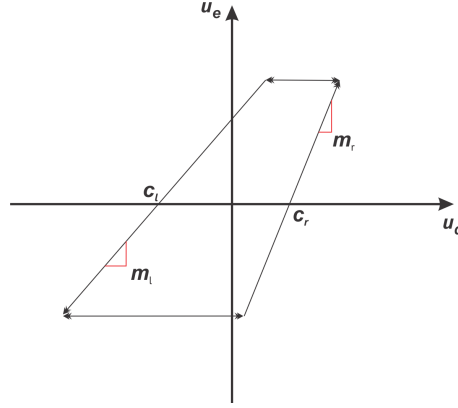


Figura 1.3: Backlash.

El segmento ascendente está activo cuando  $u_d$  y  $u_e$  incrementan:

$$u_e(t) = m_r(u_d(t) - c_r), \dot{u}_d(t) > 0, \dot{u}_e(t) > 0. \quad (1.1.1)$$

Mientras que el segmento descendente está activo cuando  $u_d$  y  $u_e$  decremantan:

$$u_e(t) = m_l(u_d(t) + c_l), \dot{u}_d(t) < 0, \dot{u}_e(t) < 0, \quad (1.1.2)$$

donde  $m_l, m_r > 0$ ,  $c_l, c_r > 0$  son parámetros constantes, la operación en cualquier segmento interior de las funciones anteriores esta dado por  $\dot{u}_e(t)$ . Una descripción compacta de lo anterior se muestra en la ecuación (1.1.3):

$$B(u_d(t)) = \dot{u}_e(t) = \begin{cases} \dot{u}_d(t), & \text{si } \dot{u}_d(t) > 0 \text{ y } u_e(t) = m_r(u_d(t) - c_r), \\ \text{quad } \dot{u}_d(t) < 0 \text{ y } u_e(t) = m_l(u_d(t) + c_l), & \text{o} \\ 0, & \text{otros.} \end{cases} \quad (1.1.3)$$

Con ayuda de la figura 1.2 es sencillo visualizar la versión discreta de este modelo. Solo es necesario imaginar que la posición  $u_c$  y  $u_d$  se observan en los instantes de tiempo  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  de esta manera en lugar de usar  $\dot{u}_d(t)$  para especificar la dirección de  $u_d$ , se comparan en los instantes anteriores  $v_l, v_r$ :

$$v_l = \frac{u_d(k-1)}{m_l} - c_l. \quad (1.1.4)$$

$$v_r = \frac{u_d(k-1)}{m_r} + c_r. \quad (1.1.5)$$

Estos valores son las proyecciones del eje  $u_e$  de las intersecciones de las dos líneas rectas de pendiente  $m_r, m_l$  con el segmento horizontal que contiene  $u_d(k-1)$ . Por lo tanto la versión discreta del modelo esta dado por (1.1.6).

$$u_e(k) = \begin{cases} m_l(u_d(k) + c_l) & \text{si } u_d \leq v_l, \\ m_r(u_d(k) - c_r) & \text{si } u_d \geq v_r, \\ u_e(k-1) & \text{si } v_l < u_d < v_r. \end{cases} \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.1.6)$$

## 1.2. Modelo del *backlash* Inverso

Los efectos indeseables que se presentan debido al *backlash* pueden ser eliminados mediante el uso de una inversa por la derecha  $u_c = BI(u_b)$ , siendo  $BI(\cdot)$  el operador para el *backlash* inverso. En la figura 1.4 se ilustra el diagrama a bloques de la cancelación.

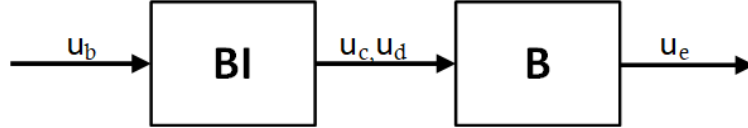


Figura 1.4: Diagrama a bloques *backlash* inverso-*backlash*.

$$BI(u_b(t)) = \dot{u}_c(t) = \begin{cases} \frac{1}{m} \dot{u}_b(t) & \text{si } \dot{u}_b(t) > 0, u_c(t) = \frac{u_b(t)}{m_r} + c_r \\ & \text{si } \dot{u}_b(t) < 0, u_c(t) = \frac{u_b(t)}{m_l} - c_l \\ 0 & \text{si } \dot{u}_b(t) = 0 \\ g(\tau, t) & \text{si } \dot{u}_b(t) > 0, u_c(t) = \frac{u_b(t)}{m_l} - c_l \\ -g(\tau, t) & \text{si } \dot{u}_a(t) < 0, u_c(t) = \frac{u_b(t)}{m_r} + c_r \end{cases} \quad (1.2.1)$$

En la definición (1.2.1), la inversa del segmento horizontal de la caracterización del *backlash* es un salto vertical definido como una integral en el tiempo de la función impulso.

$$g(\tau, t) = \delta(\tau - t)(c_r - c_l) \quad (1.2.2)$$

donde  $\delta(t)$  es la función  $\delta$  de Dirac. Así un salto positivo en la inversa del *backlash* es:

$$u_c(t^+) = u_b(t^-) + \int_{t^-}^{t^+} g(\tau, t) d\tau = \begin{cases} \frac{u_b(t)}{m_r} + c_r & \text{si } \dot{u}_b > 0 \\ \frac{u_b(t)}{m_l} - c_l & \text{si } \dot{u}_b < 0 \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Los efectos causados por los saltos en  $BI(\cdot)$  eliminarán los retardos causados por el segmento horizontal en  $B(\cdot)$ . De igual forma el uso de la ecuación (1.2.1) reestablecerá la información que se ha perdido debido a *backlash*. Lo anterior se demuestra provando que el operador  $BI$  definido en (1.2.1) es la inversa por la derecha del *backlash*  $B$  definida en (1.1.3).

**Lema 1.2.1** [6] *El operador  $BI$  definido en (1.2.1) es la inversa por la derecha de la definición del operador  $B$  en (1.1.3) en el sentido que:*

$$u_b(t_0) = B(BI(u_b(t_0))) \implies B(BI(u_b(t))) = u_b(t), \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.2.4)$$

El mapeo en (1.2.1)-(1.2.3) no define la inversa del *backlash* solo si la señal  $u_b$  es tal que  $u_d$  y  $u_e$  nunca abandonen el segmento interno. Esta situación es posible solo si  $u_e(0)$  y  $u_d(0)$  se encuentran dentro del segmento interno y  $\dot{u}_b = 0$  para  $t \geq 0$  o si  $\dot{u}_a$  no cambia de signo mientras el incremetno total de  $u_b/m_r$  no es suficiente para que  $u_d$  y  $u_e$  salgan del segmento horizontal del operador  $B(\cdot)$ .

Como  $u_b$  es una señal sobre la cual se puede tener control, la situación anterior puede ser corregida, si  $u_b$  no alcanza  $t_0$  definido en la ecuación (1.2.4), entonces  $BI(\cdot)$  se puede inicializar de la siguiente manera:

$$BI(u_b(t)) = u_c(t_0^+) = \begin{cases} (\frac{u_b(t_0)}{m_r} + c_r), & \text{si } u_c(t_0) = \frac{u_b(t_0)}{m_l} + c_l, \\ (\frac{u_b(t_0)}{m_l} + c_l), & \text{si } u_c(t_0) = \frac{u_b(t_0)}{m_r} + c_r. \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Lo anterior siempre resultará en  $u_b(t_0^+) = B(BI(u_b(t_0^+)))$  tal que (1.2.4) se cumpla para  $\forall t \geq t_0$ . Por tanto la inversa se puede reducir a (1.2.6).

$$u_c(t) = \begin{cases} (\frac{u_b(t)}{m_l} + c_l), & \text{si } \dot{u}_b < 0, \\ (\frac{u_b(t)}{m_r} + c_l), & \text{si } \dot{u}_b > 0, \\ u_c(t^-) & \dot{u}_a = 0 \end{cases}. \quad (1.2.6)$$

El comportamiento del *backlash* inverso tiene la descripción gráfica que se observa en la figura 1.5, en la que se le considera una caracterización asimétrica del *backlash*.

La versión discreta de la ecuación (1.2.6) está dada por (1.2.7).

$$u_c(k) = \begin{cases} (\frac{u_b(k)}{m_l} + c_l), & \text{si } u_b(k) < u_b(k-1), \\ (\frac{u_b(k)}{m_r} + c_l), & \text{si } u_b(k) > u_b(k-1), \\ u_c(k-1) & u_b(k) = u_b(k-1). \end{cases} \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.2.7)$$

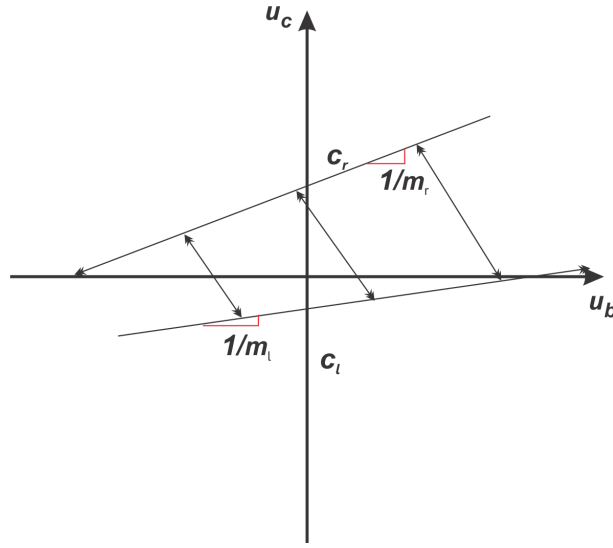


Figura 1.5: Backlash inverso.

En [22] se usa la compensación del *backlash* mediante la inversa exacta para un experimento en un sistema de transmisión mecánica.

### 1.2.1. Inversas suaves

Debido a la presencia del salto vertical en la función inversa del *backlash*, lo cual significa que ésta no es suave, un fenómeno indeseable se puede dar en la salida del bloque de la inversa al cual se le conoce como *chattering*. El *chattering* se refiere a una señal oscilante de alta frecuencia.

Por lo anterior en la literatura se presentan distintos tipos de inversas suaves dadas mediante funciones continuas.

#### 1.2.1.1. Filtro *anti-chattering*

Esta técnica fue propuesta en [23], se ha extendido en este caso a una versión asimétrica del modelo *backlash* para ajustarse a este trabajo.



Dada la inversa del backlash representada matemáticamente por (1.2.6) se divide en las expresiones (1.2.8) y (1.2.9).

$$u_s(t) = \begin{cases} (\frac{u_b(t)}{m_l}), & \text{si } \dot{u}_b < 0, \\ (\frac{u_b(t)}{m_r}), & \text{si } \dot{u}_b > 0, \\ 0 & \text{si } \dot{u}_b(t) = 0. \end{cases} \quad (1.2.8)$$

y,

$$u_{chattering}(t) = \begin{cases} c_l, & \text{si } \dot{u}_b < 0, \\ -c_r, & \text{si } \dot{u}_b > 0, \\ u_b(t^-) & \text{si } \dot{u}_b(t) = 0. \end{cases} \quad (1.2.9)$$

Entonces se puede decir que  $u_b = u_s + u_{chattering}$ , donde  $u_s$  es la transmisión directa y  $u_{chattering}$  representa los saltos discontinuos. A partir de esto se limita el ancho de banda para la construcción de la inversa, esto se hace utilizando un filtro de segundo orden para  $u_{chattering}$ , como se muestra a la figura 1.6

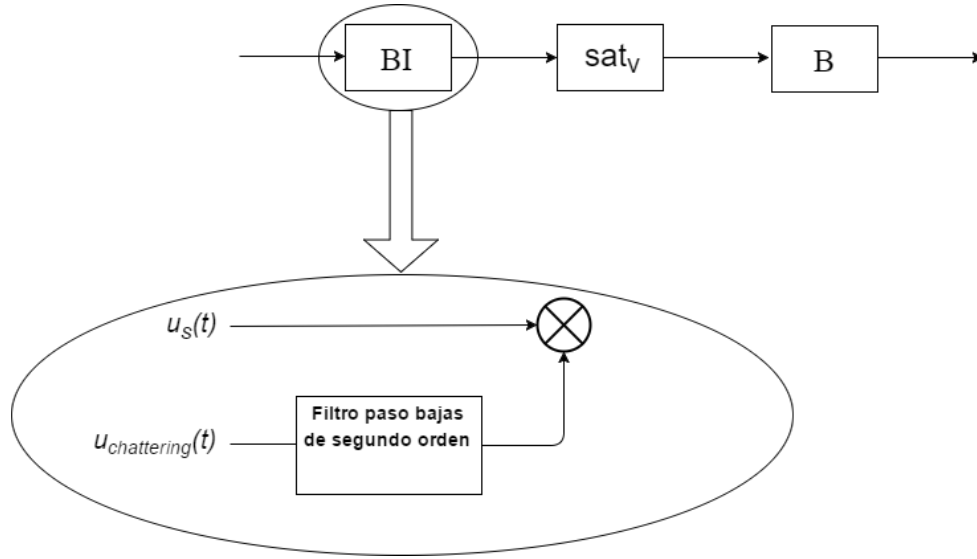


Figura 1.6: Diagrama de filtro *antichattering*.

El filtro *antichattering* de segundo orden tiene la forma:

$$F(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}. \quad (1.2.10)$$

En la gráfica de la figura 1.7 se tiene la comparación entre la inversa exacta y la filtrada. Se observa lo que se ha descrito como los saltos de la Inversa exacta mientras que la inversa aproximada tiene curvas más suaves en estas secciones.

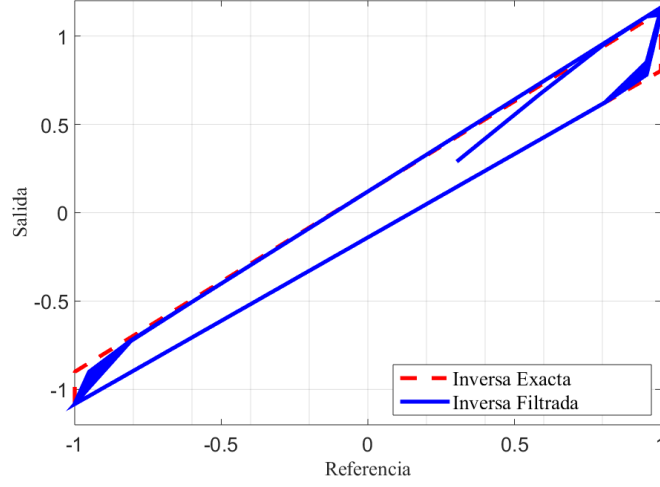


Figura 1.7: Comparación Inversa exacta y filtrada.

#### 1.2.1.2. Aproximación suave mediante tangente hiperbólica

Para un *backlash* simétrico en [24] se propone una inversa suave basado en funciones exponenciales. Tomando como base el trabajo antes mencionado en [25] plantean una inversa suave para el *backlash* no simétrico. La función está dada por la ecuación (1.2.11).

$$v = BI(t) = \left(\frac{1}{m_r}u_b + c_r\right)X_r(\dot{u}_b) + \left(\frac{1}{m_L}u_b - c_L\right)X_l(\dot{u}_b). \quad (1.2.11)$$

donde  $X_r(\dot{u}_b)$  y  $X_l(\dot{u}_b)$ , son dos funciones positivas y ajustables definidas como:

$$X_r(\dot{u}_b) = \frac{1 + \tanh(\kappa \dot{u}_b)}{2},$$

$$X_l(\dot{u}_b) = \frac{1 - \tanh(\kappa \dot{u}_b)}{2},$$

donde  $\kappa$  es un parámetro ajustable y positivo.

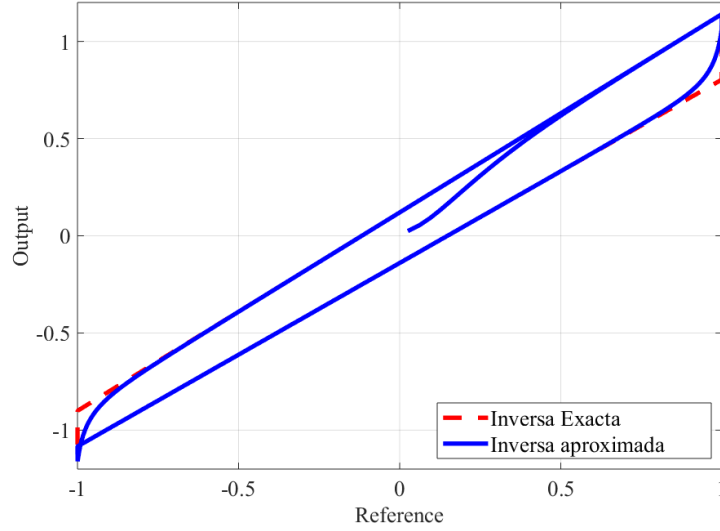


Figura 1.8: Comparación Inversa exacta y aproximada.

En la figura 1.8 se presenta la inversa exacta y la aproximada mediante la tangente hiperbólica. Se observa que los saltos de la inversa aproximada son menos abruptos que los de la inversa exacta, es decir, es suave en estos segmentos.

La técnica de supresión del *backlash* mediante la inversa por la derecha ha sido utilizada en aplicaciones prácticas, como por ejemplo en el trabajo de [26] donde se utiliza una interfaz háptica con un dispositivo para laparoscopia que usa cables que presentan *backlash*, lo cual es compensado mediante la inversa suave de la ecuación (1.7).

### 1.3. Saturación

Este tipo de no linealidad se da cuando la entrada de un dispositivo solo genera un cambio cuando se encuentra dentro de un rango de valores, es decir, su incremento corresponde a un cambio en la salida, pero si la entrada alcanza cierto nivel su crecimiento producirá un cambio mínimo o nulo en la salida [19].

El modelo matemático de esta no linealidad se presenta en (1.3.1), se define el operador de la saturación como  $sat_v$ , siendo  $v$  el nivel de saturación. La descripción gráfica se presenta en la figura 1.9.

$$sat_v(u_c) = u_d(t) = \begin{cases} v & \text{si } u_c > v, \\ u_c & \text{si } |u_c| \leq v, \\ -v & \text{si } u_c < -v. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

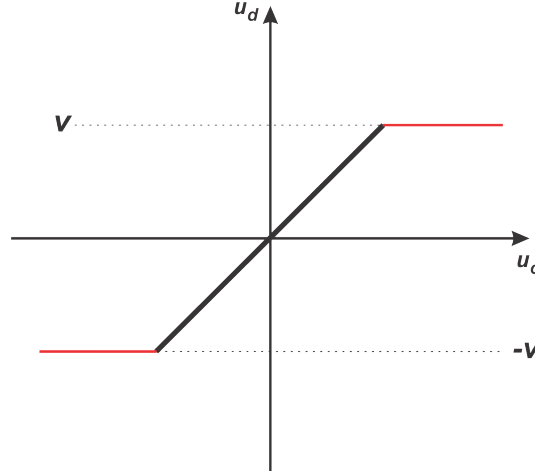


Figura 1.9: Saturación.

La saturación es muy común en actuadores para sistemas electromecánicos como motores y servoválvulas. Sin embargo también se da en dispositivos electrónicos como amplificadores y sensores. Esta es una limitación física natural en los elementos.

#### 1.4. Modelo de la zona muerta

En muchos sistemas físicos, la salida es cero hasta que la magnitud de la entrada alcanza cierto valor. Esta relación entrada-salida es llamada zona muerta (*dead zone* en inglés). Si se considera un motor de corriente directa (CD) en un modelo ideal se asume que a cualquier tensión aplicada en las terminales de la armadura provocará rotación, dado esto una tensión mínima aplicada significaría un movimiento de magnitud equivalente. En la realidad, debido a la fricción en el eje del motor, la rotación pasará solo si el par generado por el motor es lo suficientemente grande [19]. Otros ejemplos de elementos físicos que presentan este efecto son servo válvulas, sistemas hidráulicos, sistemas de enfriamiento o calentamiento, entre otros.

La zona muerta es una no linealidad sin memoria, es decir, estática, no depende de valores anteriores de la señal de entrada. Su comportamiento entrada-salida se muestra en la figura 1.10.

$$ZM(u_e(t)) = u_f(t) = \begin{cases} u_e(t) - b, & \text{si } u_e(t) \geq b, \\ 0 & \text{si } -b \leq u_e(t) \leq b, \\ u_e(t) + b, & \text{si } u_e(t) \leq -b. \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Sea  $ZM$  el operador de la zona muerta es decir  $u_f(t) = ZM(u_e(t))$ .

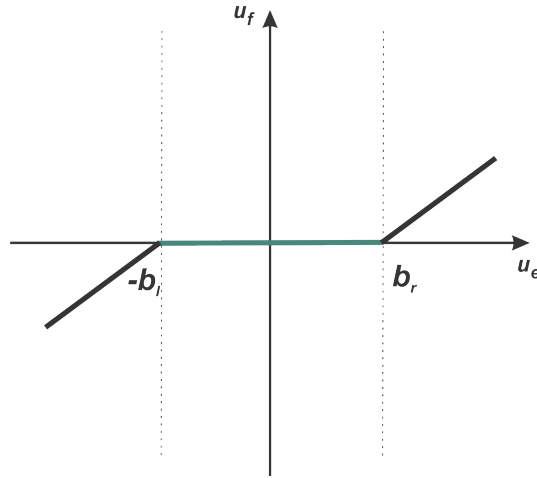


Figura 1.10: Zona muerta.

En algunos casos este tipo de no linealidad es deseable ya que reduce el movimiento dados errores pequeños, por lo tanto puede ser utilizado para aumentar el ciclo de vida del actuador. Sin embargo, el tamaño de la banda de la zona muerta debe elegirse cuidadosamente ya que también puede incrementar el error en estado estacionario si sobrepasa un valor límite [27].

## 1.5. Modelo de la inversa de la zona muerta

El objetivo de la inversa de la zona muerta es anular la zona muerta tal que  $u_a(t) = u_f(t)$  para cualquier entrada  $u_a$ . De la misma manera que para el backlash se sigue el mismo principio de bloques en cascada para la cancelación como se muestra figura 1.11, definiendo  $ZMI(\cdot)$  como el operador para la zona muerta inversa.

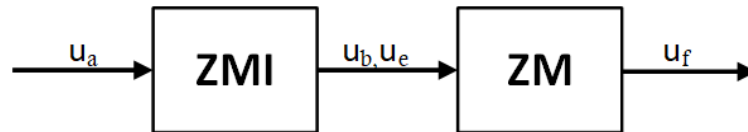


Figura 1.11: Diagrama a bloques zona muerta inversa-zona muerta.

Matemáticamente, la relación entre  $u_a$  y  $u_b$ , la cual especifica la inversa de la zona muerta, se define como en la ecuación (1.5.1).

$$ZMI(u_a(t)) = u_b(t) = \begin{cases} \frac{u_a(t)}{m_r} + b_r & \text{si } u_b > 0, \\ 0 & \text{si } u_a > 0 \\ \frac{u_a(t)}{m_l} + b_l & \text{si } u_a < 0. \end{cases}, \quad (1.5.1)$$

Conociendo los parámetros  $b_r, b_l$  y considerando  $m_r = m_l = 1$  sin perder generalidad al construir la inversa como se muestran la figura 1.12 es posible cancelar la zona muerta de tal manera que  $u_a = u_f$ .

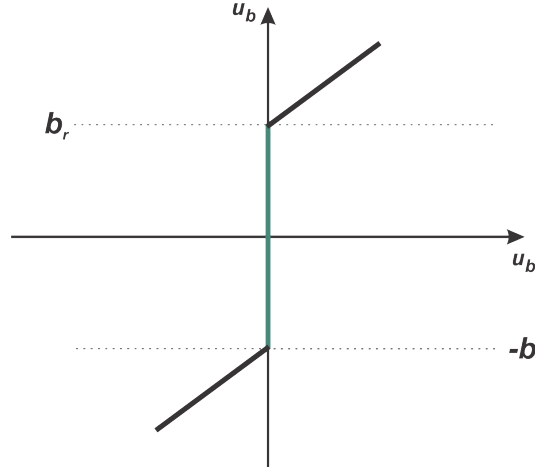


Figura 1.12: Zona muerta inversa.

La compensación inversa para la zona muerta ha sido ampliamente estudiada, un ejemplo de su aplicación práctica se presenta en [28] donde se utiliza para compensar la zona muerta en una grúa de desplazamiento horizontal con un motor de CD como actuador, en este caso de estudio también se considera la saturación combinada con la zona muerta y backlash.

## 1.6. Equivalente de saturación

El equivalente en saturación se refiere a una metodología introducida en [8] la cual afirma que si existe una saturación combinada con una no linealidad tal como el backlash o la zona muerta a la entrada del sistema al combinarla con la inversa por la derecha simplifica los tres términos a una saturación con un nivel diferente, adicionalmente en [8] se propone otra metodología en la cual se demuestra que la interconexión ilustrada en la figura 1.13 es óptima, en el sentido de que asegura el mejor emparejamiento entre  $u_a$  y  $u_d$ .

Cabe destacar que en el trabajo antes menciondo tambien se consideran estos resultados para la no linealidad que se da debido a al fricción estática (stiction en inglés). Pero para la finalidad de este trabajo solo se considerarán las mencionadas con anterioridad.

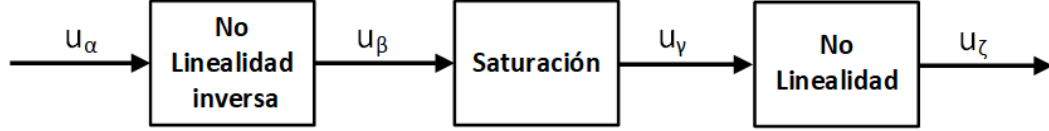


Figura 1.13: Diagrama a bloques del equivalente en saturación.

Las señales  $u_\alpha$ ,  $u_\beta$ ,  $u_\gamma$  y  $u_\zeta$  ilustradas en 1.13 definirán entradas o salidas de los bloques de la no linealidad o la combinación a la que se refieren.

Para las señales  $u_\alpha$  y  $u_\zeta$ , sea la norma  $\|\cdot\|$  una función que satisface las siguientes propiedades [29]:

- $\|u_\alpha\| > 0$  para  $u_\alpha \neq 0$ ,
- $\|cu_\alpha\| = |c| \|u_\alpha\|$  para cualquier escalar  $c$ , y
- $\|u_\alpha + u_\beta\| \leq \|u_\alpha\| + \|u_\beta\|$ .

Definiendo el espacio  $L_p$  como el conjunto de funciones diferenciables continuas a trozos. Sea  $u_\alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$  tal que:

$$\|u_\alpha\|_p = \left( \int_0^\infty |u_\alpha(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (1.6.1)$$

Considerando que  $u_\alpha \in L_p$  es diferenciable a trozos.

Se define  $\psi(u_\alpha)$  como una no linealidad de la forma de (1.6.2)

$$\psi : L_p[0, \infty) \rightarrow L_p[0, \infty) \quad (1.6.2)$$

### 1.6.1. Equivalente para zona muerta

**Teorema 1.6.1** [18] Sea  $x(t) = ZM(sat_v(ZMI(u_a(t))))$ , vease la figura 1.13 considerando el los bloques de no linealidad inversa y no linealidad como zona muerta inversa y zona muerta, entonces se puede afirmar que:

$$ZM(sat_v(ZMI(u_a(t)))) = sat_{v-b}(u_a) \quad (1.6.3)$$

para  $b > 0$ .

**Demostración.** Esta prueba se detalla para el caso del  $u_a > 0$ , de la misma manera se duce para  $u_a < 0$ , Entonces:

$$sat_v(BI(u_a(t))) = sat_v(u_a(t) + c) \quad (1.6.4)$$

$$= \begin{cases} v & \text{si } u_a(t) + c \geq v \\ u_a(t) + c & \text{si } u_a(t) + c < v \end{cases} \quad (1.6.5)$$

Sea  $v > b$ ,  $sat_v(ZMI(u(t)))$ . Por lo tanto de la ecuación (1.4.1).

$$ZM(sat_v(ZMI(u_a(t)))) = sat_v(ZM(u_a(t)) - c) \quad (1.6.6)$$

$$= \begin{cases} v - c & \text{si } u_a(t) + b \geq v \\ u_a(t) & \text{si } u_a(t) + b < v \end{cases} \quad (1.6.7)$$

Lo cual puede escribirse tambien de la forma:

$$ZM(sat_v(ZMI(u_a(t)))) = \begin{cases} v - b & \text{si } u_a(t) + b \geq v - b, \\ u_a(t) & \text{si } u_a(t) + b < v - b. \end{cases} \quad (1.6.8)$$

■

En el segundo teorema se muestra que la interconexión propuesta en el teorema 1.6.1 es óptima. De la figura 1.13 considerando el los bloques de no linealidad inversa y no linealidad como zona muerta inversa y zona muerta, la inversa optimiza a (1.6.9).

$$ZMI = \underset{\psi}{argmin} \|u_a - ZM(sat_v(\psi(u)))\| \quad (1.6.9)$$

para cualquier  $p \geq 1$ ,

**Teorema 1.6.2** [18] Si  $ZMI(u_a(t))$  es inversa por la derecha de la zona muerta definida en (1.5.1), entonces para toda señal  $u_a \in L_p[0, \infty)$ , diferenciable a trozos y  $u_a \in L_p$ , se tiene:

$$|u_a - ZM(sat_v(\psi(u_a)))|_p \geq |u_a - ZM(sat_v(ZMI(u_a)))|_p \quad (1.6.10)$$

con  $\psi$  definida en (1.6.2)

**Demostración.** Se obtiene el resultado para  $u_a > 0$ , en el caso para  $u_a < 0$  puede obtenerse de manera similar por simetría.

Asumiendo que  $u_a$ ,  $ZMI(u_a)$ ,  $sat_v(ZMI(u_a))$  y  $ZM(sat_v(ZMI(u_a)))$  son bien definidas.

Teniendo en cuenta que:

$$u_d(t) = ZM(sat_v(ZMI(u_a))) = \begin{cases} v - b & \text{si } u_a(t) \geq v - b, \\ u_a(t) & \text{si } u_a(t) < v - b. \end{cases} \quad (1.6.11)$$

se tiene:



$$u_a(t) - u_d(t) = ZM(sat_v(ZMI(u_a))) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 < u_a(t) < v - b, \\ u_a(t) - v - b & si \quad u_a(t) \geq v - b. \end{cases} \quad (1.6.12)$$

Si  $\psi(u_a(t)) \geq v$ , entonces  $ZM(sat_v(\psi(u_a(t)))) = v - b$ ,

Si  $\psi(u_a(t)) < v$ , entonces  $ZM(sat_v(\psi(u_a(t)))) < v - b$ .

Por lo anterior:

$$|u_a(t) - ZM(sat_v(\psi(u_a(t))))| = |u_a(t) - v + b| \quad para \quad \psi(u_a(t)) \geq v.$$

$$|u_a(t) - ZM(sat_v(\psi(u_a(t))))| > |u_a(t) - v + b| \quad para \quad \psi(u_a(t)) < v.$$

Entonces:

$$|u_a - ZM(sat_v(\psi(u_a)))|_p \geq |u_a - ZM(sat_v(ZMI(u_a)))|_p.$$

■

Combinando los resultados de los teoremas anteriores implica que cuando la entrada a la planta es afectado por saturación y zona muerta el insertar la no linealidad inversa permite el uso de un controlador para plantas saturadas. Sin embargo se debe tomar en consideración que las restricciones serán de niveles menores.

### 1.6.2. Equivalente para *backlash*

Considerando  $m_l = m_r = 1$  y  $c_l = c_r$ .

**Teorema 1.6.3** [18] *Considerando el sistema de bloques interconectados en cascada de figura 1.13, siendo la no linealidad el backlash en tiempo continuo y su respectiva inversa, tomando en cuenta los operadores descritos en (1.1.3), (1.3.1) y (1.2.3), entonces para  $v > c$  y para una señal  $u_b$  se tiene:*

$$BI(sat_v(B(u_b(t)))) = sat_{v-c}. \quad (1.6.13)$$

De igual manera que para la zona muerta pero ahora considerando el Teorema 1.6.3, lo cual significa que la inversa del *backlash* optimiza la ecuación 1.6.14.

$$BI = \underset{\psi}{argmin} \|u_b - B(sat_v(\psi(u)))\|. \quad (1.6.14)$$

**Teorema 1.6.4** [8] Si  $BI(u_b(t))$  es la inversa por la derecha del backlash definido en (1.2.3), entonces para toda señal  $u_b \in L_p[0, \infty)$ , diferenciable a trozos y  $u_b \in L_p$ , se tiene:

$$\|u_b - B(sat_v(\psi(u_b)))\|_p \geq \|u_b - B(sat_v(BI(u_b)))\|. \quad (1.6.15)$$

con  $\psi$  definida en (1.6.2).

$$u_e(t) = \begin{cases} v - c & \text{si } u_b \geq v - c, \\ u_b & \text{si } |u_b| \leq v - c, \\ -v + c & \text{si } u_b \leq -v + c. \end{cases} \quad (1.6.16)$$

Esta función equivalente en saturación puede extenderse a una versión en la que considera  $m_l \neq m_r$  y  $c_l \neq c_r$ . La diferencia reside en que los niveles dentro de los cuales va existir la saturación diferirán uno respecto a otro.

**Demostración.** Considerando el diagrama a bloques de la figura 1.13. Tomando las ecuaciones 1.2.1, 1.1.3 y 1.3.1.

Substituyendo  $u_c$  in  $u_d$

$$u_d(t) = \begin{cases} v & \text{si } \frac{u_b}{m_l} - c_l > v \text{ o } \frac{u_b}{m_r} + c_r > v, \\ \frac{u_b}{m_l} - c_l & \text{si } \left| \frac{u_b}{m_l} - c_l \right| \leq v, \\ \frac{u_b}{m_r} + c_r & \text{si } \left| \frac{u_b}{m_r} + c_r \right| \leq v, \\ -v & \text{si } \frac{u_b}{m_l} - c_l > -v \text{ o } \frac{u_b}{m_r} + c_r > -v, \\ u_c(t^-) & \text{otros casos} \end{cases} \quad (1.6.17)$$

Substituyendo  $u_d$  en  $u_e$ :

$$u_e(t) = \begin{cases} m_r(v - c_r) & \text{si } \frac{u_b(t)}{m_r} + c_r > v \text{ o } \frac{u_b(t)}{m_l} - c_l > v, \\ m_r\left(\frac{u_b(t)}{m_r} + c_r - c_r\right) & \text{si } \left| \frac{u_b(t)}{m_r} + c_r \right| \leq v \text{ o } \left| \frac{u_b(t)}{m_l} - c_l \right| \leq v \text{ } (\dot{u}_b > 0), \\ m_l\left(\frac{u_b(t)}{m_l} - c_l + c_l\right) & \text{si } \left| \frac{u_b(t)}{m_r} + c_r \right| \leq v \text{ o } \left| \frac{u_b(t)}{m_l} - c_l \right| \leq v \text{ } (\dot{u}_b < 0), \\ m_l(-v + c_l) & \text{si } \frac{u_b(t)}{m_r} + c_r < -v \text{ o } \frac{u_b(t)}{m_l} - c_l < -v, \\ u_b(t^-) & \text{otros casos.} \end{cases} \quad (1.6.18)$$

La expresión anterior se puede reducir a:

$$u_d(t) = \begin{cases} m_r(v-c_r) & \text{si } \frac{u_b(t)}{m_r} + c_r > v \text{ o } \frac{u_b(t)}{m_l} - c_l > v, \\ u_b(t) & \text{si } \left| \frac{u_b(t)}{m_r} + c_r \right| \leq v \text{ o } \left| \frac{u_b(t)}{m_l} - c_l \right| \leq v, \\ m_l(-v+c_l) & \text{si } \frac{u_b(t)}{m_r} + c_r < -v \text{ o } \frac{u_b(t)}{m_l} - c_l < -v. \end{cases} \quad (1.6.19)$$

■

En la prueba se considera el caso en el que  $m_l \neq m_r$  y  $c_l \neq c_r$ , el cuál es un caso mas general.

### 1.6.3. Equivalente para no linealidades combinadas

En este caso solo se considera la combinación de saturación, *backlash* y zona muerta. La combinación se ilustra en el diagrama a bloques de la figura 1.14.



Figura 1.14: Diagrama a bloques de no linealidades combinadas.

Considerando la figura 1.14 los bloques del *backlash* inverso, saturación y *backlash*, aplicando el teorema 1.6.3 se tiene una saturación con un nivel  $v - c$ , como se indica en la figura 1.15. Como se muestra en la figura 1.16 la interconexión dada es similar a la de la figura 1.14.

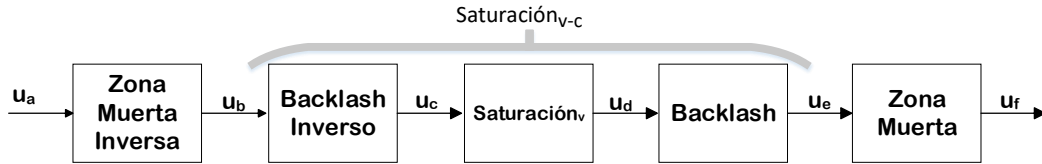


Figura 1.15: Diagrama a bloques de no linealidades combinadas.

De esta forma se tiene entonces la premisa del teorema 1.6.1, por lo cual al aplicarlo el resultado es una saturación de nivel  $v - c - b$ .

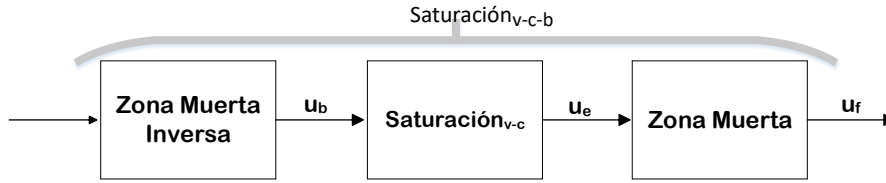


Figura 1.16: Diagrama a bloques de no linealidades combinadas.

Para ejemplificar en la figura 1.17 se muestran las salidas de cada uno de los bloques del diagrama 1.13. Como entrada se tiene una señal sinusoidal de amplitud 1 y los parámetros de las no linealidades se dan en la tabla 1.1.

| Parámetro | Valor  |
|-----------|--------|
| $m_l$     | 1.04   |
| $m_r$     | 0.96   |
| $b_l$     | 0.2cm  |
| $b_r$     | 0.2cm  |
| $c_l$     | 0.14cm |
| $c_r$     | 0.14cm |

Tabla 1.1: Tabla de parámetros de ejemplo equivalente en saturación

Observando las señales de la figura 1.17, la que corresponde a la salida de los bloques de la compensación, es decir  $u_f$  es un equivalente saturado de la señal de entrada  $u_a$ . Esta saturación está dada por (1.6.20) que fue calculada a partir de los parámetros de la tabla 1.1, la cual es el equivalente en saturación final de acuerdo a los teoremas 1.6.1 y 1.6.3.

$$u_f = \begin{cases} 0.62 & \text{si } u_c > v, \\ u_a & \text{si } |u_c| \leq v, \\ -0.67 & \text{si } u_c < -v. \end{cases} \quad (1.6.20)$$

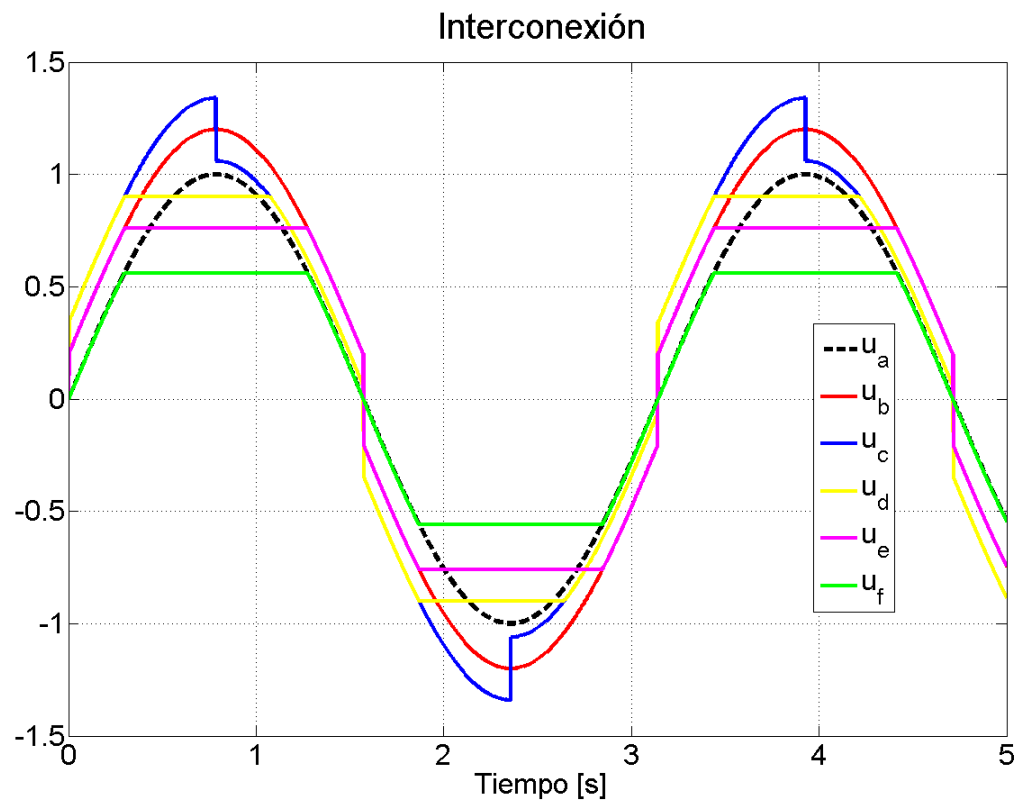


Figura 1.17: Resultado de la interconexión del diagrama 1.13.



# Control predictivo basado en modelo de sistemas electromecánicos

---

## Índice

|                                                                                      |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>2.1. Elementos del MPC</b> . . . . .                                              | <b>26</b> |
| <b>2.2. Formulación del MPC</b> . . . . .                                            | <b>26</b> |
| 2.2.1. Modelo aumentado . . . . .                                                    | 27        |
| 2.2.2. Predicción . . . . .                                                          | 29        |
| 2.2.3. Función de costo . . . . .                                                    | 31        |
| 2.2.4. MPC sin restricciones . . . . .                                               | 32        |
| 2.2.5. MPC con restricciones . . . . .                                               | 33        |
| <b>2.3. Aplicación del equivalente en saturación al MPC</b> . . . . .                | <b>39</b> |
| <b>2.4. PID con <i>anti-windup</i></b> . . . . .                                     | <b>41</b> |
| <b>2.5. Aplicación del equivalente en saturación al PID con <i>anti-windup</i></b> . | <b>43</b> |

---

El control predictivo basado en modelo (MPC, por sus siglas en inglés) está dentro del marco de los controladores óptimos. El concepto básico del MPC se basa en utilizar la dinámica del modelo para predecir el comportamiento del sistema, y optimizar la predicción para tomar la mejor decisión para la señal de control. El modelo del sistema es entonces, el núcleo del MPC [30].

Este controlador ha sido reconocido por la industria debido a factores como: el manejo de sistemas multivariables y la consideración de restricciones dentro de la optimización del sistema. Este trabajo aprovecha especialmente el manejo de restricciones, ya que es una ventaja dentro del esquema de control que se presentará mas adelante.

Históricamente el MPC apareció a finales de los 70's con la introducción de varios artículos, principalmente las publicaciones a seguir: [31], donde se presenta el control predictivo heurístico (MPCH, por sus siglas en inglés) basado en modelo, después conocido como control algorítmico basado en modelo. Otro de los trabajos importantes es [32] con el control de matriz dinámica (DMC, por sus siglas en inglés). Estas metodologías fueron heurísticas, algorítmicas y aprovecharon el creciente potencial de las computadoras digitales de la época.

Hoy en día existen numerosas técnicas de control predictivo basadas en las mismas ideas, de entre las cuales se destacan: Multistep Multivariable Adaptive Control (MUSMAR) [33], Predictive Functional Control (PFC) [34], Generalized Predictive Control (GPC) [35], entre otras.

Como se mencionó anteriormente el control predictivo no es una metodología específica, si no un conjunto de métodos que tienen en común la característica de minimizar una función objetivo mediante el uso del modelo del sistema para obtener la señal de control. Las diferencias entre estas técnicas de control que pertenecen a la familia del control predictivo residen en el uso de diferentes tipos de modelos, por ejemplo el GPC usa el modelo en función de transferencia, mientras que el DMC utiliza un modelo de respuesta basado en la respuesta al escalón, y el PFC emplea el modelo en ecuaciones de estado.

## 2.1. Elementos del MPC

Como ya se mencionó todos los algoritmos de control predictivo poseen elementos en común los cuales se pueden resumir en:

- Modelo para predicción.
- Función de costo.
- Ley de control.

Algunos de los términos comunes dentro del diseño del control predictivo son:

- Horizonte de predicción ( $N_p$ ): define el tamaño del vector de predicción.
- Horizonte de control ( $N_c$ ): define los cálculos del vector de la señal de control, sin embargo, solo el primer elemento del vector se considera.
- Ventana móvil en el tiempo: un lapso de tiempo  $N_p$  la cual va recorriéndose a cada instante de tiempo.

El comportamiento del controlador MPC se puede observar en la figura 2.1 se observa la ventana móvil en un espacio de  $N_p$  instantes de tiempo, dentro de este espacio de tiempo se hace la predicción de la salidas del sistema las cuales están representadas por la línea roja y su referencia en puntos amarillos.

## 2.2. Formulación del MPC

Considerando el modelo en espacio de estados discretos del proceso:

$$x_m(k+1) = A_m x_m(k) + B_m u_m(k) + d_\varepsilon \quad (2.2.1)$$



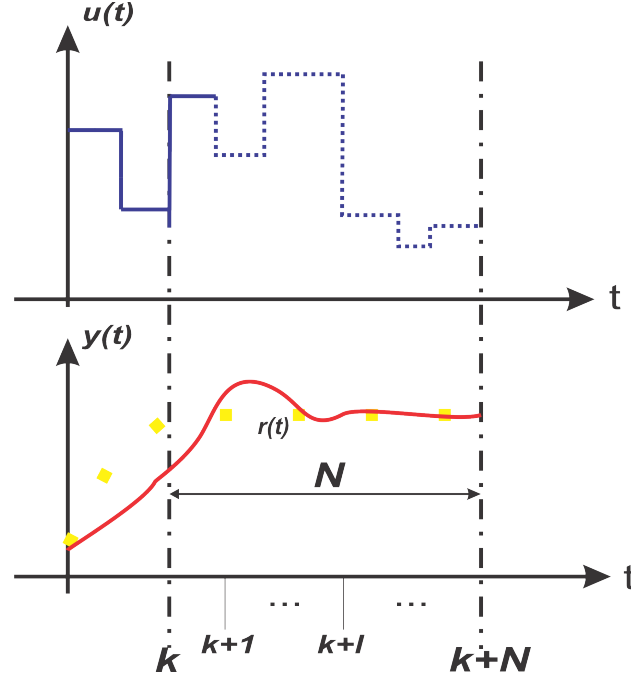


Figura 2.1: Estrategia de horizonte de predicción.

$$y_m(k) = C_m x_m(k), \quad (2.2.2)$$

donde  $u_m$  es la variable manipulada o señal de entrada,  $y_m$  es la salida del sistema y  $x_m$  es el vector de estados de dimensión  $l_1$ .

### 2.2.1. Modelo aumentado

Basado en [36] para este caso de estudio se considera un integrador que se introduce en el diseño del controlador MPC, el cual es también utilizado con los siguientes propósitos:

- El seguimiento referencias constantes.
- Eliminar perturbaciones de tipo constantes.

Para ello se utiliza la metodología a seguir:

Tomando un operador diferencial en ambos lados de la ecuación 2.2.1, se obtiene:

$$x_m(k+1) - x_m(k) = A_m(x_m(k) - x_m(k-1)) + B_m(u_m(k) - u_m(k-1)) + d_\varepsilon. \quad (2.2.3)$$

Redefiniendo las diferencias de las variables de estado como:

$$\Delta x_m(k+1) = x_m(k+1) - x_m(k); \quad \Delta x_m(k) = x_m(k) - x_m(k-1). \quad (2.2.4)$$

Y la diferencia en la variable manipulada:

$$\Delta u_m(k+1) = u_m(k+1) - u_m(k). \quad (2.2.5)$$

Tomando en cuenta lo anterior la ecuación (2.2.3) se puede expresar como:

$$\Delta x_m(k+1) = A_m \Delta x_m(k) + B_m \Delta u_m(k) + d_\varepsilon. \quad (2.2.6)$$

Es necesario remarcar que la entrada del modelo en espacio de estados en la función (2.2.6) es  $\Delta u_m$ . El siguiente paso es conectar  $\Delta x_m$  con la salida. Para hacer lo anteriormente dicho se procede a convertir el estado a:

$$x(k) = \begin{bmatrix} \Delta x_m(k)^T & y(k) \end{bmatrix}^T. \quad (2.2.7)$$

Denotando que:

$$\begin{aligned} y(k+1) - y(k) &= C_m(x_m(k+1) - x_m(k)) = C_m \Delta x_m(k+1) \\ &= C_m A_m \Delta x_m(k) + C_m B_m \Delta u_m(k). \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Uniendo las ecuaciones (2.2.6) y (2.2.8) se obtiene el siguiente modelo en espacio de estados con los estados dados en (2.2.7).

$$\begin{bmatrix} \Delta x_m(k+1) \\ y_m(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_m & o_m^T \\ A_m C_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y_m(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_m \\ C_m B_m \end{bmatrix} \Delta u_m. \quad (2.2.9)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} o_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y_m(k) \end{bmatrix}, \quad (2.2.10)$$

donde  $o_m = [0 \ 0 \ \dots \ 0]$  es un vector de dimension  $l_1$ . De (2.2.10) se determinan las matrices constantes como:

$$A = \begin{bmatrix} A_m & o_m^T \\ A_m C_m & 1 \end{bmatrix}.$$

$$B = \begin{bmatrix} B_m \\ C_m B_m \end{bmatrix}.$$

$$C = \begin{bmatrix} o_m & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces a la matriz  $A$  y los vectores  $B$  y  $C$  se les conoce como el modelo aumentado, y serán utilizados para el diseño del MPC.

### 2.2.2. Predicción

Ya que se ha obtenido el modelo matemático, el siguiente paso para la formulación del controlador predictivo es calcular las predicciones para la salida de la planta considerando las señales de control futuras como variables ajustables.

Asumiendo que los instantes de muestreo como  $k > 0$  y el vector de estados  $x(k)$  disponible. La trayectoria de futura de control está dada por:

$$\Delta u(k), \quad \Delta u(k+1), \dots, \Delta u(k+N_c-1), \quad (2.2.11)$$

donde  $N_c$  fue definido anteriormente como el horizonte de control el cual determina el número de parámetros usados para representar la trayectoria de control futura.

Con la información dada por el estado presente  $x(k)$ , se predican las variables de estado futuras en  $N_p$  instantes de muestreo, siendo  $N_p$  el horizonte de predicción,  $N_p$  es también el tamaño de la ventana móvil. Mostrando las variables de estado futuras:

$$x(k_i+1|k), \quad x(k+2|k), \quad \dots, x(k+h|k), \quad \dots, x(k+N_p|k),$$

donde  $x(k+h|k)$  es el estado predicho con la información dada por  $x(k)$  en el instante  $k+h$ .

Para el cálculo de los estados futuros se usa el modelo en espacio de estados de (2.2.10). A partir de (A,B,C), definidos anteriormente, se calcula secuencialmente usando el conjunto de parámetros futuros dados:

$$\begin{aligned} x(k+1|k) &= Ax(k|k) + B\Delta u(k) \\ x(k+2|k) &= Ax(k+1|k) + B\Delta u(k+1) \\ &= A^2x(k|k) + AB\Delta u(k|k) + B\Delta u(k+1) \\ &\vdots \\ x(k+N_p|k) &= A^{N_p}x(k|k) + A^{N_p-1}B\Delta u(k) + A^{N_p-2}B\Delta u(k+1) \\ &+ \dots + A^{N_p-N_c}B\Delta u(k+N_c-1). \end{aligned}$$

Sustituyendo las variables de estado predichas en la salida de la predicción se obtiene:

$$y(k+1|k) = CAx(k|k) + CB\Delta u(k) \quad (2.2.12)$$

$$y(k+2|k) = CA^2x(k|k) + CAB\Delta u(k|k) + CB\Delta u(k+1) \quad (2.2.13)$$

$$y(k+3|k) = CA^3x(k|k) + CA^2B\Delta u(k|k) + CAB\Delta u(k+1) \quad (2.2.14)$$

$$+ CB\Delta u(k+2) \quad (2.2.15)$$

$$\vdots \quad (2.2.16)$$

$$y(k+N_p|k) = CA^{N_p}x(k|k) + CA^{N_p-1}B\Delta u(k) + CA^{N_p-2}B\Delta u(k+1) \quad (2.2.17)$$

$$+ \dots + CA^{N_p-N_c}B\Delta u(k+N_c-1). \quad (2.2.18)$$

Todas las predicciones esán formuladas en términos de la información del estado actual  $x(k)$  y del control futuro  $\Delta u(k+j)$ , donde  $j = 0, 1, \dots, N_c - 1$ .

Definiendo los vectores siguientes:

$$Y = \begin{bmatrix} y(k+1|k) \\ y(k+2|k) \\ y(k+3|k) \\ \vdots \\ y(k+N_p|k) \end{bmatrix}.$$

$$\Delta U = [\Delta u(k) \quad \Delta u(k+1) \quad \Delta u(k+2) \quad \dots \quad \Delta u(k+N_c-1)].$$

donde, para el caso de una entrada una salida(SISO, por sus siglas en inglés), la dimensión de  $Y$  es  $N_p$  y la de  $\Delta u$  es  $N_c$ . Tomando de (2.2.12) a (2.2.18) se obtiene de forma matricial compacta la expresión de la ecuación (2.2.19), que es la predicción de la salida hasta el instante  $k+N_p$ .

$$Y = Fx(k) + \Phi\Delta U. \quad (2.2.19)$$

donde:

$$F = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{N_p} \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N_p-1}B & CA^{N_p-2}B & \dots & CA^{N_p-N_c}B \end{bmatrix}$$

Una vez que se conocen las predicciones futuras del proceso mediante el modelo, lo siguiente es calcular la señal de entrada que lleve al sistema a un punto deseado, es decir una referencia.

### 2.2.3. Función de costo

Como ya se ha indicado previamente la metodología de control predictivo pertenece al conjunto de controles óptimos, lo cual quiere decir que se va a minimizar una función de costo que refleje el objetivo del control. Para este caso se elige una función de costo cuadrática representada en la ecuación (2.2.20):

$$J(k) = \sum_{j=1}^{N_p} \|y(k+j|k) - r(k+j|k)\|_{Q(j)}^2 + \sum_{j=1}^{N_c-1} \|\Delta u(k+j-1)\|_{S(i)}^2, \quad (2.2.20)$$

donde  $r(k)$  es el punto de la referencia, si se define como vector de dimensión  $N_p$ :

$$R_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} r(k_i). \quad (2.2.21)$$

Entonces la función de costo se puede escribir matricialmente como:

$$J(k) = (R_s - Y)^T Q (R_s - Y) + \Delta U^T S \Delta U, \quad (2.2.22)$$

donde:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Q_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Q_1 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} r_w & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_w & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_w & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_w \end{bmatrix}.$$

En la ecuación simplificada (2.2.22) el primer término esta relacionado con el error entre la salida predicha y el punto de referencia, mientras el segundo término se refiere a la magnitud que se le da al cambio en la ley de control cuando la función de costo se minimiza. La matriz  $Q$  debe ser una matriz diagonal semi-definida positiva, ésta está ligada a la importancia que se le va a dar en la minimización al primer término, es decir al error. Mientras que la matriz  $S$  también diagonal positiva definida que sirve como parámetro de sintonización para manipular el comportamiento a lazo cerrado del sistema a controlar.

Para cumplir el objetivo de esta función de costo, que es encontrar el cambio de la ley de control  $\Delta U$  óptimo mediante su minimización, se substituye  $Y$  con la ecuación (2.2.19) cuyo resultado se da en (2.2.23).

$$J = (R_s - Fx(k))^T Q (R_s - Fx(k)) - 2\Delta U^T \Phi Q (R_s - Fx(k)) + \Delta U^T (\Phi^T Q \Phi + S) \Delta U. \quad (2.2.23)$$

#### 2.2.4. MPC sin restricciones

Si no es necesario considerar restricciones dentro de la optimización de la ley de control es posible realizar la minimización analíticamente mediante el uso del criterio de la primera derivada. A partir de la ecuación (2.2.23) se deriva respecto a  $\Delta U$  :

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta U} = -2\Phi^T Q (R_s - Fx(k_i)) + 2(\Phi^T Q \Phi + S) \Delta U,$$

la condición necesaria para que  $J$  sea un mínimo es que:

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta U} = 0,$$

entonces:

$$-2\Phi^T Q (R_s - Fx(k_i)) + 2(\Phi^T Q \Phi + S) \Delta U = 0,$$

Despejando  $\Delta U$ :

$$\Delta U = (\Phi^T Q \Phi + S)^{-1} \Phi^T Q (R_s - Fx(k_i)). \quad (2.2.24)$$

Como se ha comentado con anterioridad, solo el primer elemento del vector  $\Delta U$  será aplicado como entrada de control en cada instante, por lo tanto:

$$\Delta u = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] (\Phi^T Q \Phi + S)^{-1} \Phi^T Q (R_s - Fx(k_i)). \quad (2.2.25)$$

Este desarrollo considera un sistema SISO, sin embargo el MPC tiene la posibilidad de extenderse al control de sistemas multivariables. A pesar de ello en este trabajo no se consideran tales sistemas por lo cual no se expone la metodología para sistemas MIMO (múltiples entradas múltiples salidas).

### 2.2.5. MPC con restricciones

Debido a las limitaciones físicas naturales de los sistemas reales en general se deben considerar restricciones en los controladores. Un método ampliamente utilizado es la saturación de las señales de entrada para evitar sobrepasar el máximo nivel permitido por la planta. Sin embargo la saturación es una no linealidad que puede ocasionar efectos indeseados. Por otro lado el saturar la señal no garantiza la optimalidad de la ley de control.

Tomando en consideración este factor el control predictivo tiene como ventaja la posibilidad de considerar restricciones dentro de la optimización de su función de costo.

Existen tres tipos de restricciones que se encuentran frecuentemente en aplicaciones prácticas. Las primeras dos se refieren a restricciones impuesta por la variable de control  $u(k)$ , y la última esta ligada a restricciones en la salida  $y(k)$  o el estado  $x(k)$ . A seguir se da una breve explicación de cada una de ellas.

**Restricciones en  $\Delta u$ .** Este tipo de restricciones limitan los cambios de la señal de control, es decir en  $\Delta u$ , a cada instante de muestreo la ley de control solo puede crecer un cierto valor, si se asume la existencia de un límite inferior y uno superior, las restricciones se especifican de siguiente manera:

$$\Delta u^{min} \leq \Delta u \leq \Delta u^{max}. \quad (2.2.26)$$

Se aprecia que en la ecuación (2.2.26) se utiliza un operador *menor o igual que*, esto es importante por que la igualdad juega un papel importante en la solución del problema de control restringido.

**Restricciones en  $u(k)$ .** Este tipo de cotas son las más comunes ya que son las que se dan mas comunmente en sistemas físicos. Se refieren a una limitación máxima en la señal de control, por ejemplo una válvula no puede abrirse mas del 100 porciento. De la misma manera que la restricción de  $\Delta u$  ésta se puede expresar como:

$$u^{min} \leq u \leq u^{max} \quad (2.2.27)$$

**Restricciones en  $y(k)$ .** También es posible especificar un rango de operación para la salida de la planta. Este tipo de restricciones son "suaves", por lo que es necesario utilizar una variable auxiliar  $s_v > 0$  a las restricciones. Esto es debido a que causa cambios bruscos en las variables de control cuando son aplicadas.

$$y^{min} - s_v \leq y(k) \leq y^{max} + s_v \quad (2.2.28)$$

De manera similar es posible imponer restricciones en las variables de estado si estas son medibles o en su defecto imponerlas a las variables observadas. También es necesario tenerlas en forma suave por la misma razón que en el caso de la salida.

### 2.2.5.1. Programación Cuadrática

Ya que se conoce el tipo de restricciones que se impondrán al sistema o al controlador es necesario traducirlas en desigualdades lineales y relacionarlo con el problema de control.

$$u^* = \min \frac{1}{2} u^T Q u + b^T u + f_0 \quad (2.2.29)$$

$$\text{sueto } a_{res} : A_{res} u \leq a \quad (2.2.30)$$

En las ecuaciones (2.2.29) y (2.2.30) se tiene la función de costo cuadrática y las restricciones presentadas de manera general. Esto es un problema de programación cuadrática (QP, por sus siglas en inglés) convexa debido a la función objetivo, y convexa ya que las restricciones son de desigualdad lineal.

Para este tipo de programación cuadrática convexa existen diferentes algoritmos de solución. De éstos existen dos que han demostrado tener un mejor desempeño de acuerdo a [17]: el método de punto interior y la técnica de conjunto activo. Esta última se abordará en esta tesis para la solución del control predictivo.

Como resultado de que la programación cuadrática sea convexa, las condiciones necesarias y suficientes para que  $u$  de la ecuación (2.2.29) sea un óptimo global están dadas por las condiciones *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) [37] las cuales dicen que deben existir vectores (Multiplicadores de Lagrange)  $\lambda \geq 0$ , tal que:

$$Q \Delta u + A_{res}^T \lambda + b = 0 \quad (2.2.31)$$

$$-A_{res} \Delta u + a_{res} \leq 0 \quad (2.2.32)$$

**Método de conjunto activo** La idea principal del método de conjunto activo es reducir las restricciones de desigualdad del problema de QP a una secuencia de restricciones de igualdad, esto se describirá más adelante.

Este método asume que existe una solución realizable. Para tal solución, un subconjunto de las restricciones de desigualdad de la ecuación (2.2.30) están activas, es decir, el subconjunto en el que la parte de la igualdad se mantiene. A este subconjunto se le denomina *Conjunto*



*activo* es posible que esté vacío si ninguna de las desigualdades está activa en el instante que se tiene la solución realizable. El conjunto activo, con  $e$  como subíndice está definido como:

$$A_e u = a_e. \quad (2.2.33)$$

Suponga que en la iteración  $r$ -ésima se tiene una solución factible  $u_r$ . El método de conjunto activo encuentra una solución mejorada  $u_r + \Delta u$  que minimiza la función de costo (2.2.29) siendo satisfechas las condiciones de igualdad de la ecuación (2.2.33), sin tomar en cuenta las restricciones de desigualdad inactivas. Si esta solución es realizable, es decir  $A_{res}(u_r + \Delta u) \geq a_{res}$ , entonces se hace la siguiente iteración  $u_{r+1} = u_r + \Delta u$ . Si no es factible entonces se busca la solución en dirección de  $\Delta u$  para localizar el punto donde se perdió factibilidad.

Para decidir si las soluciones de las iteraciones siguientes a la solución  $r$ -ésima son óptimos globales del problema QP, o si se puede mejorar la solución dada en ese momento. Esto se puede hacer mediante la verificación de las condiciones KKT dadas en (2.2.31)-(2.2.32) donde  $u_{r+1}^*$  las satisface. Sin embargo, es necesario verificar solo aquellos elementos del vector  $\lambda$  que corresponden a las restricciones activas; se encuentra la solución global si todos los elementos son términos no negativos, esto debido a la condición  $\lambda \geq 0$ . De no ser así es necesario rehacer los cálculos.

Entonces suponiendo que uno o más elementos del vector  $\lambda$  son negativos, siendo estos los multiplicadores de lagrange correspondientes a las restricciones de desigualdad activas, el valor negativo indica que la función de costo se puede reducir haciendo la restricción inactiva, es decir moviendo a una solución de  $\Delta u$  dentro del conjunto  $A_{res}\Delta u \leq a_{res}$ . Entonces estas restricciones se mueven al conjunto inactivo. Entonces un nuevo conjunto activo se elige y se repite el proceso.

Nótese que  $J(u_{r+1}) < J(u_r)$  donde  $J(u_r)$  es la función de costo dada en (2.2.29), entonces se garantiza que el proceso iterativo dará como resultado la solución óptima global.

Considerando ahora la minimización de la función de costo en la  $r$ -ésima iteración. La nueva función de costo estará dada por:

$$(u_r^* + \Delta u) = \min \frac{1}{2}(u_r + \Delta u)^T Q u_r + \Delta u + b^T \Delta u + f_0 \quad (2.2.34)$$

$$= (u_r^*) + \min \frac{1}{2}(\Delta u)^T Q \Delta u + b^T \Delta u + f_0. \quad (2.2.35)$$

Entonces la minimización del problema a resolver puede ser escrito como:

$$\min_{\Delta u} \frac{1}{2} \Delta u^T Q \Delta u + b^T \Delta u, \quad (2.2.36)$$

$$\text{sujeto a} \quad : A_{res} \Delta u = 0. \quad (2.2.37)$$

Siendo las ecuaciones (2.2.37) y (2.2.36) un problema de QP con restricciones de igualdad. Este problema se puede resolver mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, usando las condiciones KKT dadas en (2.2.31) y (2.2.32), las cuales expresadas como matriz:

$$\begin{bmatrix} Q & A_{res} \\ A_{res} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.2.38)$$

La ecuación (2.2.38) se puede resolver mediante eliminación Gaussiana, la cual se hace apartir de la factorización de la matriz de la izquierda en un producto de una matriz triangular inferior y la otra triangular superior:

$$\begin{bmatrix} Q & A_{res} \\ A_{res} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \lambda \end{bmatrix} = LU, \quad (2.2.39)$$

Una vez obtenida la factorización se obtiene la solución a a partir de:

$$\begin{bmatrix} -b \\ 0 \end{bmatrix} = L\eta, \quad (2.2.40)$$

Por sustitución directa se encuentra la solución para  $U$ :

$$U \begin{bmatrix} \Delta u \\ \lambda \end{bmatrix} = \eta. \quad (2.2.41)$$

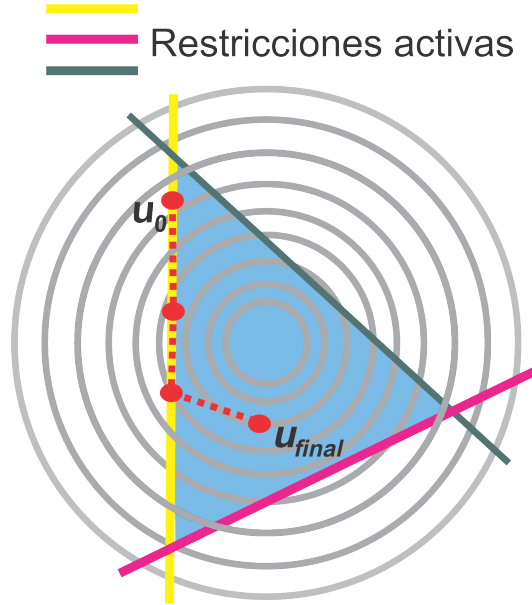


Figura 2.2: Ilustración de método de conjunto activo.

La figura 2.2 muestra el comportamiento general del método de conjunto activo. Siendo las restricciones las rectas que se intersectan, las circunferencias representan la función a minimizar mientras que los puntos rojos son las soluciones iteradas hasta llegar a la óptima.

### 2.2.5.2. Estabilidad del MPC con restricciones

Desde el punto de vista teórico, el problema principal del control MPC ha sido encontrar una teoría de estabilidad. Incluso en su versión sin restricciones puede generar inestabilidad a lazo cerrado. Sin embargo, en el caso no restringido se puede obtener estabilidad asintótica eligiendo una matriz de peso lo suficientemente grande y teniendo un horizonte de predicción largo [38], de acuerdo con [39] para esta versión es suficiente resolver el problema con un horizonte infinito y obtener el controlador lineal cuadrático.

En caso del MPC con restricciones la situación cambia. Para un sistema de entrada inestable restringida, no existe un controlador que asegure estabilidad global, por lo cual se buscará estabilidad local. En general, la estabilidad dependerá de si la solución existe dentro del problema de optimización. Aunque se esté analizando un sistema lineal la introducción de entradas restringidas da como resultado una no linealidad que complica el análisis de estabilidad. Otro de los problemas a los que se enfrenta este análisis es el hecho de que la ley de control es generada mediante la solución dada por una optimización, por lo tanto la ley de control no puede ser expresada de forma analítica. Aún con estos obstáculos los resultados de diferentes análisis de estabilidad pueden encontrarse en [40].

Considere un sistema con modelo en espacio de estados:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu_m(k), \quad (2.2.42)$$

$$y(k) = Cx(k). \quad (2.2.43)$$

El objetivo, como ya se señaló, del MPC es:

$$u^* = \min_{\Delta u(k)} J(k).$$

donde  $J(k)$  esta dado por la ecuación (2.2.20). Haciendo un cambio de variable para demostrar la estabilidad.

$$E = R_s - Y. \quad (2.2.44)$$

Sustituyendo (2.2.44) en (2.2.20) se tiene:

$$J(k) = \sum_{j=1}^{N_p} \|E(k+j|k)\|_{Q(j)}^2 + \sum_{j=1}^{N_c-1} \|\Delta u(k+j-1)\|_{S(i)}^2, \quad (2.2.45)$$

Las restricciones de estado y de entrada se definen como:

$$A_{res}u[k] \leq a_{res}, \quad (2.2.46)$$

$$Gx[k] \leq g, \quad (2.2.47)$$

donde  $A_{res}$ ,  $a_{res}$ ,  $G$  y  $g$  son constantes. Las restricciones de (2.2.47) y (2.2.46) deben ser regiones convexas, no vacías y contener el origen.

A partir del argumento de Lyapunov en [40] se define la estabilidad del controlador MPC en lazo cerrado. Considerando la solución de (2.2.45). Considere la solución para la ecuación (2.2.45) en el tiempo  $k_i$ , y asuma que  $N_c$  es lo bastante grande para que  $E[N_c] = 0$ .

$$\Delta U(k|k) = [\Delta u(k|k) \quad \Delta u(k+1|k) \quad \cdots \quad \Delta u(k+N_c-1|k)]. \quad (2.2.48)$$

El siguiente instante  $k_i + 1$  da una solución como el de la ecuación 2.2.48:

$$\Delta U(k+1|k) = [\Delta u(k+1|k) \quad \cdots \quad \Delta u(k+N_c-1|k) \quad 0]. \quad (2.2.49)$$

$\Delta U(k+1|k)$  es factible en el tiempo  $k+1$ , porque contiene la entrada  $u$  que satisfizo las mismas restricciones en el tiempo  $k$ . Los resultados de las entradas anteriores realizables en un valor de la función objetivo  $J[k+1]$  que satisfacen.

$$J(k+1) = J_{opt}(k) + E(k)^T Q E(k) + \Delta u^T S \Delta u[k]. \quad (2.2.50)$$

Debido a la optimalidad, las salidas de la ecuación anteriores:

$$J(k+1) \leq J_{opt}(k), \quad (2.2.51)$$

$$= J_{opt}(k) - E(k)^T Q E(k) - \Delta u^T S \Delta u[k], \quad (2.2.52)$$

$$\leq J_{opt}(k). \quad (2.2.53)$$

Debido a las desigualdades en (2.2.52) y (2.2.53) la matriz  $Q$  debe ser definida positiva, mientras que  $S$  debe ser semi definida positiva. Por lo anterior la sucesión  $J(k)_{k=k_0}^\infty$  es no creciente. También se limita por debajo de 0. Por lo tanto, esta sucesión converge, es decir  $\lim_{k \rightarrow \infty} J(k)_{k=k_0}^\infty = l$ . Con el fin de demostrar que  $l = 0$ , se reestructura la función (2.2.53) para conseguir que:

$$\begin{aligned} E(k)^T Q E(k) + \Delta u^T S \Delta u[k] &\leq J_{opt}(k) - J_{opt}(k+1) \Rightarrow \\ \lim_{k \rightarrow \infty} E(k)^T Q E(k) + \Delta u^T S \Delta u[k] &\leq J_{opt}(k) - \lim_{k \rightarrow \infty} J_{opt}(k+1) \Rightarrow \\ \lim_{k \rightarrow \infty} E(k) &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta u(k) &= 0. \end{aligned}$$

De esta manera se prueba la estabilidad en lazo cerrado del MPC.

## 2.3. Aplicación del equivalente en saturación al MPC

Conociendo la formulación del controlador y la estructura de la compensación que fue propuesta para las no linealidades, se establece el esquema de control general para el sistema. Recordando que la compensación pretende eliminar la parte no lineal del sistema para aplicar el control lineal.

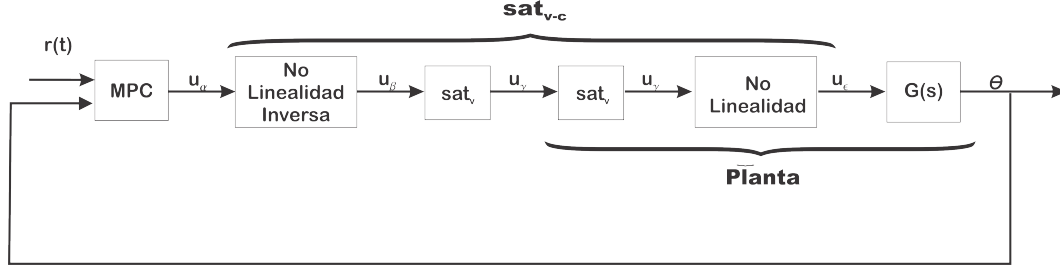


Figura 2.3: Esquema de control del MPC compensando no linealidades.

En el diagrama de la figura 2.3 se puede observar que gracias al principio del equivalente en saturación los bloques en cascada que representan las no linealidades, sus inversas y la saturación, pueden ser expresados como una saturación, la cual se traduce como restricciones para el control predictivo, entonces se podría decir que se tienen dos saturadores en cascada al mismo nivel, esto será retomado mas adelante para definir el esquema para la aplicación.

Dentro del esquema de control presentado en 2.3 cada uno de los bloques tiene una entrada que puede ser minimizada con restricciones, las cuales estarán dadas en dependencia del bloque que la antecede.

La función asociada a  $u_a$ :

$$J_a = \sum_{k=0}^N (y_k - r_k)^T Q (y_k - r_k) + \Delta u_{a_k}^T S \Delta u_{a_k}, \quad (2.3.1)$$

Con:

$$u_a^* = \min_{u_a} J_a \text{ sujeto a: } |u_a| \leq v - c. \quad (2.3.2)$$

La función asociada a  $u_b$ :

$$J_b = \sum_{k=0}^N (y_k - r_k)^T Q (y_k - r_k) + \Delta u_{b_k}^T S \Delta u_{b_k}, \quad (2.3.3)$$

Con:

$$u_b^* = \min_{u_b} J_b \text{ sujeto a: } u_d = B(u_c), u_c = \text{sat}_v(u_b). \quad (2.3.4)$$

La función asociada a  $u_c$ :

$$J_c = \sum_{k=0}^N (y_k - r_k)^T Q (y_k - r_k) + \Delta u_{ck}^T S \Delta u_{ck}, \quad (2.3.5)$$

Con:

$$u_c^* = \min_{u_c} J_c \text{ sujeto a: } |u_c| \leq v. \quad (2.3.6)$$

La función asociada a  $u_d$ :

$$J_d = \sum_{k=0}^N (y_k - r_k)^T Q (y_k - r_k) + \Delta u_{dk}^T S \Delta u_{dk}, \quad (2.3.7)$$

Con:

$$u_d^* = \min_{u_d} J_d \text{ sujeto a: } |u_d| \leq v - c. \quad (2.3.8)$$

Sea  $y_k = y(k|k)$  y  $r_k = r(k|k)$  para simplificar la notación.

La propuesta, hecha originalmente en [18], es implementar el controlador predictivo basados  $J_a$ , por lo cual la ley de control aplicada es aquella que se obtiene de la minimización de la misma, es decir:  $u_b = BI(u_a^*)$ . Con lo cual si se considera  $u_c = sat_v(u_b)$  de las ecuaciones (2.3.3)-(2.3.6) se tiene que:

$$J_c(u) \leq J_c(u_b^*). \quad (2.3.9)$$

entonces  $u_b^*$  optimiza  $J_c$ .

En los teoremas 1.6.1 y 1.6.3 se demuestra que:  $B(sat_v(BI(u)))(t) = sat_{v-c}(u)(t)$  lo cual es mas restrictivo que  $sat_v$  considerada en un principio. Por lo cual la solución es máxima y  $u_d$  no se puede acercar a  $u_a$  mas allá de  $sat_{v-c}$ . En otras palabras, debido a los teoremas para hacer el equivalente en saturación se puede deducir que  $u_d = sat_{(v-c)}(u_a)$ , entonces si se optimiza  $\min_{u_a} J_a$ , la solución  $u_a^*$  será una solución para  $J_d$  también. De aquí se desprende el siguiente teorema.

**Teorema 2.3.1** [18] *Considerando las funciones de costo (2.3.1), (2.3.3), (2.3.5) y (2.3.3) en conjunto con sus soluciones optimizadas (2.3.2), (2.3.4), (2.3.6) y (2.3.8), entonces:*

- La estrategia de control dada por  $u_a^*$  tambien optimiza (2.3.7).
- $J_b(BI(u_a^*)) = J_b(sat_v(BI(u_a^*)))$

En contraste en [41] también se propone un controlador MPC con una compensación de no linealidades, en este caso *backlash* y saturación, sin embargo en ese trabajo se elige a minimizar la función de costo dada por  $J_b$ , la desventaja de esta propuesta es que las restricciones ya no serán del tipo convexo, si no que serían restricciones integrales.

La ecuación (2.3.1), en su forma vectorial puede ser descrita como:

$$J_a = (Y - R_s)^T Q(Y_k - R_k) + \Delta U_{ak}^T S \Delta U_{ak}, \quad (2.3.10)$$

$$\text{Sea } \Delta U_a = \begin{bmatrix} u_{a_k} & u_{a_{k+1}} & \dots & u_{a_{k+N_P}} \end{bmatrix}.$$

Desarrollando la función (2.3.10), dado que tiene características similares a (2.2.20), se obtiene una ecuación similar a (2.2.23) cuya diferencia reside en que  $\Delta U$  se sustituye por  $\Delta U_a$ . De esta manera se obtiene la función a optimizar de (2.2.34) donde:

$$u^T q u = \Delta U^T (\Phi^T Q \Phi + S) \Delta U.$$

$$b^T u = -2\Delta U^T \Phi Q(R_s - Fx(k_i)).$$

$$f_0 = -2\Phi^T Q(R_s - Fx(k_i)).$$

## 2.4. PID con *anti-windup*

A pesar de que algunos aspectos de un sistema de control están basados en la teoría del control lineal algunos efectos no lineales deben ser tomados en cuenta para la aplicación de controladores en la práctica. El fenómeno del *windup* es causado por la interacción entre la acción integral y la saturación.

Las saturaciones que se dan en los actuadores que tienen limitaciones, por ejemplo: un motor tiene una velocidad máxima, una válvula no puede abrirse mas del 100 %, etc. Un sistema de control con un amplio rango de condiciones de operación puede calcular una señal de control que sobrepase los límites naturales del actuador que ejecuta esta ley. Cuando esto sucede la retroalimentación se invalida y el sistema funciona a lazo abierto debido a que el actuador no permite que la cota sea rebasada independientemente de la respuesta del sistema. Si se tiene además una acción integral, ésta seguirá trabajando, es decir, continuará integrando el error aún cuando el actuador esté saturado. Esto se traduce en un término integral muy grande, a lo que se le define como *windup* debido a un término coloquial en inglés. En consecuencia un sistema saturado con un controlador que cuente con una acción integral puede dar como resultados transitorios largos.

Este efecto es muy conocido a nivel industrial desde la época del control analógico y se redescubrió con el control digital. A partir de entonces se han propuesto una gran cantidad de métodos para evadirlo [42]. A aquellas técnicas usadas para evadir este problema del *windup* les llamaremos metodologías *anti-windup*. En esta investigación se considerará una para su posterior aplicación: el cálculo regresivo (*back-calculation* en inglés).

Considerando un controlador proporcional con acción integral y derivativa, es decir PID, ideal, siendo este un controlador no restringido es necesario considerar la saturación fuera del cálculo de la ley de control. Conociendo el efecto *windup* que se da al saturar un sistema de control se aplica la estrategia *anti-windup* de cálculo regresivo. El esquema general para esta metodología se muestra en la figura 2.4.

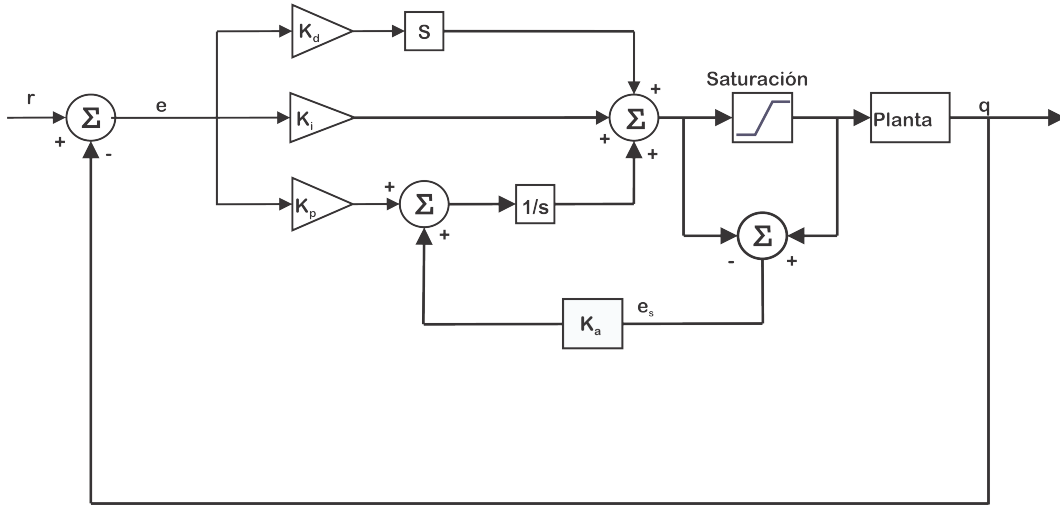


Figura 2.4: Esquema de control del PID con *anti-windup* por cálculo regresivo.

El método *anti-windup* por cálculo regresivo consiste en lo siguiente: cuando el sistema se satura, el término integral se recalcula con la finalidad de que el nuevo valor dé una salida más cercana a los niveles de saturación. La ventaja de esta técnica es que no es necesario reiniciar el integrador instantaneamente si no de forma dinámica. El sistema tiene un lazo de retroalimentación extra que se genera a partir diferencia entre la señal que entra y la que sale del bloque de saturación con lo cual se crea una señal de error  $e_s$ . La señal  $e_s$  se multiplica por la ganancia  $K_a$ . La señal es cero cuando el saturador no está activo, por lo tanto no afectará la operación normal del controlador.

Cuando la señal del actuador esté saturada, entonces el error  $e_s$  es diferente de cero, con lo cual sucede el fenómeno de *wind-up* previamente descrito. Dada la existencia del lazo de retroalimentación hacia el término integral, éste es forzado a disminuir a un valor menor. La entrada de la parte integral del controlador está descrita por:

$$I = K_a e_s + K_p e, \quad (2.4.1)$$

donde  $e = r - \theta$   $r$  es la referencia y  $\theta$  la salida.



Es necesario tener cuidado al introducir la acción *anti-windup* en sistemas cuyo controlador utilice una acción derivativa. Si la constante  $K_a$  se elige muy pequeña errores esporádicos podrían causar saturaciones no deseadas, lo cual puede reiniciar el integrador accidentalmente. Por ello  $K_a$  debe ser menor que  $K_d$  y  $K_p$ .

## 2.5. Aplicación del equivalente en saturación al PID con *anti-windup*

Para la aplicación en simulación y experimental del controlador PID con *anti-windup* se considera el esquema de la figura 2.5.

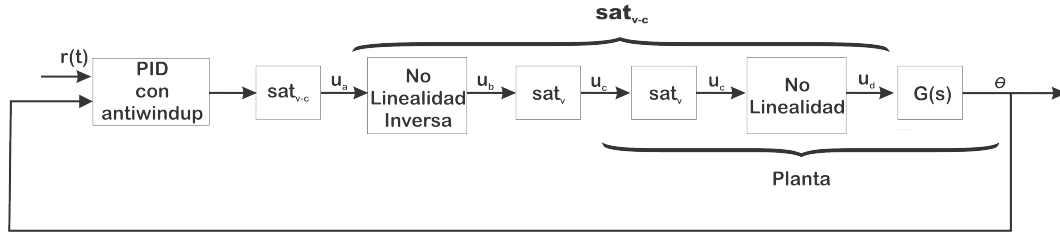


Figura 2.5: Esquema de control PID con *anti-windup* y compensación mediante equivalente en saturación.

En este esquema se hace uso de la propiedad de saturación en la que:  $sat_{(v-c)}sat_{(v-c)} = sat_{(v-c)}$ . Esto es análogo a la versión del MPC ya que se consideran las restricciones dentro del controlador, mientras que en este caso, el PID con *anti-windup*, es necesario considerarlo como una saturación, para aplicar la inversa posteriormente.



# Resultados de simulación y experimentales

## Índice

|                                                                                   |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>3.1. Identificación del sistema</b>                                            | <b>45</b> |
| <b>3.2. Desarrollo Controladores</b>                                              | <b>46</b> |
| 3.2.1. Desarrollo MPC                                                             | 46        |
| 3.2.2. Desarrollo de PID con <i>anti-windup</i>                                   | 47        |
| <b>3.3. Plataforma experimental</b>                                               | <b>48</b> |
| 3.3.1. Plataforma digital                                                         | 49        |
| 3.3.2. Sistema Electromecánico                                                    | 50        |
| <b>3.4. Caracterización de las no linealidades</b>                                | <b>51</b> |
| <b>3.5. Resultados en simulación</b>                                              | <b>52</b> |
| 3.5.1. Simulación de MPC con compensación de <i>backlash</i>                      | 52        |
| 3.5.2. Simulación de MPC con compensación de <i>backlash</i> y zona muerta        | 54        |
| 3.5.3. Simulación de PID con compensación de <i>backlash</i>                      | 54        |
| 3.5.4. Simulación de PID con compensación de <i>backlash</i> y zona muerta        | 55        |
| <b>3.6. Resultados experimentales</b>                                             | <b>58</b> |
| 3.6.1. MPC con compensación de <i>backlash</i> como no linealidad                 | 63        |
| 3.6.2. MPC con compensación de <i>backlash</i> y zona muerta                      | 72        |
| 3.6.3. PID con <i>anti-windup</i> y compensación de <i>backlash</i>               | 74        |
| 3.6.4. PID con <i>anti-windup</i> y compensación de <i>backlash</i> y zona muerta | 78        |
| 3.6.5. PID con <i>anti-windup</i> vs MPC                                          | 79        |

## 3.1. Identificación del sistema

El sistema electromecánico a modelar pertenece a una impresora (que se muestra en la figura 3.3), de la cual se usa solo el motor conectado al cabezal mediante una transmisión mecánica, la cabeza de impresión se considera como carga. El sensor mide la posición lineal de la carga.

Se considera la medición de posición lineal de la carga como la salida del sistema, mientras que la tensión suministrada en las terminales del motor como la entrada para la identificación.

Se utiliza la herramienta ‘system identification toolbox’ de matlab para obtener el modelo del sistema. Esto a partir de los datos de entrada y salida obtenidos mediante un experimento en lazo abierto con la tarjeta myRIO como tarjeta de adquisición.

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0.4262 & -0.001404 \\ 0.0001022 & 1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 4.841 \times 10^{-8} \\ 4.563 \times 10^{-5} \end{pmatrix} u(k), \quad (3.1.1)$$

$$y = (-3.737 \times 10^{-5} \quad 158.2). \quad (3.1.2)$$

El vector de estados está dado por:

$$x(k) = \begin{bmatrix} i(k) \\ \theta_C(k) \end{bmatrix},$$

donde  $i$  es la corriente y  $\theta_c$  es la posición de la carga.

## 3.2. Desarrollo Controladores

### 3.2.1. Desarrollo MPC

A partir del modelo identificado se procede a construir el modelo aumentado del sistema quedando éste como:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_m(k+1) \\ y_m(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4218 & 0 & 0 \\ 0.00012 & 1 & 0 \\ 0.0020 & 168.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y_m(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.42 \\ 0.0065 \\ 0.0758 \end{bmatrix} \Delta u_m, \quad (3.2.1)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y_m(k) \end{bmatrix}. \quad (3.2.2)$$

Eligiendo un horizonte de predicción de  $N_p = 15$  y un horizonte de control de  $N_c = 3$ . Para la predicción de la salida del sistema se calcula  $F$  y  $\Phi$  de la ecuación (2.2.19). Con  $A, B, C$  del modelo aumentado de las ecuaciones (3.1.1) y (3.1.2).

$$F = \begin{bmatrix} 0.002 & 168.50 & 1 \\ 0.005 & 337.00 & 1 \\ 0.008 & 505.50 & 1 \\ 0.012 & 674.00 & 1 \\ 0.015 & 842.50 & 1 \\ 0.018 & 1010.9 & 1 \\ 0.022 & 1179.5 & 1 \\ 0.025 & 1348.0 & 1 \\ 0.029 & 156.5 & 1 \\ 0.032 & 1685.1 & 1 \\ 0.036 & 1853.5 & 1 \\ 0.039 & 2021.9 & 1 \\ 0.043 & 2190.5 & 1 \\ 0.046 & 2358.9 & 1 \\ 0.050 & 2527.5 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 7.5825e-7 & 0 & 0 \\ 1.5262e-6 & 7.5825e-7 & 0 \\ 2.2983e-6 & 1.5262e-6 & 7.5825e-7 \\ 3.0720e-6 & 2.2983e-6 & 1.5262e-6 \\ 3.8465e-6 & 3.0720e-6 & 2.2983e-6 \\ 4.6213e-6 & 3.8465e-6 & 3.0720e-6 \\ 5.3963e-6 & 4.6213e-6 & 3.8465e-6 \\ 6.1713e-6 & 5.3963e-6 & 4.6213e-6 \\ 6.9498e-6 & 6.1713e-6 & 5.3963e-6 \\ 7.7213e-6 & 6.9498e-6 & 6.1713e-6 \\ 8.4964e-6 & 7.7213e-6 & 6.9498e-6 \\ 9.2714e-6 & 8.4964e-6 & 7.7213e-6 \\ 1.0046e-5 & 9.2714e-6 & 8.4964e-6 \\ 1.0821e-5 & 1.0046e-5 & 9.2714e-6 \\ 1.1599e-5 & 1.0821e-5 & 1.0046e-5 \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

La función de costo de (2.2.23) emplea estas dos constantes como parte de la minimización. Estas son las dos variables, además de las matrices de peso, que se pueden calcular fuera de línea ya que  $R_s$  alude a la referencia, mientras que las otras variables son el estado y el cambio en la ley de control, las cuales se miden o calculan en línea.

### 3.2.2. Desarrollo de PID con *anti-windup*

Para el desarrollo del PID se consideran las tres acciones de control en principio en tiempo continuo.

En el caso de la acción derivativa se usa un diferenciador sucio de segundo orden. Éste tiene la forma de la ecuación de estados en (3.2.5).

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma^2 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma^2 \\ 0 \end{bmatrix} e, \quad (3.2.5)$$

donde  $e$  es el error de entrada.

Viendo este derivador como función de transferencia con una ganancia  $K_d$ :

$$D(s) = K_d \frac{\gamma^2 s}{s^2 + 2\gamma s + \gamma^2}. \quad (3.2.6)$$

Para la acción de control Integral se tiene la ecuación dada en (2.4.1) para la ganancia de que se dió en el capítulo anterior. Entonces su función de transferencia está dada por la ecuación (3.2.7)

$$I(s) = \frac{K_a e_s + K_i}{s}. \quad (3.2.7)$$

Uniendo (3.2.6) y (3.2.7) con la acción proporcional se tiene:

$$PID(s) = K_d \frac{\gamma^2 s}{s^2 + 2\gamma s + \gamma^2} + \frac{K_a e_s + K_i}{s} + K_p. \quad (3.2.8)$$

El paso siguiente es la discretización de la función de transferencia presentada en (3.3) con  $\gamma = 100$  y un periodo de muestreo  $T_s = 10ms$ .

$$PID(z) = K_a \frac{0.9848z - 0.9048}{z^2 + 1.81z + 0.8187} + \frac{0.01(K_a e_s + K_p)}{z - 1} + K_p. \quad (3.2.9)$$

### 3.3. Plataforma experimental

Para fines experimentales se desarrolló una plataforma de pruebas basada en un sistema electromecánico conducido por un puente H, el cual es controlado mediante un dispositivo Zynq dentro de una tarjeta de desarrollo myRIO de National Instruments. El software usado para la programación es LabView también de National Instruments, este mismo software es usado para establecer una interfaz gráfica con una PC.

Los elementos mencionados anteriormente se presentan gráficamente en la figura 3.1. En ella se puede notar que el sistema electromecánico consiste, en esencia, en un motor de corriente directa (CD) que tiene una transmisión mecánica conectada a una carga. Es manejado mediante un circuito puente H, el que a su vez es controlado mediante el sistema myRIO.

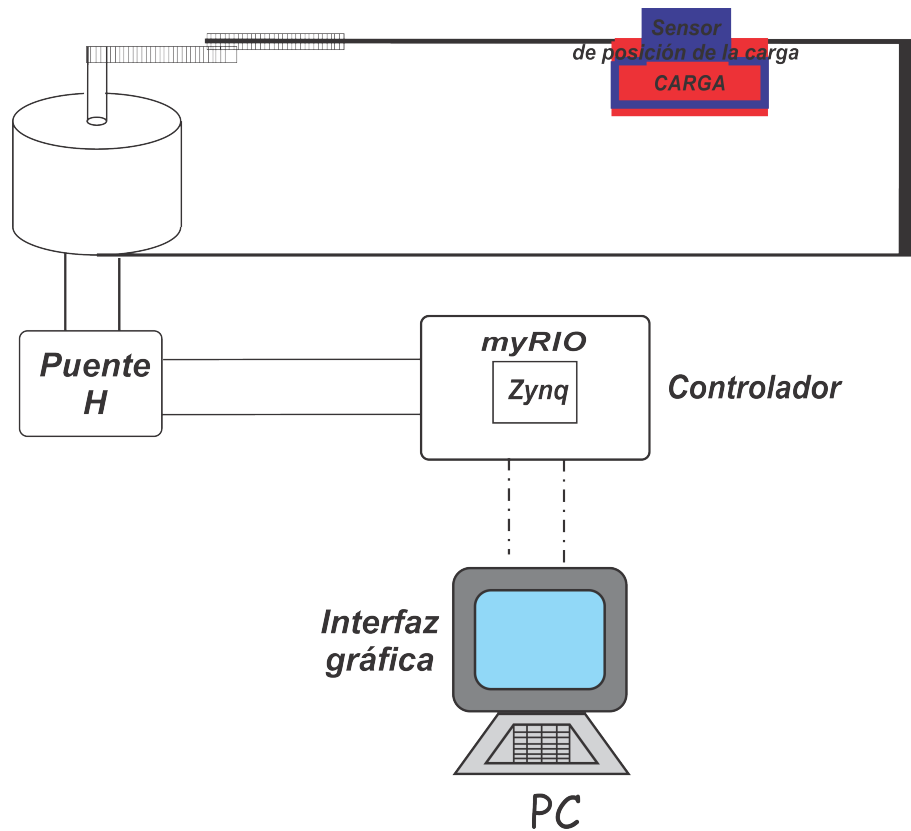


Figura 3.1: Plataforma experimental.

### 3.3.1. Plataforma digital

Como ya se mencionó la tarjeta de desarrollo a utilizar es una myRIO de National Instruments. La cual cuenta con un dispositivo de entradas y salidas reconfigurables (RIO por sus siglas en inglés). Con entradas-salidas (E/S) en ambos lados del dispositivo en forma de conectores MXP y MSP, incluye 10 entradas analógicas, 6 salidas analógicas, 40 líneas de Entradas/Salidas digitales, WiFi, LEDs, un botón, un acelerómetro interno, un FPGA Xilinx y un procesador dualcore ARM CortexA9. La arquitectura de este sistema se muestra en la figura 3.2.

La arquitectura de NI LabVIEW RIO se basa en cuatro componentes: un procesador, una FPGA reconfigurable (Field-Programmable Gate Array), hardware modular de E/S y software de diseño gráfico. Combinados, estos componentes proporcionan la capacidad de crear rápidamente circuitos de hardware personalizado.

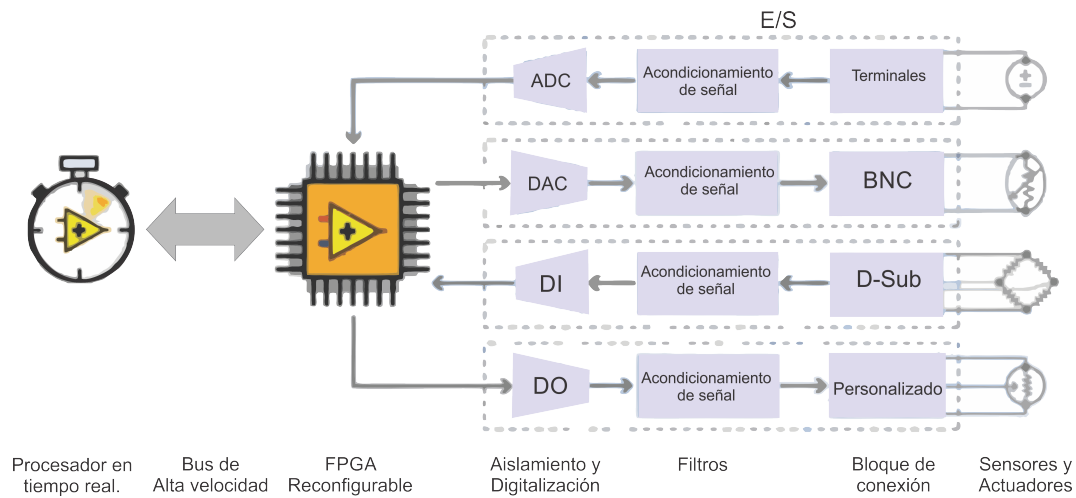


Figura 3.2: Arquitectura del sistema RIO.

### 3.3.2. Sistema Electromecánico

Este sistema es el presentado en la sección de Identificación del sistema. El modelo obtenido en esa sección es el utilizado en el desarrollo del MPC, esta formulación del controlador se utiliza tanto para las simulaciones del proyecto así como para la parte experimental.

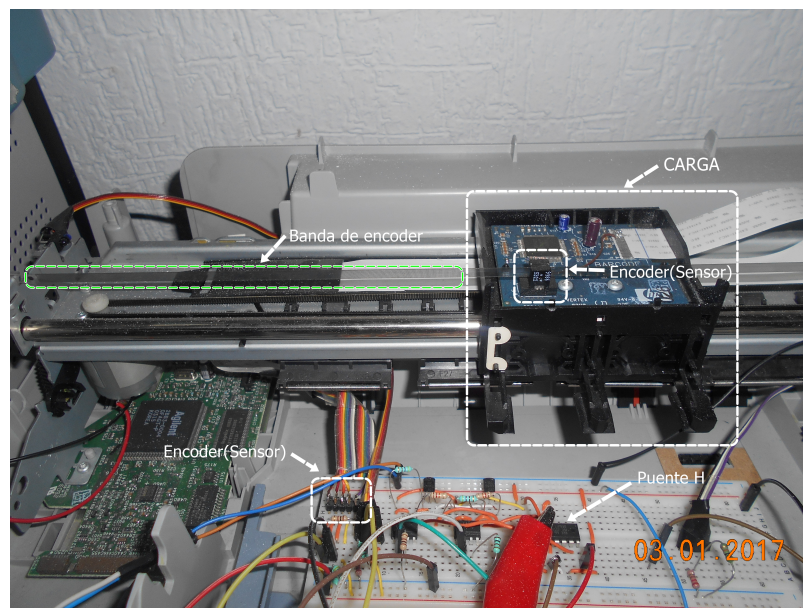


Figura 3.3: Sistema electromecánico.



La figura 3.3 muestra la parte de la plataforma experimental. En esta imagen se aprecia la carga, la transmisión y el motor; el driver del mismo y el acoplamiento de la señal que genera la plataforma digital, es decir la tarjeta myRIO.

### 3.4. Caracterización de las no linealidades

La definición de los parámetros del *backlash*, o llamada caracterización o identificación del *backlash* ha sido ampliamente estudiada. Puede obtenerse mediante el uso de estimadores, por ejemplo en [43] se separa el modelo del *backlash* del modelo del sistema, para así resolver su estimación como un problema quasi-lineal usando métodos iterativos. Otro trabajo orientado a esto es [44] donde se presenta una técnica de identificación basada en un filtro de Kalman lineal.

También se tiene la posibilidad de medir "manualmente" estos parámetros mediante el sensado, como en el caso expuesto en [20] donde toman la posición del rotor del motor y la posición de la carga.

Para la caracterización del *backlash* se hizo mediante un experimento a lazo abierto el cual usando dos sensores de posición, uno para medir la posición del rotor del motor y el segundo para conocer la posición de la carga, los resultados obtenidos se ilustran en la figura 3.4.

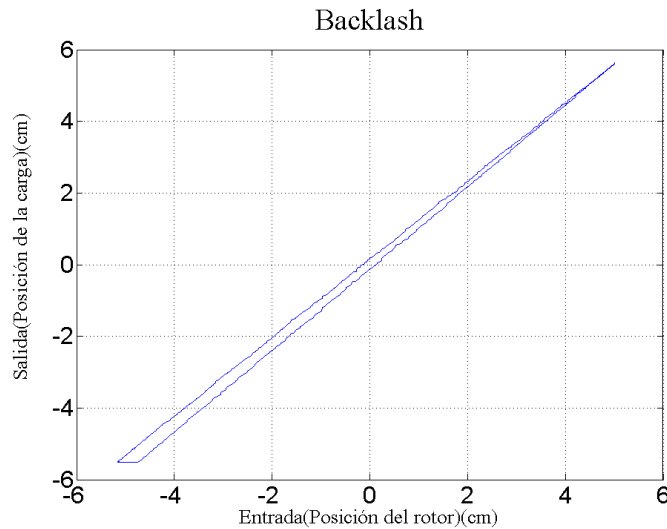


Figura 3.4: Estimación del *backlash*.

Cabe mencionar Con estos resultados experimentales se aproximaron los parámetros que se presentan en la siguiente tabla:

| Parámetros estimados |          |
|----------------------|----------|
| $m_L$                | 1.06     |
| $m_R$                | 0.96     |
| $c_L$                | 0.1423cm |
| $c_R$                | 0.1213cm |

Tabla 3.1: Parámetros estimados

Para el caso de los parámetros de la zona muerta se considera que es simétrica, por lo tanto  $b_l = b_r = b$ . De la misma manera las pendientes tienen magnitud igual a la unidad.

La zona muerta es fácil de caracterizar ya que se sabe que esta se debe a la fricción en el motor. Se obtienen los parámetros que son necesarios mediante un sencillo experimento que consiste en aplicar tensión de un bajo nivel y elevarla en pasos pequeños hasta notar que existe un movimiento en la carga. Siguiendo este procedimiento se llegó al valor de  $b = 0.2$ .

### 3.5. Resultados en simulación

El esquema de control presentado en el capítulo anterior se toma para hacer la simulación a partir de los controladores desarrollados en secciones anteriores de este capítulo. En éstas se considera como la planta  $G(s)$  el sistema identificado de la ecuación (3.1.1) y (3.1.2).

Los parámetros de el *backlash* se toman de la tabla 3.1, mientras que la banda de la zona muerta se definió en  $b = 0.2$ .

#### 3.5.1. Simulación de MPC con compensación de *backlash*

Para la simulación del MPC se usaron las matrices de peso de las ecuaciones (3.5.1) y (3.5.2).

$$Q = \begin{Bmatrix} 5.0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.0 \end{Bmatrix} \quad (3.5.1)$$

$$S = \begin{Bmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 120 \end{Bmatrix} \quad (3.5.2)$$

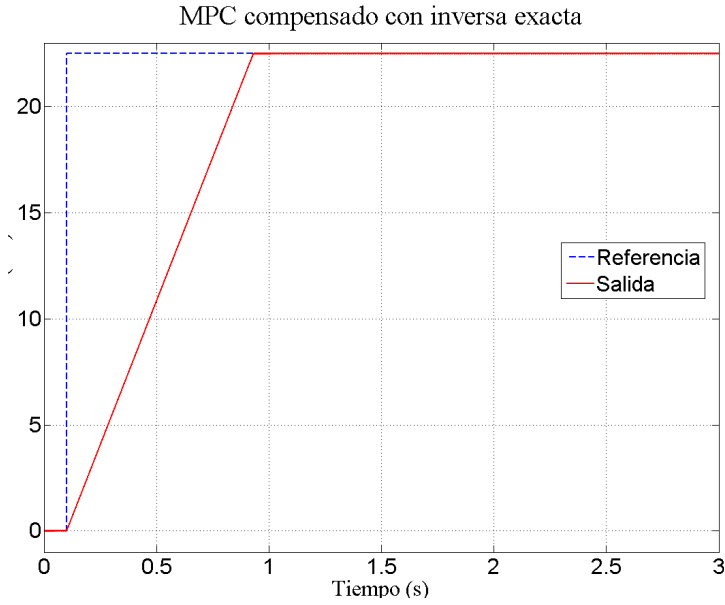


Figura 3.5: Respuesta al escalón del MPC compensado para *backlash* en simulación.

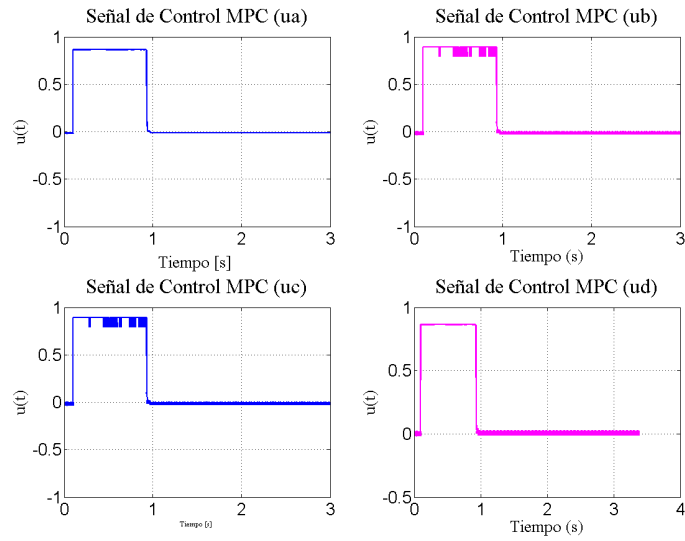


Figura 3.6: Señales de control de la respuesta al escalón del MPC compensado para *backlash* en simulación.

En las figuras 3.5 y 3.6 se muestran los resultados en simulación del controlador MPC en conjunto con la compensación del *backlash*. La señales de control de las cuatro gráficas corresponden a  $u_a$  que es la salida del controlador,  $u_b$  que se refiere a la salida del primer bloque de no linealidad, para este caso es el del *backlash* inverso,  $u_c$  el cual es la salida del

saturador y  $u_d$  salida de la no linealidad. En este caso en la señal de control se observa el fenómeno del *chattering*, el cual fue mencionado anteriormente.

### 3.5.2. Simulación de MPC con compensación de *backlash* y zona muerta

Como complemento se hace la simulación de la respuesta al escalón del controlador MPC con compensación de *backlash* y zona muerta, esta compensación se ilustra en el capítulo 1, la figura 1.15. A partir de esto se aplica el esquema de control que se muestra en el capítulo 2 en la figura 2.3.

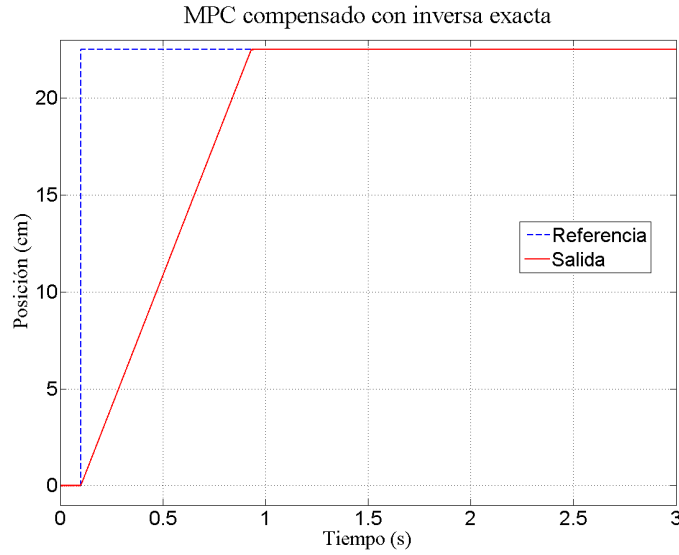


Figura 3.7: Respuesta a escalón del MPC compensado para *backlash* y zona muerta en simulación.

La señal de control en este caso muestra la salida de cada uno de los bloques de la figura 1.15, ésta también muestra *chattering* a la salida de los bloques de las inversas. Para el caso de simulación es posible identificar cada una de las señales de entrada y salida de los bloques de la compensación para el equivalente en saturación, esto con la finalidad de observar su comportamiento ya que experimentalmente no es posible.

### 3.5.3. Simulación de PID con compensación de *backlash*

Con la finalidad de hacer la comparación entre dos controladores se simula un control PID con *anti-windup*, el cual se desarrolló en la sección 3.2.2 a partir del esquema 2.5.

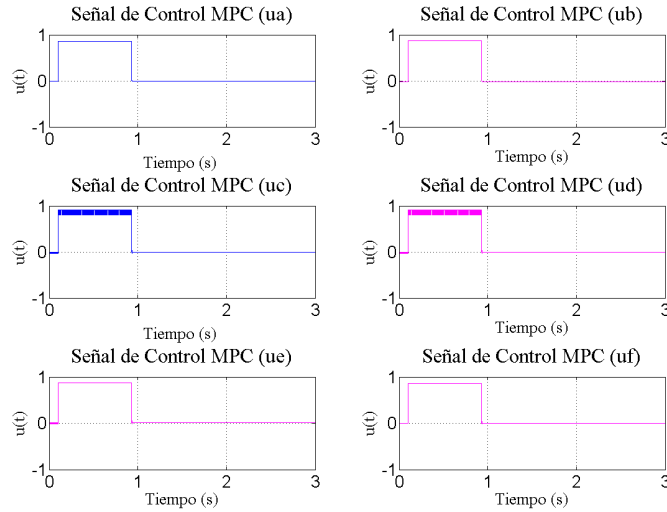


Figura 3.8: Señales de control de la respuesta al escalón del MPC compensado para *backlash* y zona muerta en simulación.

Las ganancias elegidas para la simulación del PID con *anti-windup* son:

| Ganancia     |       |        |
|--------------|-------|--------|
| Proporcional | $K_p$ | 20     |
| Integral     | $K_i$ | 7      |
| Derivativa   | $K_d$ | 0.0001 |
| Derivativa   | $K_a$ | 0.07   |

Tabla 3.2: Ganancias PID para simulación.

La respuesta al escalón del PID con *anti-windup* en la simulación es más suave en comparación con la respuesta del MPC. Mientras que en ambos casos el error es casi cero.

#### 3.5.4. Simulación de PID con compensación de *backlash* y zona muerta

Al igual que con el MPC se compensa el *backlash* y la zona muerta. Se utilizan también las ganancias de la tabla 3.2.

En las figuras 3.11 se muestra la respuesta escalón cuando se inducen de manera simultánea el *backlash* y la zona muerta, mientras que en la figura 3.12 se tienen la ley de control que sale del MPC y cada una de las etapas de los bloques que compensan esta señal para finalmente entrar en los bloques de no linealidades y la planta del sistema.

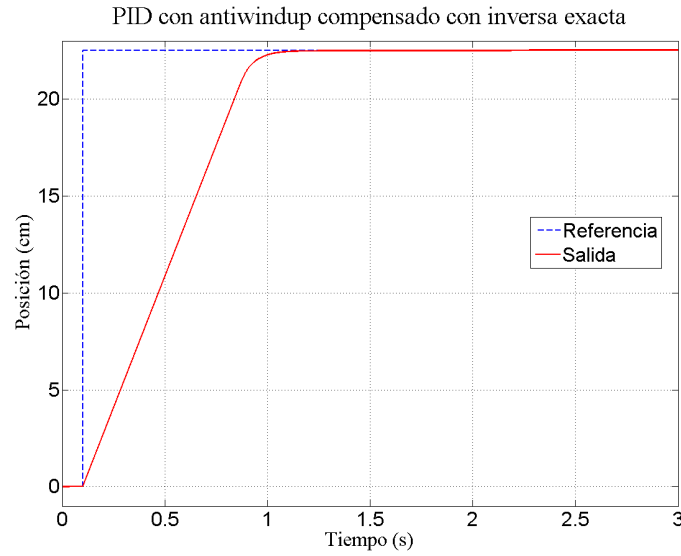


Figura 3.9: Respuesta a escalón del PID con *anti-windup* compensando el *backlash*.

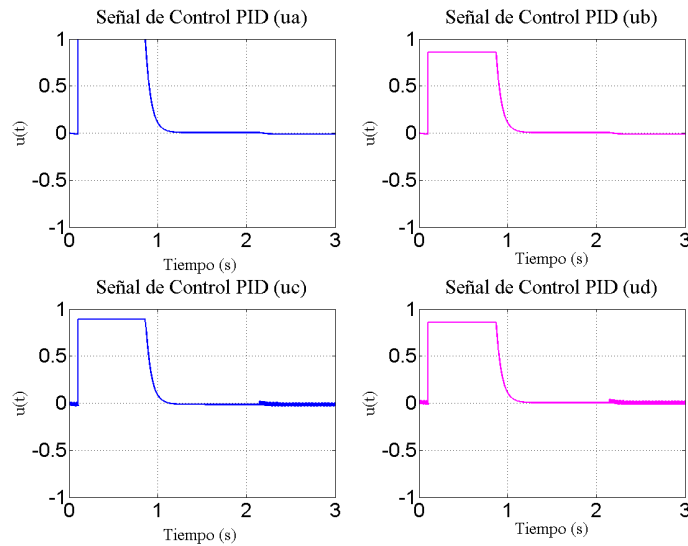


Figura 3.10: Señales de control de la respuesta a escalón del PID con *anti-windup* compensando el *backlash*.

La simulación de estas respuestas al escalón es importante ya que ésto da la posibilidad de observar el comportamiento de la señal de control en cada etapa en el esquema de control y de esta manera se sabe que se puede esperar del comportamiento experimental, ya las señales de salida de los bloques de las no linealidades no podrán ser observados experimentalmente.

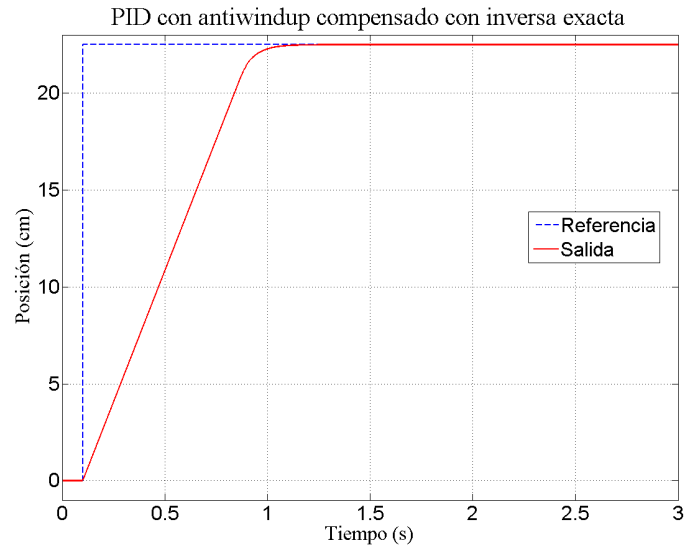


Figura 3.11: Respuesta a escalón del PID con *anti-windup* compensando el *backlash* y zona muerta.

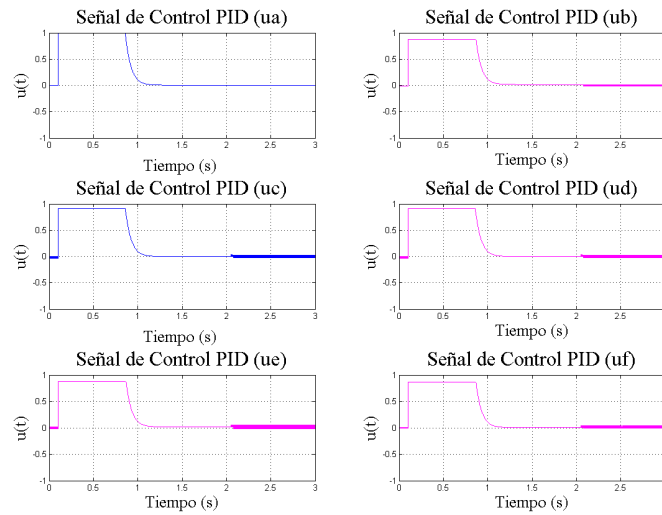


Figura 3.12: Señales de control de la respuesta a escalón del PID con *anti-windup* compensando el *backlash* y zona muerta.

### 3.6. Resultados experimentales

**MPC** Para las pruebas experimentales con el MPC se eligieron las matrices de peso constantes para el diseño del controlador MPC de las ecuaciones (3.6.1),(3.6.2).

$$Q = \begin{Bmatrix} 0.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0.98 & 0 \\ 0 & 0 & 0.98 \end{Bmatrix} \quad (3.6.1)$$

$$S = \begin{Bmatrix} 400 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 400 \end{Bmatrix} \quad (3.6.2)$$

El horizonte de predicción es de 15 instantes de muestreo y el horizonte de control 3.

Las ganancias en (3.6.1) y (3.6.2) para el MPC fueron elegidas empíricamente, es decir, se tomaron aquellos valores con los cuales se encontró un mejor desempeño. Sin embargo, no se puede asegurar que sean las que consiguen el comportamiento con los mejores parámetros.

Aplicando el controlador MPC en plataforma experimental, descrita en la sección anterior, considerando primero el estudio del comportamiento del controlador sin compensación, obteniendo el resultado de 3.13 como respuesta al escalón:

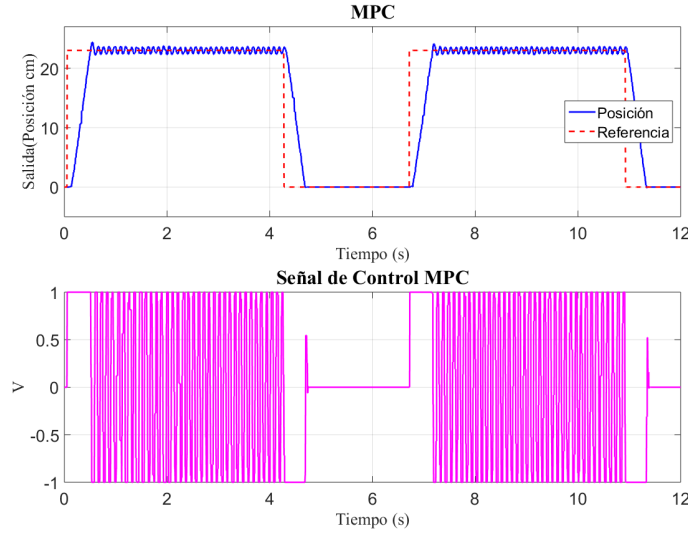


Figura 3.13: Respuesta a escalón del MPC sin compensar.



Se hace la prueba con una trayectoria senoidal se obtiene la gráfica de la figura 3.14. Observando esta misma respuesta senoidal con la referencia y la salida como ejes coordenados en la la figura 3.16.

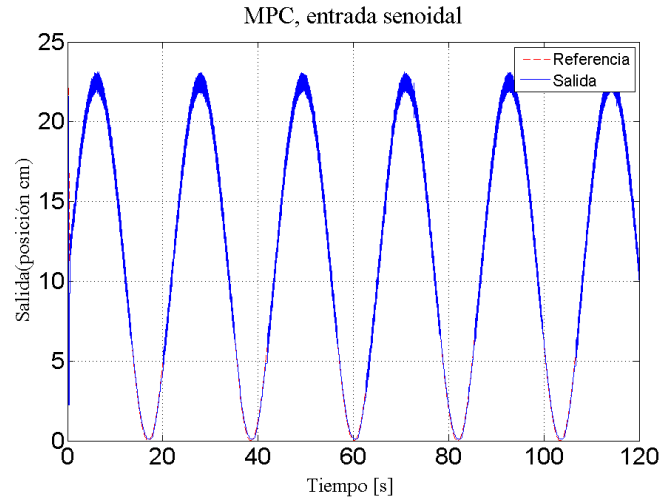


Figura 3.14: Respuesta a una entrada senoidal del sistema con MPC sin compensar.

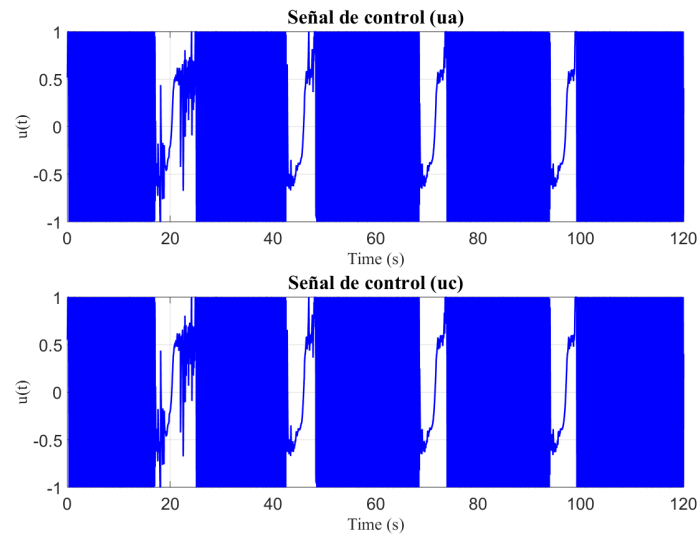


Figura 3.15: Señal de control MPC sin compensar.

Esta respuesta fluctuante es la esperada, dado que es un sistema que presenta no linealidades, estas provocan las oscilaciones, y en otros casos errores de seguimiento mayores a los comunes, que se observan en las figuras 3.13 y 3.14.

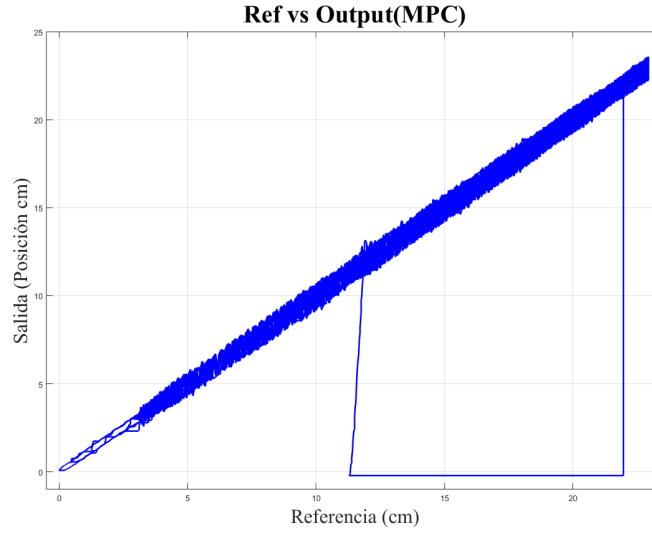


Figura 3.16: Referencia contra salida de la trayectoria senoidal del MPC sin compensar.

**PID con *anti-windup*** En el caso de la prueba experimental con el PID con *anti-windup* se eligieron las ganancias de la tabla 3.3:

| Ganancia     |       |      |
|--------------|-------|------|
| Proporcional | $K_p$ | 5    |
| Integral     | $K_i$ | 1    |
| Derivativa   | $K_d$ | 0.01 |
| Derivativa   | $K_a$ | 0.05 |

Tabla 3.3: Ganancias PID.

La respuesta escalón del controlador con las ganancias de la tabla 3.3 sin ningún tipo de compensación se muestra en la figura 3.17.

El resultado que se observa en la figura 3.17 es similar a la respuesta del controlador MPC de la figura 3.13, esto se debe a que ambos controladores son lineales y no se está tomando en cuenta algún tipo de compensación para no linealidades que aparecen en él.

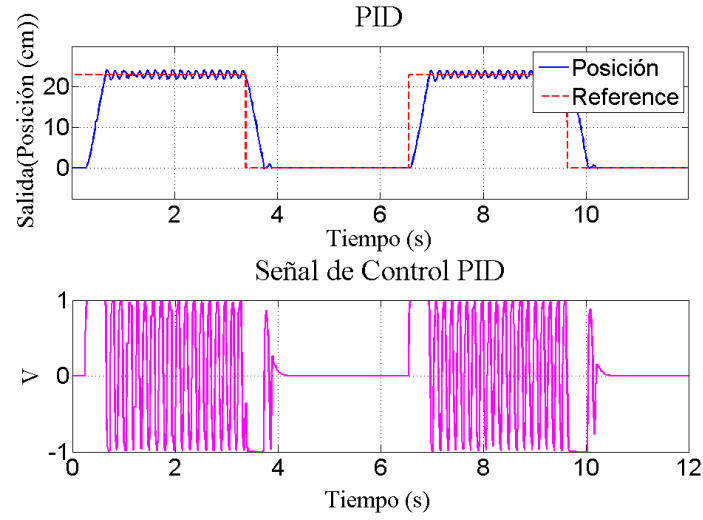


Figura 3.17: Respuesta a escalón del PID con *anti-windup* sin compensar.

Haciendo la prueba con una referencia sinusoidal se obtienen los resultados de las figuras 3.18, 3.19 y 3.20, al igual que en el MPC se observa un comportamiento oscilante.

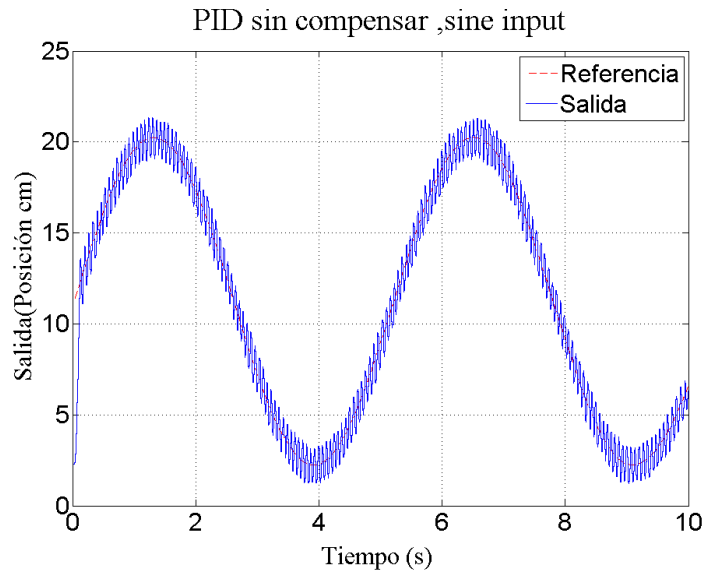


Figura 3.18: Respuesta a una entrada senoidal del PID sin compensar.

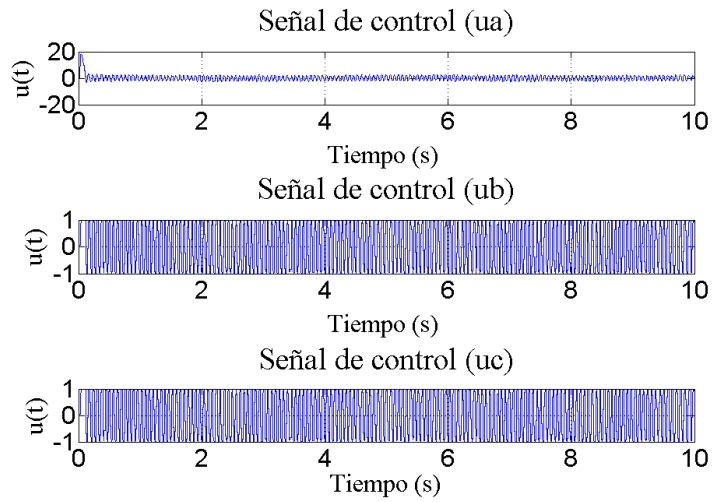


Figura 3.19: Señal de control PID sin compensar.

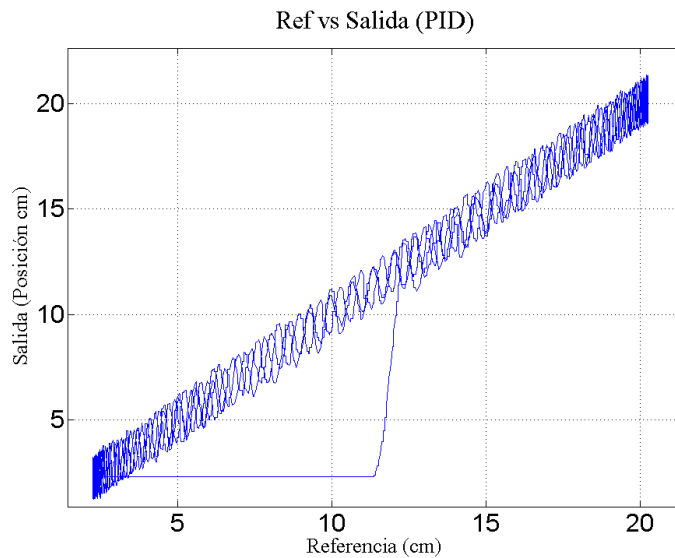


Figura 3.20: Referencia contra salida de la trayectoria senoidal del PID sin compensar.

Es importante destacar que aún con el uso de una técnica de *anti-windup* no se logra mantener el nivel de la salida del controlador dentro de la cota de las restricciones necesarias, por lo cual este presenta saturación, esto se observa en la figura 3.19. A pesar de ello se asume por los conceptos teóricos y simulaciones realizadas que el desempeño en relación al PID común mejora con respecto al sobreimpulso.

### 3.6.1. MPC con compensación de *backlash* como no linealidad

#### 3.6.1.1. Inversa exacta

Usando la inversa exacta de la ecuación (1.1.3) se obtienen los siguientes resultados experimentales.

##### Respuesta al escalón

Para ver el comportamiento del sistema se prueba como inicio a con un escalón de 22.5 cm, lo cual implica un 80% del recorrido total. Las figuras 3.21, 3.22 son la salida y la señal de control a la salida del MPC  $u_a$  y  $u_c$  la señal despues de ser invertida y saturada.

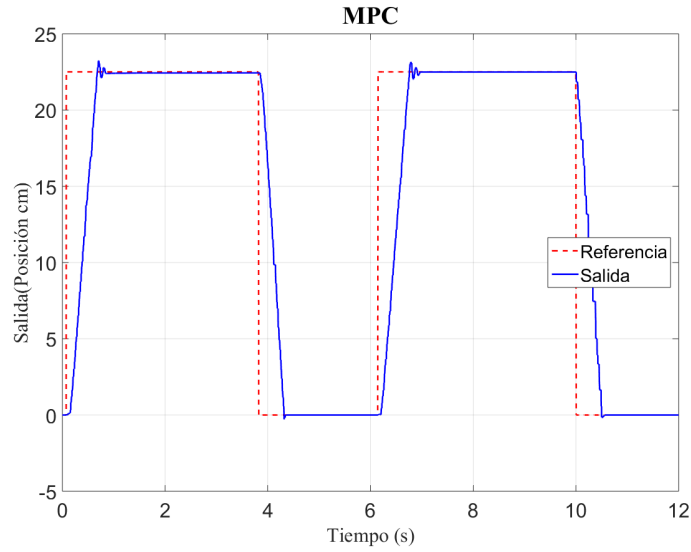


Figura 3.21: Respuesta al escalón del MPC con inversa exacta.

Al considerar la compensación de la no linealidad en serie con la salida del controlador se eliminan las oscilaciones en estado estacionario en la respuesta al escalón, como se puede apreciar en 3.21 comparativamente con 3.13. Sin embargo, como se esperaba, se presenta *chattering* en la señal de control, ésta se puede observar en la figura 3.22, lo cual físicamente representa vibración en el sistema.

##### Seguimiento a trayectoria senoidal

Se propuso el seguimiento de una trayectoria senoidal con una amplitud de 22.5 cm y una frecuencia de 0.5 Hz.

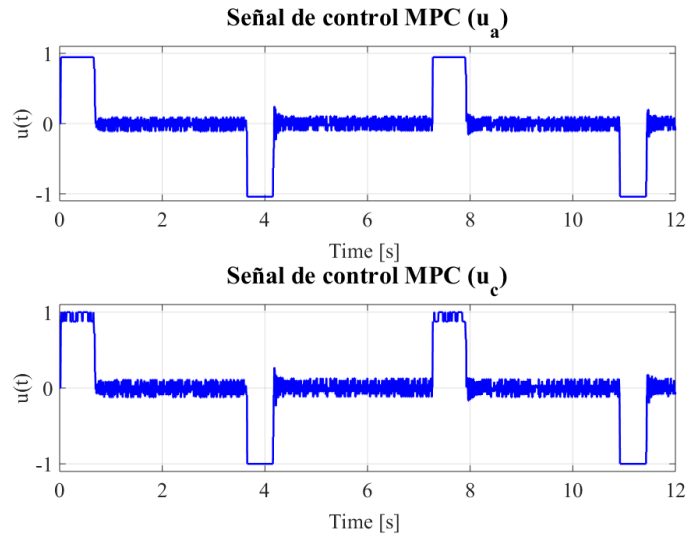


Figura 3.22: Señal de control MPC con inversa exacta.

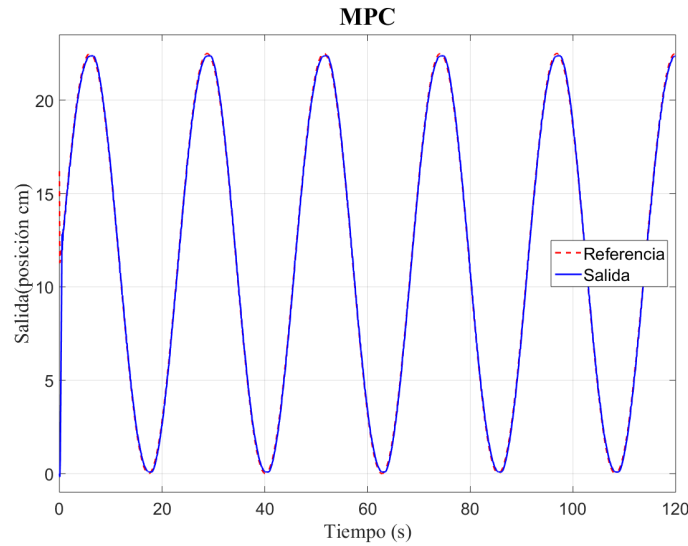


Figura 3.23: Respuesta a una entrada senoidal del MPC compensada con inversa exacta.

Al igual que el caso de la referencia escalón, en el uso de la senoide para el seguimiento se suprimen las oscilaciones que se dan originalmente cuando no existe compensación de la no linealidad mediante el uso de la misma. Esto es perceptible si se comparan las figuras 3.14 y 3.23.

La señal de control que corresponde a la respuesta sinusoidal se tiene en la figura 3.24, en esta gráfica se observa el esfuerzo del controlador. La figura 3.24 muestra la señal de control generada por el controlador ( $u_a$ ) y la señal de control a la salida del bloque de saturación

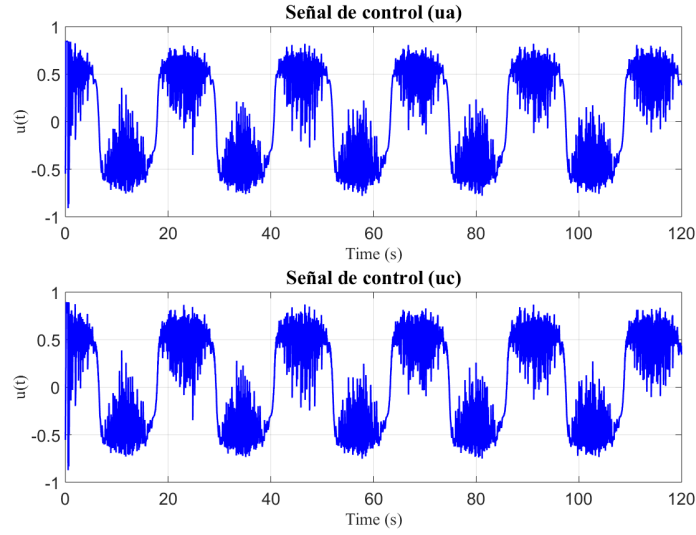


Figura 3.24: Señal de control MPC compensada con inversa exacta.

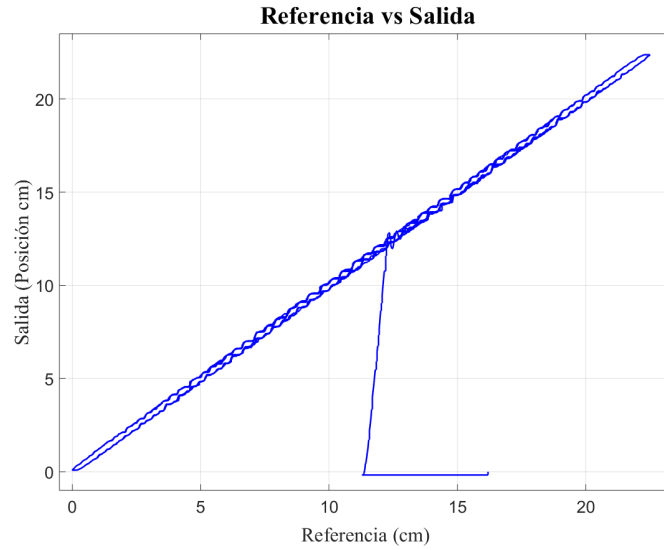


Figura 3.25: Referencia contra salida de la trayectoria senoidal MPC con inversa excta.

$(u_c)$ .

### 3.6.1.2. Inversa filtrada

El filtro elegido para este caso en particular es:

$$F(s) = \frac{100}{s^2 + 40s + 100} \quad (3.6.3)$$

Con frecuencia de corte de  $1Hz$ , discretizando esta función y  $T_s = 10 \text{ ms}$ .

$$F(z) = \frac{0.004391z + 0.003844}{z^2 - 1.662z + 0.6703} \quad (3.6.4)$$

### Respuesta al escalón

Las figuras 3.26, 3.27 son la salida y la señal de control a la salida de la ley control que entrega el controlador y la señal después de la saturación y la inversa filtrada.

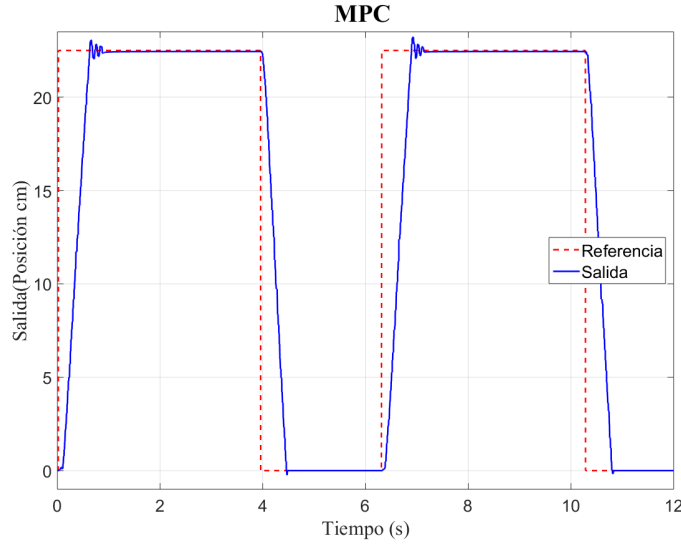


Figura 3.26: Respuesta al escalón del MPC con inversa filtrada.

Haciendo uso de la técnica propuesta en [23], la cual se presentó de forma general en el capítulo 1 de este trabajo, para disminuir el *chattering* de la señal de control, que se da debido al uso de la inversa exacta. Se obtienen los resultado de la figura 3.26 a la salida, esta respuesta cumple con eliminar las oscilaciones, al igual que lo hace la inversa exacta. Por otro lado haciendo uso del filtro dentro de la inversa del *backlash* se disminuye el chatering durante el transitorio en la señal de control, y es casi eliminado en el estado estable.

### Seguimiento trayectoria senoidal

Se propuso el seguimiento de una trayectoria senoidal con una amplitud de  $22.5cm$  y una frecuencia de  $0.5Hz$ .

Considerando esta metodología para referencia senoidal es poco perceptible el fenómeno del *chattering* en la señal de control, pero dado que se tiene la inversión existe una diferencia en los puntos donde la señal entra en en la banda inactiva. Mas adelante se hará una comparación de esta técnica con las otras dos propuestas para estudiar los efectos de las mismas.



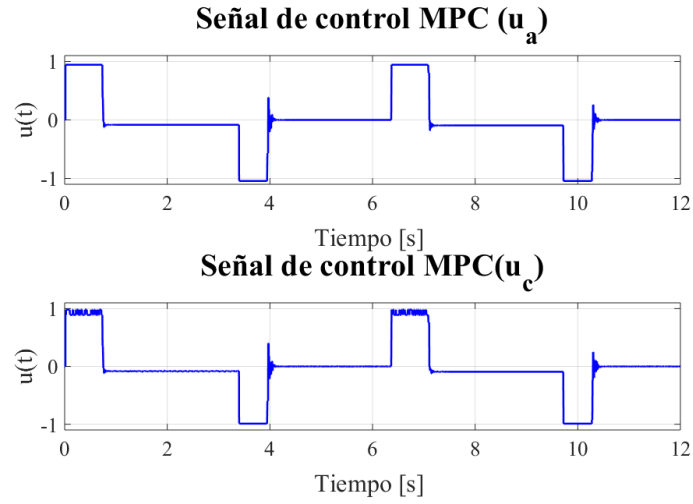


Figura 3.27: Señal de control MPC con inversa filtrada.

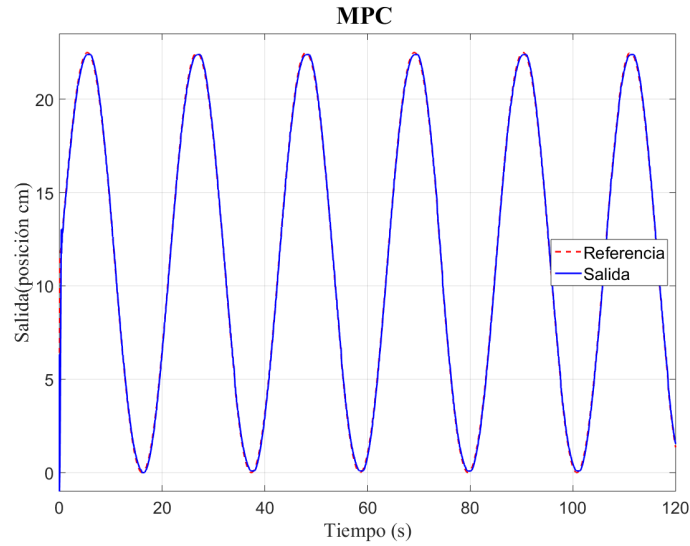


Figura 3.28: Respuesta a una entrada senoidal del MPC con inversa filtrada.

### 3.6.1.3. Inversa aproximada

En este caso se prueba la compensación con la inversa aproximada mediante una función continua de la ecuación (1.2.11).

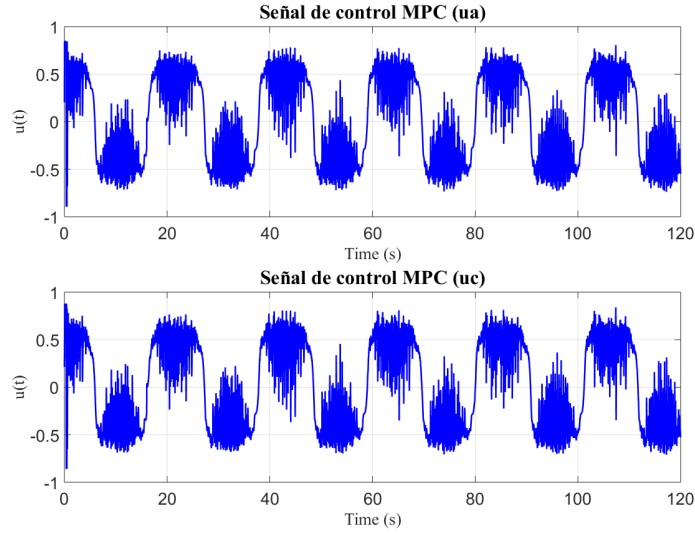


Figura 3.29: Señal de control MPC con inversa filtrada.

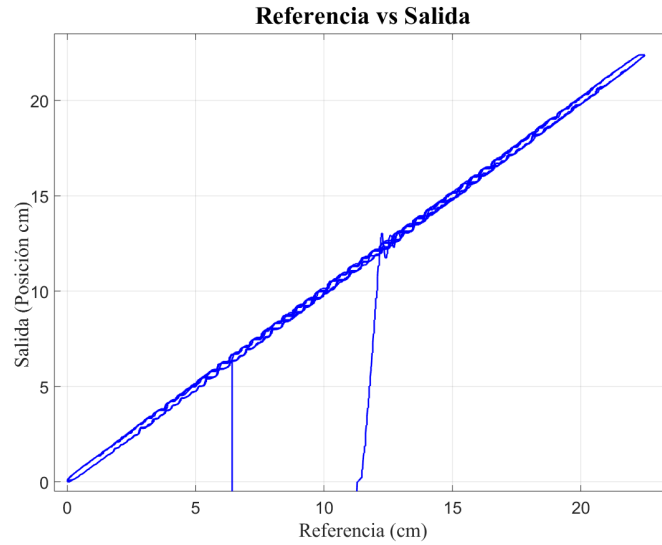


Figura 3.30: Referencia contra salida de la trayectoria senoidal MPC con inversa filtrada.

### Respuesta al escalón

Las figuras 3.31, 3.32 son la salida y la señal de control que entrega el MPC y la señal  $u_c$  que ya fue tratada por el bloque de inversa y saturación. Para ver el comportamiento del sistema se prueba como inicio a con un escalón de 22.5 cm, lo cual implica un 80 % del recorrido total.

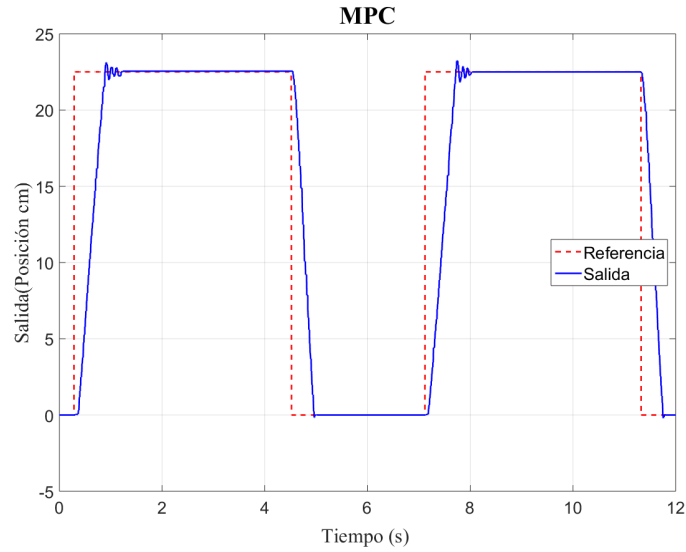


Figura 3.31: Respuesta al escalón del MPC con inversa aproximada.

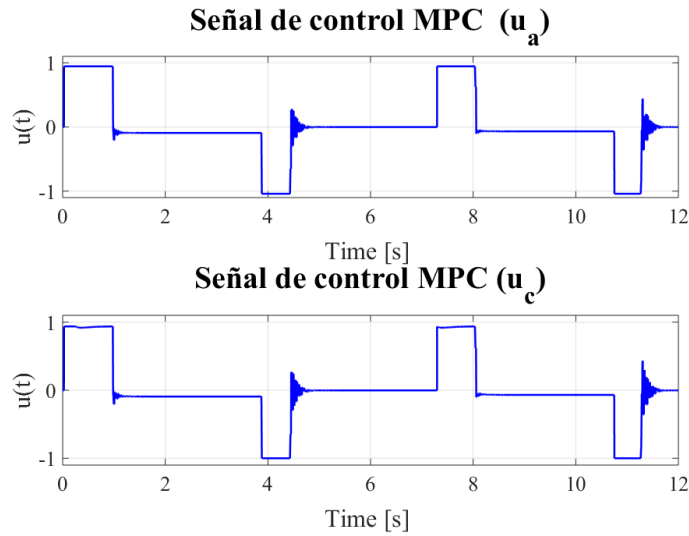


Figura 3.32: Señal de control MPC con inversa aproximada.

La inversa aproximada al ser una función continua no tiene saltos, por lo cual no induce el *chattering* en la señal de control. Lo anterior se verifica en la figura 3.32 donde  $u_c$  que es la señal que ha sido ajustada por la inversa de la no linealidad y la saturación, no tiene oscilaciones de alta frecuencia, con lo cual se cumple con la finalidad para la cual se propuso el uso de esta inversa.

### Seguimiento de trayectoria senoidal

Se propuso el seguimiento de una trayectoria senoidal con una amplitud de  $22.5\text{cm}$  y una frecuencia de  $0.5\text{Hz}$ .

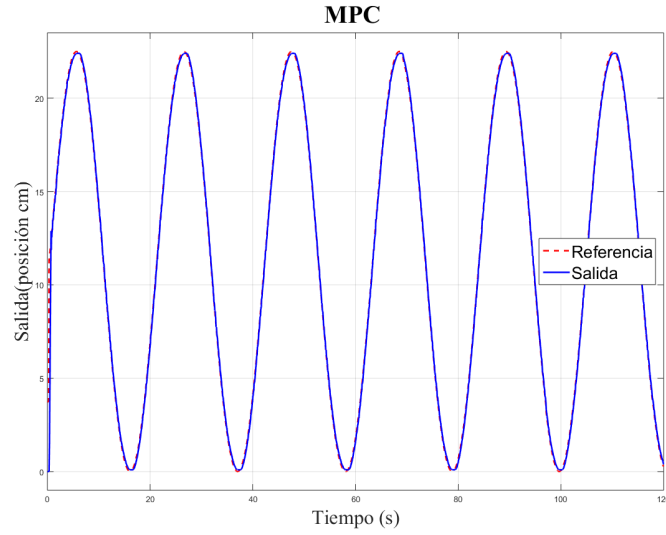


Figura 3.33: Respuesta a una entrada senoidal del MPC con compensacion de inversa aproximada.

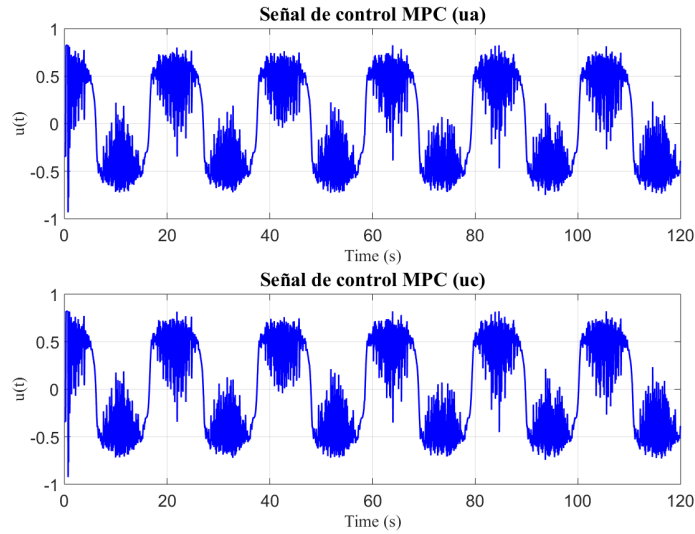


Figura 3.34: Señal de control MPC con compensacion de inversa aproximada.

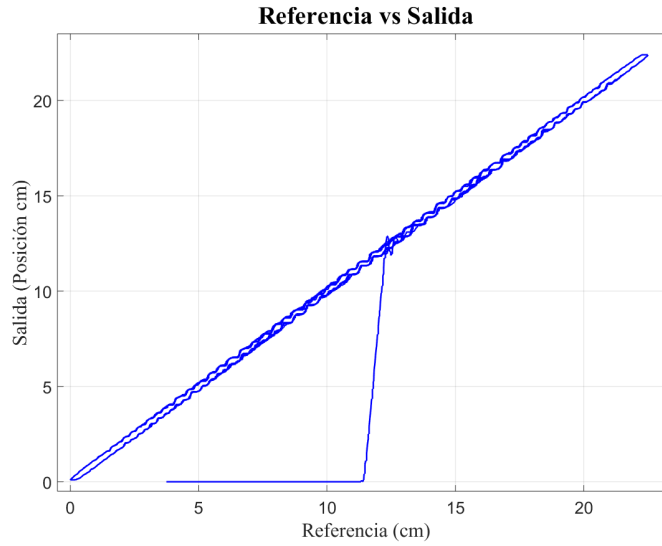


Figura 3.35: Referencia contra salida de la trayectoria senoidal MPC con compensacion de inversa aproximada.

Al igual que en las técnicas inversas anteriores se suprimen las oscilaciones en la respuesta al escalón. En cuestión de la ley de control, con esta metodología se elimina por completo el *chattering*.

#### 3.6.1.4. Comparación de tipos de inversas

En la figura 3.36 se tienen las respuestas al escalón de los tres tipos de inversa propuestos. Los parámetros de desempeño de éstas se describen en la tabla 3.4.

| Parámetros de desempeño   | Inversa exacta | Inversa filtrada | Inversa Aproximada |
|---------------------------|----------------|------------------|--------------------|
| Tiempo de subida          | 0.5918s        | 0.5962s          | 0.602s             |
| Tiempo de establecimiento | 0.98s          | 0.98s            | 0.95s              |
| Error                     | 0.0031         | 0.0027           | 0.0022             |

Tabla 3.4: Parámetros de desempeño.

El uso cualquiera de las tres inversas sugeridas da como resultado una salida sin oscilaciones, con parámetros de desempeño similares. Sin embargo, dado que estas técnicas se propusieron debido al *chattering*. Si se comparan las señales de control de las figuras 3.22, 3.27 y 3.32 es notable que en la segunda (inversa filtrada) se disminuye el fenómeno y en la tercera (inversa aproximada) se elimina por completo.

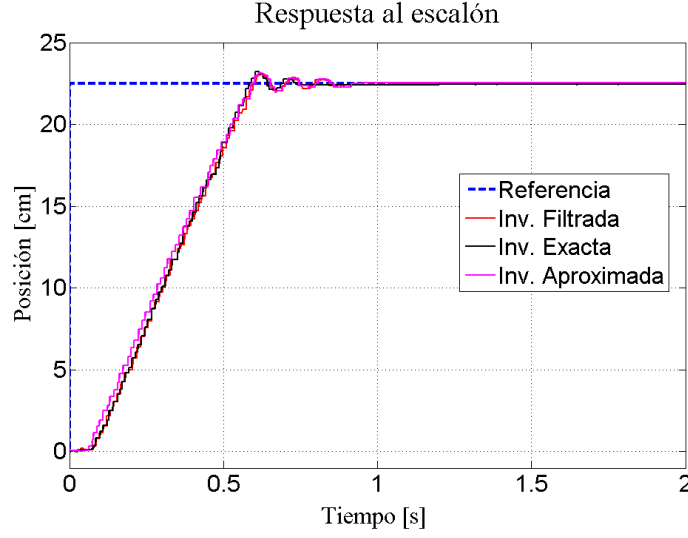


Figura 3.36: Comparación de la respuesta al escalón de las tres versiones de la compensación inversa.

En la cuestión del seguimiento a la referencia senoidal, el error entre estas tres diferentes propuestas son similares, lo cual se esperaba ya que la respuesta al escalón también es similar.

### 3.6.2. MPC con compensación de *backlash* y zona muerta

En un sistema físico se puede dar la combinación de varias no linealidades es posible dado que se compone de diferentes elementos con características particulares. En este caso de estudio dado que dentro del sistema electromecánico se tiene una transmisión mecánica con carga debido a la cual aparece el fenómeno del *backlash*. Este sistema cuenta también con un motor de CD como actuador. Una no linealidad común en éstos es la zona muerta, que en ocasiones es deseable con una banda pequeña.

#### Respuesta al escalón

Las figuras 3.37, 3.38 son la posición y la señal de control a la salida de la ley control que entrega el controlador y la señal  $u_c$  que ya fue tratada por el bloque de inversa y saturación.

Para la compensación del *backlash* se usa la inversa aproximada, sin embargo se utiliza la inversa exacta de la zona muerta por lo cual el *chattering* vuelve a aparecer en la señal de control.

#### Seguimiento trayectoria senoidal

La figura 3.39 muestra la gráfica de la salida del sistema cuando se usa el MPC y la compensación para *backlash* y zona muerta, así como en la gráfica de la figura 3.40 están las señales de control  $u_a$  y  $u_c$ .

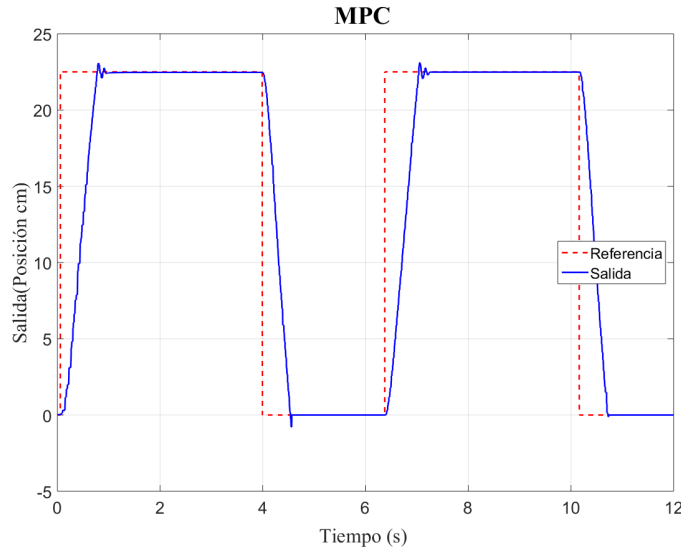


Figura 3.37: Respuesta al escalón del MPC con con compensación de *backlash* y zona muerta.

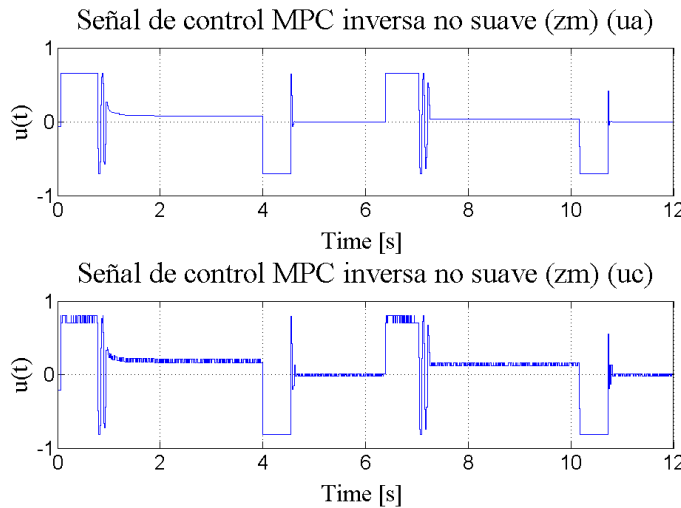


Figura 3.38: Señal de control MPC con compensación de *backlash* y zona muerta.

En la figura 3.41 se tiene la gráfica del *backlash*, sin embargo no es posible apreciar la diferencia entre usar la compensación de solo una no linealidad y usar la compensación para dos no linealidades combinadas.

Haciendo una comparación del error de seguimiento solo compensando el *backlash* y el error de seguimiento usando una compensación combinada de *backlash* y zona muerta en la figura 3.42. Hacer una compensación de las no linealidades considerándolas combinadas disminuye el error.

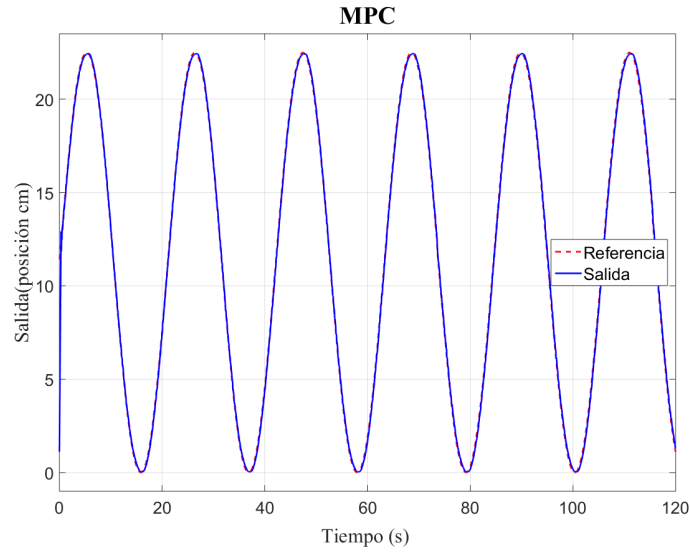


Figura 3.39: Respuesta a una entrada senoidal del MPC con compensación de no linealidades combinadas.

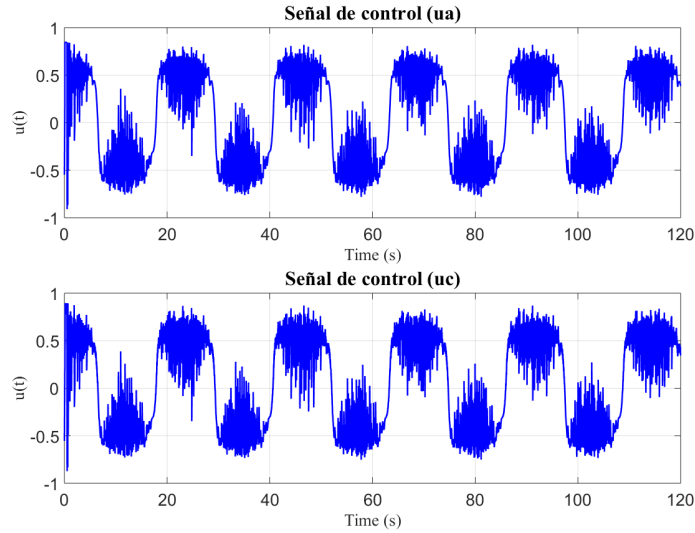


Figura 3.40: Señal de control MPC con compensación de no linealidades combinadas.

### 3.6.3. PID con *anti-windup* y compensación de *backlash*

Para posibilitar la comparación del controlador MPC con otro controlador lineal se desarrolló un PID con *anti-windup*.



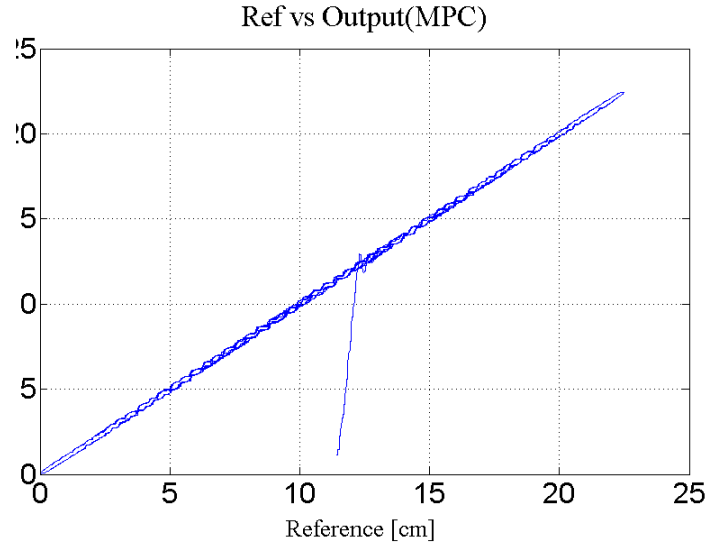


Figura 3.41: Referencia contra salida de la trayectoria senoidal MPC con compensación de no linealidades combinadas.

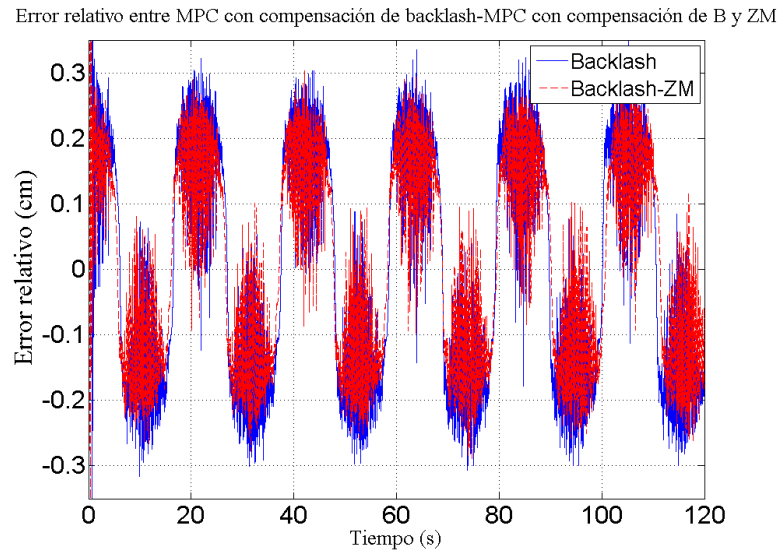


Figura 3.42: Comparación del error de seguimiento de compensación de *backlash* y compensación *backlash*-zona muerta combinados.

### Respuesta al escalón

Se somete el sistema a una entrada escalón usando el controlador PID con *anti-windup* en conjunto con el compensador de la no linealidad *backlash*, usando la inversa aproximada.

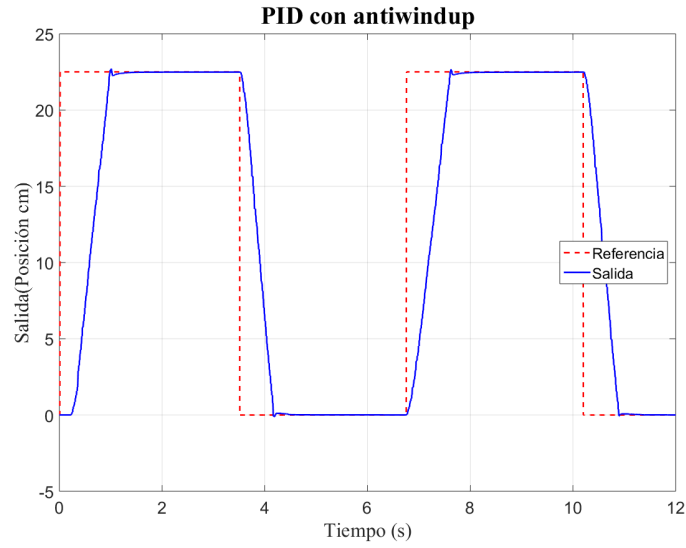


Figura 3.43: Respuesta al escalón del PID con *anti-windup* con compensación de *backlash*.

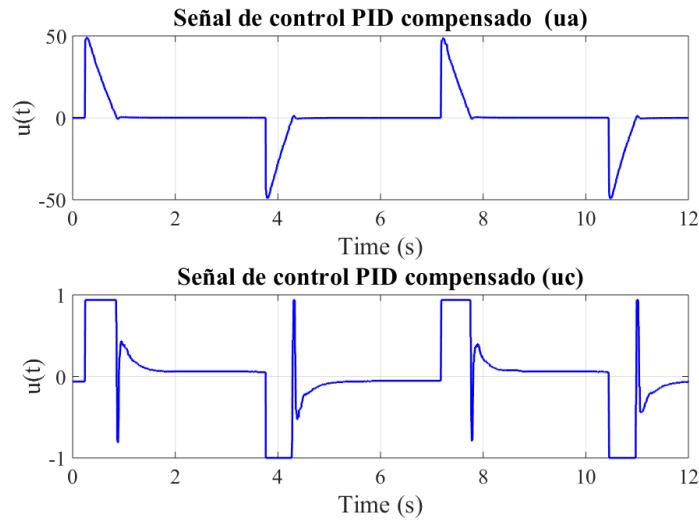


Figura 3.44: Señal de control PID con *anti-windup* con compensación de *backlash*.

Las figura 3.43 es la respuesta obtenida y la figura 3.44 es la señal de control a la salida de la ley control que entrega el controlador  $u_a$  y la señal después de la saturación  $u_c$ .

### Seguimiento trayectoria senoidal

Con la finalidad de comprobar la efectividad del controlador PID con *anti-windup* para el seguimiento de trayectorias, se excita el sistema con una entrada senoidal.

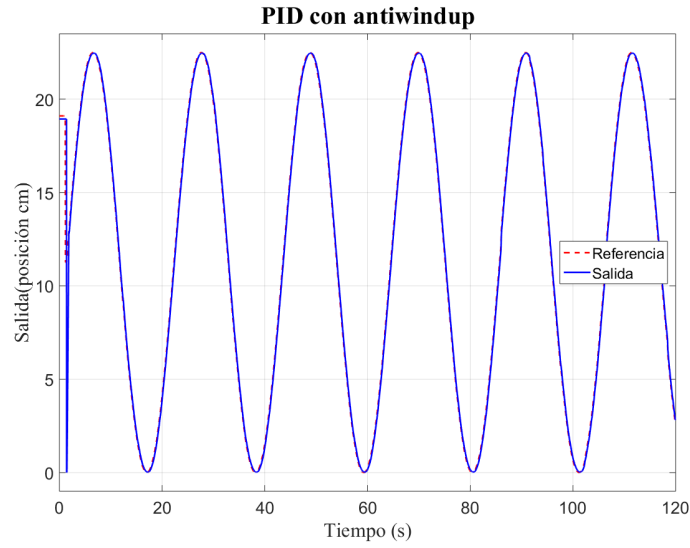


Figura 3.45: Respuesta a una entrada senoidal del PID con *anti-windup*.

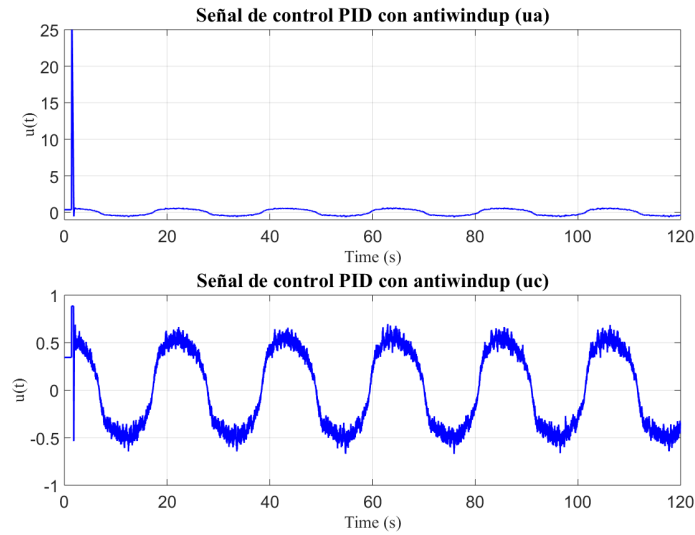


Figura 3.46: Señal de control del PID con *anti-windup* compensado mediante inversa aproximada.

La figura 3.45 es la salida del sistema cuando se somete a una entrada senoidal, se observa que ya no existen oscilaciones. La figura 3.46 ilustra la señal de control que corresponde a  $u_a$  y  $u_c$  del esquema de control del PID con *anti-windup* con compensación para *backlash*.

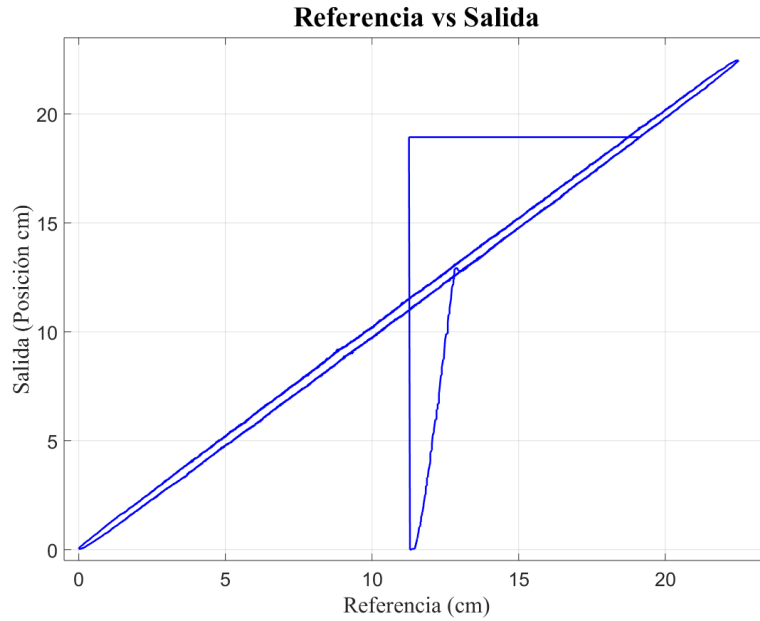


Figura 3.47: Referencia contra salida de la trayectoria senoidal PID con *anti-windup* compensado mediante inversa aproximada.

La figura 3.47 muestra una gráfica de entrada en el eje ordenado y la salida en el eje de las abscisas del plano, de esta manera se ilustra el tamaño de la banda muerta del *backlash*.

#### 3.6.4. PID con *anti-windup* y compensación de *backlash* y zona muerta

##### Respuesta al escalón

Las figuras 3.48, 3.49 son la salida y la señal de control a la salida de la ley control que entrega el controlador ( $u_a$ ) y la señal despues de la saturación  $u_c$ .

La salida del sistema en este caso es muy similar a la del caso en el que no se compensa la zona muerta, esto también sucede en cuando se usa el controlador MPC. La señal de control presenta *chattering* ya que la inversa de la zona muerta no es una función suave.

##### Seguimiento trayectoria senoidal

De la misma manera que en los experimentos anteriores en éste se usa una referencia senoidal para probar el seguimiento de trayectoria del controlador. La referencia es una señal senoidal con amplitud de 22.5 pico a pico y 0.5 Hz.

El efecto de la compensación inversa puede notarse en la señal de control  $u_c$  de la figura 3.51.

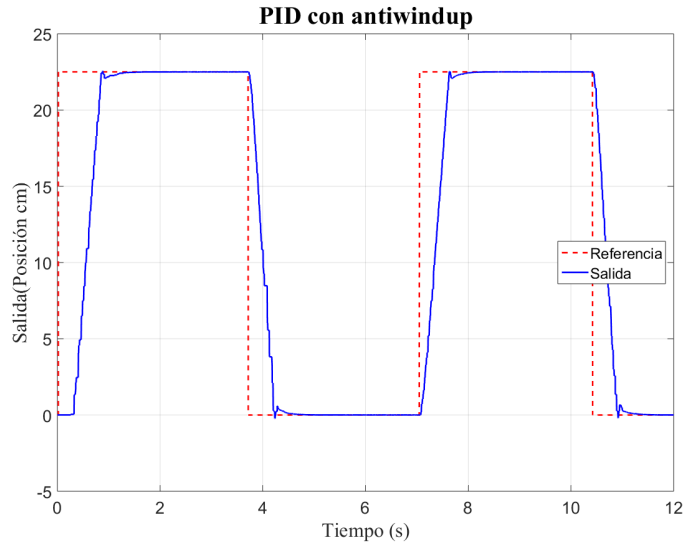


Figura 3.48: Respuesta al escalón del PID con *anti-windup* compensado para *backlash* y zona muerta.

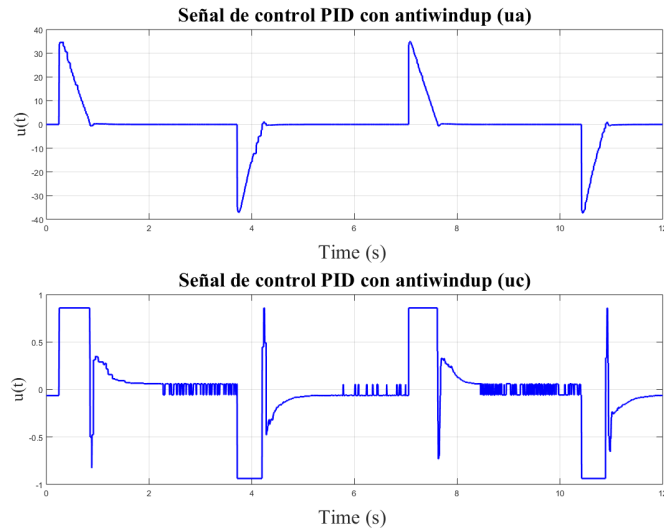


Figura 3.49: Señal de control PID con *anti-windup* compensado para *backlash* y zona muerta.

### 3.6.5. PID con *anti-windup* vs MPC

Un resultado importante de este trabajo de tesis es la comparación de dos metodologías de control usando la técnica de equivalencia en saturación para la compensación de no linealidades. Para ello se diseñó un controlador MPC y un PID con *anti-windup*. En esta sección se hará una comparación de los resultados presentados en las secciones anteriores para ambos

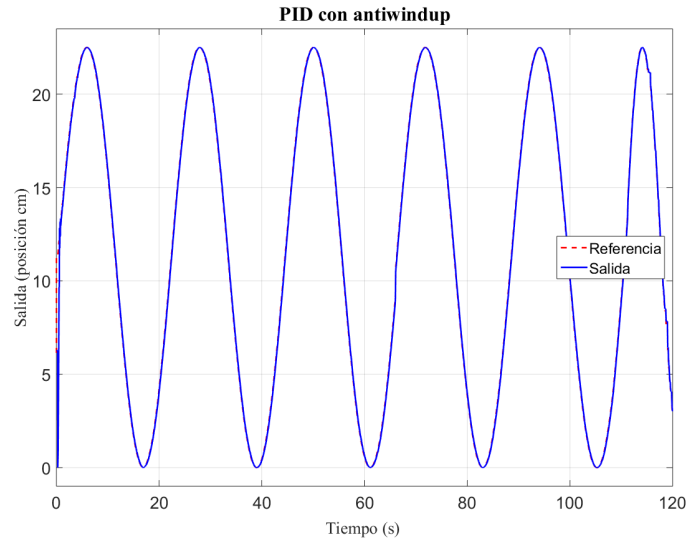


Figura 3.50: Respuesta a una entrada senoidal del PID con *anti-windup* compensado para *backlash* y zona muerta.

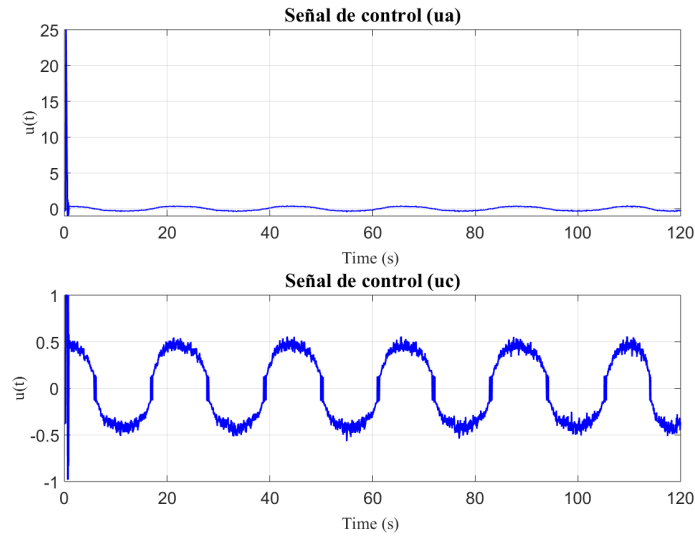


Figura 3.51: Señal de control PID con *anti-windup* compensado para *backlash* y zona muerta.

métodos.

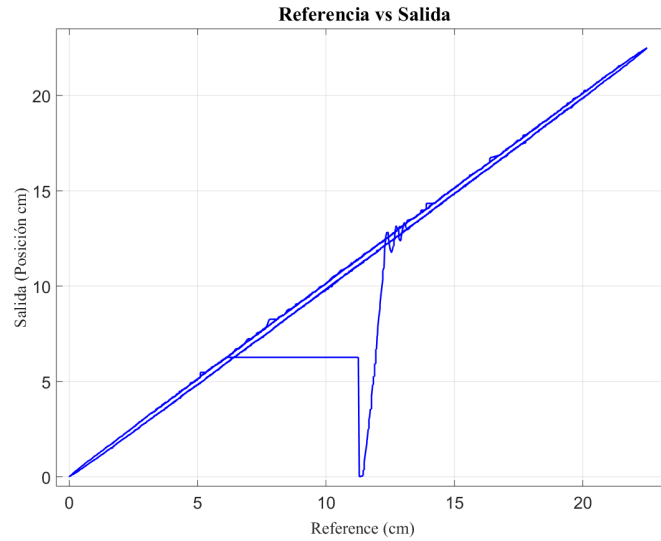


Figura 3.52: Referencia contra salida de la trayectoria senoidal PID con *anti-windup* compensado para *backlash* y zona muerta.

### 3.6.5.1. Compensación de *backlash*

#### Respuesta al escalón

Haciendo la comparación gráfica de la respuesta escalón de los dos controladores propuestos dada en la figura 3.53. Se observan diferencias notables, las cuales estan dadas numéricamente en la tabla 3.5.

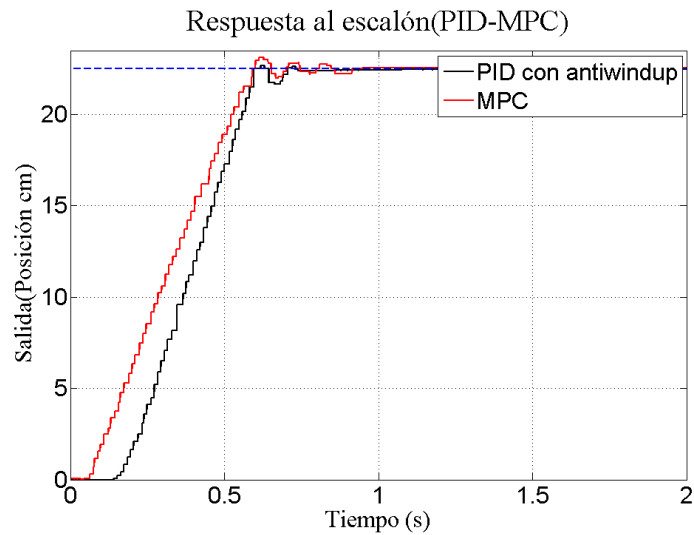


Figura 3.53: Respuesta escalón MPC-PID.

| Parámetros de desempeño   | MPC    | PID    |
|---------------------------|--------|--------|
| Tiempo de subida          | 0.602s | 0.607s |
| Tiempo de establecimiento | 0.95s  | 0.9s   |
| Sobreimpulso              | 0.027  | 0.008  |
| Error en estado estable   | 0.0022 | 0.0018 |

Tabla 3.5: Parámetros de desempeño entre MPC y PID.

De acuerdo con los parámetros medidos el coontrolador PID tuvo un mejor desempeño en tres de los cuatro parámetros considerados. Esto se debe a la sintonización, ya que el MPC además de los pesos usados depende también del horizonte de predicción y control elegidos.

### Seguimiento trayectoria senoidal

En cuestión del seguimiento a la entrada senoidal gráficamente se tiene el error de ambos controles en la figura 3.54.

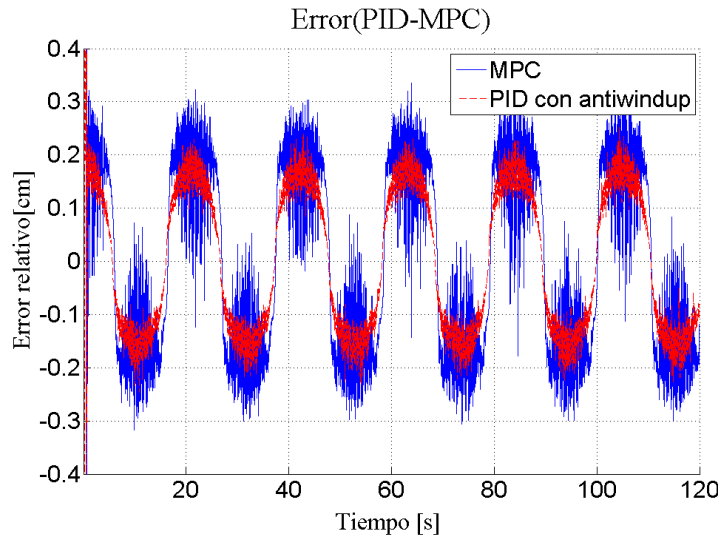


Figura 3.54: Comparación del error de seguimiento.

Se percibe que el error del controlador predictivo es mayor que el del controlador PID con *anti-windup*, esto se nota en menor medida en la respuesta al escalón. Esta diferencia se debe a que las variables en el MPC fueron sintonizadas de acuerdo a un horizonte de predicción y control propuestos, estos pudiesen ser mayores pero esto implica un costo computacional mayor.



### 3.6.5.2. Compensación de *backlash* y zona muerta

En esta sección se muestra una comparación entre MPC y PID con *anti-windup*, con compensación de dos no linealidades: el *backlash* y la zona muerta. Esta comparación se puede observar gráficamente en la figura 3.55.

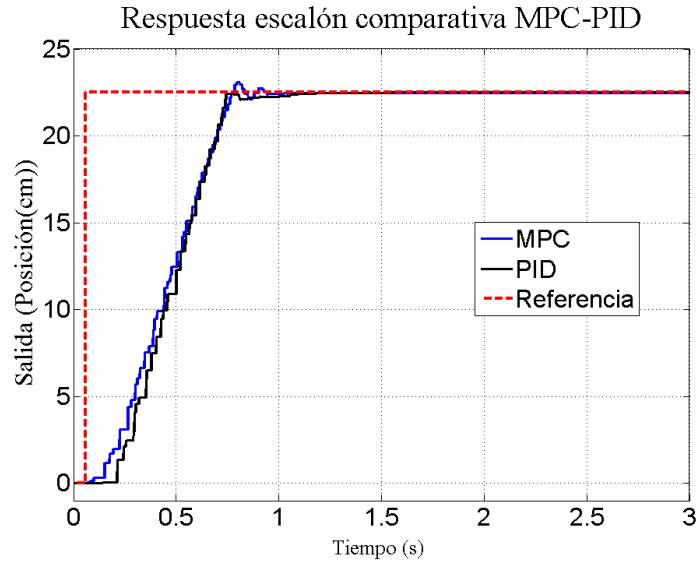


Figura 3.55: Compensación de la respuesta al escalón entre PID con *anti-windup* y MPC, ambos compensados de *backlash* y zona muerta.

Al igual que en el caso anterior se presenta en la tabla 3.6 los valores de algunos parámetros de desempeño importantes.

| Parámetros de desempeño   | MPC     | PID     |
|---------------------------|---------|---------|
| Tiempo de subida          | 0.612s  | 0.611s  |
| Tiempo de establecimiento | 0.8723s | 0.8214s |
| Sobreimpulso              | 0.0258  | 0.005   |
| Error en estado estable   | 0.0013  | 0.00017 |

Tabla 3.6: Parámetros de respuesta al escalón de MPC Y PID con *anti-windup* compensando *backlash* y zona muerta.

Incluir la zona muerta en la compensación de no linealidades disminuye el tiempo de establecimiento en ambos controladores, así como el error en estado estable. Sin embargo la diferencia entre la versión que únicamente considera el *backlash* en la compensación puede no ser considerable, sin embargo el agregar la inversa de la zona muerta en el algoritmo

no implica un costo computacional alto por lo cual tampoco representa un problema agregarlo.

### Seguimiento trayectoria senoidal

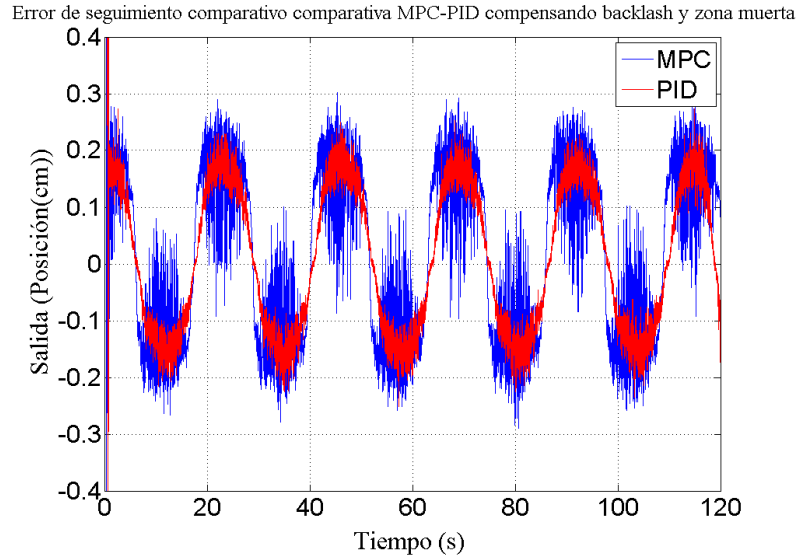


Figura 3.56: Compensación de la respuesta al escalón entre PID con *anti-windup* y MPC, ambos compensados de *backlash* y zona muerta.

Comparando el comportamiento del sistema a una entrada senoidal entre el controlador PID con *anti-windup* y el MPC como se muestra en la figura 3.56, al igual cuando se compensa solo el *backlash* como no linealidad el PID presenta un error de seguimiento menor. Las ganancias, matrices de peso, y horizontes de predicción utilizadas en estos experimentos son las mismos utilizados en el caso en que se compensa únicamente el *backlash*, por lo tanto se puede decir que esta diferencia se debe a la misma razón que en ese caso.

# Conclusiones

---

En este trabajo de tesis se realizó la validación experimental del teorema de equivalente en saturación para no linealidades, para compensar no linealidades. En conjunto con un controlador MPC, específicamente las no linealidades: *backlash* y zona muerta. También el uso de un PID con antiwindup y el equivalente en saturación para hacer un estudio comparativo entre ambos controladores. Se presentan resultados en simulación y experimentales.

Una parte importante del proceso de compensación del *backlash* es encontrar los parámetros, por ello se hizo la caracterización de estos a partir del procedimiento especificado en el capítulo 3. Durante el desarrollo se encontró que la caracterización arrojó como resultado un *backlash* asimétrico, esto se muestra en la figura 3.4, por lo cual fue necesario extender el equivalente en saturación al modelo asimétrico del *backlash* y, por lo tanto, el modelo de su inversa.

El modelo del *backlash* está basado en una función discontinua. Esto ocasiona que al cerrar el lazo aparezca un fenómeno indeseable al cual se le conoce como *chattering*, que se da en la señal de control y origina vibraciones en el sistema. Por lo anterior se propusieron dos alternativas para el modelado del *backlash*. La primera se le denomina inversa filtrada, que disminuyen el efecto del *chattering* de 0.26 a 0.12. Modelando la función inversa mediante una aproximación suave el *chattering* es eliminado por completo.

Al aplicar el esquema de control con la compensación de no linealidades y el MPC, se obtiene una respuesta sin oscilaciones, y con el uso de la inversa aproximada mediante una función continua se suprime el *chattering*. Sin embargo al realizar la prueba se encontró que existía otra no linealidad: la zona muerta. Este es un comportamiento no lineal muy común en motores eléctricos. La zona muerta no es tratada, entonces, como única no linealidad, si no que se considera en combinación con el *backlash*.

El esquema de control se modificó como se muestra en el capítulo 1 con ambas no linealidades compensadas, entonces la técnica del equivalente en saturación se aplica de igual manera. Como resultado de lo anterior el error en estado estable disminuye de 0.22 % a 0.13 % lo cual nos lleva a la conclusión que compensar la zona muerta no disminuye significativamente el error.

Para verificar el desempeño del controlador MPC se realizó una comparación con un controlador PID con antiwindup, ambos compensando el *backlash*, en principio, mediante el equivalente en saturación. En la tabla 3.5 se presentan los parámetros de desempeño de cada

uno de ellos en estado estable. Se concluye que el PID con antiwindup muestra un mejor comportamiento, Esto se puede ser debido a las incertidumbres en el modelo que se utiliza en el MPC así como la elección de horizontes de predicción y de control.

### 4.1. Trabajo futuro

Una vez completa esta tesis, quedan por discutir aspectos que no fueron revisados en la misma, y que podrían consistir en un trabajo posterior a la presente investigación:

- Estudiar métodos de estimación del *backlash* para mejorar la precisión de los mismos.
- Proponer y evaluar inversas suaves para la zona muerta de la misma manera que se hizo con el *backlash* para suprimir el *chattering* de la señal de control.
- Extender el estudio a distintos sistemas electromecánicos, para evaluar el desempeño de la técnica.
- Extender el estudio de la aplicación del equivalente en saturación para sistemas con el fenómeno no lineal de fricción estática (*stiction* en inglés).

# Referencias

- [1] I. Kolnik and G. Agranovich, “Backlash compensation for motion system with elastic transmission,” *Convention of Electrical & Electronics Engineers in Israel (IEEEI), 2012 IEEE 27th*, vol. 14, no. 5, pp. 1–5, 2012. (Citado en las pp. [1](#) y [6](#).)
- [2] D. K. Prasanga, E. Sariyildiz, and K. Ohnishi, “Compensation of backlash for geared drive systems and thrust wires used in teleoperation,” *IEEE Journal of Industry Applications*, vol. 4, no. 5, pp. 514–525, 2015. (Citado en la p. [1](#).)
- [3] J. Veres, G. Cserey, and G. Szederkenyi, “Bio-inspired backlash reduction of a low-cost robotic joint using closed-loop-commutated stepper motors,” *Robotica*, vol. 31, no. 5, pp. 789–796, 2013. (Citado en la p. [1](#).)
- [4] J. Dong and B. Mo, “The adaptive pid controller design for motor control system with backlash,” *2013 Fourth International Conference on Intelligent Control and Information Processing (ICICIP)*, vol. 38, no. 10, pp. 59–63, 2013. (Citado en la p. [1](#).)
- [5] M. Wang and X. Ren, “Control of cable actuated devices using smooth backlash inverse,” *Proceedings of the 2015 Chinese Intelligent Systems Conference*, vol. 2, no. 6, pp. 453–462, 2016. (Citado en la p. [1](#).)
- [6] G. Tao and P. V. Kokotovic, *Adaptive Control of Systems with Actuator and Sensor Nonlinearities*. John Wiley & Sons, Inc., 1996. (Citado en las pp. [1](#), [2](#), [5](#), [6](#) y [9](#).)
- [7] M. Nordin and P.-O. Gutman, “Controlling mechanical systems with backlash;a survey,” *Automatica*, vol. 38, no. 10, pp. 1633–1649, 2002. (Citado en la p. [1](#).)
- [8] M. C. Rodríguez-Liñán and W. P. Heath, “Backlash compensation for plants with saturating actuators,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 231, no. 6, pp. 471–480, 2017. (Citado en las pp. [2](#), [3](#), [16](#) y [20](#).)
- [9] M. C. Rodríguez-Liñán and W. P. Heath, “Controller structure for plants with combined saturation and deadzone or backlash,” *2012 IEEE International Conference on Control Applications*, vol. 14, no. 5, pp. 1394–1399, 2012. (Citado en la p. [2](#).)
- [10] H. Zabiri and Y. Samyudia, “A hybrid formulation and design of model predictive control for systems under actuator saturation and backlash,” *Journal of Process Control*, vol. 16, no. 7, pp. 693–709, 2006. (Citado en la p. [2](#).)
- [11] R. Dong, Y. Tan, K. Janschek, and X. Chen, “Non-smooth predictive control for mechanical transmission systems with backlash-like hysteresis,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 85, no. 4, pp. 2277–2295, 2016. (Citado en la p. [2](#).)

- [12] S. Ibriri, “Invariant-manifold approach to the stabilization of feedforward nonlinear systems having uncertain dead-zone inputs,” *2012 8th International Symposium on Mechatronics and its Applications*, vol. 31, no. 5, pp. 789–796, 2012. (Citado en la p. 2.)
- [13] W. Bessa, M. Dutra, and E. Kreuzer, “An adaptive fuzzy dead-zone compensation scheme and its application to electro-hydraulic systems,” *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 32, no. 5, pp. 1 – 7, 2010. (Citado en la p. 2.)
- [14] X. Wang and S. Wang, “Adaptive fuzzy robust control of pmsm with smooth inverse based dead-zone compensation,” *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 14, no. 2, pp. 378–388, 2016. (Citado en las pp. 2 y 3.)
- [15] A. Taware, G. Tao, and C. Teolis, “Compensation of backlash for geared drive systems and thrust wires used in teleoperation,” *Proceedings of the 2001 American Control Conference.*, vol. 3, no. 3, pp. 2456–2461, 2001. (Citado en la p. 2.)
- [16] J. Rubio and J. Pérez-Cruz, “Evolving intelligent system for the modelling of nonlinear systems with dead-zone input,” *Applied Soft Computing*, vol. 14, no. 5, pp. 289 – 304, 2014. (Citado en la p. 2.)
- [17] J. Maciejowski, *Predictive Control: With Constraints*. Prentice Hall, 2002. (Citado en las pp. 3 y 34.)
- [18] M. C. Rodríguez-Liñán and W. P. Heath, “MPC for plants subject to saturation and deadzone, backlash or stiction,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 45, no. 17, pp. 418–423, 2012. (Citado en las pp. 3, 17, 18, 19 y 40.)
- [19] J. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991. (Citado en las pp. 5, 13 y 14.)
- [20] L. Aguilar, Y. Orlov, J. Cadiou, and R. Merzouki, “NonlinearH-output regulation of a nonminimum phase servomechanism with backlash,” *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 129, no. 4, pp. 544–549, 2007. (Citado en las pp. 6 y 51.)
- [21] N. R. Cazárez-Castro, L. T. Aguilar, O. Castillo, and J. R. Castro, “Type-2 fuzzy load regulation of a servomechanism with backlash using only motor position measurements,” *International Conference on Fuzzy Systems*, vol. 3, no. 6, pp. 1–8, 2010. (Citado en la p. 6.)
- [22] N. D. Anh, T. N. C. Thuong, and N. T. Tien, “Adaptive controller design for mechanical transmission systems with backlash,” *AETA 2015: Recent Advances in Electrical Engineering and Related Sciences*, vol. 29, no. 2, pp. 497–508, 2015. (Citado en la p. 10.)
- [23] V. Agrawal, W. J. Peine, B. Yao, and S. Choi, “Control of cable actuated devices using smooth backlash inverse,” *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 46, no. 6, pp. 1074–1079, 2010. (Citado en las pp. 10 y 66.)

- [24] S. M. Yoon, W. H. Choi, and M. C. Lee, "Robust adaptive output control of uncertain nonlinear plants with unknown backlash nonlinearity," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 3, pp. 503–509, 2007. (Citado en la p. 12.)
- [25] G. Lai, Z. Liu, Y. Zhang, and C. L. P. Chen, "Adaptive fuzzy tracking control of nonlinear systems with asymmetric actuator backlash based on a new smooth inverse," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 46, no. 6, pp. 1250–1262, 2016. (Citado en la p. 12.)
- [26] S. M. Yoon, W. H. Choi, and M. C. Lee, "Backlash compensation by smooth backlash inverse for haptic master device using cable-conduit," *2014 14th International Conference on Control, Automation and Systems*, vol. 29, no. 2, pp. 127–132, 2014. (Citado en la p. 13.)
- [27] W. Levine, *Control System Applications*. CRC Press, 1999. (Citado en la p. 15.)
- [28] D. Jolevski and O. Bego, "Model predictive control of gantry-bridge crane with anti-sway algorithm," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 29, no. 2, pp. 827–834, 2015. (Citado en la p. 16.)
- [29] H. Khalil, *Nonlinear Systems*. Pearson Education, 1992. (Citado en la p. 17.)
- [30] J. B. Rawlings and D. Q. Mayne, *Model predictive control: Theory and design*. Nob Hill Pub, 2009. (Citado en la p. 25.)
- [31] J. Richalet, A. Rault, J. Testud, and J. Paponl, "Model predictive heuristic control," *Automatica*, vol. 14, no. 5, pp. 413 – 428, 1978. (Citado en la p. 25.)
- [32] C. R. Cutler and B. L. Ramaker, "Dynamic matrix control:a computer control algorithm," *Joint Automatic Control Conference*, vol. 17, no. 2, pp. 335–348, 1980. (Citado en la p. 25.)
- [33] C. Greco, G. Menga, E. Mosca, and G. Zappa, "Performance improvements of self-tuning controllers by multistep horizons: The musmar approach," *Automatica*, vol. 20, no. 5, pp. 681 – 699, 1984. (Citado en la p. 26.)
- [34] J. Richalet, S. A. E. Ata-Doss, C. Arber, H. Kuntze, A. Jacubasch, and W. Schill, "Predictive functional control - application to fast and accurate robots," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 20, no. 5, pp. 251 – 258, 1987. (Citado en la p. 26.)
- [35] D. Clarke, C. Mohtadi, and P. Tuffs, "Generalized predictive control part i. the basic algorithm," *Automatica*, vol. 23, no. 2, pp. 335–348, 1987. (Citado en la p. 26.)
- [36] L. Wang, *Model predictive control system design and implementation using MATLAB*. Springer Science, 2009. (Citado en la p. 27.)
- [37] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*. John Wiley & Sons, 2013. (Citado en la p. 34.)

- [38] C. E. Garcia, D. M. Prett, and M. Morari, “Model predictive control: Theory and practice ;a survey,” *Automatica*, vol. 25, no. 3, pp. 335–348, 1989. (Citado en la p. 37.)
- [39] N. Ricker, “Adaptive optimal control: The thinking mans GPC,” *Automatica*, vol. 29, no. 3, pp. 798 – 800, 1993. (Citado en la p. 37.)
- [40] J. B. Rawlings and K. R. Muske, “The stability of constrained receding horizon control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, no. 10, pp. 1512–1516, 1993. (Citado en las pp. 37 y 38.)
- [41] H. Zabiri and Y. Samyudia, “MPC design for constrained multivariable systems under actuator backlash,” *7th IFAC Symposium on Dynamics and Control of Process Systems 2004*, vol. 37, no. 9, pp. 643–648, 2004. (Citado en la p. 40.)
- [42] K. Astrom and R. Murray, *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton University Press, 1999. (Citado en la p. 41.)
- [43] J. Vorosr, “Modeling and identification of systems with backlash,” *Automatica*, vol. 46, no. 2, pp. 369 – 374, 2010. (Citado en la p. 51.)
- [44] B. Mansouri, J. Piaton, and A. Guyamier, “The backlash gap size estimation for electromechanical actuator in an operational behavior,” *Third European Conference of the Prognostics and Health Management Society 2016*, vol. 7, no. 30, pp. 306–323, 2016. (Citado en la p. 51.)